Introduction de l'Histoire des Mathématiques du 17ème siècle en classes de 4ème et 3ème*

Maryvonne HALLEZ
Professeur de Mathématiques
Collège P. Bert - Paris 14ème
I.R.E.M. de Paris-Sud

I- Démarche de l'Enseignant de Mathématiques

Une pratique d'une dizaine d'années de "méthodes actives", d'utilisation de "problèmes ouverts", de travail en groupe m'apporta la conviction qu'il est possible de faire des mathématiques à l'école par plaisir. Chaque année, à tous les niveaux où j'enseignais, une question revenait dans la bouche des élèves: "Les maths à quoi ça sert ?" Je leur donnais les réponses habituelles à cette question: elles sont utiles dans la vie, elles sont une discipline de service pour les sciences physiques, les "sciences sociales", elles forment l'esprit, apportent la rigueur, apprennent à raisonner. Ces réponses, aussi rationnelles fussent-elles, ne semblaient convaincre que celles ou ceux qui l'étaient déjà. Quant à parler de la beauté des mathématiques et du plaisir que l'on peut prendre à les pratiquer cela ne pouvait avoir un sens que pour les élèves qui avaient déjà cette expérience. Pour mieux répondre à cette fameuse question, je fis des essais d'introduction d'histoire des mathématiques sous la forme de notices historiques, d'anecdotes, de citations percutantes comme *"les mathématiques c'est la liberté"* de Georg CANTOR cité dans le très riche livre publié par François LE LIONNAIS (1), *"a mathematician like a painter or a poet is a maker of patterns which must be beautiful"* du mathématicien anglais HARDY (2). La fenêtre s'ouvrait sur les champs prometteurs de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques. Le merveilleux livre de Georges POLYA *"How to solve it"* (3), mine de problèmes, de clés de résolutions, de solutions et d'ouvertures sur l'histoire des mathématiques me permit de mieux faire découvrir aux élèves les joies de l'heuristique. J'avais pendant ces dix ans

* élèves de 13-15 ans.

donné la priorité au côté bouillonnant et désordonné des recherches d'élèves, avec le programme comme fil directeur bien entendu. La rigueur, la beauté formelle d'un enseignement où les théorèmes s'enchaînaient impitoyablement aux axiomes et définitions, ou les uns aux autres, étaient quelque peu passées au second plan. Il était temps dans mon enseignement de redonner aux mathématiques leur unité, ce que l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe me permet.

Enseigner dans cette optique conduit à mieux gérer les tâtonnements et les erreurs des élèves en les valorisant par des exemples de tâtonnements, de lenteur dans l'élaboration du savoir (histoire des négatifs, histoire des complexes, ...). Et l'histoire de ces notions fait saisir le gain obtenu par la formalisation. Dans l'enseignement aussi, POINCARÉ peut être un de nos maîtres quand il conseille de "faire passer l'enfant par le chemin de ses pères plus vite mais sans bousculer les obstacles" [4].

La figure des mathématiques avait ainsi changé pour moi et je rencontrai les professeurs du groupe M.A.T.H. de l'IREM de Paris VII, eux aussi tombés sous le charme et le ravissement de la lecture des textes mathématiques. Le travail de ce groupe prend en compte la nécessité d'un apprentissage conjoint des mathématiques et de leur histoire et la nécessité qui en découle d'une formation continuée en tant que professeur. Les recherches du groupe ont pour objet des textes historiques de mathématiques à proposer aux élèves comme sources de réflexion et de problèmes à résoudre. L'inscription du texte dans une époque précise montre bien les mathématiques sous son aspect "déroulement graduel d'une symphonie où le Zeitgeist, à la fois compositeur et chef d'orchestre tiendrait le bâton" [5]. Le travail du groupe M.A.T.H. permet de déchiffrer les partitions subtiles de cette gigantesque symphonie.

II- Travail pluridisciplinaire en quatrième (13-14 ans)

Le collège-lycée où j'enseigne est situé rue HUYGENS. Ce Christiaan HUYGENS semblait fort méconnu de la population fréquentant ces établissements. J'eus donc l'idée de faire sentir à des élèves le bouillonnement scientifique de l'époque de HUYGENS. Une collègue de français, une de dessin et moi-même souhaitions faire équipe pédagogique pour une classe de quatrième (élèves de 14 ans environ) dont certains, que le professeur de dessin et moi-même avions eu l'année précédente, étaient "en difficulté scolaire". Pour l'année 1985-86, nous avions donc proposé un "Projet d'Action Educative" (P.A.E.) pour lequel se regroupent des professeurs de disciplines différentes d'une même classe autour d'un thème. Ce P.A.E. fut intitulé, après réunion des professeurs de toutes les disciplines: **"Préoccupations du public éclairé en France en 1672"**. Cette année-là, 1672, Christiaan HUYGENS vivait à Paris en personnage fort important; Wilhelm Gottfried LEIBNIZ faisait partie d'une mission diplomatique à la cour de

Louis XIV qui s'était installée cette année-là à Versailles avec de somptueuses fêtes; la France et la Hollande sont en guerre: 1672 est l'année du passage du Rhin, occasion de chansons comme "Auprès de ma blonde"; MOLIERE joue *"Les Femmes savantes"*; la gazette du *Mercure Galant* est fondée; VERMEER DE DELFT peint un de ses derniers tableaux *"Allégorie de la foi"* et fait un voyage à la Haye. Toutes les conditions étaient donc réunies pour un réel travail transdisciplinaire. L'accent porté sur les moyens de communication des idées nous conduisit à la rédaction d'une gazette à l'image de celles de l'époque; nous l'avons intitulée le *Mercure Savant* par analogie avec le *Mercure Galant*. Les élèves vendirent cette gazette en fin d'année. Nous avons organisé un voyage en Hollande avec l'aide précieuse et inespérée d'un professeur du Lycée HUYGENS de Voorburg, situé près de La Haye; HUYGENS résida à Voorburg dans une maison transformée en musée maintenant où nous pûmes travailler et où nous fûmes chaleureusement accueillis. Durant ce voyage, nous avons visité le musée Boerhave de Leyde où les élèves eurent à répondre à des questions au sujet du planétarium de HUYGENS dont il sera question de manière détaillée plus loin. Nous sommes aussi allés au Rijksmuseum d'Amsterdam et à Delft. Les disciplines concernées ont été: le français, le latin, l'histoire, la géographie, les sciences naturelles, les sciences physiques, la musique, le dessin et les mathématiques. Au dernier trimestre, professeurs et élèves firent des heures supplémentaires pour préparer une grande exposition. Les titres des panneaux non mathématiques de l'exposition sont:

- Le règne de Louis XIV	
- Le siècle de Louis XIV	Un urbanisme de prestige
	Architecture
	Constructions et monuments
- Paris au 17ème siècle	Naissance de l'Observatoire
	Fontaines et porteur d'eau
	La Bièvre et les ruisseaux parisiens
	La Seine et ses affluents à Paris
	Le faubourg Montmartre
- Londres au 17ème siècle	The great fire
- Les carrières au 17ème siècle	La profession de carrier
	Les carrières d'argile
	Extraction du calcaire
	Extraction du gypse

- Les idées folles sur l'origine des fossiles
- Théophraste RENAUDOT et sa gazette
- Le théâtre au 17ème siècle
- La gravure au 17ème siècle
- REMBRANDT au 17ème siècle
- VERMEER

III- Une approche de l'histoire des mathématiques au 17ème siècle en classe de quatrième (13-14 ans)

Les élèves se sont intéressés aux grandes figures de l'époque: René DESCARTES (1596-1650), Blaise PASCAL (1623-1662), Wilhelm Gottfried LEIBNIZ (1646-1716), Pierre DE FERMAT (1601-1665), Isaac NEWTON (1642-1727). Pour chacun, un panneau fut réalisé pour l'exposition. Le premier panneau a pour titre: *Les mathématiques au 17ème siècle* avec ce texte rédigé par un groupe d'élèves:

> Les disciplines classiques se développent. D'autres nouvelles, calcul intégral, analyse, probabilités sont créées. Gérard DESARGUES (1593-1662) invente la géométrie projective qui rend compte de la notion de perspective en imposant aux droites de se couper à l'infini.
>
> Blaise PASCAL calcule la longueur d'une cycloïde, fonde le calcul des probabilités lors d'une controverse avec un célèbre joueur. Pierre DE FERMAT étudie la propagation de la lumière, et surtout avec succès l'arithmétique. Etudiant les problèmes de DIOPHANTE, il affirme connaître une démonstration prouvant que la somme de deux puissances n-ième d'entiers non nuls n'en est pas une quand n est supérieur à 2. Jamais la démonstration ne fut retrouvée.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ mais $x^3 + y^3 = z^3$ impossible pour x, y, z entiers.

Deux panneaux furent consacrés à Christiaan HUYGENS et à son horloge à pendule qui utilise des formes cycloïdales.

La cycloïde fut l'objet d'une construction point par point et tout un panneau fut réalisé à propos de cette "Hélène des géométres" (6) et des concours organisés à son propos. Les coniques étudiées par HUYGENS furent construites point par point. L'aspect esthétique du dessin résultant d'une construction mit les élèves en face de la beauté des mathématiques.

Pour LEIBNIZ, géomètre autodidacte, nous lûmes les deux premières pages de *l'Origine du càlcul différentiel* dans une traduction de Régine SZEFTEL-ZYLBERBAUM (cf. pages suivantes) avec exercices sur les carrés, les cubes, les puissances quatrièmes d'entiers consécutifs. Ce texte suscita une demande de démonstration qui fut effectuée par les élèves.

Histoire et origine du calcul différentiel

Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions fameuses, surtout si leur découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée. En effet, cela permet à l'histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire; de plus, c'est utile au développement de l'art d'inventer, car la méthode en est connue sur des exemples remarquables.

Parmi les découvertes très célèbres de ce temps se trouve un nouveau genre d'analyse mathématique connu sous le nom de "calcul différentiel"; or, bien qu'on ait déjà suffisamment exposé sa structure, en revanche son origine et le procédé employé pour le découvrir ne sont pas encore publics. Ce calcul a été inventé il y a environ quarante ans par l'Auteur, et une version concentrée en a été publiée neuf ans plus tard, il y a environ trente ans; à la suite de cette parution, l'Auteur a été célébré par des mémoires, mais surtout par l'usage <du calcul>, puisque de nombreuses découvertes remarquables sont dues à son aide, et sont mises en lumière en particulier dans les "Actes des Erudits de Leipzig", puis dans les "Commentaires" publiés de l'Académie Royale des Sciences (1): la Mathématique semble ainsi trouver un aspect nouveau. ...

L'auteur de cette nouvelle Analyse, dans la fleur de sa jeunesse, avait joint aux études d'histoire et de jurisprudence des réflexions plus élevées pour lesquelles il avait un goût inné et, entre autres, il prenait plaisir aux propriétés et combinaisons des nombres: il avait même publié un opuscule sur "l'Art Combinatoire" en 1666 - plus tard réimprimé sans l'avis de l'auteur -. Et encore tout jeune, alors tourné vers la logique, il avait remarqué que l'analyse ultime des vérités qui dépendent de la raison se réduit à deux choses: les définitions et les vérités identiques, les seules parmi les vérités nécessaires, à être vraiment primitives et indémontrables; comme on lui objectait que les vérités identiques ne sont que des bagatelles inutiles, il donnait la preuve du contraire sur des exemples.

Par la suite, il observait que, à partir de ceci: "A = A" ou à partir de son équivalent "A - A = 0", (comme il est possible de le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir:

$$A \underbrace{- A + B}_{+L} \underbrace{- B + C}_{+M} \underbrace{- C + D}_{+N} \underbrace{- D + E}_{+P} - E = 0$$

Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences de deux quantités consécutives B - A , C - B , D - C , E - D , sont appelés L, M, N, P, il s'ensuit alors que:

$$A + L + M + N + P - E = 0$$

ou

$$L + M + N + P = E - A$$

c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel qu'en soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Si, par exemple, à la place de: A, B, C, D, E, F, on prend des nombres carrés: 0, 1, 4, 9, 16, 25, on découvrira, en fait de différences les nombres impairs: 1, 3, 5, 7, 9.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \end{array}$$

De manière évidente, il y aura:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25$$

et $3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 1 = 24$

et l'on obtiendra le même résultat, quel que soit le nombre de termes ou de différences et quels que soient les termes choisis comme extrémités.

Prenant plaisir à une découverte aussi facile et agréable, notre jeune homme s'essayait à différentes séries numériques, et parvenait même à des différences secondes (ou différences de différences) et à des différences troisièmes (ou différences entre différences de différences) et ainsi de suite.

De cette manière, il observait que s'annulent les différences secondes des nombres entiers naturels (c'est-à-dire des nombres pris dans l'ordre à partir de zéro), que s'annulent les différences tierces des carrés obtenus à partir des nombres naturels, que s'annulent les différences quatrièmes des cubes, les différences cinquièmes des bicarrés, les différences sixièmes des nombres élevés à la puissance 5 et ainsi de suite; et il observait que la différence première des nombres entiers naturels était constante et égale à 1, que la différence seconde des carrés était égale à 1 x 2 = 2 , que la différence troisième des cubes était égale à 1 x 2 x 3 = 6 , la différence quatrième des bicarrés à 1 x 2 x 3 x 4 = 24, la différence cinquième des nombres élevés à la puissance 5 égale à 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120, et ainsi de suite; observations que d'autres pouvaient faire depuis quelques temps, mais, pour l'auteur, elles étaient neuves et invitaient au progrès par leur agréable facilité (1).

Cependant, il réfléchissait surtout à des nombres qu'il appelait "combinatoires", grâce auxquels on connaît cette table:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70,	126
1	6	21	56,	126,	252
1	7	28	84,	210,	462

IV- Expérience en classe de troisième (14-15 ans)

Pour l'année 1986-87, je me battis pour garder mes "poussins". La classe de troisième fut composée de dix-neuf élèves qui avaient participé au P.A.E. HUYGENS et sept redoublants. L'intérêt pour les recherches historiques en mathématiques n'avait pas faibli et les ex-quatrième ont pu faire passer leur enthousiasme à quatre des redoublants. Cet intérêt se traduisit par des études courtes ou des dossiers effectués spontanément en dehors des heures de cours sur le nombre, les géométries euclidienne et non euclidienne, les mathématiques grecques, les *Eléments de Géométrie* d'ARNAULD, et par un accueil favorable aux textes historiques que je leur ai proposés. Lors d'une séance de travail du groupe M.A.T.H. à l'IREM de Paris VII en septembre 1986, Jean-Luc VERLEY proposa un travail sur la *Description Planetarium* de HUYGENS. L'étude de ce texte me parut convenir idéalement à mes élèves de troisième qui avaient vu le dit planétarium l'année précédente.

A) Les objectifs

Ils étaient de trois sortes:

-a- présenter un outil mathématique inconnu des élèves: la fraction continue, sa pratique, son utilité. Ce travail permettait en corollaire de les familiariser avec les notions d'approximation et d'encadrement d'un réel et de réviser les théorèmes d'algèbre de compatibilité de l'égalité et de l'addition, de l'égalité et de la multiplication, la relation d'ordre, les proportions, le calcul dans l'ensemble des rationnels.

-b- montrer que la construction de machines est une des composantes de l'activité mathématique, ce qui apparaît très clairement au 17ème siècle et a quelque peu disparu au 20ème siècle ! Ce texte illustre le va-et-vient entre pratique et théorie, précision des mesures et avancement de la science.

-c- montrer la vie d'une communauté scientifique où les échanges de lettres pouvaient être riches et fécondes. HUYGENS s'intéressait aux mathématiques, à la physique, à la biologie, aux lettres, au dessin, à la musique.

B) Le contexte historique

1.- *Le climat de l'époque*

Il fut évoqué avec les élèves volontaires (ils le furent tous) en une heure en dehors du temps scolaire: les vieilles idées sur la terre centre du monde disparaissent. Les lunettes de plus en plus perfectionnées donnent un formidable essor à "l'astronomie d'observation". GALILÉE a publié son *Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde* en 1632. Les représentations des systèmes du monde de PTOLÉMÉE, Tycho BRAHE et COPERNIC données dans le tome II de l'*Histoire Générale des Sciences* de TATON sont fort éclairantes (fig. 1, 2, 3).

Fig. 1 - Système de PTOLÉMÉE

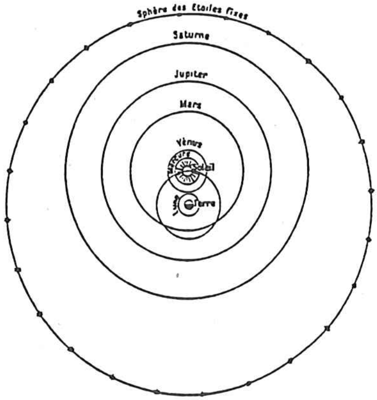
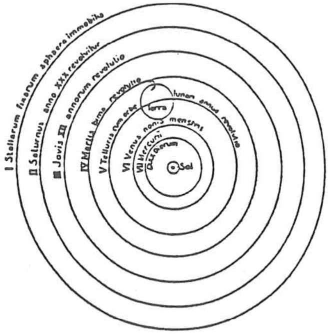


Fig. 2 - Système de Tycho BRAHÉ

Fig. 3 - Système de COPERNIC



La description des orbes célestes de PTOLÉMÉE est abandonnée, mais depuis peu. "Tycho BRAHE observateur hors pair et passionné invente le modèle compromis surprenant: la terre est au centre, la lune et le soleil tournent autour d'elle, le reste des planètes tourne autour du soleil. Une lecture fondamentaliste de la bible interdisait la théorie de COPERNIC" (7).

Le système de COPERNIC sera majoritairement accepté. "L'astronomie copernicienne n'apporte pas seulement un nouvel arrangement plus économique des "cercles" mais une nouvelle image du monde" (8); KÉPLER (1571-1630) pensa en première hypothèse que la terre décrivait autour du soleil un cercle "excentré", ce qui était compatible avec les observations. Ses recherches sur Mars lui firent ensuite opter pour une orbite elliptique aplatie proche du cercle. Sa loi des aires infirmait l'uniformité du mouvement, le rayon vecteur qui joint une planète au soleil balaie des aires égales en des temps égaux. KÉPLER publia son hypothèse en 1609, mais la démonstration aux yeux de la communauté scientifique ne fut faite qu'en 1680 par NEWTON avec sa théorie de la gravitation.

La science "devient à la mode" après le retentissement des travaux de DESCARTES, PASCAL, GALILÉE, KÉPLER, ... Et, comme il est dit à propos de la portée du canon dans les *Actes du Colloque de Montpellier* "Dès la fin du 16ème siècle et au début du 17ème siècle une nouvelle "race" de savants est née, qui acceptent de s'intéresser aux nombreux problèmes techniques" (9). Christiaan HUYGENS, comme nous l'allons voir, est un bon représentant de cette nouvelle "race".

Comment COLBERT eût-il résisté à la tentation de mettre la main sur ce nouveau domaine ? La haute société du temps de Louis XIV n'interposait point de barrière entre les sciences et les lettres et s'exaltait sur les découvertes de HUYGENS, ROEMER ou de CASSINI après avoir discuté sur Tartuffe et sur SPINOZA. COLBERT constitua l'Académie des Sciences définitivement en 1666. Ses premiers membres comptèrent entre autres HUYGENS, ROBERVAL, PICARD, Claude PERRAULT, ROEMER (frère de Charles), MARIOTTE, ...

Olaf ROEMER, jeune paysan de 27 ans, né en 1644 est enlevé de Copenhague par l'abbé PICARD qui le fait nommer professeur d'astronomie du dauphin, futur Louis XV; il le fait aussi élire à l'Académie des Sciences et loger à l'observatoire. Sitôt arrivé à Paris, Olaf ROEMER se signale par une activité débordante "se distrayant de ses travaux astronomiques en construisant des planétaires" (10). La grande découverte de ROEMER fut la vitesse du rayon lumineux qu'il évalua à 308 000 km/sec. Les machines planétaires de ROEMER furent expliquées au Roi par CASSINI le 5 décembre 1681. Ces détails sont nécessaires pour comprendre les lettres de HUYGENS à propos de son propre planétaire.

2.- *Le séjour à Paris de HUYGENS*

Deux élèves volontaires firent un petit exposé en classe sur cette question. Un élève fit le résumé suivant de la vie de Huygens: "Christiaan HUYGENS est un savant hollandais né le 14 avril 1629 et mort le 8 juillet 1695 à la Haye; il est le fils de Constantin HUYGENS et de Suzanne VAN BAERLE, originaire du Brahant du Nord. La famille entière eut un grand rôle dans la vie politique au 16ème et du 17ème siècle. Christiaan fit les même études que son grand-père, du même nom, à l'Université. Il possédait comme écrivain le secret d'être à la fois concis et très clair."

HUYGENS apparaît comme un mathématicien et un physicien de premier ordre en même temps qu'un organisateur de la recherche scientifique. Par l'entremise de COLBERT, la France offrit honneur, pensions et titres de 1666 à 1681 au savant hollandais nommé membre de l'Académie Royal des Sciences. Il résida à Paris et travailla à l'observatoire dès sa construction en 1672.

Entre 1670 et 1680, il écrivit une description détaillée et précise de la construction d'un automate planétaire donnant une représentation des positions relatives et des mouvements respectifs des planètes. Cet écrit fut rendu public après sa mort et publié en 1703. L'automate fut réalisé en 1682 par Johannes VAN CEULEN à la Haye après que, HUYGENS, malade s'en fut retourné en son pays. C'est celui que nous vîmes au Musée Boerhave de Leyde l'an dernier.

3.- *L'expérience*

Elle se déroula sur quatre séances:
Durant la première séance d'une heure, vingt minutes furent consacrées aux révisions d'arithmétique. Puis la classe fut divisée en cinq groupes. A l'un d'entre eux seulement, pour gagner du temps, un travail de documentation fut demandé. Par la suite, les élèves de ce groupe furent prioritairement envoyés au tableau pour rattraper le retard pris par rapport aux autres groupes quant à la maîtrise du calcul dans l'ensemble des rationnels. Ce groupe eut à lire l'extrait suivant du texte et à répondre aux questions qui le suivent.

Extrait du texte de Huygens Descriptio Planetarium P. 326

"Le mouvement annuel de Saturne je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de RICCIOLI est dit avoir la valeur 12° 13' 34" 18". Celui de la Terre, que RICCIOLI appelle celui du Soleil, est de 359° 45' 40" 31". Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport $\boxed{}$ (11). Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit la révolution autour du Soleil."

Informations
12° 13' 34" 18" se lit 12 degrés, 13 minutes, 34 secondes 18 tierces.

Questions 60 tierces = 1 seconde
1/ Calculer le rapport dont il est question dans le texte.
2/ Analyser ce texte et aller chercher au centre de documentation de l'établissement les informations qui vous manquent pour la compréhension de ce texte.
3/ Devinette: Qui peut avoir écrit ce texte ? A quelle époque ?

Les cinq autres groupes reçurent cet autre extrait avec encore un encadré blanc pour leur réponse et durent répondre aux questions qui le suivent:

Pour trouver des nombres plus petits qui expriment approximativement le rapport $\frac{77708431}{2640858}$, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit avec le reste de la première division et ensuite le reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve que la première division donne $\boxed{}$ (11).

Questions

1/ Donner un exemple d'un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1.
Donner ensuite l'écriture rationnelle du "nombre plus la fraction" choisie.
2/ Donner un exemple d'un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 (autrement dit dont le dénominateur est de nouveau un nombre plus une fraction à numérateur 1).
3/ Ecriver l'égalité fondamentale de la division euclidienne de 77708431 par 2640858 .

4/ Sans effectuer d'opération diviser les deux nombres de cette égalité (du 3) par 2640858 .
5/ Donner l'égalité fondamentale de la division de 2640858 par le reste de la première division.
6/ Sans effectuer d'opération diviser les deux membres de l'égalité du 5/ par le reste de la première division r_1.
7/ On appelle r_2 le reste de la division effectuée en 5/; donner le quotient entier r_1 par r_2.
8/ On pose a = 77708431 ; b = 2640858 , exprimer

a) $\frac{a}{b}$ en fonction de r_1

b) $\frac{b}{r_1}$ en fonction de r_2

c) $\frac{r_1}{b}$ en fonction de r_2

9/ Relire le texte et essayer de remplir le rectangle blanc.

La deuxième séance, au cours suivant, comporta le compte rendu du premier groupe, la présentation du travail d'un autre groupe, volontaire pour l'exposer, et la fin des exercices.

Durant la troisième séance de vingt minutes la semaine suivante, nous lûmes le texte suivant qui englobait les deux premiers extraits déjà connus des élèves puis une lettre du 27 août 1682 adressée à COLBERT par HUYGENS.

Extrait de "*Descriptio Planetarium*" de Christiaan HUYGENS

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière ſuivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète ſous l'écliptique [29]) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre ſont conſignés dans les tables aſtronomiques, en réduiſant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou ſoixantièmes parties de ſecondes. Comme les nombres ainſi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits ſimultanément dans leurs orbites par la planète conſidérée et par la terre, il s'enſuit que les périodes de l'une et de l'autre ſont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc auſſi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, ſavoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée ſur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt ſon orbite entière, puiſque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correſpond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la question se réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne soient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fournisse un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la chose plus claire par un exemple. Supposons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et est elle-même montée sur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de Riccioli — est dit avoir la valeur $12^\circ 13' 34'' 18'''$ [30]). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de $359^\circ 45' 40'' 31'''$ [31]). Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640358 : 77708431 [32]). Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement possible, ce même rapport au nombre des dents de sa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve que la première division donne

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots \text{ etc.}}}}}}} \quad [33])$$

c. à. d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur est composé de la même manière; et ainsi de suite. Poursuivant ce calcul aussi longtemps que possible, on parvient enfin par la division à un reste 1.

Or, lorsqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la série, p.e. ici la fraction $\frac{1}{3}$ [33]) et celles qui la suivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, sera voisin de celui du plus petit nombre donné au plus grand; et la différence sera si faible qu'il serait impossible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction est aisé; en effet, les dernières fractions, par lesquelles nous commençons, savoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; passant à celle qui précède immédiatement et réduisant, $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant ensuite avec la fraction le nombre entier et réduisant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conséquent le rapport 7 : 206 est voisin de 2640858 : 77708431. C'est pourquoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à sa roue motrice.

N° 2273.

CHRISTIAAN HUYGENS à J. B. COLBERT.

27 AOÛT 1682.

Appendice au No. 2272.

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens [1]).

Defcription de la Machine Planetaire Automate.

La boete octagone qui contient la machine eft large et haute de 2 pieds profonde de 6 pouces. La plaque dorée ou l'on voit le fyfteme planetaire eft couverte d'une glace enchaffee dans une bordure de cuivre dorè qui s'ouvre a charniere.

Les chemins ou orbites des Planetes font percées tout au tour, et les planetes paroiffent au deffus de la plaque, chacune eftant reprefentée par une petite demie boule d'argent placée et enchaffée au centre d'un petit rond dorè plat qui reprefente le ciel ou vortex particulier de la planete et qui la rend plus aifée a remarquer, outre que ces mefmes ronds fervent dans Saturne Jupiter et la Terre a porter leur compagnons ou lunes, defquelles noftre lune tourne regulierement autour de la terre, et montre par fa pofition les nouvelles et pleines lunes et les autres phafes.

Le nombre de l'année, et le jour du mois paroiffent a travers 2 ouvertures qui font entre les orbites de Saturne et de Jupiter vers le bas.

L'heure [2]) et les minutes fe voient dans l'ouverture en demi cercle qui eft entre les orbites de Jupiter et de Mars, ou le petit rond qui porte le nombre de l'heure, marche de gauche a droite et marque en paffant les minutes gravées a la circonference. Et quand cette heure fe cache, il en paroit une autre a l'oppofite et ainfi toutes fucceffivement.

Une horloge enfermée dans la machine, et que l'on monte tous les 8 jours, fait aller les heures les jours les annees et toutes les planetes, fort precifement dans le temps de leur periodes, tant pour le moyen mouvement que pour l'inegalitè qui demande qu'elles aillent plus lentement a mefure qu'elles fe trouvent plus eloignees du foleil, en quoy j'ay reprefentè l'hypothefe de Kepler.

Quand on veut voir en un moment les mouvements des planetes qui fe font pendant plufieurs annees, ou que l'on fouhaite de fcavoir leur pofition a quelque jour donnè d'année paffée ou future, on applique la manivelle du cofté droit, et on la tourne d'un mouvement fort aifè, jufqu'a ce que l'an et le jour donnè paroiffent au milieu des deux ouvertures fufdites. alors toutes les planetes font dans leur

[1]) Dans le livre F des Adverfaria, p. 98.

poſition veritable pour le temps donnè. Et pour les remettre au jour preſent on n'a qu'a tourner la manivelle du ſens contraire, juſqu'a ce que l'année et le jour ou l'on eſt paroiſſent comme auparavant au milieu des meſmes ouvertures. L'on peut ſcavoir par ce moyen a quel jours toutes les conjonctions oppoſitions et divers aſpects des planetes doivent arriver et quand elles devienent viſibles ou ſe cachent pres du ſoleil. Auparavant que de tourner la manivelle l'on lache une vis en dedans de la machine, par ou l'horloge ne luy communique plus ſon mouvement aux planetes, mais les heures pourtant vont touſjours leur train et quand on a oſtè la manivelle on ſerre derechef cette vis a fin que tout reprenne ſon mouvement ordinaire.

Afin de voir quand on veut le dedans de la machine on a ſuſpendu toute la boete a un chaſſis de fer qui tourne ſur deux pivots. Il eſt cachè pour la pluſpart derriere la boete. Par ce moyen on fait venir devant le coſtè de derriere qui touchoit le mur ou la tapiſſerie, et alors en abatant le couvercle on voit toute l'invention de la machine et l'horloge qui donne le mouvement. La principale pièce qui paroiſt eſt un grand axe couchè de travers le long de la placque de derriere dont il egale la largeur. cet axe porte les pignons qui engrainent dans les roues de chaque planete et dans celles des jours et des annees leſquelles roues ſont toutes enfermees entre les 2 plaques de devant et de derriere dont la diſtance eſt d'un pouce. Et la plaque de derrière eſt [ ] [2]) droit de chaque [ ] [2]) à fin qu'ils puiſſent toucher leur roues.

Avantages de ma machine par deſſus celle de Mr. Romer [3]).

Que la miene repreſente toutes les orbites dans leur veritable proportion au lieu qu'il a falu a Mr. Romer faire celles de Mercure Venus la Terre et Mars
1. beaucoup plus grandes qu'il ne faut a proportion de Jupiter et Saturne. D'ou
2. s'en ſuit que ſa machine ne repreſente pas la veritable Idée du ſyſteme du
3. monde ni ne montre point les lieux apparents de Saturne et de Jupiter, ni les conjonctions des 3 planetes ☿ ♀ ♂ ni de la lune avec Jupiter et Saturne.
4. Que mes periodes de toutes les planetes ſont beaucoup plus juſtes que dans la machine de M. Romer, parce que j'ay une meilleure methode [4]) de trouver les nombres des dents des roues.
4. Que mes planetes courrent au deſſus de la plaque au lieu que les ſienes ſont

---

[2]) Mots illisibles.

[3]) Ce qui suit est écrit au recto de la feuille dont le verso contient la description précédente. Il est donc incertain, et même douteux, que cette pièce ait fait partie de la description envoyée à Colbert. Consultez, d'ailleurs, la Lettre N°. 2255.

[4]) Celle des fractions continues. A cette occasion Chr. Huygens fut conduit à la découverte des théorèmes fondamentaux bien connus qui les concernent. On les trouve exposés pour la première fois dans la description de son planétaire, citée dans la note 5 de la Lettre N°. 2255.

derriere et ne paroiſſent qu'a travers les cercles vuidez qui chacune en 4 endroits doivent laiſſer des morceaux pour tenir la plaque enſemble, derriere leſquels morceaux les corps des planetes s'eclipſent. Outre cela il y a encore
5. ces deux avantages, l'un que Jupiter et Saturne portent avec eux leur ſatellites.
6. l'autre qu'en mettant quand je veux une terre un peu plus grande, à la place de celle que l'on y voit ordinairement accompagnée de la lune, je repreſente par là les diverſes ſaiſons de l'année, et le lever du ſoleil et des planetes au deſſus de noſtre horizon, et leur coucher. De meſme qu'en mettant un plus grand
7. Saturne je montre la cauſe de toutes les differentes apparences de l'anneau dont cette planete eſt entourée.

8. Que ma machine a ſon propre mouvement par le moyen de l'horloge que j'y ay enfermee qui montre les Heures et les minutes. au lieu que l'autre ne va que lors qu'on la tourne avec la main. Et ſon mouvement eſtant malaiſé il n'y auroit preſque point moyen de la faire aller par une horologe, de plus ce mouvement difficile fait que lors qu'on veut faire voir a l'œil le mouvement des planetes on ne peut pas appliquer une manivelle a l'arbre, mais il y faut neceſſairement une clef, ce qui produit un mouvement interrompu et par
9. repriſes; au lieu que ma machine tournant par le moyen d'une manivelle, fait voir un mouvement egal et continu dans toutes les planetes et qui va ſans peine.

10. Que celle de M. Romer ne peut eſtre ſuſpendue contre un mur comme la miene mais qu'elle doit eſtre ſur une table ou ſur un pied, en ſorte qu'on y puiſſe aller derriere pour la faire tourner avec la clef, et pour voir le jour de l'année.

11. Que l'on peut ouvrir la miene eſtant pendue contre un mur, de meſme que l'on ouvre une montre, pour faire voir le dedans et pour y toucher en cas de beſoin, ce qui n'eſt pas ainſi dans celle de M. Romer qui ne s'ouvre que par quelqu'un des coſtez.

12. Que le jour du mois ſe voit par devant ſur la plaque, au lieu que dans la machine de M. Romer ce jour eſt marquè ſur le coſtè de derriere.

13. Que dans la miene il y a un fil attachè a la Terre et un autre au ſoleil par le moyen deſquels on decouvre le lieu apparent des planetes dans le zodiaque, ce qui ne ſe peut faire dans la machine de Romer a cauſe des tenons.

---

*) Ce que cette machine a de particulier par deſſus celle de Mr. Romer.

Une semaine plus tard, la quatrième séance consista en une évaluation utilisant un autre extrait de la même description du planétaire. Des réutilisations de l'objet "fraction continue" furent faites durant cette semaine en interrogations orales de courte durée. Ci-dessous je donne le texte du contrôle - évaluation de trente minutes.

Rappel de la méthode, énoncée par HUYGENS en ces termes: Pour trouver des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite le reste par le nouveau reste ..."

1/ Utiliser cette méthode pour justifier le résultat trouvé par HUYGENS dans le paragraphe suivant après avoir justifié la conversion en minutes des périodes.

C'eſt auſſi à peu près de la même manière qu'ont été trouvées les dents des pignons qui meuvent Mercure: prenant 365 jours, 5 heures, 49' 15" 46"' pour la période de la terre ſous l'écliptique [40]) et 87 jours, 23 heures, 14' 24" pour celle de Mercure ſous elle [41]), ou plutôt, pour la facilité du calcul, reſpectivement 365 jours, 5 heures, 50' et 87 jours, 23 heures, 15' [41]), on trouvera pour le rapport des révolutions de Mercure à celles de la Terre 105190 : 25335 ou 21038 : 5067, par la diviſion deſquels nombres, exécutée ſuivant la méthode ſuſdite, il vient

$$\frac{21038}{5067} \;\Big|\; 4 + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7} \text{ etc.}$$

2/ Quelle fraction obtient-on si l'on stoppe les divisions faites par HUYGENS au trait noir dans le paragraphe suivant ? Quelle conclusion peut-on en déduire quant au nombre de roues ?

Pour établir les nombres des dents des rouages qui mènent la Lune [42]), nous prenons ici auſſi pour le même mouvement annuel 365 jours, 5 heures, 50' et pour celui de la Lune 29 jours, 12 heures, 44' 3" ou plutôt 45' pour la facilité du calcul, d'où l'on trouvera pour le rapport des révolutions de la Lune à celles de la Terre 105190 : 8505 ou 21038 : 1701; en diviſant comme auparavant il en réſulte

$$\frac{21038}{1701} \;\Big|\; 12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

D) Observation sur l'expérience

-a- Le premier groupe cherche la définition de la tierce, fit la conversion en tierces sans erreur, rapporta les dates de RICCIOLI (1598-1671), sa profession (astronome et géographe) et sa nationalité (italien). Quant à la devinette sur l'auteur du texte, ils conjecturèrent d'abord DESCARTES et écrivirent: "mais après réflexion c'est impossible car celui-ci est mort 21 ans avant RICCIOLI alors que l'auteur parle des "plus récentes tables de RICCIOLI", celui-ci n'établit des tables qu'à la fin de sa vie. Nous supposons donc que PASCAL est l'auteur de ce texte: c'est le savant qui correspond le mieux."

-b- Dans les autres groupes l'expression de HUYGENS pour ce que nous nommons fraction continue suscita beaucoup de commentaires. Un seul groupe donna un exemple conforme aux souhaits de HUYGENS.

-c- La calculette utilisée par les élèves donne pour le quotient $\frac{77708431}{2640858}$ le nombre 29,425448 . Devant leurs difficultés pour trouver le reste de la division euclidienne je leur conseillais de taper $29 \times 2640858 - 77708431$ qui leur donnait l'opposé du reste.

-d- La division des deux membres de l'égalité

$$77708431 = 29 \times 2640858 + 1123549$$

par 2640858 donna de la part de presque tous les élèves:

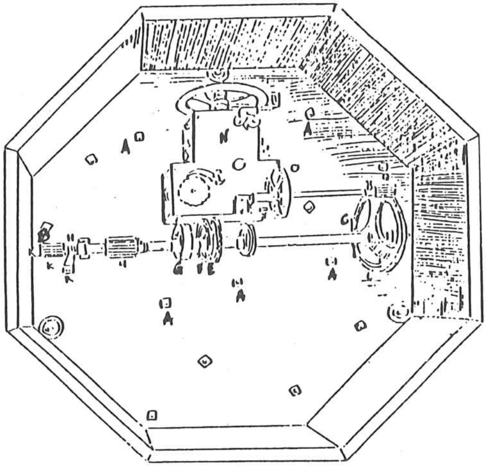
$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + 1123549$$

L'oubli du dénominateur pour le dernier terme me permit de leur rappeler l'importance de la notion de distributivité.

-e- Le calcul de l'écriture rationnelle de $29 + \frac{1}{2}$, $29 + \frac{1}{2+1}$, ... leur sembla un jeu amusant.

-f- Les élèves avaient déjà lu des textes anciens, la lecture des textes de HUYGENS les valorisait quant à cette maîtrise, elle me permettait d'insister sur le fait que la parcellisation actuelle des connaissances n'a pas toujours régné. D'autres expériences sur ce texte ont eu lieu et auront lieu. Un collègue de l'enseignement technique stagiaire du PAF "Approche des mathématiques par des textes historiques" que le groupe M.A.T.H. anime, propose une réalisation moderne d'un planétaire avec ses élèves utilisant les calculs de HUYGENS; cette construction est presque achevée: il eut l'astuce de remplacer les roues dentées par de multiples disques de caoutchouc. D'autre part, un travail sur l'apport théorique de HUYGENS à propos des "fractions continues" est entrepris avec une étude du livre VII des *Eléments* d'EUCLIDE que cite HUYGENS à ce propos.

Fig. 4 -



La figure 4 est l'agrandissement réalisé par un élève du dessin qu'effectua HUYGENS pour les besoins du technicien. CB désigne l'axe de fer long de 2 pieds; D, E, F, G, H désignent les roues dentées qui mettent en mouvement respectivement Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter; K et O désignent les roues de Saturne.

E) Bilan du travail de l'année de Troisième

1/ *Autres activités historiques*

Je fis l'introduction des notions nouvelles de troisième avec une présentation historique et une étude d'un texte d'ARCHIMEDE de la mesure du cercle, travaillée par Martine BUHLER de l'IREM de Paris VII (voir article dans ce recueil).

La compréhension de ce texte demande la connaissance des racines carrées, du théorème de THALES, du théorème de PYTHAGORE. les élèves écrivirent des textes sur ces mathématiciens. Pour le fameux théorème de PYTHAGORE nous avons étudié la proposition XXXXVII du Livre I des *Eléments* d'EUCLIDE, et nous avons lu les propositions IV et XXXXI nécessaires à la démonstration d'EUCLIDE. A la fin de l'année scolaire 86-87, dans la fièvre de la préparation à l'examen de fin de troisième, BEPC, je leur proposai le petit questionnaire qui suit:

2/ *Questionnaire de fin d'année*

I.- Parmi les trois démonstrations proposées du théorème de PYTHAGORE:

a) celle d'EUCLIDE (proposition XXXXVII du Livre I des *Eléments*);
b) celle utilisant le rapport de projection orthogonale;
c) celle utilisant la construction d'un carré englobant quatre triangles rectangles superposables (12)

quelle est celle que vous préférez ?
quelle est celle qui vous semble la plus convaincante ?

II.- Placez dans l'ordre chronologique en précisant les dates:
ARCHIMEDE - EUCLIDE - PYTHAGORE - ARISTOTE.

III.- Y a-t-il des questions soulevées en histoire des mathématiques qui vous intéressent ? Si oui, lesquelles ?

IV.- Pensez-vous que l'histoire des mathématiques vous aide ou peut vous aider à comprendre quelques chapitres mathématiques ?

V.- Quels sont les mathématiciens ou mathématiciennes que vous connaissez ? Donner une idée de l'époque où ils ou elles ont vécu.

3/ *Réponses au questionnaire*

Il y eut unanimité sur l'intérêt de la présentation des trois démonstrations du théorème de PYTHAGORE et sur le plaisir quant à l'apprentissage de ce théorème parce que "j'ai bien compris", "c'était simple", "c'est concret". Trois écrivirent avoir préféré la démonstration des *Eléments* d'EUCLIDE, douze celle utilisant le rapport de projection orthogonale, onze celle utilisant le carré. Ils furent surpris par l'utilisation du mot convaincant. Il s'ensuivit une discussion orale à ce sujet où la démonstration d'EUCLIDE reprit des points. Ils furent fort satisfaits de pouvoir répondre à la question II.

Pour la question III, l'intérêt pour PYTHAGORE ressurgit mais THALES apparut dix fois. Une demande sur l'historique des vecteurs et de la trigonométrie fut faite trois fois. Pour douze d'entre eux, les vecteurs étaient ce qu'ils avaient le mieux compris insistant sur "l'esprit de logique" dans leur utilisation.

Vingt-deux sur vingt-six répondirent par l'affirmation à la question IV. Pour la question V, les mathématiciens cités avec dates furent PYTHAGORE (6ème siècle av. J.-C.), le père de Jessica (Jessica est une élève de la classe dont le père est mathématicien), Madame HALLEZ (leur professeur), HUYGENS, LEIBNIZ, NEWTON, PASCAL, DESCARTES (tous du 17ème siècle). Les autres mathématiciens cités sans précision de dates furent Roger BACON, RIEMANN, LOBATCHEVSKY, LAMBERT, VIETE. Une discussion s'ensuivit sur ce que l'on entend par mathématicien.

4/ *Conclusion*

La réalisation pratique du planétaire rend l'écriture rationnelle d'un nombre réel ou de son approximation utile. On est passé d'une simple obligation du programme à une nécessité de calcul pour le technicien. L'expression orale ou écrite des calculs faits sur un support vivant et concret est à la fois plus utile et moins fastidieuse. Les élèves ont aussi pu se rendre compte que les machines à calculer sont un outil utile mais non universel. Par ses caractéristiques propres une telle expérience est conséquence ou cause d'un travail transdisciplinaire: astronomie - histoire - latin - français - anglais - dessin - technique - mathématiques. Je dois signaler qu'un élève fut réfractaire à ce travail. Il est à signaler que toute rédaction le fait souffrir et que je venais l'embêter dans le seul endroit où il avait pu jusque là s'en tirer à n'écrire que des algorithmes de calcul. Deux élèves qui firent les plus belles constructions point par point des coniques n'améliorèrent pas leurs résultats dans le cours de l'année. Leur culture générale et artistique augmenta, non leur culture mathématique. Quant aux vingt-trois autres le bilan fut fort positif en ce qui concerne le calcul des rationnels, l'utilisation des théorèmes de THALES et de PYTHAGORE. Et notre culture générale à tous s'est fort enrichie.

Notes

(1) F. LE LIONNAIS, *Les grands courants de la pensée mathématiques* p. 221.
(2) G.H. HARDY, *A mathematician's apology*. p. 84-85.
(3) G. POLYA, *How to solve it*. New Jersey Princeton University Press (led 1945). 1973.
(4) H. POINCARÉ, *Science et Méthode*. Paris, 1908.
(5) N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*. p. 215.
(6) J.-P. CLERO, E. LE REST, *La naissance du calcul infinitésimal au 17ème siècle*.
(7) M. THIRION, *Constitution du modèle planétaire de Philololarus à Gassendi*.
(8) A. KOYRE, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*. p. 12.
(9) Actes du colloque Inter-IREM, Montpellier. p. 78.
(10) P. ROUSSEAU, *Histoire de la Science*. p. 288.
(11) L'omission de la valeur du rapport donné par HUYGENS était voulue pour que les élèves fassent le calcul correspondant.
(12) Cette méthode est citée par T. HEATH dans *Eléments*, T.I. p. 354-355.

Bibliographie

ARCHIMEDE, *Œuvres, la mesure du cercle.* tome I, traduction P. Ver Eecke.

ARNAULD A., *Eléments de Géométrie.* 1667. Réédition IREM de Dijon, 1983.

BARBIN E., Groupe Histoire et Epistémologie du Mans, *Actes du colloque Inter-IREM Montpellier,* 1985.

CLERO J.-P., LE REST E., *La naissance du calcul infinitésimal au 17ème siècle.* Cahiers d'histoire et de philosophie des Sciences. N° 16.

COLETTE J.-P., *Histoire des mathématiques.* Editions du Renouveau Pédagogique. Ottawa. Canada, 1979.

DEDRON P. ET ITARD S., *Mathématiques et mathématiciens.* Paris. Magnard, 1959.

DESCARTES R., *Discqurs de la Méthode.* Paris, Didier, 1971. Collection les classiques de la Civilisation française.

EUCLIDE, *Les Eléments.* Traduction française F. Peyrard. Paris 1814-1818. Réédition Blanchard, Paris, 1966.
Eléments, traduction anglais T. Heath. New York. Dover, 1956.

FRANKFOURT U. ET FRENK A., *Christiaan HUYGENS.* Moscou, Mir 1976. Traduction française I. Sokolov.

HUYGENS C., *Œuvres complètes.* La Haye, Nyjhoff, 1940. Tome 21.

INSTITUT NÉERLANDAIS, *Le temps en question Christiaan HUYGENS.* 1979. 12, rue de Lille. Paris VII.

ITARD J., *Essais d'histoire des mathématiques.* Présenté par R. Rashed. Paris, Blanchard, 1984.

KING H.-C., *Le planetarium.* Revue Endeavour. Janvier 1959.

KOESTLER A., *Les Somnanbules.* Presses Pocket.

KOYRE A. *Etudes d'histoire de la pensée scientifique.* Paris, Gallimard, 1973.

LEIBNIZ G.W., *Histoire et origine du calcul différentiel.* 1913. Mathematische Schriften ad. Gerhardt ree. Olms Hildesheim 1962. T.V. - Traduction française SZEFTEL-ZYLBERBAUM R., Cahiers de Fontenay, n° 1.

ROSSEL A., *Histoire de France à travers les journaux du temps.* Paris 1982. A l'enseigne de l'arbre verdoyant.

ROUSSEAU P., *Histoire de la Science.* Paris, Fayard, 1945.

TATON R. et Alii, *Histoire Générale des Sciences.* T. 2, Paris, PUF, 1956.

VALIRON, *Théorie des Fonctions.* Paris. Masson, 1966. Chapitre premier III : Notions sur les fractions continues arithmétiques.

ZUMTHOR P., *La vie quotidienne en Hollande au temps de Rembrandt.* Paris, Hachette. 1963.