Math - Philo: PASCAL et l'infini en Terminale littéraire

Jacqueline GUICHARD
Professeur de Philosophie
Lycée E. Pérochon
79200 Parthenay

Le programme de philosophie prévoit en classe terminale littéraire comme en terminale scientifique (élèves de 17-18 ans), une réflexion sur les mathématiques et la logique. C'est l'occasion de s'interroger sur le caractère propre d'une démarche qui passe, depuis EUCLIDE, pour un modèle de rigueur, mais qui a néanmoins une histoire et qui a rencontré à certains moments de celle-ci les exigences de la pensée philosophique.

Cependant, l'abord direct de ces questions provoque souvent beaucoup de résistance chez les élèves des sections littéraires, par les souvenirs douloureux qu'il réveille parfois dans une scolarité qui a bien souvent été orientée par des résultats plus ou moins négatifs en mathématiques.

C'est pourquoi, le travail sur des extraits de l'œuvre d'un philosophe-mathématicien, portant à la fois sur des contenus mathématiques et philosophiques, quand il peut se faire dans la classe avec les professeurs de mathématiques et de philosophie, peut se révéler bénéfique pour les deux enseignements.

* * *

Le présent travail sur des extraits de textes de PASCAL a été effectué au milieu de l'année scolaire 1984-85, dans une classe terminale de 33 élèves composée, pour une part de 15 élèves ayant un faible horaire en mathématiques: 2 heures (section A2: Lettres - Langues), et pour le reste, soit 18, d'élèves ayant un horaire plus élevé: 5 heures (section A1: Lettres - Mathématiques).

L'initiative en revient à ma collègue de mathématiques, Marie-Claire CASTAGNET qui avait en charge les 15 élèves de A2, et se heurtait aux difficultés qu'ils rencontraient dans le cours sur les limites pour comprendre que:

$$\lim (f + g) = +\infty \text{ , quand } \lim f = A \text{ et } \lim g = +\infty$$

Les textes donnés comme documents dans un manuel de TA2 (1), l'un mathématique, l'autre métaphysique, lui semblaient propices à l'instauration d'une démarche interdisciplinaire qui permette de sortir du blocage provoqué par la situation mathématique.

Le texte mathématique est extrait de la fin du traité de *Sommation des Puissances Numériques.* On trouvera en note (2) des indications sur ce traité et en Annexe 1, l'intégrale de ce traité, ainsi que le texte latin du présent extrait, le tout dans l'édition des *Œuvres Complètes* de PASCAL publiées aux Editions du Seuil (3).

La traduction suivante est celle sur laquelle ont travaillé les élèves (1):

> "... Dans une quantité continue, des quantités en aussi grand nombre et de quelque genre qu'on voudra, ajoutées à une quantité d'un genre supérieur, n'y ajoutent rien de plus. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides. Ou encore pour parler en nombres, comme il convient dans un traité arithmétique, les grandeurs simples (racines) ne comptent pour rien par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux puissances quatrièmes. En sorte qu'on doit négliger, comme nulles, les quantités de degré inférieur."

Le texte métaphysique est extrait de la *Pensée* sur les trois ordres (4) qui exprime sur le plan métaphysique, ce que le premier exprime en langage mathématique:

> "La distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité, car elle est surnaturelle.
> Tout l'éclat des grandeurs n'a point de lustre pour les gens qui sont dans les recherches de l'esprit.
> La grandeur des gens d'esprit est invisible aux rois, aux riches, aux capitaines, à tous ces grands de chair.
> La grandeur de la sagesse, qui n'est nulle sinon de Dieu, est invisible aux charnels et aux gens d'esprit.
> Ce sont trois ordres différents de genre.
> Les grands génies ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire et leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles où elles n'ont pas de rapport. Ils sont vus, non des yeux, mais des esprits. C'est assez.
> Les saints ont leur empire, leur éclat, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent. ...
> Tous les corps, le firmament, les étoiles, la terre et ses royaumes, ne valent pas le moindre des esprits. Car il connaît tout cela, et soi, et les corps, rien.
> Tous les corps ensemble et tous les esprits ensemble et toutes leurs productions ne valent pas le moindre mouvement de charité. Cela est d'un ordre infiniment plus élevé."

On trouvera en Annexe III le texte intégral de cette pensée.

Les élèves ont eu à lire ces extraits en dehors du cours, avec comme consigne générale de rechercher ce qui est commun aux deux textes.

1/ en dégageant le sens du principe exprimé dans le premier texte et la règle qu'en tire PASCAL;

* Ce qui les obligeait à repérer l'énoncé du principe, à le distinguer des exemples qui l'illustrent, et à repérer l'énoncé de la règle dans "on doit ..."

2/ en essayant de repérer, dans le second texte, l'expression de ce principe, dans les rapports entre les trois ordres que PASCAL décrit;

* Ce qui les obligeait à repérer ces trois ordres, leurs grandeurs, les hommes qui les incarnent.

Il avait été prévu de prendre une heure de mon cours de philosophie pour reprendre collectivement ce travail en présence du professeur de mathématiques, afin que les élèves puissent contrôler ce qu'ils avaient compris et poser des questions sur ce qui les avaient arrêtés, demander des compléments d'informations ... . En fait, sur le terrain, une heure s'est révélée insuffisante, et une seconde heure du cours de philosophie, toujours en collaboration avec le professeur de mathématiques a été consacrée à l'approfondissement de ce travail.

* * *

L'arrière plan théorique qui a fourni la structure de ces deux heures d'activités en classe et qui a orienté les réponses aux questions des élèves avait pour principal objectif de leur fournir des points de repère et des compléments de référence qui les aident à préciser leur perception du sens mathématique du premier extrait d'une part, et d'autre part, de la correspondance entre la pensée mathématique des genres et la conception métaphysique des ordres.

Les considérations du premier reposent en effet sur la notion de genre qui détermine celle d'ordres de grandeur différents, et rejoignent les arguments par lesquels PASCAL tranchera le débat avec le Chevalier DE MERE sur les indivisibles. Dans l'*Esprit géométrique* (5), PASCAL rappelle l'axiome dit D'ARCHIMEDE pour définir cette notion de genre:

"Les grandeurs, dit-il (EUCLIDE), sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre" (6).

On a donc là un critère qui permet de déterminer si deux grandeurs sont de même genre: il peut y avoir entre elles comparaison parce qu'il y a proportion; l'une peut ajouter ou retrancher quelque chose à l'autre; on peut passer de l'une à l'autre par itération d'une opération. Mais les raisons qui font que des opérations sont possibles à l'intérieur d'un genre, rendent toute opération impossible d'un genre à l'autre. Ces opérations n'auraient pas de sens parce qu'il n'y a pas entre les deux genres de commune mesure; on ne peut passer à l'infini par addition ou multiplication du fini, pas plus que l'on ne passe au fini par itération de l'infiniment petit.

"... un indivisible multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas du même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre" (5).

Et, corrélativement, le fini n'ajoute ni ne retranche rien à l'infini, parce que la distance du premier au second est infinie:

"L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien, non plus que un pied à une mesure infinie; le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant" (7).

C'est la même structure de pensée qui commande à la démarche métaphysique du second extrait par l'intermédiaire de la notion d'ordres de grandeur, par nature totalement hétérogènes, et dont l'étude permet, grâce aux biens qui les composent et aux hommes qui les incarnent, d'éclairer les considérations mathématiques du premier.

Il s'agit en effet, ici, de hiérarchiser les trois ordres:
- l'ordre des grandeurs physiques et cosmologiques,
- l'ordre des grandeurs spirituelles,
- l'ordre des grandeurs religieuses, grandeurs de la foi,

selon un ordre de valeur qui fait du dernier l'ordre de l'infiniment supérieur, ordre suprême, parce que divin, d'une distance à l'ordre inférieur qui est telle que notre esprit ne peut la mesurer, la comprendre, mais dont il peut avoir une représentation, une image, (cf. "*figure*") par la distance infinie qui sépare l'ordre des corps de celui des esprits. Il s'agit donc de hiérarchiser ces trois ordres en rappelant que:

* chaque ordre a ses grandeurs qui ont leurs valeurs, leurs attraits, "*leur éclat*" ... et leurs hommes:

- biens matériels de ce monde, valeur de chair pour l'ordre corporel: éclat du pouvoir politique, de celui de la richesse ou de la force armée qui font des rois, des riches et des capitaines les puissants et les enviés de ce monde;

- biens spirituels du savoir, valeurs de l'esprit pour l'ordre spirituel où brillent les grands génies; PASCAL reprendra dans le cours de cette *Pensée* l'exemple d'ARCHIMEDE:

  "ARCHIMEDE sans éclat (8) serait en même vénération. Il n'a pas donné des batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions. O qu'il a éclaté aux esprits."

- biens divins, valeurs de charité où brillent les saints;

* ces trois ordres n'étant pas de même genre, *un abîme infini les sépare,* leurs grandeurs n'ont pas de rapport:

- l'inférieur ignore les valeurs de l'ordre supérieur; il ne peut les voir ni les comprendre:

  "... il y en a qui ne peuvent admirer que les grandeurs charnelles comme s'il n'y en avait pas de spirituelles. Et d'autres qui n'admirent que les spirituelles comme s'il n'y en avait pas d'infiniment plus hautes dans la sagesse." (ib.)

- le supérieur est insensible à l'éclat des valeurs de l'ordre inférieur;

* par conséquent, *les valeurs d'un ordre sont sans valeur au regard de celles de l'ordre supérieur:* même ajoutées les unes aux autres, elles ne sont rien et ne peuvent rien lui ajouter ni lui retrancher. Elles sont comme "l'unité jointe à l'infini /qui/ ne l'augmente de rien..." (9); c'est pourquoi:

> "Il eut été inutile à ARCHIMEDE de faire le prince dans ses livres de géométrie, quoiqu'il le fût." (10).

On peut donc en déduire que c'est par un saut que l'on peut passer d'un ordre à l'ordre supérieur ou à l'ordre inférieur, et non pas, respectivement par multiplication ou soustraction des valeurs de l'ordre où l'on se trouve.

Les différents éléments de ce texte ont été organisés dans le tableau synoptique suivant:

CHARITE:	ORDRE DIVIN infiniment plus élevé	GRANDEURS DE LA SAGESSE: LES SAINTS invisibles à tous
distance infiniment plus infinie surnaturelle		
ESPRIT:	ORDRE SPIRITUEL se connaît et connaît les corps	GRANDEURS DE L'ESPRIT: LES GRAND GENIES vus de l'esprit
distance infinie		
CORPS:	ORDRE PHYSIQUE ET COSMOLOGIQUE ignore tout: lui-même et le reste	GRANDEURS DE CHAIR: LES PUISSANTS DE CE MONDE: rois, riches, capitaines vus des yeux

Chaque ordre:
- a ses grandeurs, son éclat, ses types d'hommes;
- ses grandeurs sont incomparables, sans commune mesure avec celle des autres ordres:
  * celles des ordres supérieurs sont invisibles pour les ordres inférieurs,
  * l'ordre supérieur est insensible à l'éclat des grandeurs des ordres inférieurs,
  * qui ne peuvent rien lui ajouter ni lui retrancher.

Le rapprochement de ces deux textes rend donc sensible l'unité de la pensée de Pascal dans le domaine mathématique et dans le domaine métaphysique. C'est la même structure: la hiérarchie des ordres, c'est le même principe, fondé sur la notion de genre commun, qui permettent de penser ici et là la différence irréductible d'un genre à un autre. Il est tentant de demander laquelle, de la pensée mathématique ou de la pensée métaphysique, a pu déterminer l'autre. Mais n'est-ce pas là une question impossible ? Outre les difficultés à dater tel ou tel écrit, les champs de pensée sont probablement moins séparés dans la tête du penseur qu'ils ne le sont, pour les besoins de l'analyse dans les récits des commentateurs (6).

* * *

Le travail en classe, prévu pour une heure, s'est en fait déroulé sur deux heures séparées.

Les questions des élèves ont orienté plus de la moitié de la première heure sur le second texte, ce qui a conduit à mettre en évidence les différents ordres de grandeurs, leur incommensurabilité, à se référer à d'autres passages de la Pensée 308 (4) (exemple d'ARCHIMEDE, ...), et, enfin à voir s'il était possible de transposer les résultats de cette étude pour comprendre le premier texte.

L'analyse du début du texte a conduit à fournir aux élèves l'axiome d'ARCHIMEDE (5) comme moyen de déterminer si deux grandeurs sont de même genre. Certains élèves ont été arrêtés par la compréhension des exemples, en ne comprenant pas que "une ligne soit formée de points et que des points n'ajoutent rien aux lignes". On pourrait à ce propos envisager un travail sur la divisibilité et les arguments de ZÉNON D'ELÉE.

La fin de l'heure s'est terminée, à partir de l'utilisation de l'axiome d'ARCHIMEDE, sur ce qui est apparu comme une confusion entre nombre et quantité continue.

Une nouvelle heure s'imposait, ainsi que la recherche d'une stratégie qui fasse percevoir aux élèves la nécessité de distinguer les deux notions: nombre et quantité continue, et l'enjeu de cette distinction: l'existence d'ordres de grandeur différents.

1) Premier temps: faire appréhender la notion de quantité continue par le biais de l'idée d'une série de nombres que l'on somme dans un processus à l'infini, qui tend vers une limite infinie, la différence entre une fonction et un nombre ...
2) Montrer que le problème ne se pose pas de la même façon pour un nombre et une quantité continue; ou encore, qu'on ne peut entendre sous "grandeurs simples", "nombres simples", dans l'exemple pris par PASCAL. Car si on applique l'axiome d'ARCHIMEDE: "Les grandeurs sont dites de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre", un nombre donné et son carré sont de même genre:
Exemple: 3 et 9, puisque $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$, qui surpasse 9.
Par contre, si on fait une sommation de nombres allant vers l'infini, on obtient une grandeur qui est d'un autre ordre que ces nombres eux-mêmes.

Pour rendre tout cela sensible, nous avons travaillé à partir de l'exemple suivant:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$$

Le calcul de S a été fait en rappelant l'astuce utilisée par GAUSS (1777-1855) enfant, alors que le maître demandait à sa classe de faire la somme des 100 premiers nombres entiers:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots\ldots\ldots & + & (n-1) & + & n & \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots\ldots\ldots & + & 2 & + & 1 & \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots\ldots\ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & = n(n+1) = 2S \end{array}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Plus n grandit, plus dans la valeur de la somme S, la part de $\frac{n}{2}$ devient négligeable.

Le but de cet exemple n'était pas de calculer la limite de S, mais de faire sentir qu'il y a des ordres d'infinitude différents, et que, dans l'exemple présent, quand n devient infini, la valeur de S est pratiquement celle de $\frac{n^2}{2}$.

Donc, $\frac{n}{2}$ a une valeur qui devient de plus en plus négligeable, quoiqu'infinie, par rapport à celle de $\frac{n^2}{2}$, qui est par conséquent d'un degré d'infinitude supérieur.

Ce qu'on pourrait écrire sous forme d'une règle:

$$\lim_{\infty} \left(x^2 + x\right) = \lim_{\infty} x^2$$

On peut facilement fournir une aide à la représentation en faisant faire le calcul de la somme avec des valeurs qui sont encore intuitivement appréciables: n = 10 , 100 , 1000 , 10000 .

Une telle étude fournit des moyens pour saisir:

1/ la différence entre "*quantité négligeable*", c'est-à-dire sans incidence sur l'ordre supérieur, et "*égal à zéro*", c'est-à-dire étant nul, ou encore, entre "*être comme nul*" et "*être nul*", puisque la grandeur continue n tend vers l'infini;

2/ donc, par là-même, l'idée de *rapport*, c'est-à-dire de comparaison, qui détermine celle d'*ordre de grandeur*, puisque c'est par rapport à la grandeur continue n^2 que n a une valeur négligeable, et non en elle-même;

3/ et en même temps, l'idée d'*infinis d'ordres ou de genres différents*, puisque quand n tend vers l'infini, il a une valeur nulle par rapport à l'infini vers lequel tend n^2.

A l'issue de l'heure précédente, une élève nous avait dit: "ce que je ne comprends pas: c'est $+\infty - \infty$ " ...

Il m'a semblé qu'on tenait là un moyen d'approcher ce problème d'une manière autre que formelle, et de montrer que les mêmes principes peuvent fonctionner pour montrer que $\infty - \infty$ est a priori indéterminé et que $\infty + \infty = \infty$.

En effet, pour ce qui est de $\infty + \infty = \infty$, on ne connaît pas a priori leur ordre respectif. Mais, soit l'un des deux infinis est d'un ordre inférieur à l'autre, et il ne lui ajoute rien; soit ils sont de même genre, et peut concevoir que, puisqu'il s'agit d'infini, l'ajouter à lui-même ne lui ajoute rien, puisqu'il est déjà tout, en son genre.

Pour ce qui est de $\infty - \infty$, tant qu'on n'a pas d'indication sur l'ordre de grandeur de chacun de ces infinis, on ne peut rien dire. Le résultat sera différent selon qu'ils seront de même genre ou de genre différent.

En fait, on pourrait aller plus loin. L'utilisation du principe des ordres de grandeur énoncé par PASCAL permettrait aux élèves de terminale A de calculer les limites infinies en donnant du sens aux règles qu'ils appliquent.

* * *

Au cours de philosophie suivant, les élèves ont répondu à un bref questionnaire d'évaluation de ce travail "Math-Philo", dont le tableau suivant présente les résultats:

Questions		TA 1 (18 élèves)	TA 2 (15 élèves)	Total 33
* travail intéressant ?	Oui	44,5 %	66,5 %	54,5 %
	Non	5,5 %	0 %	3 %
	Indifférent	50 %	33,5 %	42,5 %
* a-t-il permis de mieux comprendre certaines notions mathématiques ?	Pas du tout	44,5 %	6,5 %	27 %
	Un peu	55,5 %	87 %	70 %
	Beaucoup	0 %	6,5 %	3 %
* présentait-il un intérêt philosophique ?	Oui	83,5 %	86,5 %	85 %
	Non	16,5 %	13 %	15 %
* remarques, suggestions.	Réponse	72 %	66,5 %	69,5 %
	Sans réponse	28 %	33,5 %	30,5 %

Pour interpréter la différence des résultats entre les Terminales A1 et les Terminales A2 pour les deux premières questions, on peut signaler que les TA1 sont moins intervenus que les TA2, en particulier pour poser des questions d'ordre mathématique; ce qui peut s'expliquer par le fait qu'ils s'estiment meilleurs en mathématiques que les TA2, et qu'ils ne se sont pas sentis véritablement impliqués dans la démarche mathématique, leur professeur de mathématiques ne s'étant pas senti concerné et n'étant pas là.

En revanche, pour les TA2, l'objectif pour lequel cette activité avait été conçue, a été atteint, puisqu'elle a permis de débloquer une situation d'incompréhension totale et de poursuivre dans de meilleures conditions le travail mathématique sur les limites.

Pour ce qui concerne la dernière rubrique: "Remarques, suggestions", 35 % des réponses disaient la même chose, en des termes différents et souvent plus brefs que ce propos de TA1:

> *"Je pense que ce travail fait en cours de philo, avec la collaboration d'un professeur de math, nous a permis de voir la relation qui existe entre les mathématiques et la philosophie, deux matières jugées trop souvent dissociées, sans aucun rapport".*

Enfin, cette remarque d'un TA2 ne suffirait-elle pas, à elle seule, à inciter à ce genre de travail:

> *"Ce travail math-philo m'a permis de comprendre que les mathématiques ne sont pas, comme je pensais, quelque chose d'inutile, sans intérêt, mais permettent au contraire de comprendre certains problèmes qui peuvent être philosophiques ou autres" ?*

* * *

La dimension interdisciplinaire d'une telle activité, fondée sur un travail en commun des professeurs concernés, est sans aucun doute à l'origine de ses effets positifs. Il apparaît important, probablement même nécessaire, quand il s'agit de débloquer une situation d'enseignement mathématique, que les élèves perçoivent l'existence d'une collaboration entre les professeurs de mathématiques et de philosophie: sur un plan strictement psychologique, l'autre matière et son professeur fonctionnent comme un médiateur qui permet d'envisager les problèmes mathématiques, voire la discipline, d'un autre point de vue.

A partir du présent travail, on peut envisager des prolongements interdisciplinaires, par exemple, un travail de traduction du passage latin du traité de la Sommation des puissances numériques donné en annexe, et dont la traduction française publiée dans la collection L'Intégrale au Seuil (1966) crée des difficultés de compréhension; ou encore, le travail sur la divisibilité et les arguments de ZÉNON, déjà signalé, avec possibilité d'une intervention du professeur de grec, si on a la chance d'avoir quelques hellénistes dans la classe ...

Notes

(1) GAUTHIER R., MISON G., *Mathématiques, Terminales A2, A3*. Cedic, Paris, 1983.
GUILLEMOT M., de l'Université de Toulouse, propose la traduction suivante de l'extrait du traité de *Sommation des puissances numériques:*
"Lorsqu'il s'agit d'une quantité continue, des quantités en aussi grand nombre et de quelque genre qu'on voudra, ajoutés à une quantité continue d'un genre supérieur, n'y ajoutent rien de plus. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides, ou encore, pour parler en nombres, comme il convient dans un traité en nombres, les racines ne comptent pour rien par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux carrés-carrés, etc. C'est pourquoi, on ne doit pas considérer, parce qu'ils sont de valeur nulle, les degrés inférieurs."

(2) Le traité sur la *"Sommation des puissances numériques"* a sans doute été écrit par PASCAL en 1654, mais il a été seulement publié en 1665 à la suite du fameux "Traité du triangle arithmétique". Ces deux traités sont intimement liés tant par ce que nous appelons aujourd'hui la formule du binôme, que par la comparaison des divers ordres numériques. Dans le traité qui nous occupe, à partir du développement de la formule du binôme, il donne une méthode permettant de calculer la somme des puissances n-ième de (p + 1) termes d'une progression arithmétique (premier terme a, raison r

$$a^n + (a + r)^n + \ldots + (a + pr)^n$$

Il énonce ensuite une règle générale relative à la progression naturelle qui commence par l'unité:
"La somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette même puissance" (Cf. Annexe I). Autrement dit, PASCAL se place dans le cadre du calcul dit aujourd'hui intégral, c'est-à-dire, pour l'époque, des calculs d'aires ou de volumes à l'aide de la méthode des indivisibles (Cf. l'extrait de l'*Histoire de la roulette,* Annexe II). Nous pouvons traduire la règle précédente comme suit:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

Mais PASCAL n'en donne pas la démonstration; il en énonce simplement le principe.

(Note de M. GUILLEMOT)

(3) PASCAL, *Œuvres complètes,* L'Intégrale. le Seuil. Paris, 1963.

(4) PASCAL, *Pensée 308,* op. cité p. 540. (793, édition Brunschvicg). Texte intégral, en Annexe III.

(5) *De l'Esprit géométrique* (1658 ?), op. cit. p. 354. Cf. Annexe IV.

(6) Enoncé dans EUCLIDE, *Eléments de géométrie,* L.V., déf. 4.
PASCAL amalgame deux définitions de ce livre, dont nous donnons trois traductions:
a) déf. 3. Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
déf. 4. Des grandeurs sont dites avoir raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées peuvent se surpasser mutuellement.
PEYRARD F., *Les Œuvres d'Euclide,* rééd. Blanchard, Paris, 1966. p. 133.
b) déf. 3. Entre deux grandeurs de même nature, une raison est une certaine relation qui est telle ou telle selon le degré de grandeur.
déf. 4. Des grandeurs sont dites avoir l'une avec l'autre une raison, si elles sont capables, quand elles sont multipliées, de s'excéder l'une l'autre.
CAVEING M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque.* Presses Universitaires de Lille III, Lille 1982. T.3, p. 1523-1529.
c) déf. 3. A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.
déf. 4. Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.
HEATH T., *The thirteen books of EUCLID'S Elements,* réemp. Dover, New York, 1956. p. 114. Voir extraits en Annexe IV.

La distance est grande, entre le texte pascalien et ces traductions. Au lieu qu'EUCLIDE définit ce qu'il entend par raison, - nous pourrions dire, certes improprement rapport -, et la condition archimédienne d'existence, PASCAL transforme cette condition en une caractérisation de l'homogénéité. HEATH souligne que DE MORGAN agit de même; mais pour ma part, je trouve que la métaphysique a précédé la mathématique. Là où fort justement CAVEING voit dans la définition "une pratique mathématique bien déterminée: les calculs de valeurs approchées" (op. cit. p. 1532), PASCAL reste sur le fait que la théorie des proportions du Livre V est appliquée ultérieurement à des lignes (segments de droite), à des surfaces et à des solides qui sont autant de grandeurs de genres différents.

La condition archimédienne citée par PASCAL mérite aussi de s'y arrêter. En effet, sans que l'on n'y prenne garde, l'axiome d'ARCHIMEDE tel que nous l'énonçons habituellement donne lieu, si l'on peut dire, à deux conditions. En effet, on peut le formuler ainsi:

> *"pour deux grandeurs X et Y quelconques, il existe un entier naturel n, tel que nX surpasse Y".*

On en déduit immédiatement une "deuxième condition":

> *"il existe un entier naturel p tel que pY surpasse X".*

PASCAL, quant à lui, se contente d'une seule condition, et passe ainsi à côté de l'approximation citée par CAVEING. En fait, il semble que pour lui, les grandeurs soient toujours comparables et alors une seule condition suffit, l'autre étant immédiatement réalisée. Mais nous savons aujourd'hui que le fait d'admettre qu'il en est toujours ainsi dépasse le cadre pascalien puisque la possibilité de comparaison équivaut à ce que qu'on nomme l'axiome du choix "introduit implicitement" par CANTOR (1845-1918).

Appliqué rigoureusement, le critère pascalien attribue le même genre au fini et à l'infini ! Il est pas exemple évident que pour tout entier n:

$$1 + 2 + \ldots + n + \ldots > n = n.1$$

Mais cette même relation nous montre qu'il n'en est pas de même pour le critère euclidien, car n'importe quel multiple de n, par exemple np, sera inférieur à $(1 + 2 + \ldots + np)$ et donc en aucun cas supérieur à la somme infinie.

La transformation métaphysique pascalienne imposée au texte mathématique euclidien donne ainsi une caractérisation de l'homogénéité qui n'est pas définie par EUCLIDE, mais qui devient opératoire pour PASCAL. Ainsi, il peut démontrer que l'unité est du même genre que les autres nombres, et surtout "qu'il n'en est pas de même d'un indivisible à l'égard de l'étendue; ... un indivisible multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas du même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre." (5)

Et corrélativement, le fini n'ajoute ni ne retranche rien à l'infini, parce que la distance du premier au second est infinie:

> *"L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien, non plus que un pied à une mesure infinie; le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant."* (7)

Note de M. GUILLEMOT

(7) *Pensée 418*, op. cit. p. 550 (233, éd. Brunscvicg). Cf. Annexe V.

(8) c'est-à-dire même s'il n'avait pas été un proche du roi de Syracuse.

(9) Cf. (7).

(10) Cf. (4).

Bibliographie

Rappels bibliographiques des œuvres citées

CAVEING M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque.* Presses de l'Université de Lille III, Lille 1982, t. 3, p. 1523-1529.

GAUTHIER R., MISON G., *Mathématiques, Terminales A2 et A3.* Cedic, Paris, 1983.

HEATH T., *The thirteen books of Euclid's Elements,* réimp. Dover, New York, 1956. Vol. II, p. 114-119. Extrait en Annexe VI.

PASCAL B., *Œuvres complètes, L'Intégrale,* Le Seuil. Paris, 1963.
En particulier,
- *Traité de Sommation des puissances numériques* (1654 ?), op. cit. p. 90-94, reproduit en Annexe I.
- *Histoire de la roulette* (1658), op. cit. p. 135; extrait reproduit en Annexe II.
- *De l'Esprit géométrique,* (1657 ?), op. cit. p. 354, extrait reproduit en Annexe IV.
- *Pensée* 308, op. cit. p. 540, reproduite en Annexe III.
- *Pensée* 418, op. cit. p. 354, reproduite en Annexe V.

PEYRARD F., *Les Œuvres d'EUCLIDE,* rééd. Blanchard, Paris, 1966, p. 133.

Annexe I

Sommation des Puissances numériques (1649 ? - éd. 1665)
Pascal, opus cité (3), p. 90-94

Remarque.

Étant donnés, à partir de l'unité, plusieurs nombres consécutifs, par exemple 1, 2, 3, 4, on sait trouver, par les méthodes que les anciens nous ont fait connaître, la somme de leurs carrés, et même la somme de leurs cubes; mais ces méthodes, applicables au second et au troisième degré seulement, ne s'étendent pas aux degrés supérieurs. Dans ce traité, j'enseignerai à calculer non seulement la somme des carrés et des cubes, mais aussi la somme des quatrièmes puissances et celles des puissances supérieures jusqu'à l'infini : et cela, non seulement pour une suite de nombres consécutifs partant de l'unité, mais pour une suite commençant par un nombre quelconque, telle que la suite 8, 9, 10, ... Et je ne me bornerai pas à la suite naturelle des nombres : ma méthode s'appliquera encore à une progression ayant pour raison 2, 3, 4, ou un autre nombre quelconque, — c'est-à-dire à une suite de nombres différant de deux unités comme 1, 3, 5, 7, ..., 2, 4, 6, 8, ..., ou différant de trois unités comme 1, 4, 7, 10, 13, ... Et cela qui plus est, quel que soit le premier terme de la suite : que ce premier terme soit 1, comme dans la suite de raison *trois*, 1, 4, 7, 10, ...; ou qu'il soit un autre terme de la progression, comme dans la suite 7, 10, 13, 16, 19; ou même qu'il soit étranger à la progression, comme dans la suite de raison *trois*, 5, 8, 11, 14... commençant par 5. Chose remarquable, une méthode unique et générale suffira

Dans cette expression, les puissances du premier terme, 14, du binôme sont évidemment affectées des mêmes coefficients que les puissances de A dans le développement de $(A+3)^4$. Cela posé, la différence des deux quatrièmes puissances, 14^4 et

$$14^4+12.14^3+54.14^2+108.14+81,$$

est $12.14^3+54.14^2+108.14+81$; cette différence comprend : d'une part, les puissances de 14 dont le degré est inférieur au degré proposé 4, ces puissances étant affectées des coefficients qu'ont les mêmes puissances de A dans le développement de $(A+3)^4$; d'autre part, le nombre 3 (*différence des nombres proposés*) élevé à la *quatrième* puissance (car le *nombre absolu* 81 est la *quatrième* puissance du nombre 3). De là nous déduisons la *Règle suivante :*

La différence des puissances semblables de deux nombres comprend : la différence de ces nombres élevée à la puissance proposée; plus la somme de toutes les puissances de degré inférieur du plus petit des deux nombres, ces puissances étant respectivement multipliées par les coefficients qu'ont les mêmes puissances de A dans le déve-

loppement d'un binôme élevé à la puissance proposée et ayant pour premier terme A et pour second terme la différence des nombres donnés.

Ainsi, la différence de 14^4 et 11^4 sera

$$12.11^3+54.11^2+108.11+81,$$

puisque la différence des puissances premières est 3. Et ainsi de suite.

pour traiter tous ces cas différents. Cette méthode est si simple qu'elle sera exposée en quelques lignes, et sans cet appareil de notations algébriques auquel doivent recourir les démonstrations difficiles. On en jugera après avoir lu le problème qui va suivre.

DEFINITION

Soit un binôme $A+3$, *dont le premier terme soit la lettre* A, *et le second un nombre : élevons ce binôme à une puissance quelconque, à la quatrième par exemple, ce qui donne*

$$A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81\,;$$

les nombres 12, 54, 108 *qui multiplient les diverses puissances de* A *et sont formés par la combinaison des nombres figurés avec le second terme,* 3, *du binôme, seront appelés* coefficients *de* A.

Ainsi, *dans l'exemple cité,* 12 *sera le coefficient du cube de* A; 54, *celui du carré, et* 108, *celui de la première puissance.*

Quant au nombre 81, on l'appellera *nombre absolu.*

LEMME

Soit un nombre quelconque 14, et un binôme $14+3$, dont le premier terme soit 14 et le second un nombre quelconque 3, de telle sorte que la différence des nombres 14 et $14+3$ soit égale à 3. Élevons ces nombres à une même puissance, la quatrième par exemple : la quatrième puissance de 14 est 14^4, celle du binôme, $14+3$, est

$$14^4+12.14^3+54.14^2+108.14+81.$$

MÉTHODE UNIQUE ET GÉNÉRALE POUR TROUVER LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION QUELCONQUE

Étant donnée, à partir d'un terme quelconque, une suite quelconque de termes d'une progression arbitraire, trouver la somme des puissances semblables de ces termes élevés à un degré quelconque.

Soit pris un nombre quelconque 5 comme premier terme d'une progression dont la raison, choisie arbitrairement, sera par exemple *trois;* soient considérés, dans cette progression, autant de termes que l'on voudra, par exemple les termes 5, 8, 11, 14, et soient ces termes élevés à une puissance arbitraire, mettons au cube. Il s'agit de trouver la somme des cubes $5^3+8^3+11^3+14^3$.

Ces cubes sont 125, 512, 1331, 2744; et leur somme est 4712. Voici comment on trouvera cette somme.

Considérons le binôme $A+3$ qui a pour premier terme A et pour second terme la différence de la progression.

Élevons ce binôme à la quatrième puissance, puissance immédiatement supérieure au degré proposé trois; nous obtenons l'expression

$$A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81.$$

Cela posé, considérons le nombre 17, qui, dans la progression proposée, suit immédiatement le dernier terme considéré 14. Prenons la *quatrième* puissance de 17, savoir 83 521, et retranchons-en :

Premièrement : la somme 38 des termes considérés $5+8+11+14$, multipliée par le nombre 108 qui est le coefficient de A;

Deuxièmement : la somme des carrés des mêmes termes 5, 8, 11, 14, multipliée par le nombre 54, qui est le coefficient de A^2.

Et ainsi de suite, au cas où il y aurait encore des puissances de A de degré inférieur au degré proposé *trois.*

Ces soustractions faites, on retranche encore la *quatrième* puissance du premier terme proposé, 5.

Enfin l'on retranche le nombre 3 (raison de la progression) élevé lui-même à la *quatrième* puissance et pris autant de fois que l'on considère de termes dans la progression, ici *quatre* fois.

Le reste de la soustraction sera un multiple de la somme cherchée; ce sera le produit de cette somme par le nombre 12, qui est le coefficient de A^3, c'est-à-dire le coefficient du terme A élevé à la puissance proposée *trois.*

Ainsi, dans la pratique, on devra former la quatrième puissance de 17, soit 83 521, puis en retrancher successivement :

Premièrement, la somme des termes proposés $5+8+11+14$, soit 38, multipliée par 108, c'est-à-dire le produit 4 104;

Puis la somme des carrés des mêmes termes, $5^2+8^2+11^2+14^2$, ou $25+64+121+196$, ou encore 406, qui, multipliée par 54, donne 21 924;

Puis le nombre 5 à la *quatrième* puissance, soit 625;

Enfin le nombre 3 à la *quatrième* puissance, soit 81, multiplié par *quatre,* ce qui donne 324. En résumé on doit retrancher les nombres 4 104, 21 924, 625, 324, dont la somme est 26 977. Otant cette somme de 83 521, il reste 56 544.

$+\ 5^2+\ 8^2+11^2+14^2$ multipliés par 54,
$+\ 5^3+\ 8^3+11^3+14^3$ multipliés par 12,
$+81\ +81\ +81\ +81$
$+\ 5^4$.

Si donc on retranche de part et d'autre, la somme :

$5\ +\ 8\ +11\ +14$ multipliés par 108,
$+\ 5^2+\ 8^2+11^2+14^2$ multipliés par 54,
$+81\ +81\ +81\ +81$
$+\ 5^4$;

Il reste 17^4 diminué des quantités précédentes savoir :

$-\ 5\ -\ 8\ -11\ -14$ multipliés par 108,
$-\ 5^2-\ 8^2-11^2-14^2$ multipliés par 54,
$-81\ -81\ -81\ -81$
$-\ 5^4$,

qui se trouve égal à la somme $5^3+8^3+11^3+14^3$ multipliée par 12. C. Q. F. D.

On peut donc présenter comme il suit l'énoncé et la solution générale du problème proposé.

SOMME DES PUISSANCES

Étant donnée, à partir d'un terme quelconque, une suite quelconque de termes d'une progression arbitraire, trouver la somme des puissances semblables de ces termes supposés élevés à un degré arbitraire.

Formons un binôme ayant pour premier terme A et pour second terme la différence de la progression donnée; élevons ce binôme au degré immédiatement supérieur au degré proposé, et considérons dans le développement obtenu les coefficients des diverses puissances de A.

Le reste ainsi obtenu est égal à la somme cherchée, 4 712, multipliée par 12; et, de fait, 4 712 multiplié par 12 égale 56 544.

La règle est, on le voit, d'une application facile.

Voici maintenant comment on la démontre.

Le nombre 17 élevé à la *quatrième* puissance, que l'on écrit 17^4, est égal à

$$17^4-14^4+14^4-11^4+11^4-8^4+8^4-5^4+5^4.$$

Dans cette expression, le *seul terme* 17^4 *figure avec le seul signe+ ; les autres termes sont tour à tour ajoutés et retranchés.*

Mais la différence des termes 17 et 14 est 3 ; de même la différence des termes 14 et 11, et des termes 11 et 8, et des termes 8 et 5. Dès lors, d'après notre lemme préliminaire :

17^4-14^4 égale $12.14^3+54.14^2+108.14+81$.

De même

14^4-11^4 égale $12.11^3+54.11^2+108.11+81$.

De même

11^4-8^4 égale $12.\ 8^3+54.\ 8^2+108.\ 8+81$.

De même

8^4-5^4 égale $12.\ 5^3+54.\ 5^2+108.\ 5+81$.

Le terme 5^4 n'a pas besoin d'être transformé.

On trouve alors comme valeur de 17^4 :

$$\begin{array}{l} 12.14^3+54.14^2+108.14+81 \\ +12.11^3+54.11^2+108.11+81 \\ +12.\ 8^3+54.\ 8^2+108.\ 8+81 \\ +12.\ 5^3+54.\ 5^2+108.\ 5+81 \\ +5^4, \end{array}$$

ou, *en intervertissant l'ordre des termes :*

$5+8+11+14$ multipliés par 108,

Élevons maintenant au même degré le terme qui, dans la progression donnée, suit immédiatement le dernier terme considéré. Puis retranchons du nombre obtenu les quantités suivantes :

Premièrement : Le premier terme donné dans la progression, — c'est-à-dire le plus petit des termes donnés, — élevé lui-même à la même puissance (immédiatement supérieure au degré proposé).

Deuxièmement : La différence de la progression, élevée à la même puissance, et prise autant de fois que l'on considère de termes dans la progression.

Troisièmement : Les sommes des termes donnés, élevés aux divers degrés moindres que le degré proposé, ces sommes étant respectivement multipliées par les coefficients des mêmes puissances de A dans le développement du binôme formé plus haut.

Le *reste* de la soustraction ainsi effectuée est un multiple de la somme cherchée : il la contient autant de fois qu'il y a d'unités dans le coefficient de la puissance de A dont le degré est égal au degré proposé.

AVIS

Le lecteur déduira lui-même les règles pratiques qui sont applicables dans chaque cas particulier. Supposons, par exemple, que l'on veuille trouver la somme d'un certain nombre de termes de la suite naturelle à partir d'un nombre arbitraire : voici la règle que l'on déduira de notre méthode générale :

Dans une progression naturelle partant d'un nombre quelconque, le carré du nombre immédiatement supérieur au dernier terme, diminué du carré du premier terme et du nombre des termes donnés, est égal au double de la somme desdits termes.

Soit donnée une suite quelconque de nombres consécutifs dont le premier est arbitraire, par exemple les *quatre* nombres 5, 6, 7, 8 : je dis que 9^2-5^2-4 est égal au double de $5+6+7+8$.

On obtiendra facilement des règles analogues donnant les sommes des puissances de degrés plus élevés et s'appliquant à toutes les progressions.

CONCLUSION

Ceux qui sont tant soit peu au courant de la doctrine des *indivisibles* ne manqueront pas de voir quel parti on peut tirer des résultats qui précèdent pour la détermination des aires curvilignes. Ces résultats permettront de carrer immédiatement tous les genres de paraboles et une infinité d'autres courbes.

Si donc nous étendons aux quantités continues les résultats trouvés pour les nombres, par la méthode ci-dessus exposée, nous pourrons énoncer les règles suivantes :

RÈGLES RELATIVES A LA PROGRESSION NATURELLE QUI COMMENCE PAR L'UNITÉ

La somme d'un certain nombre de lignes [11] *est au carré de la plus grande, comme 1 est à 2.*

La somme des carrés des mêmes lignes est au cube de la plus grande, comme 1 est à 3.

La somme de leurs cubes est à la quatrième puissance de la plus grande, comme 1 est à 4.

RÈGLE GÉNÉRALE RELATIVE A LA PROGRESSION NATURELLE QUI COMMENCE PAR L'UNITÉ

La somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette même puissance.

Je ne m'arrêterai pas aux autres cas, parce que ce n'est pas ici le lieu de les étudier. Il me suffira d'avoir énoncé en passant les règles qui précèdent. On découvrira les autres sans difficulté en s'appuyant sur ce principe qu'*on n'augmente pas une grandeur continue lorsqu'on lui ajoute, en tel nombre que l'on voudra, des grandeurs d'un ordre d'infinitude inférieur.* Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides ; ou — pour parler en nombres comme il convient dans un traité arithmétique, — les racines ne comptent pas par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes et les cubes par rapport aux carro-carrés. En sorte qu'on doit négliger, comme nulles, les quantités d'ordre inférieur.

J'ai tenu à ajouter ces quelques remarques, familières à ceux qui pratiquent les indivisibles, afin de faire ressortir la liaison, toujours admirable, que la nature, éprise d'unité, établit entre les choses les plus éloignées en apparence. Elle apparaît dans cet exemple, où nous voyons le calcul des *dimensions des grandeurs continues* se rattacher à la *sommation des puissances numériques.*

11. Pascal est au seuil du calcul intégral et, possédant déjà la notion des « ordres de grandeur », il a en vue la détermination des aires et volumes, par sommation d'éléments calculables. Ici, sommation de surfaces élémentaires déterminées par des ordonnées successives qui sont les « *lignes* » dont les longueurs forment la progression 1, 2, 3,...n.

CANON GENERALIS AD PROGRESSIONEM NATURALEM QUAE AB UNITATE SUMIT EXORDIUM.

Summa omnium in quolibet gradu est ad maximam in proximè superiori gradu, ut unitas ad exponentem superioris gradus.

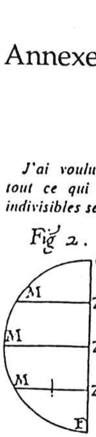
Non de Reliquis disseram, quia hic locus non est : haec obiter notavi; reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continuâ quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineae superficiebus, superficies solidis nihil adjiciunt : seu, *ut numericis, in numerico tractatu, verbis utar,* radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, etc., nihil apponunt. Quare, inferiores gradus, nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Haec, quae indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, quâ ea etiam quae remotissima videntur in unum addicat unitatis amatrix naturâ, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuae dimensionem*, cum *numericarum potestatum summâ* conjunctam contemplari licet.

Annexe II

Histoire de la roulette (10 octobre 1658)
ib. p. 135

J'ai voulu faire cet avertissement pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là.

Fig 2.



Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, la somme des lignes, *ou* la somme des plans; *et ainsi quand je considérerai par exemple (dans la fig. 2) le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression,* la somme des ordonnées, *qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.*

Annexe III

Pensée 308
éd. Lafuma; 793 éd. Brunschvicg (ib. p. 540)

308-*793* La distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité, car elle est surnaturelle.

Tout l'éclat des grandeurs n'a point de lustre pour les gens qui sont dans les recherches de l'esprit.

La grandeur des gens d'esprit est invisible aux rois, aux riches, aux capitaines, à tous ces grands de chair.

La grandeur de la sagesse, qui n'est nulle sinon de Dieu, est invisible aux charnels et aux gens d'esprit. Ce sont trois ordres différents, de genre.

Les grands génies ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire et leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles où elles n'ont pas de rapport. Ils sont vus, non des yeux mais des esprits. C'est assez.

Les saints ont leur empire, leur éclat, leur victoire, leur lustre et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent. Ils sont vus de Dieu et des anges et non des corps ni des esprits curieux. Dieu leur suffit.

Archimède sans éclat serait en même vénération. Il n'a pas donné des batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions. O qu'il a éclaté aux esprits.

J.-C. sans biens, et sans aucune production au dehors de science, est dans son ordre de sainteté. Il n'a point donné d'inventions. Il n'a point régné, mais il a été humble, patient, saint, saint, saint à Dieu, terrible aux démons, sans aucun péché. O qu'il est venu en grande pompe et en une prodigieuse magnificence aux yeux du cœur et qui voyent la sagesse.

Il eût été inutile à Archimède de faire le prince dans ses livres de géométrie, quoiqu'il le fût.

Il eût été inutile à N.-S. J.-C. pour éclater dans son règne de sainteté, de venir en roi, mais il y est bien venu avec l'éclat de son ordre.

Il est bien ridicule de se scandaliser de la bassesse de J.-C., comme si cette bassesse était du même ordre duquel est la grandeur qu'il venait faire paraître.
Qu'on considère cette grandeur-là dans sa vie, dans sa passion, dans son obscurité, dans sa mort, dans l'élection des siens, dans leur abandonnement, dans sa secrète résurrection et dans le reste. On la verra si grande qu'on n'aura pas sujet de se scandaliser d'une bassesse qui n'y est pas.

Mais il y en a qui ne peuvent admirer que les grandeurs charnelles comme s'il n'y en avait pas de spirituelles. Et d'autres qui n'admirent que les spirituelles comme s'il n'y en avait pas d'infiniment plus hautes dans la sagesse.

Tous les corps, le firmament, les étoiles, la terre et ses royaumes, ne valent pas le moindre des esprits. Car il connaît tout cela, et soi, et les corps rien.

Tous les corps ensemble et tous les esprits ensemble et toutes leurs productions ne valent pas le moindre mouvement de charité. Cela est d'un ordre infiniment plus élevé.

De tous les corps ensemble on ne saurait en faire réussir une petite pensée. Cela est impossible et d'un autre ordre. De tous les corps et esprits on n'en saurait tirer un mouvement de vraie charité, cela est impossible, et d'un autre ordre surnaturel.

Annexe IV

De l'esprit géométrique
(1657 ?, éd. 1776-79) (ib. p. 354)

Mais le même Euclide qui a ôté à l'unité le nom de nombre, ce qui lui a été permis, pour faire entendre néanmoins qu'elle n'est pas un néant, mais qu'elle est au contraire du même genre, il définit ainsi les grandeurs homogènes : « Les grandeurs, dit-il, sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre. » Et par conséquent, puisque l'unité peut, étant multipliée plusieurs fois, surpasser quelque nombre que ce soit, elle est de même genre que les nombres précisément par son essence et par sa nature immuable, dans le sens du même Euclide qui a voulu qu'elle ne fût pas appelée nombre.
Il n'en est pas de même d'un indivisible à l'égard d'une étendue; car non seulement il diffère de nom, ce qui est volontaire, mais il diffère de genre, par la même définition, puisqu'un indivisible multiplié autant de fois qu'on voudra, est si éloigné de pouvoir surpasser une étendue, qu'il ne peut jamais former qu'un seul et unique indivisible; ce qui est naturel et nécessaire, comme il est déjà montré. Et comme cette dernière preuve est fondée sur la définition de ces deux choses, indivisible et étendue, on va achever et consommer la démonstration.
Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.
Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles étant unis ne font pas une étendue.
Car, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie; et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisque autrement elles ne se toucheraient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point d'autres parties : donc ils n'ont pas de parties séparées; donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties.
On montrera la même chose de tous les autres indivisibles qu'on y joindra, par la même raison. Et partant un indivisible, multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas de même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre.
Voilà comment on démontre que les indivisibles ne sont pas de même genre que les nombres. De là vient que deux unités peuvent bien faire un nombre, parce qu'elles sont de même genre; et que deux indivisibles ne font pas une étendue, parce qu'ils ne sont pas du même genre.
D'où l'on voit combien il y a peu de raison de comparer le rapport qui est entre l'unité et les nombres à celui qui est entre les indivisibles et l'étendue.
Mais si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser : de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue. Et on en trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles non plus que les indivisibles d'étendue, et par la même raison. Et alors on trouvera une correspondance parfaite entre ces choses; car toutes ces grandeurs sont divisibles à l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'infini et le néant.
Voilà l'admirable rapport que la nature a mis entre ces choses, et les deux merveilleuses infinités, qu'elle a proposées aux hommes, non pas à concevoir mais à admirer; et pour en finir la considération par une dernière remarque, j'ajouterai que ces deux infinis, quoique infiniment différents, sont néanmoins relatifs l'un à l'autre, de telle sorte que la connaissance de l'un mène nécessairement à la connaissance

Annexe V

Pensée 418
(éd. Lafuma; 233 éd. Brunschvicg) (ib. p. 550-551)

418-*233* Infini rien.

Notre âme est jetée dans le corps où elle trouve nombre, temps, dimensions, elle raisonne là-dessus et appelle cela nature, nécessité, et ne peut croire autre chose.

L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien, non plus que un pied à une mesure infinie; le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant. Ainsi notre esprit devant Dieu, ainsi notre justice devant la justice divine. Il n'y a pas si grande disproportion entre notre justice et celle de Dieu qu'entre l'unité et l'infini.

Il faut que la justice de Dieu soit énorme comme sa miséricorde. Or la justice envers les réprouvés est moins énorme et doit moins choquer que la miséricorde envers les élus.

Nous connaissons qu'il y a un infini, et ignorons sa nature comme nous savons qu'il est faux que les nombres soient finis. Donc il est vrai qu'il y a un infini en nombre, mais nous ne savons ce qu'il est. Il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair, car en ajoutant l'unité il ne change point de nature. Cependant c'est un nombre, et tout nombre est pair ou impair. Il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini.

Ainsi on peut bien connaître qu'il y a un Dieu sans savoir ce qu'il est.

N'y a(-t-)il point une vérité substantielle, voyant tant de choses vraies qui ne sont point la vérité même?

Nous connaissons donc l'existence et la nature du fini parce que nous sommes finis et étendus comme lui.

Nous connaissons l'existence de l'infini et ignorons sa nature, parce qu'il a étendue comme nous, mais non pas des bornes comme nous.

Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Dieu, parce qu'il n'a ni étendue, ni bornes.

Mais par la foi nous connaissons son existence, par la gloire, nous connaitrons sa nature.

Or j'ai déjà montré qu'on peut bien connaître l'existence d'une chose sans connaître sa nature.

O. Tournez.

O. Parlons maintenant selon les lumières naturelles.

S'il y a un Dieu il est infiniment incompréhensible, puisque n'ayant ni parties ni bornes, il n'a nul rapport à nous. Nous sommes donc incapables de connaître ni ce qu'il est, ni s'il est. Cela étant qui osera entreprendre de résoudre cette question? ce n'est pas nous qui n'avons aucun rapport à lui.

Qui blâmera donc les chrétiens de ne pouvoir rendre raison de leur créance, eux qui professent une religion dont ils ne peuvent rendre raison; ils déclarent en l'exposant au monde que c'est une sottise, *stultitiam*, et puis vous vous plaignez de ce qu'ils ne la prouvent pas. S'ils la prouvaient ils ne tiendraient pas parole. C'est en manquant de preuve qu'ils ne manquent pas de sens. Oui mais encore que cela excuse ceux qui l'offrent telle, et que cela les ôte du blâme de la produire sans raison cela n'excuse pas ceux qui la reçoivent. Examinons donc ce point. Et disons : Dieu est ou il n'est pas; mais de quel côté pencherons-nous? la raison n'y peut rien déterminer. Il y a un chaos infini qui nous sépare. Il se joue un jeu à l'extrémité de cette distance infinie, où il arrivera croix ou pile. Que gagerez-vous? par raison vous ne pouvez faire ni l'un ni l'autre; par raison vous ne pouvez défaire nul des deux.

Ne blâmez donc pas de fausseté ceux qui ont pris un choix, car vous n'en savez rien. Non, mais je les blâmerai d'avoir fait non ce choix, mais un choix, car encore que celui qui prend croix et l'autre soient en pareille faute ils sont tous deux en faute; le juste est de ne point parier.

Oui, mais il faut parier. Cela n'est pas volontaire, vous êtes embarqués. Lequel prendrez-vous donc? Voyons; puisqu'il faut choisir voyons ce qui vous intéresse le moins. Vous avez deux choses à perdre : le vrai et le bien, et deux choses à engager : votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude, et votre nature deux choses à fuir : l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée puisqu'il faut nécessairement choisir, en choisissant l'un que l'autre. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude? Pesons le gain et la perte en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez vous gagnez tout, et si vous perdez vous ne perdez rien : gagez donc qu'il est sans hésiter. Cela est admirable. Oui il faut gager, mais je gage peut-être trop. Voyons puisqu'il y a pareil hasard de gain et de perte, si vous n'aviez qu'à gagner deux vies pour une vous pourriez encore gager, mais s'il y en avait 3 à gagner?

Il faudrait jouer (puisque vous êtes dans la nécessité de jouer) et vous seriez imprudent lorsque vou êtes forcé à jouer de ne pas hasarder votre vie pou en gagner 3 à un jeu où il y a pareil hasard de pert et de gain. Mais il y a une éternité de vie de bonheur Et cela étant quand il y aurait une infinité de hasards dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux, et vous agirez de mauvais sens, en étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité de hasards il y en a un pour vous, s'il y avait une infinité de vie infiniment heureuse à gagner : mais il y a ici une infinité de vie infiniment heureuse à gagner, un hasard de gain contre un nombre fini de hasards de perte et ce que vous jouez est fini. Cela ôte tout parti partout où est l'infini et où il n'y a pas infinité de hasards de perte contre celui de gain. Il n'y a point à balancer, il faut tout donner. Et ainsi quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison pour garder la vie plutôt que de la hasarder pour le gain infini aussi prêt à arriver que la perte du néant.

Car il ne sert de rien de dire qu'il est incertain si on gagnera, et qu'il est certain qu'on hasarde, et que l'infinie distance qui est entre la certitude de ce qu'on expose et l'incertitude de ce qu'on gagnera égale le bien fini qu'on expose certainement à l'infini qui est incertain. Cela n'est pas ainsi. Tout joueur hasarde avec certitude pour gagner avec incertitude, et néanmoins il hasarde certainement le fini pour gagner incertainement le fini, sans pécher contre la raison. Il n'y a pas infinité de distance entre cette certitude de ce qu'on expose et l'incertitude du gain' : cela est faux. Il y a, à la vérité, infinité entre la certitude de gagner et la certitude de perdre, mais l'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde selon la proportion des hasards de gain et de perte. Et de là vient que s'il y a autant de hasards d'un côté que de l'autre le parti est à jouer égal contre égal. Et alors la certitude de ce qu'on s'expose est égale à l'incertitude du gain, tant s'en faut qu'elle en soit infiniment distante. Et ainsi notre proposition est dans une force infinie, quand il y a le fini à hasarder, à un jeu où il y a pareils hasards de gain que de perte, et l'infini à gagner.

Cela est démonstratif et si les hommes sont capables de quelque vérité celle-là l'est.

Je le confesse, je l'avoue, mais encore n'y a(-t-)il point moyen de voir le dessous du jeu? oui l'Ecriture et le reste, etc. Oui mais j'ai les mains liées et la bouche muette, on me force à parier, et je ne suis pas en liberté, on ne me relâche pas et je suis fait d'une telle sorte que je ne puis croire. Que voulez-vous donc que je fasse? — Il est vrai; mais apprenez au moins que votre impuissance à croire vient de vos passions. Puisque la raison vous y porte et que néanmoins vous ne le pouvez, travaillez donc non pas à vous convaincre par l'augmentation des preuves de Dieu, mais par la diminution de vos passions. Vous voulez aller à la foi et vous n'en savez pas le chemin. Vous voulez vous guérir de l'infidélité et vous en demandez les remèdes, apprenez de ceux, etc. qui ont été liés comme vous et qui parient maintenant tout leur bien. Ce sont gens qui savent ce chemin que vous voudriez suivre et guéris d'un mal dont vous voulez guérir; suivez la manière par où ils ont commencé. C'est en faisant tout comme s'ils croyaient, en prenant de l'eau bénite, en faisant dire des messes, etc. Naturellement même cela vous fera croire et vous abêtira. Mais c'est ce que je crains. — Et pourquoi? qu'avez-vous à perdre? mais pour vous montrer que cela y mène, c'est que cela diminue les passions qui sont vos grands obstacles, etc.

Fin de ce discours.

Or quel mal vous arrivera(-t-)il en prenant ce parti? Vous serez fidèle, honnête, humble, reconnaissant, bienfaisant, ami sincère, véritable... A la vérité vous ne serez point dans les plaisirs empestés, dans la gloire, dans les délices, mais n'en aurez-vous point d'autres?

Je vous dis que vous y gagnerez en cette vie, et que à chaque pas que vous ferez dans ce chemin, vous verrez tant de certitude de gain, et tant de néant de ce que vous hasardez, que vous connaîtrez à la fin que vous avez parié pour une chose certaine, infinie, pour laquelle vous n'avez rien donné.

O ce discours me transporte, me ravit, etc. Si ce discours vous plaît et vous semble fort, sachez qu'il est fait par un homme qui s'est mis à genoux auparavant et après, pour prier cet être infini et sans parties, auquel il soumet tout le sien, de se soumettre aussi le vôtre pour votre propre bien et pour sa gloire; et qu'ainsi la force s'accorde avec cette bassesse.