Formation d'adultes et Histoire des Mathématiques

Xavier LEFORT
I.U.T. de Saint Nazaire
I.R.E.M. de Nantes

Les actions de formation d'adultes, si elles laissent toute priorité aux interventions relevant de la scolarité initiale, ne doivent pas pour autant être négligées. Les établissements secondaires n'ont pas, hélas, une réussite totale, et les enfants qui ne sont pas allés jusqu'au baccalauréat doivent avoir des possibilités ultérieures d'accéder à ce diplôme, voire à l'enseignement supérieur.

Il n'existe pas en France une structure de formation d'adultes semblable à l'Education Nationale. On trouve par contre beaucoup d'officines privées ou publiques, hors de tout plan d'ensemble. Ces établissements dispensent souvent un enseignement de qualité, qui est le fait soit de professeurs de métier, exerçant en général dans le Secondaire, soit de vacataires issus de diverses professions. Cet enseignement souffre alors d'être spécialisé et non spécifique, en ce sens, ou bien qu'il reproduit un enseignement type secondaire - donc non adapté à un public d'adultes, ou bien qu'il suit étroitement un objectif professionnel fixé.

Le Centre de Mise à Niveau de Saint Nazaire pratique depuis treize ans avec succès ce type de formation; ce n'est donc pas une expérience, pas plus que la coloration historique personnellement apportée à l'enseignement des mathématiques dans ce stage depuis trois ans.

Il convient donc d'envisager une manière spécifique de transmettre aux adultes les connaissances mathématiques. En particulier, tous les cheminements que peut suivre la formation initiale ne sont plus nécessaires; par contre, il faut aborder rapidement les méthodes mathématiques qui peuvent être rencontrées dans la conduite d'activités professionnelles.

I- Description du stage

A.- Le Centre

Le Centre de Mise à Niveau de l'Institut Universitaire de Technologie de Saint-Nazaire a été fondé en 1974, suite à un accord "Armée - Académie". La première ayant sélectionné parmi les jeunes gens appelés, et non titulaires du baccalauréat, ceux qui paraissaient aptes à reprendre leurs études. Si le Ministère des Armées, dès 1975, se retirait de l'expérience, la Région des Pays de Loire allouait un budget entrant dans le chapitre "Promotion Sociale". Ce budget permettait de financer le Centre et d'assurer une rémunération aux stagiaires, non seulement durant l'année passée au Centre, mais aussi pour les deux années que le stagiaire (en cas de succès) pouvait passer par la suite dans tout établissement d'enseignement supérieur. Ce schéma, malgré quelques difficultés de parcours, subsiste jusqu'à maintenant, à la nuance près que les salaires ne sont plus systématiquement assurés la première année et que le nombre de rémunérations pour les années ultérieures est très contingenté.

Les candidats sont recrutés sur un concours de niveau "Brevet des Collèges" (1). Ils doivent justifier d'au moins trois années d'activités salariées. En un an ils pourront acquérir le niveau baccalauréat et passeront l'Examen Spécial d'Entrée à l'Université (ESEU) (2). Par la suite, ils effectueront en général deux ans d'études en Institut Universitaire de Technologie (IUT) (3) ou en classe de Brevet de Technicien Supérieur (BTS) (3) ou alors suivront un stage de niveau équivalent dans un Centre de l'Association pour la Formation Professionnelle des Adultes (AFPA) (4).

Le Centre est installé dans les locaux de l'I.U.T. et profite de ses structures logistiques. Par ailleurs, il est régi par un "Conseil de Perfectionnement" fonctionnant comme un Conseil d'Administration, présidé par le Directeur de l'I.U.T. Deux stages cohabitent: l'un prépare à des études commerciales ou sociales (ESEU"A"), l'autre à des études technologiques et scientifiques (ESEU"B"). L'enseignement est assuré, soit par des personnels de l'Université, soit, par des professeurs de Lycées ou Collèges, soit par des vacataires exerçant une activité professionnelle non enseignante. Les programmes suivis sont ceux des différents ESEU; en ce qui concerne le stage scientifique, il s'agit du programme du baccalauréat D dans les matières suivantes: Mathématiques, Physique, Chimie. Un enseignement d' "Expression" assure la préparation des épreuves de "Français". Enfin un soutien important est prévu, effectué par un "animateur" disposant d'un nombre d'heures significatif (5).

B.- Les Stagiaires

Six cents personnes postulent chaque année pour les trente-quatre places (dis-sept en secondaire et dix-sept en tertiaire) proposées par le Centre.

La plupart sont refoulées, ne correspondant pas aux critères d'admission: nombre d'années d'activités salariées, niveau de départ trop faible ou trop fort (6). Une soixantaine est retenue dans chacune des deux filières pour des tests écrits. On choisira d'en convoquer plus de la moitié en entretien pour en garder dix-sept, les autres étant placés sur une liste d'attente.

Ces stagiaires sont donc sélectionnés, outre les critères administratifs d'entrée, sur des connaissances théoriques (tests écrits) et sur une aptitude ressentie au travail proposé par le Centre: insertion dans un groupe, motivation (en particulier, projet), dynamisme ... Par ailleurs des difficultés matérielles sont susceptibles d'intervenir (rémunération, logement) et de faire renoncer le candidat.

L'origine des postulants est diverse. L'état de l'emploi en France augmente bien sûr la demande, mais il faut noter que le niveau de connaissances requis n'est pas, hélas, possédé par beaucoup de chômeurs. On trouve surtout des jeunes travailleurs, œuvrant soit dans des secteurs sans avenir, soit dans des entreprises dont le cadre ne leur convient pas ou dans lesquelles aucune promotion n'est possible sans diplôme. Enfin certains stagiaires sont envoyés par leur entreprise, en congé-formation, dans le but de leurs donner une meilleure qualification tout en les conservant à l'intérieur de l'entreprise.

C.- Les Activités

Le programme de mathématiques est pris en charge par trois enseignants, disposant chacun de cinq heures hebdomadaires. Deux d'entre eux assurent les cours et les exercices d'application, le troisième intervient dans le cadre de l'animation, c'est-à-dire reprend les parties mal comprises, les illustre par des nouveaux exercices et dirige le traitement et la résolution des travaux proposés par ses deux collègues. L'origine de ces trois enseignants est significative: le premier est docteur-ingénieur en Génie Civil, le second certifié de mathématiques et le troisième diplômé d'études universitaires de technologie et spécialiste de formation d'adultes (7).

Chacun des deux premiers enseignants traite une partie du programme. Ainsi toute la partie "Analyse" (étude des fonctions réelles, tracé des courbes représentatives, initiation à l'intégration), précédée des indispensables préliminaires concernant la structure des nombres réels et les algorithmes de calcul, est vue par le premier enseignant. Le reste, c'est-à-dire nombres complexes, suites, probabilités et statistiques, mais surtout (bien que cela ne figure pas au programme), géométrie, est pris en charge par le second enseignant (8).

La première partie, abordée par un enseignant-chercheur de l'université, est illustrée de nombreux exemples de mathématiques appliquées, répondant ainsi aux questions d'utilité que pourraient poser les stagiaires. La seconde partie, si elle est discontinue, permet néanmoins de donner un aperçu plus théorique de la matière enseignée et l'utilisation de l'histoire des mathématiques est omniprésente, en ce qui concerne bien sûr l'origine des concepts, mais également par l'introduction de textes ou même par des exposés reprenant les processus utilisés historiquement par les mathématiciens.

II- Objectif

A.- Etat en début de stage

Les stagiaires possèdent en arrivant un bagage théorique de niveau "Collège". Sans doute faudra-t-il revenir sur un certain nombre de concepts, non ou mal acquis, mais l'obstacle essentiel à franchir ne sera pas celui du volume apparent des nouvelles notions à apprendre. A y regarder de plus près, le programme de terminale D n'est pas si chargé, et un adulte motivé, disposant d'un encadrement convenable, lors d'un stage d'une année, n'a pas de mal à l'assimiler. La véritable difficulté vient surtout de l'appréhension nourrie par le stagiaire lui-même vis-à-vis des mathématiques.

Cette appréhension a deux origines. La première est scolaire. On pourrait évoquer la qualité de l'enseignement dispensé dans certains collèges, mais les personnes recrutées au Centre sont dans leur quasi totalité en état d'échec scolaire, et cet échec, malgré les années, maintient son effet psychologique. La sélection dans le système scolaire se fait beaucoup par les mathématiques et ce sont les mauvais résultats dans cette matière qui ont empêché, au moins pour partie, nos stagiaires d'aller jusqu'au baccalauréat.

La seconde origine de cette crainte est évidemment d'origine médiatique. Les idées reçues véhiculées au sujet des mathématiques ne prédisposent pas le public d'un niveau culturel très moyen (et c'est dans ce public que se recrutent les candidats) à aborder sans peur cette matière. L'aura de mystère, voire d'ésotérisme couramment cultivée à son encontre, rend la tâche délicate à l'enseignant !

Pourtant, il est un facteur positif qui permettra entre autres au stagiaire de surmonter cet handicap: sa bonne volonté. Sélectionné en partie sur ce critère, il attendra des enseignants la "clé du mystère", charge à eux de montrer d'abord qu'il n'y a pas de mystère !

B.- Modifications de la vision des mathématiques

Il y a donc nécessité de modifier l'idée que se fait des mathématiques chaque stagiaire pour en faciliter l'apprentissage. Un goût personnel pour l'histoire de cette matière de la part de l'enseignant lui permet de l'utiliser à bon escient d'autant que cette utilisation combat trois *a priori* ressentis par le stagiaire.

1. L'aspect difficile et rebutant des mathématiques peut être contourné par l'insertion d'une notion déjà rencontrée, soit dans la scolarité antérieure, soit dans l'activité professionnelle, dans un cadre historique. Les raisons de son introduction dans une époque donnée, l'utilisation qui en a été faite, donnent d'autres éclairages, d'autres ouvertures.
2. L'immanence supposée des mathématiques est mise en défaut en particulier par quelques remarques anecdotiques, sur les modifications apportées à un concept mathématique durant son histoire [9].
3. L'ésotérisme apparent renforcé par le langage actuel des mathématiques s'estompe à l'étude de problèmes posés en termes concrets, trouvés dans des ouvrages anciens, et se référant immédiatement à une théorie mathématique (cf. Probabilités).

Les travaux des IREM en général, et du groupe inter-IREM "Histoire et Epistémologie des Mathématiques" ont suffisamment mis en lumière l'aspect positif de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement. Il n'est donc pas nécessaire d'en dire plus. Cependant le caractère particulier de l'auditoire concerné, le fait surtout qu'il ait déjà été confronté aux problèmes et notions exposés, et qu'il ait un passif important vis-à-vis de la matière enseignée, rendent à la fois plus nécessaire, mais aussi plus opérante la coloration historique donnée à l'enseignement.

C.- Mathématiques appliquées

Les mathématiques ont bien sûr dans ce stage un aspect "discipline de service" [10]. Elles doivent être rapidement confrontées à leur utilisation technique, d'autant que les stagiaires s'orienteront tous vers des filières courtes à objectif technologique. L'histoire peut encore avoir sa place dans l'évocation des rapports entre mathématiques et techniques, rappel dont on peut admettre qu'ils ont favorisé le développement des unes comme des autres.

Bien sûr, cette évocation contribue également à faire descendre les mathématiques de leur piédestal, mais elle permet aussi de se familiariser avec une notion nouvelle et d'en assimiler les divers aspects. Par exemple, la comparaison des méthodes calculatoires utilisées par les arpenteurs [11] avant et après les travaux de NAPIER au 17ème siècle éclaire le chapitre de la fonction logarithme d'une autre façon que l'aspect simplement analytique; même si cette façon est maintenant désuète, vu l'usage des calculatrices. Cependant lever l'obstacle venant des difficultés rencontrées par l'usage du quotient dans les opérations géométriques est un phénomène d'importance aisément perçu. La lecture de deux ou trois textes très courts familiarise le stagiaire à la fois avec une notion nouvelle et avec son utilisation.

Quelques textes d'exercices pourront être pris çà et là. Cependant la pratique des enseignants chercheurs de l'IUT fournit également beaucoup d'exemples immédiatement utilisables dans les cours (12) le travail collectif des trois enseignants de mathématiques évite d'ailleurs toute confusion et toute rupture dans l'esprit des stagiaires, chaque professeur intervenant sans inconvénient dans le travail des autres.

III- Place de l'Histoire dans le cours de Mathématiques

A.- La première semaine

Les stagiaires sont accueillis début septembre et les problèmes techniques (logement, ...) qu'ils rencontrent nécessitent l'aménagement d'une première semaine allégée. L'enseignant chargé de l'animation se contente alors d'une révision de notions générales, méthodes de calcul, définitions de base. Par ailleurs certains enseignements sont reportés à la seconde semaine (physique, chimie, analyse).

Pour rompre avec un exposé traditionnel, le premier cours de mathématiques sera une conférence sur le développement historique de cette matière. Même si les repères que peuvent avoir les stagiaires sont quelquefois assez vagues ou erronés, il est possible d'accrocher aux souvenirs qu'ils ont de certaines époques, des notions mathématiques ou des idées déjà acquises: la Grèce et la géométrie, l'obstacle des nombres réels, la filiation arabe et les débuts de l'algèbre, la Renaissance. Il est possible d'introduire d'ailleurs des thèses controversées sur l'importance des mathématiques arabes par exemple ou bien encore sur le développement parallèle des connaissances théoriques et de l'industrialisation au 19ème siècle.

A chaque fois un débat va s'instaurer. Non seulement chaque stagiaire voudra placer dans le déroulement historique un détail qui l'aura précédemment frappé, mais encore certaines affirmations pourront le heurter et provoquer une discussion. Il ne faut pas perdre de vue que le public est adulte et qu'un comportement scolaire de sa part pourrait le remettre en situation d'échec. Le rapport qu'il est possible d'instaurer à l'occasion de ce premier échange pourra faciliter la transmission ultérieure des connaissances.

B.- La Géométrie

Mise à part cette première intervention, il ne sera plus question de faire de cours spécifique d'histoire des mathématiques. Celle-ci n'interviendra donc qu'occasionnellement, comme illustration ou support, sans plus jamais faire l'objet d'un exposé.

Un premier exemple, important, est rencontré dans le cours de géométrie. La plupart des stagiaires ont suivi durant leur scolarité initiale le programme dit des "Mathématiques Modernes" (13) et ce programme a souvent contribué à l'augmentation des difficultés qu'ils ont pu rencontrer. Bien sûr, ils connaissent déjà beaucoup de résultats élémentaires ou mêmes élaborés. Il s'agit alors de les remettre en ordre, d'en démontrer de nouveaux en utilisant le principe hypothético-déductif classique: axiomes, définitions, propriétés et théorèmes. A l'occasion, le début du premier livre des *Eléments* d'EUCLIDE peut leur être distribué.

Tout le cours de géométrie suit le même procédé: chaque nouveau résultat est démontré à partir des axiomes et des propriétés précédemment établis. S'il y a lieu, l'introduction d'une nouvelle notion, dont l'aspect quotidien est acquis (les angles par exemple) fera l'objet de l'écriture d'un nouvel axiome ou d'une nouvelle définition.

Bien sûr, le temps sera insuffisant pour démontrer rigoureusement tous les théorèmes et toutes les propriétés; cependant la démarche de la démonstration sera indiquée, et explicitée si nécessaire, pour que l'auditoire fasse le lien entre le nouveau résultat et ce qui le précède et afin que ce résultat soit admis sans réserve.

Enfin, toute une série d'exercices et de problèmes sont obtenus en prenant des textes anciens, soit théoriques, soit en mathématiques appliquées. L'arpentage du 17ème siècle fournit beaucoup d'exercices de géométrie hors de toute considération angulaire et quelques théorèmes classiques sont repris à partir de textes anciens (14).

C.- Complexes

Une autre occasion de rencontrer l'histoire des mathématiques se trouve dans les différents aspects du corps des nombres complexes. Traditionnellement, les stagiaires rencontrent cette notion au travers de problèmes algébriques, pour arriver rapidement à l'écriture a + bi. Cependant, l'aspect géométrique, qui sera pour eux le plus important est l'objet d'une seconde introduction utilisant *L'essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires* par ARGAND (15).

Il est donc d'abord procédé à l'introduction des nombres complexes sous l'aspect algébrique. Les références historiques restent sans doute succinctes, mais l'occasion est donnée de tracer rapidement la filiation des problèmes liés aux équations jusqu'au 18ème siècle. La lecture du texte vient ensuite soit lors d'un cours, soit en préalable à un débat. C'est la seule fois qu'un texte relativement volumineux (huit pages) est utilisé. Cependant il est d'un abord aisé, et l'obstacle des notations d'époque se franchit assez vite. les stagiaires ne sont pas non plus déroutés par l'esprit du texte. En effet, le cours de géométrie qu'ils ont suivi auparavant insiste sur les résultats et les problèmes faisant intervenir la proportionnalité. Le théorème dit de THALES y est par exemple très valorisé. Introduire la racine carrée de -1 comme solution de $\frac{1}{x} = \frac{x}{-1}$ semble alors naturel, de même que son interprétation graphique.

Sans doute est-il important de replacer historiquement l'ouvrage, mais surtout de voir comment il s'inscrit à un carrefour de problèmes, les uns algébriques, les autres géométriques, et pourquoi il va permettre de développer un calcul géométrique. La compréhension du lien entre le nombre complexe et le concept de l'angle permet la connaissance et surtout l'usage de l'écriture $re^{i\theta}$ et du repérage polaire. On est surpris ensuite de voir comment la traduction de transformations géométriques en opérations algébriques est admise et pratiquée.

L'auditoire est habitué à la période pendant laquelle se fait cette lecture, aux références et anecdotes historiques. Il n'y a ni effet de surprise, ni rejet. Les stagiaires réagissent d'habitude avec sérieux et participent à toute discussion, avec souvent un désir de connaissance qu'il n'est pas toujours possible de satisfaire; à ce moment apparaît d'ailleurs une volonté de culture, plutôt que le désir d'acquérir un savoir immédiatement utilisable.

Conclusion

Le Centre (17) peut se prévaloir d'un excellent taux de réussite. De 1974 à juin 1986, 203 stagiaires ont suivi les cours dans le secteur secondaire, parmi eux 165 ont poursuivi des études supérieures et 38 sont retournés à la vie active, souvent d'ailleurs par manque de moyens financiers pour poursuivre. Les études suivies ont été pour la plupart couronnées de succès, les quelques échecs étant souvent le fait d'un excès de confiance ayant conduit au choix d'une filière trop difficile.

Ces succès et échecs sont la seule évaluation existante. Il y a sans doute un certificat de fin de stage accompagné d'un bulletin d'appréciations et de notes; mais celles-ci fournissent le seul critère de jugement sur le travail tant des stagiaires que des enseignants. L'effet de la "coloration historique" donnée aux cours ne fait donc l'objet d'aucune évaluation quantitative. Une conclusion prend donc le risque d'être subjective. Cependant, il est possible de constater une meilleure sérénité des stagiaires devant les épreuves de mathématiques proposées lors des examens et des concours. Si leur réussite n'est pas évidemment totale, j'espère que le chemin utilisé, pendant mes cours pour aborder les mathématiques, leur aura permis une meilleure compréhension et peut-être moins d'appréhension.

Notes

(1) "Brevet des Collèges", examen sanctionnant la fin des études du premier cycle d'études secondaires (moyenne d'âge: 15 ans environ).
(2) E.S.E.U.: ouvert à toute personne justifiant d'un certain nombre d'années d'activités salariées et donnant les mêmes droits que le baccalauréat.
(3) I.U.T. ou B.T.S.: cursus post-bac de niveau III, effectué le premier dans un cadre universitaire, le second en lycée.
(4) A.F.P.A.: dépendant du Ministère du Travail.
(5) 10 heures, sur un horaire hebdomadaire de 33 heures en moyenne.
(6) Les bacheliers, quel que soit le baccalauréat, ne peuvent prétendre à l'entrée du Centre.
(7) Dans l'ordre, M. THOMAS, M. LEFORT et Mme BATTISTELLA.
(8) Le programme se déroule en parallèle comme suit:
septembre-octobre: algèbre élémentaire d'une part, géométrie d'autre part.
novembre-décembre: étude de fonctions; géométrie vectorielle et analytique
janvier-février-mars: limites, logarithmes, exponentielles; nombres complexes, suites.
avril-mai-juin: équations différentielles, fonctions vectorielles; probabilités, statistiques, algèbre linéaire.
(9) A ce sujet, la seule place dans le Livre I des *Eléments* d'EUCLIDE, du premier résultat (Prop. 29) utilisant le fameux "axiome", relativise la géométrie euclidienne.
(10) cf. Article dans "*Mathématiques. Arts et techniques au 17ème*". Presses de l'Université du Maine. Le Mans, 1987.
(11) Géomètres experts du 17ème siècle.
(12) La recherche d'une droite de régression utilise bien souvent des données obtenues par les laboratoires de l'établissement.
(13) Programme mis en place sur avis de la commission LICHNEROWICZ, à la fin des années 60, et modifié à la fin des années 70.
(14) cf. Annexe 1.
(15) Référence du livre: "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*", ARGAND, 1806. Editions de 1971. Blanchard Paris. Texte en Annexe 2.
(16) Début janvier, dans un déroulement normal.
(17) Renseignements administratifs sur le Centre:
Centre de Promotion - I.U.T. de Saint Nazaire - 58, rue Michel Ange - 44606 Saint Nazaire Cedex.

Bibliographie

Ouvrages à la disposition des stagiaires

COLETTE J.P., *Histoire des Mathématiques.* Edition du Renouveau Pédagogique, Montréal, 1973.

DAHAN-DALMENICO, PEIFFER, *Routes et dédales.* Etudes Vivantes, Paris, 1982.

DAVIS P.J., HERSH R., *Univers mathématique.* Gauthier-Villars. Paris, 1985.

Equipe de l'IREM du Mans, *Mathématiques, arts et techniques au 17ème.* Université du Mans, 1987.

Groupe Inter-IREM, *La rigueur et le calcul.* Cedic, Paris, 1987.

Ouvrages anciens utilisés pour la préparation du cours

ABRAHAM LAUNAY, *Arithmétique, Arpentage universel,* 1625.

ARGAND, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires.* 1806. (Blanchard, Paris, 1971).

ARNAUD, *Nouveaux éléments de géométrie.* 1667.

CLAIRAUT, *Eléments de géométrie,* 1753. (Siloe Laval, 1987).

CLERMONT, *Géométrie pratique de l'Ingénieur ou l'Art de mesurer,* 1693.

EUCLIDE, *Eléments.* (traduction Peyrard), (Blanchard, Paris, 1956).

OZANAM, *Géométrie pratique ou l'Art de Mesurer.* 1689.

Annexe 1
Exercice donné aux stagiaires

Extrait de " *La géométrie Pratique de l'Ingénieur ou l'Art de mesurer*".
Clermont, 1693

p. 77 - **Corollaire 1**

En tout Triangle où l'on connoît deux Angles B, & C, avec un Côté oppofé à l'un de ces Angles, où celuy qui eft compris entre deux. On trouvera l'autre Angle A & les deux autres Côtez, de cette manière.
Ajoûtez les deux Angles connus B, &et C, en une fomme et ôtez en le produit 108 Degrez 50 Minutes de 180 Degrez valeur des 3angles d'un Triangle.

Le refte 71 Degrez 10 Minutez fera pour l'Angle A. Puis dites par Règle de trois. Si le Sinus droit de l'Angle B qui à 65 Degrez 30 Minutes donne le Côté oppofé A.C de 486 Toifes ou Piés. Que donnera le Sinus droit de l'Angle A. la Règle étant faite, il viendra au quatrième Terme. La Valeur du Côté B.C. Et fi vous voulez trouver le Côté A.B Dites, par une autre Règle de trois. Si le Sinus de l'Angle B donne le Côté oppofé A.C que donnera le Sinus de l'Angle C. il viendra au quatrième terme la Valeur du Côté A.B

p. 98 - Problème 51

Une ligne droite inacceffible & élevée à plomb telle que A.B étant propofée, trouver qu'elle eft la Longueur.

1. Suppofons que cette Ligne soit par exemple la Hauteur d'un Clocher duquel on ne peut approcher. Choififfez un Point C fur le Rés de chauffée, duquel vous puiffiez voir les extremitez A & B. Difpofez votre Inftrument Géometrique à ce Point de manière que par l'une des Règles, vous voyez le Point B & par l'autre le Sommet A remarquant la valeur de l'Angle A,CB que je suppose icy de 57 Degrez, fi on ôte ce nombre de 180 Degrez, le refte 123 fera pour l'Angle de fupplément A,C,D. Cela fait, prolongez vous fur l'alignement BC vers D d'une Grandeur à volonté comme icy de 16 Toises & dispofés vôtre Instrument Geométrique au Point D de manière que par l'une des Regles vous découvriez B ou C & par l'autre le Sommet A remarquant la valeur de l'Angle D qui a icy 32 Degrez 30 Minutes. Cette conftruction étant bien éxécutée, vous aurés dans le Triangle A.C.D deux Angles & le Côté C.D par le moyen dequoy vous trouverés A.C ainfi que l'enfeigne le premier Corollaire de la page 77. De plus l'Angle du Point B etant droit on aura deux Angles & un Côté dans

le Triangle A.B.C à l'aide dequoy on trouvera B.A comme l'enfeigne le même Corollaire.

Calculer B.A

Note: Le "sinus droit" n'est autre que le sinus actuel.

Annexe 2

ESSAI

SUR UNE MANIÈRE DE REPRÉSENTER

LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS

LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES,

PAR R. ARGAND.

3.° Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$

$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

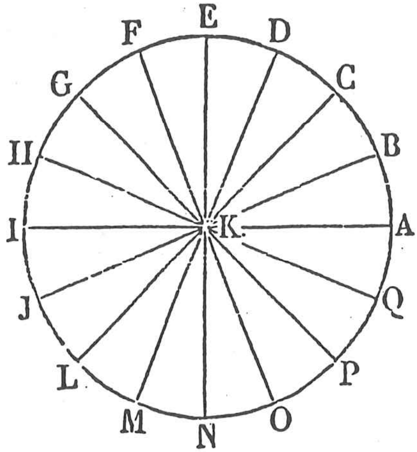
$$+1 : +x :: +x : -1.$$

On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de o la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs au-quel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (*fig.* 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.



comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Par une marche analogue, on pourra insérer de nouvelles moyennes proportionnelles entre les quantités dont il vient d'être question. En effet, pour construire la moyenne proportionnelle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KE}$, il faudra tirer la ligne CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales, et la moyenne cherchée sera $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. La ligne GKP donnera également les moyennes entre $\overline{KE}$ et $\overline{KI}$ ou entre $\overline{KA}$ et $\overline{KN}$. On obtiendra de même les quantités $\overline{KB}$, $\overline{KD}$, $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$ pour moyennes entre $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ et $\overline{KE}$,..., et ainsi de suite. On pourra pareillement insérer un plus grand nombre de moyennes proportionnelles entre deux quantités données, et le nombre des constructions qui pourront résoudre la question sera égal au nombre des rapports que présente la progression cherchée. S'il s'agit, par exemple, de construire deux moyennes, $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB},$$

il faut qu'on ait

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB},$$

le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases AK, PK, QK. Or on peut y

Fig. 2.

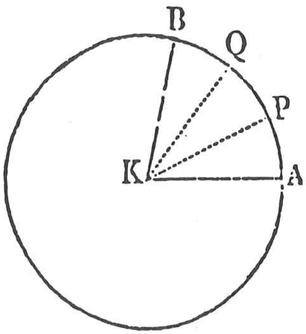
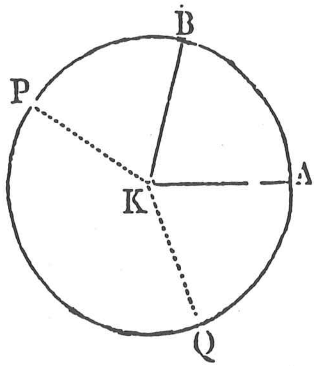
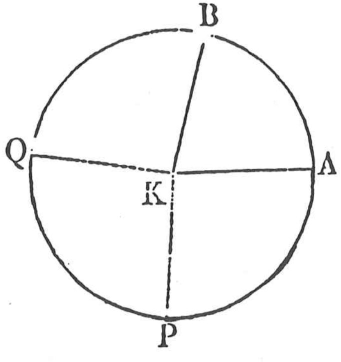


Fig. 2 *bis*.



parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales : 1° l'angle AKB ; 2° l'angle AKB, plus une circonférence ; 3° l'angle AKB, plus deux circonférences,

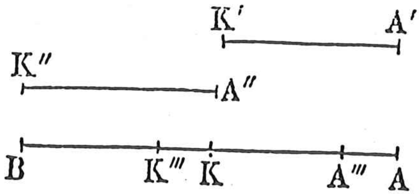
Fig. 2 *ter*.



ce qui donnera les trois constructions représentées par les *fig.* 2, 2 *bis*, 2 *ter* (*).

5. Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$,..., il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique K; mais que ces relations ont également lieu, si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{KA}$, désigne en général une grandeur égale à KA, et prise dans la même direction, comme $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, $\overline{K'''A'''}$, $\overline{BK}$,... (*fig.* 3).

Fig. 3.



(*) Le principe sur lequel se fondent ces constructions, énoncé d'une manière générale, consiste en ce que le rapport de deux rayons $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, faisant entre eux un angle QKP, dépend de cet angle, lorsque l'on considère ces rayons comme tirés dans une certaine direction, et que ce rapport est le même que celui de deux autres rayons $\overline{KR}$, $\overline{KS}$, faisant entre eux le même angle; mais, quoique ce principe soit, en quelque manière, une extension de celui sur lequel on établit le rapport géométrique entre une ligne positive et une ligne négative, on ne le présente ici que comme une hypothèse, dont il restera à établir la légitimité, et dont, jusque-là, les conséquences devront être confirmées par une autre voie.

En effet, en suivant, à l'égard de cette nouvelle espèce de grandeurs, les raisonnements qui ont été faits plus haut, on verra que, si $\overline{KA}$, $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$,... sont des unités positives, $\overline{AK}$, $\overline{A'K'}$, $\overline{A''K''}$,... seront des unités négatives; que la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1 pourra être exprimée par une ligne quelconque, égale aux précédentes, perpendiculaire à leur direction, et qu'on pourra prendre à volonté dans l'un de ses deux sens, et ainsi de suite. On peut, pour aider les idées à se fixer, considérer un cas particulier, comme, par exemple, si l'on désigne par $\overline{KA}$ une force déterminée prise pour unité, et dont l'action s'exerce sur tous les points possibles, parallèlement à KA et dans le sens de K à A, cette unité pourra être exprimée par une ligne parallèle à KA, prise à partir d'un point quelconque. L'unité négative sera une force égale en action, et dont l'effet a lieu parallèlement à la même ligne, mais dans le sens de A à K, et pourra pareillement être exprimée par une ligne partant d'un point quelconque, laquelle sera prise en sens contraire de la précédente. Or il suffit que les qualités de positives et de négatives, que nous attribuons aux grandeurs d'une certaine espèce, dépendent de directions opposées entre lesquelles il en existe une moyenne, pour qu'on puisse y appliquer les idées développées ci-devant à l'égard des rayons partant d'un centre unique, et concevoir entre toutes les lignes qui représenteront une telle espèce de grandeurs, les mêmes relations qu'ont offertes ces rayons.

6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$,..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des lignes *absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction

7. En rapportant aux dénominations d'usage les diverses espèces de lignes en direction qui s'engendrent d'une unité primitive $\overline{KA}$, on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

(*) L'expression de *lignes en direction* n'est qu'une abréviation de cette phrase : *lignes considérées comme appartenant à une certaine direction.* Cette remarque indique qu'on ne prétend point fonder de nouvelles dénominations, mais qu'on emploie cette façon de s'exprimer soit pour éviter la confusion, soit pour abréger le discours.