L'histoire comme source de problèmes

Claudine KAHN
Professeur de Mathématiques
Lycée M. Curie - Strasbourg
I.R.E.M. de Strasbourg

Les rubriques de "Travaux Pratiques" constituent une des nouveautés des programmes de Première et Terminale. Les commentaires en soulignent l'importance qualitative et quantitative dans l'apprentissage des Mathématiques; ils en précisent le but - travail personnel et rôle formateur des activités de résolution de problèmes - et le fonctionnement - mises en œuvre de techniques, développement des savoir-faire et illustration d'idées mathématiques -

Par ailleurs, depuis 1986, les nouveaux programmes mettent l'accent sur l'introduction d'une perspective historique qui peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique.

L'IREM de Strasbourg a publié deux brochures de "Travaux Pratiques" l'une destinée à la classe de Première (élèves âgés de 17 ans), l'autre à celle de Terminales (élèves âgés de 18 ans) qui essaient de répondre aux différents impératifs cités ci-dessus. Chacune est composée de plus de trente cinq sujets présentés sous la forme d'activités dirigées directement utilisables par les élèves, de difficultés et de longueurs variées, mais de quatre à six pages pour la plupart d'entre eux.

Voici la liste de ces documents qui puisent leur source dans des problèmes historiques.

1- Approximations

Le travail proposé commence par l'étude d'un texte d'EULER de 1748 et sa mathématisation dans un langage contemporain. Il se poursuit par la présentation d'autres procédés - dont celui de NEWTON - pour approcher la racine carrée d'un entier et sur des cas numériques compare les rapidités de convergence des différentes suites introduites avec les valeurs fournies par une calculatrice.

2- Second degré en continu

Ce document étudie un algorithme d'approximation de la racine positive de certaines équations du second degré. L'exemple historique de NEWTON, commenté par LAGRANGE, montre que la validité de cet algorithme s'étend à des équations du troisième degré.

3- Irrationnels

Ici est décrit l'algorithme d'EUCLIDE, concernant l'étude du rapport de deux longueurs. Il conduit au développement en fraction continue d'un irrationnel, en passant par l'exemple historique d'antiphérèse infinie du rapport diagonale au côté dans un pentagone régulier.

4- Exemples de calculs d'aire

Parmi les procédés de calculs approchés par encadrements de l'aire de domaines limités par des segments de droites et des arcs de courbes, est exposé celui d'ARCHIMÈDE, qui construit les polygones inscrits et circonscrits au domaine étudié, ici un arc de parabole et l'une de ses cordes.

5- La copie de BERGSON

A partir de la copie de BERGSON au Concours Général de 1876, alors qu'il était élève au lycée Fontanes, nous demandons aux élèves de lire le raisonnement, de le comprendre et de voir s'ils donneraient, avec leurs connaissances, les mêmes explications, que BERGSON sur la forme et l'aire de la section d'un cube par un plan perpendiculaire à une de ses diagonales selon ses différentes positions.

6- Un problème de NAPOLÉON

Ce document présente la solution que donna l'abbé MASCHERONI en 1797 à BONAPARTE au problème de la recherche du centre d'un cercle à l'aide d'un compas.

7- Les autoroutes de Monsieur FERMAT

Etant donné un triangle, trouver le point qui réalise le minimum de la somme des distances aux trois sommets; le problème a été posé par Pierre FERMAT et résolu par TORRICELLI.

8- Le problème de FAGNANO

En 1775 le comte FAGNANO DEI TASCHI pose le problème suivant: ABC est un triangle dont les angles sont aigus. Est-il possible de choisir les points P, Q, R respectivement sur [BC], [CA] et [AB] de sorte que le périmètre du triangle PQR soit minimum ?

9- Trajets en temps minimum

Et l'on retrouve une des lois de DESCARTES sur la réfraction en appliquant le principe de FERMAT sur le chemin optique suivi par la lumière.

10- La duplication du cube

Le vieux problème a conduit DIOCLES à imaginer une courbe permettant la construction la plus générale de $\sqrt[3]{n}$.

11- Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ par la méthode de Newton

12- Paradoxe

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat connu sous le nom de paradoxe de SCHWARZ (1890): on peut inscrire dans un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h un polyèdre d'aire latérale arbitrairement grande.

13- Un calcul d'aire dans l'évolution historique des mathématiques

Avant que le calcul intégral ne prenne son essor, FERMAT obtint quelques résultats de calculs d'aires. En utilisant des suites géométriques, il réussit à évaluer l'aire comprise entre la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow x^n$ $(n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$, l'axe des abscisses et certaines frontières verticales.

14- Calcul d'aires: Méthode de SIMPSON et Méthode de HERMITE

15- Calcul numérique et fonction exponentielle

La résolution approchée d'une équation différentielle conduit à la méthode d'EULER, qui revient à calculer une intégrale par la méthode des rectangles.

16- Construction à la règle et au compas de polygones réguliers

Sont exposées ici, la construction du pentagone et celle du polygone régulier à dix-sept côtés. Pour la seconde les calculs dans l'ensemble des racines dix-septièmes de l'unité sont dûs à GAUSS et les calculs trigonométriques qui conduisent alors à la construction sont dûs à RICHMOND.

17- La trisection de l'angle

Cette fiche vise à donner un aperçu historique des différentes méthodes de construction point par point d'une trisectrice: bande de papier et méthode d'ARCHIMÈDE, trisecteur inventé par LAISANT, trisectrice de MAC-LAURIN.

18- Combien de solutions pour une équation du troisième degré ?

Le texte intégral du document remis aux élèves est donné à la suite.

Combien de solutions pour une équation du troisième degré ?

I - Introduction

Vous avez déjà appris à résoudre une équation du second degré; mise sous la forme

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$$

ses solutions sont celles de l'équation

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

Ainsi lorsque les coefficients a, b et c sont tels que $b^2 - 4ac > 0$, l'équation (1) admet deux solutions x_1 et x_2 qui sont:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Question 1

Que se passe-t-il lorsque $b^2 - 4ac < 0$? et lorsque $b^2 - 4ac = 0$?

Une telle équation est déjà moins simple à résoudre qu'une équation du premier degré - qui peut être mise sous la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ - et la difficulté va croître avec le degré de l'équation.
Nous allons nous occuper ici de la résolution des équations polynomiales de degré 3. Une telle équation peut être écrite sous la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

II - Historique

* Le premier problème célèbre, conduisant à la résolution d'une équation du troisième degré, qui fut posé est celui de la "duplication du cube":

> Un cube servant de piédestal pour une statue est estimé trop petit. Il faut construire un autre cube dont le volume soit double du premier.

Ainsi, avec nos notations actuelles, A étant l'arête du premier cube, il s'agit de trouver x tel que $x^3 = 2A^3$.

* MENECHME, élève de PLATON (vers - 350), a été amené à résoudre une telle équation à propos d'un autre problème:

Etant donnés deux nombres A et B, déterminer deux nombres x et y tels que: $\frac{A}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{B}$. x et y vérifient donc: $x^2 = Ay$ et $xy = AB$, et x est alors solution de $x^3 = A^2 B$.

Question 2

Pour quelle valeur de B retrouve-t-on l'équation relative au problème de la duplication du cube $x^3 = A^2 B$?

Pour résoudre le problème, MENECHME a utilisé l'intersection de deux courbes géométriques. Ainsi, en considérant la parabole d'équation $y = \frac{1}{A} x^2$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{AB}{x}$, l'abscisse du point d'intersection de ces courbes est solution de l'équation $x^3 = A^2 B$.

* ARCHIMEDE (vers -250) a posé le problème suivant:

Partager, à l'aide d'une découpe plane, une sphère pleine en deux parties telles que les volumes obtenus soient dans un rapport donné (Voir Annexe).

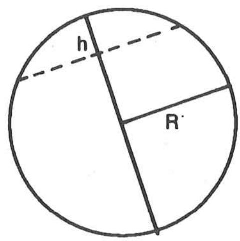
ARCHIMEDE est alors amené à résoudre une équation de la forme $x^3 + 4a = 3x^2$ (en utilisant nos notations actuelles). Son exposé conduisant à cette relation est trop long pour être donné ici mais en voici une autre explication.

Si l'une des parties a pour hauteur $h \le R$, l'autre a pour hauteur $h' = 2R - h \ge R$. Soit V_1 le volume de la portion de hauteur h et V'_1 celui de la portion de hauteur h'. Il s'agit donc de déterminer h tel que

$$\frac{V_1}{V'_1} = k \ (k \le 1) .$$

Si V désigne le volume de la sphère

$$K = \frac{V_1}{V - V'_1} \text{ donc } \frac{V_1}{V} = \frac{k}{k + 1} .$$



Or $V_1 = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h)$, (à admettre) , et $V = \frac{4 \pi R^3}{3}$ donc

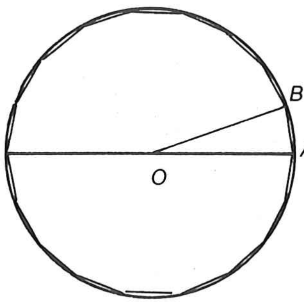
$$\frac{h^2 (3R - h)}{4R^3} = \frac{k}{k + 1} \quad \text{c'est-à-dire } h^3 + 4 \frac{k}{k + 1} R^3 = 3Rh^2 .$$

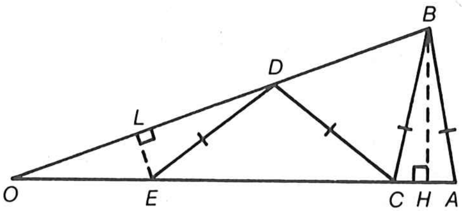
En se référant de préférence à la sphère, on peut poser:

$$x = \frac{h}{R} \quad \text{et} \quad \frac{V_1}{V} = \frac{k}{k+1} = a.$$

On obtient l'équation: $x^3 + 4a = 3x^2$.

* Dans les écrits des Chinois, des Hindous, des Arabes, on rencontre bien d'autres équations du troisième degré avec un procédé pour résoudre chacune d'elles. Dans chacune de ces équations, les coefficients sont des nombres précisés et positifs.
Exemple: ABU-L-GUD (fin du 10ème siècle) ramène le problème de la connaissance du côté d'un polygone régulier de 18 côtés inscrit dans un cercle de rayon unité à celui de la résolution de l'équation: $x^3 + 1 = 3x$.





Voici sa méthode: dans le triangle élémentaire OAB, il inscrit une ligne brisée ABCDE comme l'indique la figure et telle que AB = BC = CD = DE .

Exercice 1:
1/ Calculer les angles du triangle OED. Que peut-on en déduire pour OE ?
2/ En considérant les triangles OAB et BCA, démontrer l'égalité

$$(1) \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{OA}$$

3/ Démontrer l'égalité

$$(2) \qquad \frac{OH}{OB} = \frac{OL}{OE}$$

4/ Exprimer OH et OL en fonction de OA et AB. (Indication: $OH = OA - \frac{1}{2}AC$).
5/ On pose $OA = 1$ et $AB = x$. Démontrer que x vérifie l'égalité $x^3 + 1 = 3x$.

Exercice 2:
Dessiner un polygone régulier de 18 côtés inscrit dans un cercle ayant un rayon de 1 dm (on pourra utiliser le rapporteur). Mesurer un côté x de ce polygone et exprimer sa mesure en dm. Comparer $x^3 + 1$ et $3x$.

Mais c'est Omar AL-KHAYYAM (11ème siècle) qui donne la méthode de résolution de chacune des équations du troisième degré en utilisant l'intersection d'une parabole avec une hyperbole ou avec un cercle. Comme à cette époque on ne considérait que des nombres positifs, il y avait 14 équations distinctes. En voici quelques-unes:
$x^3 = c$, $x^3 + bx = c$, $x^3 + c = bx$, $x^3 = bx + c$, $x^3 + ax^2 = c$, $x^3 + ax^2 + bx = c$.

Exercice 3:
Trouver les autres formes d'équation.

Exercice 4:
1/ Dessiner la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.
2/ Trouver une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse x_0 d'un point d'intersection de ces deux courbes.
3/ Donner une équation du troisième degré dont x_0 est solution.

Exercice 5:
Soit à résoudre l'équation $2x^3 + x^2 - x - 3 = 0$.
Proposer une méthode pour obtenir une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de cette équation.

Ce sont les Italiens qui ont pris la succession des Arabes dans cette étude. Nicolo TARTAGLIA (1500-1557), Girolamo CARDANO (où Jérôme CARDAN (1501-1576)) et Rafaele BOMBELLI (vers 1526-1573) ont abouti à la résolution algébrique des équations du troisième degré et à l'écriture avec radicaux des solutions d'une telle équation.

III - Formule de TARTAGLIA - CARDAN

En 1530, TARTAGLIA réussit à résoudre une certain nombre d'équations du troisième degré que Jahanes COLLA lui avait proposé. CARDAN demanda à TARTAGLIA de lui communiquer sa découverte, ce dernier lui donna la clé sous forme d'un poème de trois strophes dont voici la première:

Quando che'1 cubo le cose appresso	
Se aggualia a qualche numero discreto	$x^3 + cx = d$
Tròva mi due altri differente in esso	
Dappoi terrai questo per consulto	$a, b : a - b = d$
Che'1 lor produtto sempre sia eguale	$ab = \dfrac{c^3}{3^3}$
Al terzo cubo delle cose netto	
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sostratti	$x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$
Varra la tua cosa prinzipale.	

Jérôme CARDAN donne une étude complète de la résolution algébrique des équations du troisième degré dans l'*Ars Magna* publié en 1545. Il traite les 13 équations, autres que $x^3 = c$, que vous avez écrites dans l'exercice 3.
Considérons l'équation $x^3 + cx = d$ $(c > 0$ et $d > 0)$.
Voici - quelque peu modifiée pour en simplifier l'exposé - la façon dont CARDAN la résout.

Méthode:
On pose $x = u + v$
L'équation $x^3 + cx = d$ s'écrit $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + c) = d$.
Si deux nombres u et v sont tels que $3uv + c = 0$ et $u^3 + v^3 = d$ alors ils vérifient $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + c) = d$ et $u + v$ est une solution de l'équation $x^3 + cx = d$.
On est donc amené à chercher deux nombres u et v tels que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = d \\ uv = -\dfrac{c}{3} \end{cases}$$

Si u et v existent u^3 et v^3 vérifient
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = d \\ u^3v^3 = -\dfrac{c^3}{27} \end{cases}$$

et sont donc solutions de l'équation $y^2 - dy - \dfrac{c^3}{27} = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = d^2 + \dfrac{4c^3}{27}$

Il est strictement positif donc cette équation admet deux solutions distinctes u^3 et v^3.

Exercice 6:
Calculer u^3 et v^3 en fonction de c et d. En déduire x.

Voici la règle énoncée par CARDAN et sa traduction algébrique en vis-à-vis (extrait d'une brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse).

Règle

$$x^3 + cx = d \qquad (1)$$

Le tiers du nombre de la chose au cube étant obtenu on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et du tout on extrait la racine que l'on met de côté.

$$\frac{c}{3} \ ; \ \frac{d}{2} \ ; \ \left(\frac{c}{3}\right)^3 \ ; \ \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \ ; \ \sqrt{\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Le demi-nombre que l'on a déjà élevé au carré, tu ajoutes ou tu enlèves à l'autre; tu as le binôme avec son apotome.

$$\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}} \ ; \ -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}}$$

En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la chose.

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}}$$

Remarque:
CARDAN fait les calculs en ayant $x = u - v$, et dans le poème de TARTAGLIA u correspond à $\sqrt[3]{a}$ et v correspond à $\sqrt[3]{b}$.

Exemple:

Un cube et 6 positions égale 20.	$x^3 + 6x = 20$
2 est le tiers de 6	$2 = \frac{6}{3}$
Son cube est 8	$2^3 = 8$
10 est la moitié du nombre	$10 = \frac{20}{2}$
10 par lui-même donne 100 100 plus 8 donne 108	$10^2 = 100$ $100 + 8 = 108$
Extrait la racine de 108: $\mathcal{R}_c$ 108	$\sqrt{108}$

En ajoutant, en soustrayant le demi-nombre 10 on obtient:

le binôme $\mathcal{R}_c$ 108 p 10 — $\sqrt{108}+10$

l'apotome $\mathcal{R}_c$ 108 m 10 — $\sqrt{108}-10$

La $\mathcal{R}_c$ v:cu. de l'apotome est inférieure à celle du binôme, leur différence est la valeur de la chose:

$\mathcal{R}_c$ v:cu. $\mathcal{R}_c$ 108 p 10 m $\mathcal{R}_c$ v:cu. $\mathcal{R}_c$ 108 m 10

Comme

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}-10} < \sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Mais considérons maintenant l'équation $x^3 = cx + d$ $(c > 0$ et $d > 0)$.
La formule de CARDAN va devenir:

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}-\frac{c^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}-\frac{c^3}{27}}}$$

Exercice 7:
Utiliser cette formule dans le cas de l'équation $x^3 = 9x + 12$.

Exercice 8:
1/ Que se passe-t-il dans le cas de l'équation $x^3 = 19x + 30$.
2/ Résoudre cette équation après en avoir trouvé une racine évidente.

Ainsi certaines équations qui admettent pourtant une solution positive, ne peuvent être résolues par la méthode de CARDAN.
C'est BOMBELLI, avec l'introduction des nombres imaginaires qui permit de mener à son terme la résolution algébrique des équations du troisième degré. Mais ceci dépasse le niveau des connaissances de première. Par contre, de nouvelles connaissances en Analyse vous permettent de résoudre avec très bonne approximation, les équations du troisième degré et bien d'autres.

IV - Résolution par valeurs approchées

Soit à résoudre dans **R** l'équation:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad , \quad a \neq 0 \ .$$

a étant non nul, ses solutions sont celles de l'équation

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \ .$$

Première étape:

On pose $x = X + \alpha$ et on cherche α de telle sorte que le monôme du second degré soit annulé. On obtient alors une équation, dont l'inconnue est X, de la forme: $X^3 + pX + q = 0$.

Exercice 9:
Trouver la valeur de α et les coefficients p et q dans le cas de l'équation:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 5 = 0$$

Nous sommes maintenant en présence du problème: résoudre dans **R** une équation de la forme: $X^3 + pX + q = 0$.

Deuxième étape:

On considère la fonction $f : X \to X^3 + pX + q$.

Exercice 10:
Etudier les variations de f.
(Deux cas se présentent. Donner le tableau de variations de f dans chacun de ces deux cas).

Question 3

Lorsque $p \geq 0$, que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation $f(X) = 0$

Exercice 11:
Donner la représentation graphique de la fonction $f : X \to X^3 + X + 3$ et une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f(X) = 0$.

Question 4

Lorsque $p < 0$, quelle va être l'allure de la courbe ? Combien de solutions voyez-vous pour l'équation $f(X) = 0$?

Exercice 12:
1/ Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0$$

2/ Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0$$

3/ Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$$

Exercice 13:

Calculer:

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$$

A quelle condition une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$ admet-elle trois solutions distinctes ?

Exercice 14:

Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune des solutions de l'équation $x^3 - 6x + 1 = 0$.

Exercice 15:

Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune des solutions de l'équation $2x^3 - 12x^2 + \frac{21}{2}x + 14 = 0$.

Exercice 16:

1/ Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune des solutions de l'équation $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$.

2/ Les solutions x_1, x_2 et x_3 - dans l'ordre croissant - de cette équation sont positives.

Donner une valeur approchée de $\alpha = \sqrt{x_1}$, $\beta = \sqrt{x_2}$, $\gamma = \sqrt{x_3}$.

3/ Inscrire dans un cercle de rayon 1 dm, un heptagone (7 côtés) régulier convexe ABCDEFG.

Donner une valeur approchée de la mesure en dm de AB, de AC, et de AD.

Comparer ces valeurs à α, β et γ.

V - Petit intermède d'Analyse

Résoudre l'équation $x^3 + cx = d$ avec c et d réels, c'est chercher les zéros de la fonction $f : x \rightarrow x^3 + cx - d$.

Exercice 17:
1/ Si $c \geq 0$ que peut-on dire du nombre de zéros de l'équation $f(x) = 0$?
2/ Si $c < 0$ calculer $f\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)$;

et discuter suivant le signe de $\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

VI - Retour à la Renaissance

Dans son *Algebra parte maggiore dell arithmetica divisa intre libri* écrit en italien et paru à Bologne en 1572, Rafaele BOMBELLI trouve une solution à la contradiction levée par le cas irréductible.

Il étudie l'exemple de l'équation: $\boxed{x^3 - 15x = 4}$ (1)

La formule de CARDAN s'écrit ici:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 5^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 5^3}}$$

soit:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Autrement dit, la formule de CARDAN conduit à une impossibilité: on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif.

BOMBELLI a l'audace de la prendre en considération

> "Cette sorte de racine carrée a pour son algorithme des opérations fort différentes des autres et a un nom différent [...] (il) ne peut pas être appelé, ni plus, ni moins, mais il peut être appelé (più di meno) plus de moins quand il a été ajouté, et quand il a été retranché il sera appelé (meno di meno) moins de moins".

(Voir *Mathématiques au fil des âges*).

Il énonce alors les règles sur ce que nous pourrions écrire $\sqrt{-1}$ et qui sera noté plus tard i, de sorte que l'on a:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i^2 = -1 \ .$$

Après avoir remarqué que:

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$$

soit

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

car $\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \times \left(\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}$ et $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$.

Il peut en déduire que:

$$x = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

et l'on vérifiera que 4 est bien solution de (1) .

Exercice 18:
Calculer:

$$\left[\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\right]^3=\left[\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i)\right]^3$$

et:

$$\left[\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\right]^3=\left[\left(-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i)\right]^3$$

en déduire les racines de l'équation (1).

Annexe

Extrait des Commentaires d'Eutocius D'ASCALEN, *Sur le traité de la sphère et du cylindre*, Œuvres d'ARCHIMEDE, traduction Muglor, tome II. Edition "Les Belles Lettres".

Ménechme.

it A et E les deux segments de droite donnés ; il faut ver deux moyennes proportionnelles entre A et E.

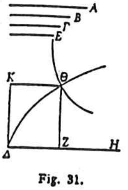


Fig. 31.

Supposons le problème résolu, et soit B et Γ (sc. les moyennes proportionnelles cherchées) ; soit ΔH une demi-droite, issue de Δ, donnée par sa position ; portons sur elle à partir de Δ le segment ΔZ égal à Γ, élevons la perpendiculaire en Z et portons sur elle ZΘ égal au segment B. Du moment donc que les trois segments A, B et Γ sont proportionnels, le rectangle de côtés A et Γ est équivalent au carré sur B, d'où il suit que le rectangle ayant pour côtés les segments donnés A et Γ, c'est-à-dire A et ΔZ, est équivalent au carré sur B, c'est-à-dire au carré sur ZΘ. Le point Θ est donc situé sur une parabole[1] passant par le point Δ. Menons les parallèles ΘK et ΔK. Comme le rectangle de côtés B et Γ est donné, étant égal au rectangle de côtés A et E, le rectangle de côtés KΘ et ΘZ est à son tour donné. Le point Θ est donc situé sur une hyperbole[2] d'asymptotes KΔ et ΔZ. Il s'ensuit que le point Θ et, partant, aussi le point Z, est donné.

Le problème sera dès lors composé de la manière que voici. Soit A et E les segments de droite donnés, ΔH la demi-droite issue de Δ ; faisons passer par Δ une parabole ayant pour axe ΔH et pour paramètre A ; que les

'Ως Μέναιχμος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ A, E· δεῖ δὴ τῶν A, E δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν.

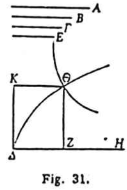


Fig. 31.

Γεγονέτω, καὶ ἔστωσαν αἱ B, Γ, καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΔH πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΔZ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ZΘ, καὶ τῇ B ἴση κείσθω ἡ ZΘ. Ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς A καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΔZ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ. Ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ διὰ τοῦ Δ γεγραμμένης. Ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘK, ΔK. Καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ B, Γ, ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ A, E, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ KΘZ. Ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς KΔ, ΔZ. Δοθὲν ἄρα τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ Z.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ A, E, ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΔH πεπαρασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ ΔH, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ A, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔH ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν A παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας carrés sur les perpendiculaires abaissées sur ΔH soient équivalents aux aires appliquées à A et ayant pour largeurs les segments découpés par elles[3] (sc. par les perpendiculaires) à partir de Δ. Soit $\Delta\Theta$ la parabole ainsi décrite, ΔK la perpendiculaire (sc. en Δ sur ΔH) ; entre $K\Delta$ et ΔZ comme asymptotes traçons une hyperbole telle que les parallèles à $K\Delta$ et ΔZ menées de ses points comprennent[4] une aire équivalente au rectangle de côtés A et E ; cette hyperbole coupera donc la parabole. Soit Θ le point d'intersection ; menons les perpendiculaires ΘK et ΘZ. Du moment donc que le carré sur $Z\Theta$ est équivalent[1] au rectangle de côtés A et ΔZ, A est à $Z\Theta$ comme ΘZ est à $Z\Delta$. Comme, en outre, le rectangle de côtés A et E est équivalent au rectangle de côtés ΘZ et $Z\Delta$, A est à $Z\Theta$ comme $Z\Delta$ est à E. Mais A est à $Z\Theta$ comme $Z\Theta$ est à $Z\Delta$; il s'ensuit que A est à $Z\Theta$ comme $Z\Theta$ est à $Z\Delta$ et comme $Z\Delta$ est à E. Posons B égal à ΘZ et Γ égal à ΔZ ; A sera alors à B comme B est à Γ et comme Γ est à E. Les segments de droite A, B, Γ et E sont donc en proportion continue, ce qu'il fallait trouver.

ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Δ σημείῳ. Γεγράφθω καὶ ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΔΚ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς ΚΔ, ΔΖ ἀχθεῖσαι ποιήσουσιν τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ Α, Ε · τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. Τεμνέτω κατὰ τὸ Θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΖ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΖ, ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΖΔ, ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΔ πρὸς τὴν Ε. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ · καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ καὶ ἡ ΖΔ πρὸς Ε. Κείσθω τῇ μὲν ΘΖ ἴση ἡ Β, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ Γ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Β πρὸς τὴν Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Ε. Αἱ Α, Β, Γ, Ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν · ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Autre solution.

Soit AB et $B\Gamma$, perpendiculaires l'un à l'autre, les deux segments de droite donnés, et ΔB et BE moyennes proportionnelles entre AB et $B\Gamma$, de façon que ΓB soit à $B\Delta$ comme $B\Delta$ est à BE et comme BE est à BA ; menons les perpendiculaires ΔZ et EZ. Du moment donc que ΓB est à $B\Delta$ comme ΔB est à BE, le rectangle de côtés ΓB et BE, c'est-à-dire le rectangle compris entre le segment donné ΓB et BE, est équivalent au carré sur $B\Delta$, c'est-à-dire au carré sur EZ. Le rectangle compris entre le segment donné ΓB et BE étant ainsi équivalent au carré sur EZ, le point Z est situé sur la parabole[2] ayant pour axe BE. Puisque, de plus, AB est à BE comme BE est à $B\Delta$, le rectangle compris entre AB et $B\Delta$, c'est-à-dire entre le segment donné AB et $B\Delta$, est équivalent au carré sur EB, c'est-à-dire au carré sur ΔZ, d'où il suit que le point Z est situé sur la parabole d'axe $B\Delta$. Mais Z est situé aussi sur une autre parabole donnée, d'axe BE ; le point Z est donc donné, et avec lui sont données les perpendiculaires $Z\Delta$ et ZE ; par conséquent les points Δ et E sont donnés.

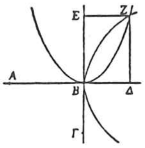


Fig. 32.

Le problème sera donc composé ainsi : soit AB et $B\Gamma$, perpendiculaires l'un à l'autre, les deux segments de droite donnés ; prolongeons-les indéfiniment à partir de B et traçons autour de BE comme axe une parabole de manière que les carrés sur les perpendiculaires abaissées de ses points sur BE soient équivalents aux aires appliquées[1] à $B\Gamma$; autour de ΔB comme axe traçons une autre parabole, telle que les carrés sur les perpendiculaires (sc. abaissées sur ΔB) soient équivalents aux aires appliquées à AB ; les paraboles se couperont donc. Soit Z leur point d'intersection ; abaissons de Z les perpendiculaires $Z\Delta$ et ZE. Du moment donc que ZE, c'est-à-dire ΔB, est mené dans une parabole, le rectangle de côtés ΓB et BE est équivalent[2] au carré sur $B\Delta$; ΓB est donc à $B\Delta$ comme ΔB est à BE. Comme, de même, $Z\Delta$, c'est-à-dire EB, est mené dans une parabole, le rectangle de côtés ΔB et BA est équivalent[3] au carré sur EB ; ΔB est donc à BE comme BE est à BA. Mais ΔB est à BE comme ΓB est à $B\Delta$; il s'ensuit que ΓB est à $B\Delta$ comme $B\Delta$ est à BE et comme EB est à BA, ce qu'il fallait trouver.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ ΔΒ, ΒΕ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως τὴν ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ τὴν ΒΕ πρὸς ΒΑ, καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, ΕΖ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τουτέστι τῆς ΕΖ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι τῆς ΔΖ · τὸ Ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. Ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν ΒΕ · δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. Καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ · δοθέντα ἄρα τὰ Δ, Ε.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθας ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ Β, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τας καταγομένας ἐπὶ τὴν ΒΕ δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΒΓ. Πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΑΒ · τεμοῦσιν δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΔ, ΖΕ. Ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΑ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ · ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

[Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν].

[La parabole se trace au moyen de l'instrument inventé par notre maître Isidore le mécanicien, de Milet, et décrit par lui dans son commentaire au traité écrit par Héron sous le titre Des Fourneaux][1].

Bilan

Sans nul doute ces Travaux Pratiques donnent l'occasion d'une grande ouverture culturelle. On est loin du cours magistral, des exercices et problèmes d'application dont les buts se limitent souvent à voir si le message est passé et à juger l'auditoire. La rencontre de vrais problèmes donne une dimension nouvelle aux mathématiques et le contexte historique les humanise: des visages, des vies, des personnalités, des époques côtoient les théorèmes.

L'enseignement fait peu de place à l'histoire des Sciences et des Techniques et à l'évolution de la pensée. L'enseignement cloisonné par matières ne permet pas au jeune de se faire une idée d'une époque: phénomènes politiques, littéraires, scientifiques, religieux, artistiques ...

N'est-il pas surprenant de s'entendre demander à la veille du baccalauréat si le PASCAL de la combinatoire est le même que celui des *Pensées* étudiées au cours de Français ?

Ces fiches ont souvent permis d'inscrire des problèmes dans les préoccupations d'une époque, de mieux percevoir les mondes grec et arabe, d'appréhender des moments culturels de la Renaissance et des siècles suivants. Combien d'élèves dans nos classes vouent une admiration à ARCHIMEDE et à EULER (documents 1 et 4) devant la performance de leurs résultats: "malgré leurs ... notations malcommodes, ils calculent aussi bien que les calculatrices". Car le problème du langage mathématique n'est pas abordé dans l'enseignement traditionnel. Et de nombreux élèves qui grandissent dans le système décimal, pensent qu'il existe depuis la nuit des temps. Le simple fait de demander d'effectuer une opération avec des nombres écrits en chiffres romains ou de lire quelques lignes de CARDAN (document 18) sur la résolution d'équation leur fait prendre conscience de difficultés, qu'ils n'avaient pas imaginées !

Ce fut aussi le moment d'effacer quelques mythes: celui du mathématicien enfermé dans sa tour d'ivoire qui cherche à résoudre une équation du premier degré, puis augmente le degré au fur et à mesure de ses découvertes ..., car l'enseignement des mathématiques suit "cette loi" qui n'est pas conforme à celle de l'histoire !

Et pour terminer comment oublier le visage de cet élève, qui après l'étude des irrationnels (document 8) avait cherché "tout un dimanche" le développement en fractions continues de π, pour annoncer penaud le lundi matin qu'il n'avait pas trouvé ! Il s'était heurté à un problème ouvert. "Comment il existe en mathématiques des problèmes que même aux Etats-Unis, on ne sait pas résoudre !!" Et pourtant son propre père est chercheur ...

Bibliographie

On trouvera un historique sur la résolution des équations du troisième degré et une bibliographie dans:

CASSINET et ales, *Equations du troisième degré.* I.R.E.M. de Toulouse, 1980.

On pourra aussi consulter sur ce sujet:

SMITH, *History of Mathematics,* tomes 1 et 2, 1913. Edition Dover. 1958.
YOUSCHKEVITCH, *Les mathématiques arabes.* Vrin. Paris. 1976.
MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques,* tome I, an VII. Edition Blanchard. 1968.
Groupe I.R.E.M. Epistémologie, *Mathématiques au fil des âges.* Gauthier-Villars, Paris. 1986.

Sur les Problèmes:

I.R.E.M. de Strasbourg, *Travaux pratiques en premières scientifiques.* 1985.
I.R.E.M. de Strasbourg, *Travaux pratiques en terminales scientifiques.* 1987.