Les nombres relatifs dans le Premier Cycle

Jacky SIP
Professeur de Mathématiques
Collège Robert Desnos - Masny
I.R.E.M. de Lille

Dans cet article, je voudrais montrer un aspect de l'apport de l'histoire des mathématiques, à savoir comment son étude a influencé mon enseignement des nombres relatifs. Dans la première partie, je cite des textes historiques illustrant mon propos, et dans la deuxième partie, je donne une description rapide de ma présentation des nombres relatifs aux élèves. Je tiens à préciser que les textes historiques qui suivent, n'ont pas été donnés aux élèves; par contre, leur lecture a influencé ma pratique pédagogique.

La lecture de textes historiques montre que la conception des nombres négatifs a posé beaucoup de problèmes, bien plus que celle des nombres complexes. Voici, par exemple, un extrait de l'article "*Négatif*" écrit par D'ALEMBERT (1717-1783) pour l'Encyclopédie:

NEGATIF, adj. (*Algeb.*) quantités *négatives, en Algebre*, font celles qui font affectées du figne —, & qui font regardées par plufieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette derniere idée n'eft cependant pas jufte, comme on le verra dans un moment. *Voyez* QUANTITÉ.

Les quantités *négatives* font le contraire des pofitives : où le pofitif finit, le négatif commence. *Voyez* POSITIF.

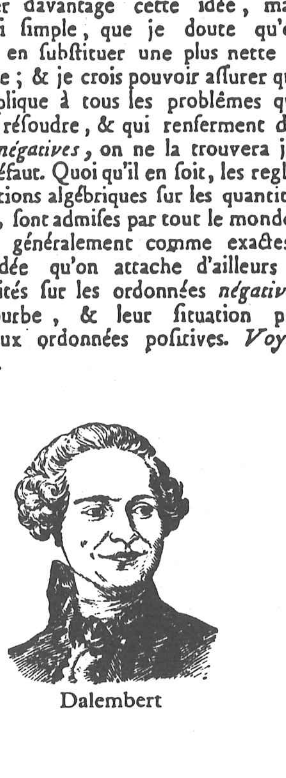
Il faut avouer qu'il n'eft pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité *négative* eft au deffous du rien, c'eft avancer une chofe qui ne fe peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'eft pas comparable à — 1, & que le rapport entre 1 & — 1 eft différent du rapport entre — 1 & 1, font dans une double erreur : 1°. parce qu'on divife tous les jours dans les opérations algébriques, 1 par — 1 : 2°. l'égalité du produit de — 1 par — 1, & de + 1 par + 1, fait voir que 1 eft à — 1 comme — 1 à 1.

Quand on confidere l'exactitude & la fimplicité des opérations algébriques fur les quantités *négatives*, on eft bien tenté de croire que l'idée précife que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée fimple, & n'être point déduite d'une métaphyfique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *négatives*, & qu'on regarde fauſſement comme au deſſous du zéro, ſont très-ſouvent repréſentées par des quantités réelles, comme dans la Géométrie, où les lignes *négatives* ne different des poſitives que par leur ſituation à l'égard de quelque ligne ou point commun. *Voyez* COURBE. Delà il eſt aſſez naturel de conclure que les quantités *négatives* que l'on rencontre dans le calcul, ſont en effet des quantités réelles; mais des quantités réelles auxquelles il faut attacher une idée autre que celle qu'on avoit ſuppoſée. Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre x, qui ajouté à 100 faſſe 50; on aura par les regles de l'Algebre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$; ce qui fait voir que la quantité x eſt égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être retranchée; de ſorte qu'on auroit dû énoncer le problême ainſi: trouver une quantité x qui étant retranchée de 100, il reſte 50; en énonçant le problême ainſi, on auroit $100 - x = 50$, & $x = 50$; & la forme *négative* de x ne ſubſiſteroit plus. Ainſi les quantités *négatives* indiquent réellement dans le calcul des quantités poſitives, mais qu'on a ſuppoſées dans une fauſſe poſition. Le ſigne $-$ que l'on trouve avant une quantité ſert à redreſſer & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypotheſe, comme l'exemple ci-deſſus le fait voir très-clairement. *Voyez* ÉQUATION.

Remarquez que nous ne parlons ici que des quantités *négatives* iſolées, comme $-a$, ou des quantités $a - b$, dans leſquelles b eſt plus grand que a; car pour celles où $a - b$ eſt poſitif, c'eſt-à-dire, où b eſt plus petit que a, le ſigne ne fait aucune difficulté.

Il n'y a donc point réellement & abſolument de quantité *négative* iſolée: -3 pris abſtraitement ne préſente à l'eſprit aucune idée; mais ſi je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus.

Voilà pourquoi le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$: car a & b étant précédés du ſigne $-$ par la ſuppoſition, c'eſt une marque que ces quantités a, b, ſe trouvent mêlées & combinées avec d'autres à qui on les compare, puiſque ſi elles étoient conſidérées comme ſeules & iſolées, les ſignes $-$ dont elles ſont précédées, ne préſenteroient rien de net à l'eſprit. Donc ces quantités $-a$ & $-b$ ne ſe trouvent précédées du ſigne $-$, que parce qu'il y a quelque erreur tacite d'ans l'hypotheſe du problême ou de l'opération: ſi le problême étoit bien énoncé, ces quantités $-a$, $-b$, devroient ſe trouver chacune avec le ſigne $+$, & alors leur produit ſeroit $+ab$; car que ſignifie la multiplication de $-a$ par $-b$? c'eſt qu'on retranche b de fois la quantité *négative* $-a$: or par l'idée que nous avons donnée ci-deſſus des quantités *négatives*, ajouter ou poſer une quantité *négative*, c'eſt en retrancher une poſitive; donc par la même raiſon en retrancher une *négative*, c'eſt en ajouter une poſitive; & l'énonciation ſimple & naturelle du problême doit être, non de multiplier $-a$ par $-b$, mais $+a$ par $+b$; ce qui donne le produit $+ab$. Il n'eſt pas poſſible dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée, mais elle eſt ſi ſimple, que je doute qu'on puiſſe lui en ſubſtituer une plus nette & plus exacte; & je crois pouvoir aſſurer que ſi on l'applique à tous les problêmes que l'on peut réſoudre, & qui renferment des quantités *négatives*, on ne la trouvera jamais en défaut. Quoi qu'il en ſoit, les regles des opérations algébriques ſur les quantités *négatives*, ſont admiſes par tout le monde, & reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités ſur les ordonnées *négatives* d'une courbe, & leur ſituation par rapport aux ordonnées poſitives. *Voyez* COURBE.



Dalembert

et des extraits de la *Géométrie de Position,* livre écrit par CARNOT (1753-1823):

"Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien: opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

(...)

Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées, se réduisent à deux; celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que zéro, et celle qui consiste à dire, que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire: d'ALEMBERT détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique.

Soit, dit-il, cette proportion 1 : -1 :: -1 : 1 ; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si -1 était moindre que 0, à plus forte raison serait-il moindre que 1; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le troisième; c'est-à-dire, que 1 devrait être moins que -1; donc -1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1; ce qui est contradictoire.

Quant à la seconde des notions données ci-dessus, d'Alembert l'attaque avec le même succès dans son mémoire sur les quantités négatives dont j'ai parlé ci-dessus; et cependant, comme il n'a rien à mettre à la place, il semble adopter cette notion pour le fond, et vouloir montrer seulement qu'elle est sujette à diverses exceptions. Il est, dit-il, d'autant plus nécessaire de démontrer cette position (des quantités négatives en sens contraire des positives) qu'elle n'a pas toujours lieu.

(...)

Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion, par exemple, -3 serait moindre que 2; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2, c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée ? Et d'où viendrait le privilège que la première, -a, aurait de donner son signe au produit $-a \times +a$?

La règle des signes, plus particulièrement le "moins multiplié par moins égal plus", posait problème. Comme exemple, voici un extrait de la *Vie de Henry BRULARD,* livre écrit par STENDHAL (1783-1842):

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que: moins par moins donne plus (– × – = +) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle "algèbre").

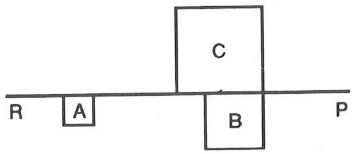
On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

M. CHABERT pressé par moi s'embarrassait, répétait sa "leçon", celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire: "Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. EULER et LAGRANGE, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise".

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur – × – = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. CHABERT, que M. DUPUY n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les "forts" auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui: il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats "vrais et indubitables".

Mon grand malheur était cette figure:



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ? Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. CHABERT rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000 ?

Les modèles naturels proposés pour interpréter l'addition des nombres relatifs ne fonctionnent pas pour la multiplication; un nombre négatif étant associé à une dette, quelle signification faut-il donner au produit de deux dettes ? D'ailleurs, à ma connaissance, il n'existe pas de modèle naturel permettant d'interpréter, en même temps, l'addition et la multiplication des nombres relatifs.

Dans l'enseignement français, on enseigne les relatifs à partir de la sixième (enfants âgés de 11 ans). La multiplication des relatifs était étudiée en cinquième jusqu'en 1987; maintenant, dans les nouveaux programmes, son étude est abordée en quatrième (élèves de 13 à 14 ans), l'addition, quant à elle, est restée au programme de la cinquième. On considère généralement que la règle des signes est quelque chose de facile pour les élèves: "il n'y a rien à comprendre; il n'y a qu'à appliquer !" est une expression fréquemment entendue chez les enseignants. Pour illustrer ce propos, je cite un extrait du livre I des *Arithmétiques* de DIOPHANTE d'Alexandrie, mathématicien grec, probablement du 3ème siècle après J.-C.

Bien que DIOPHANTE n'ait pas disposé des nombres négatifs (les "expressions" négatives n'ont pas le statut de "nombres" chez DIOPHANTE), il utilisait une règle des signes:

> Ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif; tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque, et la marque distinctive de ce qui est de manque est /|\ , c'est-à-dire un ψ incomplet et renversé.
>
> Après t'avoir expliqué les multiplications des expressions que nous avons exposées plus haut, leurs divisions sont claires. Il est donc utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, à la soustraction, et à la multiplication des expressions, ainsi qu'à la manière d'ajouter des expressions positives et négatives non équipollentes à d'autres expressions qui sont elles-mêmes positives, ou même positives et négatives; enfin à la manière de retrancher d'expressions positives et d'autres négatives, d'autres expressions soit positives, soit aussi positives et négatives.

(traduction de Paul VER EECKE)

Dans les manuels scolaires, l'addition est souvent présentée à l'aide de pertes et de gains. De façon implicite, ou explicite, l'élève associe alors un nombre positif à un gain et un nombre négatif à une perte. Lorsqu'il aborde le produit de deux négatifs, il se trouve confronté à un problème de compréhension puisque son modèle de représentation ne fonctionne plus (le produit de deux pertes est un gain !); ce qui explique peut-être ses erreurs de signe, souvent qualifiées d'étourderie. le problème rencontré par l'élève existe, bien que le modèle, donné pour l'addition des relatifs, ait été abandonné pour la multiplication; parfois, on propose un modèle spécifique à la multiplication, mais ne fonctionnant pas pour l'addition. Le plus souvent, on construit la multiplication des relatifs de façon qu'elle conserve la propriété de distributivité par rapport à l'addition; par exemple; on veut que l'égalité suivante soit vérifiée:

$$(-3) \times [(+7) + (-7)] = (-3) \times (+7) + (-3) \times (-7)$$

d'où $(-3) \times 0 = (-21) + (-3) \times (-7)$; $0 = (-21) + (-3) \times (-7)$

donc, on a: $(-3) \times (-7) = +21$.

Mais cette solution ne résout pas le problème créé par le modèle proposé pour l'addition. De plus, elle laisse souvent les élèves perplexes.

Comment ne pas créer ce problème aux élèves ? Voilà la question à laquelle j'ai essayé d'apporter une réponse.

Je vais maintenant expliciter, à partir de textes historiques, les grandes lignes de ma démarche pour arriver à la présentation des relatifs que je propose à mes élèves.

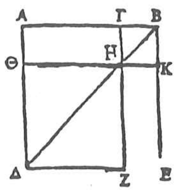
Les premiers textes sont tirés des *Eléments* d'EUCLIDE (mathématicien grec d'Alexandrie, vivant probablement au 3ème siècle avant J.-C.) dans la traduction de François PEYRARD:

Extrait du Livre II des *Eléments*, voici la proposition IV avec sa démonstration (EUCLIDE y établit la relation: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$):

PROPOSITION IV.

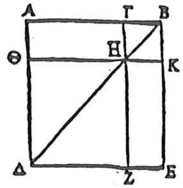
Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ, ΓB.



Avec AB décrivons le quarré AΔEB (46. 1); joignons BΔ; par le point Γ conduisons ΓHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΔE.

Puisque ΓZ est parallèle à AΔ, et que BΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓHB est égal à l'angle intérieur et opposé AΔB (29. 1). Mais l'angle AΔB est égal à l'angle ABΔ (5. 1), puisque le côté BA est égal au côté AΔ; donc l'angle ΓHB est égal à l'angle HBΓ; donc le côté BΓ est égal au côté ΓH (6. 1); mais ΓB est égal à HK (34. 1), et ΓH égal à BK; donc HK est égal à KB; donc le quadrilatère ΓHKB est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓH est parallèle à BK, et que ΓB tombe sur ces deux droites, les angles KBΓ, BΓH sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle KBΓ est droit (déf. 30. 1); donc l'angle BΓH est droit. Donc les angles opposés ΓHK, HKB sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓHKB est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et ce quarré est décrit avec ΓB. Par la même raison ΘZ est aussi un quarré, et ce quarré est décrit avec ΘH, c'est-à-dire avec AΓ; donc ΘZ, ΓK sont des quarrés décrits avec AΓ, ΓB. Et puisque le rectangle AH est égal au rectangle HE (43. 1), et que le rectangle AH est com-



pris sous les droites AΓ, ΓB, car HΓ est égal à ΓB, le rectangle HE est égal au rectangle sous AΓ, ΓB; donc les rectangles AH, HE sont égaux à deux fois le rectangle sous AΓ, ΓB. Mais les quarrés ΘZ, ΓK sont décrits avec les droites AΓ, ΓB; donc les quatre figures ΘZ, ΓK, AH, HE sont égales aux quarrés des droites AΓ, ΓB et à deux fois le rectangle compris sous AΓ, ΓB. Mais les quatre figures ΘZ, ΓK, AH, HE sont la figure entière AΔEB, qui est le quarré de AB; donc le quarré de AB est égal aux quarrés des droites AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle compris sous AΓ, ΓB. Donc, etc.

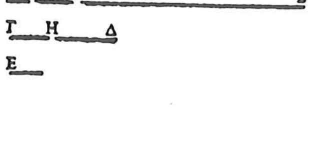
Extrait du Livre VII des *Eléments*, voici les définitions 17 et 19, ainsi que la première proposition:

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

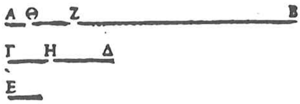
PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.



Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse HΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin HΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘA.



Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔH; donc E mesurera ΔH. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓH. Mais ΓH mesure ZΘ; donc E mesurera ZΘ. Mais il mesure ZA tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante AΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

Extrait du Livre V des *Eléments*:

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.

Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y ade grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

Le texte suivant est tiré de *l'Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* ouvrage d'ARGAND (1768-1822; d'origine genevoise) paru en 1806 à Paris. C'est l'un des premiers livres justifiant géométriquement les nombres complexes; le mot "imaginaire" prononcé ci-dessous est relatif aux nombres négatifs.

1. Soit a une grandeur prise à volonté. Si à cette grandeur on en ajoute une seconde qui lui soit égale, pour ne former qu'un seul tout, on aura une nouvelle grandeur, qui sera exprimée par $2a$. Faisant sur cette dernière grandeur une pareille opération, le résultat sera exprimé par $3a$, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de grandeurs

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a, \ldots,$$

dont chaque terme naît du précédent, par une opération qui est la même pour tous les termes, et qui peut être répétée indéfiniment.

Considérons cette même suite à rebours, savoir :

$$\ldots, 4a, 3a, 2a, a.$$

On peut encore concevoir, dans cette nouvelle suite, chaque terme comme déduit du précédent, par une opé-

ration inverse de celle qui sert à la formation de la première suite; mais il existe une différence notable entre les deux suites : la première peut être poussée aussi loin qu'on voudra; il n'en est pas de même de la seconde. Après le terme a, on trouvera le terme o; mais, pour aller plus loin, il faut que la nature de la grandeur a soit telle, qu'on puisse opérer à l'égard de o comme on l'a fait à l'égard des termes $\ldots, 4a, 3a, 2a, a$. Or c'est ce qui n'est pas toujours possible.

Si a, par exemple, désigne un poids matériel, comme le *gramme,* la suite des quantités $\ldots, 4a, 3a, 2a, a$, o ne peut être continuée au delà de o; car on ôte bien 1 gramme de 3, de 2 ou de 1 gramme, mais on ne saurait l'ôter de o. Ainsi les termes qui devraient suivre o ne peuvent avoir d'existence que dans l'imagination; ils peuvent, par cela même, être appelés *imaginaires.*

Mais, au lieu d'une suite de poids matériels, considérons les divers degrés de pesanteur qui agissent sur le bassin A d'une balance qui contient des poids dans ses deux bassins, et supposons, pour donner plus d'appui à nos idées, que les mouvements des bras de cette balance soient proportionnels aux poids ajoutés ou retranchés, effet qui aurait lieu, par exemple, au moyen d'un ressort adapté à l'axe. Si l'addition du poids n dans le bassin A fait varier de la quantité n' l'extrémité du bras A, l'addition des poids $2n$, $3n$, $4n$,... occasionnera, sur cette même extrémité, des variations $2n'$, $3n'$, $4n'$,..., et ces variations pourront être prises pour mesure de la pesanteur agissant sur le bassin A : cette pesanteur est o pour le cas d'égalité entre les deux bassins. On pourra, en ajoutant dans le bassin A des poids n, $2n$, $3n$,..., obtenir les pesanteurs n', $2n'$, $3n'$,..., ou, en partant de la pesanteur $3n'$, obtenir, en retranchant des poids, les pesanteurs $2n'$, n', o. Mais ces divers degrés peuvent être produits non-seulement en enlevant des poids au bassin A, mais aussi en en ajoutant au bassin B. Or l'addition de poids sur le bassin B peut être répétée indéfiniment; ainsi, en la continuant, on formera de nouveaux degrés de pesanteur exprimés par $-n'$, $-2n'$, $-3n'$,..., et ces termes, appelés *négatifs*, exprimeront des quantités aussi réelles que les termes positifs. On voit donc aussi que, si deux termes, de signes différents, ont le même nombre pour coefficient, comme $3n'$, $-3n'$, ils exprimeront deux états du levier tels, que l'extrémité qui marque les degrés de pesanteur sera, dans l'un et dans l'autre, également éloignée du point o. On peut considérer cet éloignement en faisant abstraction du *sens* dans lequel il a lieu, et lui donner alors le nom d'*absolu*.

Considérons encore dans une autre espèce de grandeurs la génération des quantités négatives. Si, pour compter une somme d'argent, on adopte pour unité le *franc* matériel, on pourra opérer des diminutions successives sur cette somme, et la réduire à zéro par la soustraction d'un certain nombre de francs. Arrivé à ce terme, on voit que la soustraction cesse d'être praticable, et que, par conséquent, — 1 franc, — 2 francs,... sont des quantités imaginaires.

Prenons maintenant le franc de compte pour unité, à dessein d'évaluer la fortune d'un individu, laquelle se compose de valeurs actives et de valeurs passives. Ce que nous appelons *diminution* dans cette fortune pourra avoir lieu soit par le retranchement d'un nombre de francs à l'actif, soit par l'addition d'un nombre de francs au passif, et, en poussant à un certain terme cette diminution par l'un de ces deux moyens, on parviendra à une fortune négative, telle que — 100 francs, — 200 francs..... Ces expressions signifieront que le nombre de francs des valeurs passives, considéré abstraitement, est plus grand de 100, de 200,... que celui des valeurs actives. Ainsi — 100 francs, — 200 francs,..., qui n'exprimaient dans le premier cas que des quantités imaginaires, représentent ici des quantités aussi réelles que celles que désignent les expressions positives.

2. Ces notions sont très-élémentaires; néanmoins il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette

généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de très-grands progrès avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer.

Au reste, on ne s'est nullement proposé de donner ici des principes plus rigoureux ou plus évidents que ceux qu'on trouve dans les Ouvrages qui traitent ce sujet; on a eu simplement pour but de faire deux remarques sur les quantités négatives. La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire ; la seconde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1° l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées *absolument*; 2° l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

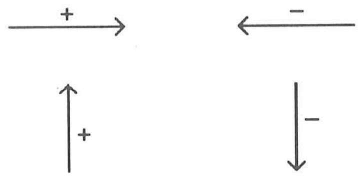
Dans les *Eléments* d'EUCLIDE, on constate que les nombres sont représentés par des segments (ainsi que les grandeurs), que la somme se fait en plaçant des segments bout à bout dans une même direction et qu'au produit de deux nombres est associé un rectangle. Dans le texte d'ARGAND, on peut trouver une idée de mouvement dans la représentation des nombres relatifs.

C'est de cette idée de mouvement, associée à la représentation du produit de deux nombres à l'aide d'un rectangle, que découle ma présentation des relatifs aux élèves. En voici un descriptif rapide: une unité de longueur étant choisie:

– un nombre relatif est représenté par un segment orienté, matérialisant un déplacement. Deux directions sont privilégiées: "l'horizontale" et la "verticale" avec un sens positif sur chacune d'elles:

* de gauche à droite sur l'horizontale:

* de bas en haut pour la verticale:



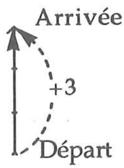
Ce choix n'a gêné en rien les élèves; cela leur a paru même très "naturel".

– La somme de deux relatifs est représentée à l'aide de deux déplacements successifs suivant une même direction.
– Le produit de deux relatifs est représenté à l'aide d'un rectangle et de son aire algébrisée; le premier nombre suivant la direction horizontale et le deuxième suivant la direction verticale.

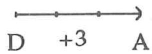
Ce qui donne par exemple:

* *pour un nombre positif:*

+3 est représenté par:

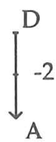


ou par:

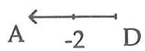


* *pour un nombre négatif:*

-2 est représenté par:

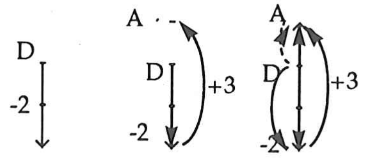


ou par:

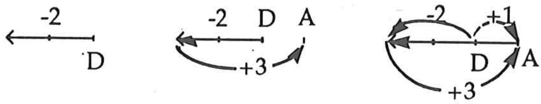


* *pour la somme de deux relatifs:*

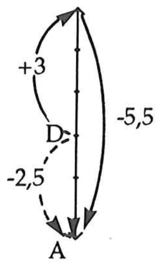
• $-2+3=+1$



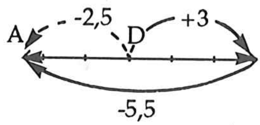
ou:



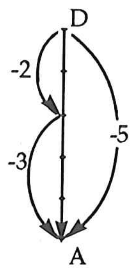
• $+3-5{,}5=-2{,}5$



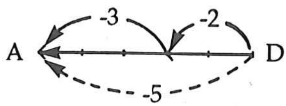
ou:



• $-2-3=-5$

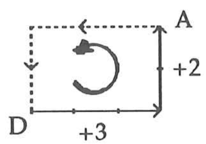


ou:

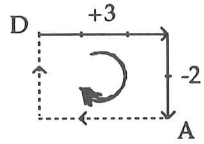


* *pour le produit de deux relatifs:*

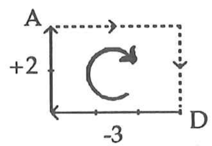
(+ 3) x (+ 2)



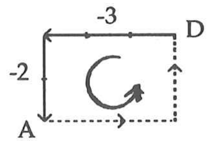
(+ 3) x (– 2)



(– 3) x (+ 2)

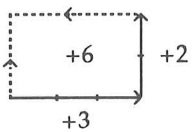


(– 3) x (– 2)

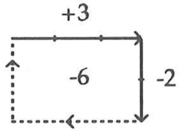


Quelles que soient les situations, on obtient deux sens de parcours possibles: celui des aiguilles d'une montre et le sens contraire (sens trigonométrique).
Pour attribuer un signe à chacun de ces deux sens, on utilise le fait que l'on peut supprimer le signe + d'un nombre positif: + 3 = 3 .
Ainsi (+ 3) x (+ 2) = 3 x 2 = 6 = + 6 : on attribue le signe + au sens de parcours contraire à celui des aiguilles d'une montre (le sens positif est le sens trigonométrique) et le signe – au sens de parcours des aiguilles d'une montre. Par conséquent:

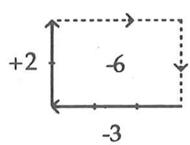
(+ 3) x (+ 2) = + 6



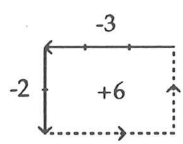
(+ 3) x (– 2) = – 6



(– 3) x (+ 2) = – 6



(– 3) x (– 2) = + 6



- Le produit de deux nombres positifs est un nombre positif.
- Le produit de deux nombres de signes différents est négatif.
- Le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.

Suite à cette présentation des relatifs, je peux dire que la plupart des élèves ont perçu cette démarche comme étant naturelle; "moins multiplié par moins égal plus" ne leur pose aucun problème. Bien sûr, cette démarche ne saurait constituer un modèle universel. L'histoire montre qu'il faut se méfier de tout dogmatisme !

En conclusion, j'estime que l'étude de l'histoire des mathématiques permet de mieux comprendre l'émergence des concepts, de mieux appréhender les difficultés que peuvent rencontrer les élèves face à de nouveaux concepts, d'expliquer certains de leurs blocages ou certaines de leurs erreurs, et de créer des outils pédagogiques pertinents.

Bibliographie

ARGAND, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Edition Blanchard, Paris.
CARNOT, *Géométrie de Position.* Duprat, Paris, 1803.
CAZIER, *Approche intuitive des nombres relatifs. Opérations.* in Bulletin n° 18. Spécial Collèges. IREM de Lille, 1985.
D'ALEMBERT, Article "*Négatif*". in l'Encyclopédie de Diderot.
DESCAVES, *Exposé sur la règle des signes.* IREM de Picardie, 1983.
DIOPHANTE, *Les Arithmétiques.* Edition Blanchard, Paris, 1959.
EUCLIDE, *Les Eléments.* Edition Blanchard, Paris, 1966.
GLAESER, *Epistémologie des nombres relatifs.* in Recherche en didactique des mathématiques 2 (1981) 303-346.
GURGO, *Faut-il ressusciter EUCLIDE ?* in Actes du Colloque Inter-IREM. Histoire et Epistémologie des Mathématiques: Rôle des problèmes dans l'histoire et l'activité mathématique, Montpellier,1985.
SESIANO, *The appearance of negative solution in Medieval Mathematics.* Archive for History of Exact Sciences 32 (1985) 105-150.
STENDHAL, *Vie de Henry BRULARD* (1835), Gallimard, Paris, 1973.