Lecture de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE en terminale scientifique

Martine BÜHLER
Professeur de Mathématiques
Lycée Flora Tristan - Noisy-le-Grand
I.R.E.M. de Paris VII

Le groupe M.:A.T.H. (Mathématiques: Approche par des Textes Historiques) travaille depuis quelques années à l'IREM Paris VII; l'idée directrice du groupe est d'introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, en faisant lire des extraits de textes originaux ou de leur traduction aux élèves.

L'histoire des mathématiques peut intervenir de diverses manières dans l'enseignement:

- pour introduire des notions nouvelles: par exemple, avec les anciens programmes de terminale, l'introduction des nombres complexes se faisait souvent de manière formelle (ensemble de couples de réels, muni de deux lois qui en font un corps commutatif). Or ces études de structures ne figurent plus dans les programmes. Plutôt que de "parachuter" les nombres complexes, on peut choisir de les introduire historiquement, à l'aide d'exercices appropriés (sur la résolution d'équations du troisième degré) et de textes historiques (DESCARTES, ARGAND);
- par l'étude de textes historiques importants en histoire des mathématiques ou fournissant des sujets de problèmes intéressants.

Cette démarche historique devrait s'inscrire plus souvent dans un travail pluridisciplinaire, en particulier avec les enseignants d'histoire, philosophie, etc. Ce n'est malheureusement pas encore assez souvent le cas (manque de temps pour la concertation, programme souvent trop chargé dans ces matières, ...).

L'expérimentation relatée plus loin a consisté en la lecture d'un extrait de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE en terminale scientifique (élèves de 17-18 ans).

ARCHIMEDE (287 av. J.-C., 212 av. J.-C.) a laissé de nombreux ouvrages, entre autres: le premier et le second *Livre des Equilibres,* *l'Arénaire* ou il expose un système de numération pour les très grands nombres, *Des corps flottants* (le fameux principe d'ARCHIMEDE), *Sur la Sphère et le Cylindre*, etc.

Dans *La mesure du cercle*, ARCHIMEDE démontre deux propositions importantes:

> "Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un de côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle".

En termes modernes, si A, P, R sont respectivement l'aire, le périmètre, le rayon d'un cercle, alors $A = \frac{1}{2} R \times P$ ou $\frac{A}{R^2} = \frac{P}{2R}$. Autrement dit, c'est la même constante (celle que nous appelons π) qui intervient dans le calcul de l'aire et celui du périmètre d'un cercle.

> "Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix-soixante-et-onzième et le septième du diamètre."

Autrement dit, si P et D sont le périmètre et le diamètre d'un cercle, alors $3 + \frac{10}{71} < \frac{P}{D} < 3 + \frac{1}{7}$.

Notons qu'ARCHIMEDE se préoccupe d'encadrer un rapport $\left(\frac{P}{D}\right)$, et non pas un nombre. La notation π (de περμετρος) date du début du 18ème siècle.

ARCHIMEDE, comme nous le verrons plus loin, obtient l'encadrement cherché par le calcul approché des périmètres de polygones inscrits et circonscrits au cercle. La méthode sera d'ailleurs reprise de nombreuses fois: citons AL-KASHI (15ème siècle), FIBONACCI (13ème), MÉTIUS (17ème), ...

VIETE (1540-1603), par un travail analogue sur les aires, obtient le fameux rapport comme produit infini

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad \cdots}$$

HUYGENS (1629-1695) améliore la méthode.

Il faut attendre NEWTON (1642-1727) pour trouver des méthodes différentes: dans *La méthode des fluxions*, NEWTON calcule une approximation de π à l'aide d'un développement en série et d'un calcul d'intégrale.

LAMBERT (1728-1777) démontre l'irrationalité de π ; on retrouve cette démonstration, ainsi que celle de l'irrationalité de π^2 , dans les *Eléments de géométrie* de LEGENDRE (1794).

Enfin la transcendance de π est démontrée par LINDEMANN en 1882.

Au sujet de π, on lira avec intérêt le numéro spécial π du *Petit Archimède,* [7].

Il s'agissait pour nous de faire lire aux élèves la démonstration de la proposition d'ARCHIMEDE sur l'encadrement du rapport du périmètre au diamètre d'un cercle.

La lecture d'un texte original étant difficile, le groupe de l'IREM Paris VII a adopté la méthode de travail suivante:

- Fabrication d'exercices suivant la démarche du texte, mais dans une formulation plus "moderne" habituelle à l'élève; ces exercices sont résolus à la maison ou en travail dirigé, avant ou pendant la lecture du texte.
- Lecture du texte.

Ceci permet de séparer les deux difficultés principales de la lecture d'un texte historique: difficulté mathématique et difficulté de langage.

Par ailleurs, un même texte peut être utilisé à des niveaux différents, avec des objectifs différents. Nous relatons en annexe 1 le récit (rapide) de trois expérimentations en classe de troisième sur un extrait du même texte.

I- Expérimentation en classe

Lecture de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE

Classe: Terminale C - 14 élèves - Début du mois de janvier 1987.

Objectifs:

Objectifs pédagogiques:

- calculs géométriques dans le plan (possibilité d'utiliser les théorèmes de PYTHAGORE et THALES ou les formules de duplication en trigonométrie);
- révisions sur les suites;
- détermination d'un algorithme de calcul de π et utilisation de calculatrices programmables.

Objectifs culturels:

- problème de la mesure du cercle en histoire des mathématiques; intérêt d'un algorithme de calcul et des suites récurrentes pour déterminer des approximations de nombres;
- formulation d'ARCHIMEDE:
    - * il s'intéresse au rapport du périmètre et du diamètre d'un cercle et calcule uniquement des rapports (sans parler de nombre);

* démonstration géométrique.

- par ailleurs, ARCHIMEDE utilise dans ses calculs l'approximation $\frac{265}{153}$ pour $\sqrt{3}$. Comment peut-on déterminer cette approximation ? Quels sont, à l'époque d'ARCHIMEDE, les "algorithmes" connus de recherche de racines carrées ?

Scénario:
- exercices à faire à la maison (voir pages suivantes);
- correction des exercices en classe, suivie de la lecture du texte (environ 3 heures de travail en classe).

Exercices donnés aux élèves (niveau TC)

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité la plus reculée jusqu'aux recherches les plus récentes d'algorithmes performants pour calculer π.
Les exercices suivants permettent de trouver un algorithme de calcul de π, en suivant la méthode d'ARCHIMEDE; nous lirons d'ailleurs un extrait de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE.

Exercice 1 : encadrement de π

1°) a/ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, de rayon 1. Quel est son périmètre ?
b/ Inscrire dans $\mathcal{C}$ un hexagone régulier ($A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$). Quel est le périmètre de l'hexagone ?
c/ La médiatrice de chaque côté $[A_i A_{i+1}]$ de l'hexagone coupe le petit arc $(\overset{\frown}{A_i A_{i+1}})$ du cercle en un point par lequel on mène la tangente au cercle. Expliquer pourquoi on obtient ainsi un hexagone régulier circonscrit au cercle. Calculer son périmètre.
d/ A l'aide de a/, b/, c/, donner un encadrement de π (décimal).

2°) a/ Sur la même figure, inscrire dans $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.
b/ Circonscrire à $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.
c/ Donner un encadrement de π.

3°) *Algorithme de calcul*
On appelle:
- c_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrit dans $\mathcal{C}$ et p_n son périmètre (que valent c_0, p_0, c_1, p_1 ?)

- t_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à $\mathcal{C}$ et q_n son périmètre (que valent t_0, q_0, t_1, q_1 ?)

a/ Déterminer une relation de récurrence liant c_n et c_{n-1}.

b/ Ecrire un programme permettant d'obtenir à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée de c_n et $\frac{1}{2}p_n$ pour n quelconque.

Au choix: c/ ou c/ bis

c/ Déterminer une relation de récurrence liant t_n et t_{n-1}. Programmer la machine pour obtenir $\frac{1}{2}p_n$ et $\frac{1}{2}q_n$.

c/ bis Déterminer une relation liant c_n et t_n. Programmer la machine pour obtenir $\frac{1}{2}p_n$ et $\frac{1}{2}q_n$.

d/ Donner à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées par défaut de $\frac{1}{2}p_4$, $\frac{1}{2}p_5$, $\frac{1}{2}p_{10}$ et par excès de $\frac{1}{2}q_4$, $\frac{1}{2}q_5$, $\frac{1}{2}q_{10}$.

En déduire des encadrements décimaux de π. A quelle précision avez-vous obtenu π ?

e/ Que pensez-vous de la convergence des suites $(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$?

Exercice 2 : étude des suites $(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$

1°) On appelle [AB] un côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1, de centre O.

Soit θ la mesure en radians, comprise entre 0 et π, de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.

a/ Déterminer θ.

b/ Calculer $c_n = AB$ à l'aide des lignes trigonométriques de $\frac{\theta}{2}$.

En déduire une expression de $\frac{1}{2}c_n$.

c/ Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ (x étant exprimé en radians).

Etudier la convergence et la limite de $\left(\frac{1}{2}p_n\right)_{n \in N}$.

2°) Faire un travail analogue avec un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à $\mathcal{C}$.

Etudier la convergence et la limite de $\left(\frac{1}{2}q_n\right)_{n \in N}$.

Que savez-vous d'ARCHIMEDE et de l'époque à laquelle il vivait ?

En avez-vous entendu parler en classe ? dans quel cours et à quelle occasion ?

Extrait de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE

Traduction: Charles MUGLER

Editions "Les belles lettres", t1, 1970.

3.

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ, et par permutation et par composition. Il s'ensuit que la somme de ΖΕ et ΕΓ est à ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ ; le rapport de ΓΕ à ΓΗ est ainsi supérieur au rapport de 571 à 153. Le rapport du carré sur ΕΗ au carré sur ΗΓ est donc égal au rapport de 349 450 à 23 409 ; par conséquent ΕΗ est à ΗΓ comme 591 1/8 est à 153.

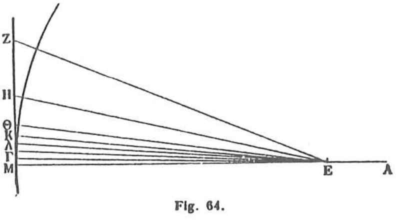


Fig. 64.

Bissectons de même l'angle ΗΕΓ par ΕΘ ; pour les mêmes raisons (sc. que plus haut), le rapport de ΕΓ à ΓΘ est donc supérieur au rapport de 1162 1/8 à 153 ; il s'ensuit que le rapport de ΘΕ à ΘΓ est supérieur au rapport de 1172 1/8 à 153. Bissectons encore l'angle ΘΕΓ par ΕΚ ; le rapport de ΕΓ à ΚΓ est donc supérieur au rapport de 2334 1/4 à 153. Bissectons encore l'angle ΚΕΓ par ΛΕ ; ΕΓ a donc à ΛΓ un rapport supérieur à celui de 4673 ½ à 153. Du moment donc que l'angle ΖΕΓ, égal au tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, l'angle ΛΕΓ est la 48e partie d'un angle droit. Donnons-nous un angle ΓΕΜ égal à ΛΕΓ de même sommet Ε[1] ; l'angle ΛΕΜ est ainsi la 24e partie d'un angle droit ; il s'ensuit que le segment de droite ΛΜ est un côté du polygone circonscrit au cercle ayant 96 côtés. Puisque, donc, on a démontré que le rapport

γʹ.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$,γυθ· μήκει ἄρα, ὃν φϙα η' πρὸς ρνγ. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ

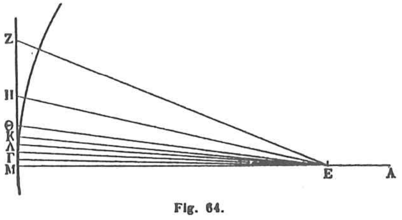


Fig. 64.

τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξβ η' πρὸς ρνγ· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροβ η' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δ' πρὸς ρνγ· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ δ' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ ∠' πρὸς ρνγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη'. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ'. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν de ΕΓ à ΓΔ est supérieur au rapport de 4673 ½ à 153, que ΑΓ est le double de ΕΓ et ΛΜ le double de ΓΛ, le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est supérieur au rapport de 4673 ½ à 14688. Et 14688 est le triple de 4673 ½, avec un reste de 667 ½, qui est inférieur à la 7e partie de 4673 ½ ; par conséquent le (sc. périmètre du) polygone circonscrit au cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté d'une partie du diamètre supérieure au septième. A plus forte raison[1] donc le périmètre du cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième.

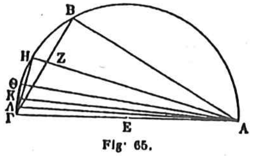


Fig. 65.

Soit un cercle, ΑΓ le diamètre, l'angle ΒΑΓ égal à la troisième partie d'un angle droit ; le rapport de ΑΒ à ΒΓ est donc inférieur au rapport de 1351 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΒ est égal au rapport de 1560 à 780. Bissectons l'angle ΒΑΓ par ΑΗ. Du moment donc que l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ[2] et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à l'angle ΗΑΓ. L'angle droit ΑΗΓ étant en commun[3], le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ[4]. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ ; ΑΗ est donc[5] à ΗΓ comme ΓΗ est à ΗΖ et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ aussi comme la somme de ΓΑ et ΑΒ est à ΒΓ[6], et par conséquent la somme de ΒΑ et ΑΓ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Pour ces raisons, le rapport de ΑΗ à ΗΓ est donc inférieur au rapport de 2911 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΗ est inférieur au rapport de 3013 1/2+1/4 à 780. Bissectons l'angle ΓΑΗ par ΑΘ ; pour les mêmes raisons que plus haut le rapport de ΑΘ à ΘΓ est inférieur au rapport de 5924 1/2+1/4 à 780 ou de 1823 à 240 ; car chacun des termes (sc. du dernier rapport) est les 4/13 du terme (sc. correspondant du premier rapport) ; le rapport de ΑΓ à ΓΘ est donc inférieur au rapport de 1838 9/11 à 240. Bissectons aussi l'angle ΘΑΓ par ΚΑ. Le rapport de ΑΚ à ΚΓ est inférieur au rapport de 1007 à 66, puisque des seconds termes chacun vaut les 11/40 d'un autre nombre ; le rapport de ΑΓ à ΚΓ est donc inférieur à celui de 1009 1/6 à 66. Bissectons encore l'angle ΚΑΓ par ΛΑ ; le rapport de ΑΛ à ΛΓ est donc inférieur au rapport de 2016 1/6 à 66, le rapport de ΑΓ à ΓΛ est inférieur au rapport de 2017 1/4 à 66. Inversement donc le rapport du périmètre du polygone au diamètre est supérieur au rapport de 6336 à 2017 1/4 et 6336 est supérieur au produit de 3 10/71 par 2017 1/4. Il s'ensuit que le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans le cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71 ; à plus forte raison[1] donc le (sc. périmètre du) cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71.

Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.

ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ,δχογ ∠' πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟϛ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,δχογ ∠' πρὸς $\overset{α}{\text{M}}$,δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ ∠', ἅπερ τῶν ,δχογ ∠' ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

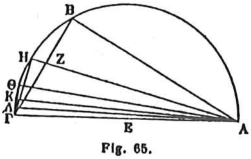


Fig. 65.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ατνα πρὸς ψπ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ,αφξ πρὸς ψπ]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,βϡια πρὸς ψπ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ,γιγ ∠' δ' πρὸς ψπ. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ ∠' δ' πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ'· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια' πρὸς σμ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξϛ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ'. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ϛ' πρὸς ξϛ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ βιϛ ϛ' πρὸς ξϛ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ' πρὸς ξϛ. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛτλϛ πρὸς ,βιζ δ', ἅπερ τῶν ,βιζ δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα'· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα'· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα'.

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ῑ οα' μείζων.

Les travaux des élèves ayant montré que le texte des exercices était ambigu (voir le premier bilan ci-dessous), l'avant-propos des exercices a été modifié comme suit (pour une expérience ultérieure).

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours.
Les exercices suivants ont pour but de déterminer un algorithme de calcul de π, suivant une méthode analogue à celle employée par ARCHIMEDE pour encadrer le rapport du périmètre au diamètre d'un cercle. La notation "π" est "récente" : début du 18ème siècle; ARCHIMEDE ne calcule pas un nombre, mais un rapport. Nous lirons d'ailleurs en classe un extrait de *La mesure du cercle* d'ARCHIMEDE.
La "règle du jeu" des exercices est la suivante: nous cherchons π, donc nous nous interdisons l'utilisation de la touche "π" de nos calculatrices; nous ne nous servirons que des opérations élémentaires " + , x , : , – , $\sqrt{\ }$ " (qu'on savait faire "à la main" du temps d'ARCHIMEDE).

II- Premier bilan

La majorité des élèves a trouvé une relation de récurrence liant c_n et c_{n-1} faisant intervenir π , ce qui dénote une mauvaise compréhension du but de l'exercice: calcul de π . Il faudrait donc remodeler la question 3°) a/ en demandant une relation de récurrence ne faisant intervenir que des opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions, soustractions, extractions de racines carrées) faisables à la main sans connaissance préalable de π .

L'exercice 2, plus classique, a été généralement bien traité.

Peu d'élèves cherchent à justifier les propriétés qu'ils voient à la figure (alignement de points, parallélisme, etc.) et qui servent à calculer les longueurs des côtés des polygones inscrits dans le cercle (ou circonscrits).

Tous ont conjecturé avant l'exercice 2 la convergence de $\left(\frac{1}{2}p_n\right)_{n\in N}$ et $\left(\frac{1}{2}q_n\right)_{n\in N}$ vers π . Mais aucun n'a essayé de voir ce qu'il était possible de montrer à ce stade (on peut montrer que les deux suites convergent vers ℓ et ℓ' avec $\ell \leq \pi \leq \ell'$).

Le fait que le périmètre d'un polygone inscrit dans le cercle est inférieur au périmètre du cercle est évident à partir de l'axiome sur les distances: "le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite", que les élèves connaissent depuis le collège. Par contre, pour les polygones circonscrits, on ne peut pas déduire simplement le résultat des connaissances des élèves (même si le résultat paraît évident à tous): il faudrait ajouter à l'énoncé de l'exercice 1: "on admettra que le périmètre d'un polygone circonscrit au cercle est supérieur au périmètre du cercle".

Ceci fait d'ailleurs l'objet d'un postulat et d'une proposition de *La Sphère et le Cylindre* d'ARCHIMEDE (voir annexe 2).

Enfin, six élèves répondent à la question posée sur ARCHIMEDE:
* Ils connaissent le principe d'ARCHIMEDE dont ils ont entendu parler en physique.
* Un élève cite la géométrie dans l'espace ou ARCHIMEDE a complété le travail d'EUCLIDE.
* Un autre: "Je ne savais pas qu'il avait étudié π ".
* Un élève cite ARCHIMEDE comme "ayant inventé le calcul intégral".

III- L'expérimentation

** Correction des exercices d'introduction*

Il n'y a pas eu de problème de compréhension. La plupart des élèves avait compris avant la correction que le fait que π intervienne dans la relation de récurrence permettant de calculer p_n et q_n posait problème.

L'un d'eux a soulevé une question très intéressante au sujet du calcul: la programmation de sa calculatrice lui donne $p_{10} > q_{10}$ et il n'obtient finalement π qu'avec 4 décimales exactes. D'où viennent les erreurs d'arrondi ?

En fait, on calcule avec notre algorithme c_n, puis on multiplie par $2^n \times 6$ pour obtenir p_n, donc l'erreur d'arrondi commise sur c_n est multipliée par $2^n \times 6$. C'est d'ailleurs le calcul que fait ARCHIMEDE dans le texte: il calcule une approximation de la longueur du côté d'un polygone à 96 côtés, puis multiplie la valeur trouvée par 96. Mais on peut améliorer l'algorithme (voir: *Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique* d'Arthur ENGEL, Cedic, p. 97-100).

* ***Lecture du texte*** (utilisation d'un rétro-projecteur, puis distribution du texte)

On commence par lire la proposition 3 et la "traduire" en langage moderne. les élèves ont la satisfaction de voir apparaître une approximation connue de $\pi : \frac{22}{7}$.

Ensuite, nous lisons ensemble la démonstration, en faisant la figure et les calculs pas à pas: le calcul de $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z}$ nous donne la valeur $\sqrt{3}$ alors qu'ARCHIMEDE emploie $\frac{265}{153}$. La calculatrice permet de voir qu'il s'agit d'une approximation par défaut à 2,5 x 10^{-5} près. Les calculs suivants nécessitent l'emploi d'un résultat sur la bissectrice d'un angle que nous avions démontré peu auparavant en exercice (Dans un triangle (ABC), si le point H de [BC] est tel que (AH) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, alors $\frac{AB}{BH} = \frac{AC}{HC}$). La suite des calculs montre bien le côté itératif du procédé: pour chaque angle, on calcule $u_n = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$ et $v_n = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}}$ avec

$u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}^2}$.

Les élèves sont très impressionnés par les calculs d'ARCHIMEDE. Nous ne lisons que la moitié de la démonstration (le périmètre de tout cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième) sans nous attaquer au calcul sur les polygones inscrits dans le cercle.

Il suit une discussion sur ARCHIMEDE et des commentaires sur le texte: les élèves situent bien la période historique et connaissent un certain nombre d'anecdotes sur ARCHIMEDE (sa mort, l'incendie de la flotte romaine, etc.). La formulation géométrique de la proposition retient leur attention, ainsi que la précision des calculs.

Au sujet de l'approximation de $\sqrt{3}$, nous nous demandons comment on peut arriver à $\frac{265}{153}$. On ne sait pas du tout comment ARCHIMEDE a pu arriver à cette approximation.

Quels sont, à l'époque d'ARCHIMEDE, les moyens possibles d'obtenir des approximations de racines carrées ?

Dans *Connaissances mathématiques utiles pour lire PLATON*, THÉON DE SMYRNE (1er siècle après J.-C.) étudie les "nombres latéraux et diagonaux". En termes modernes: partant du couple de nombres (1, 1) il donne un procédé itératif permettant d'obtenir des couples (c_n , d_n) de nombres de plus en plus grands tels que $d_n^2 - 2 c_n^2 = 1$ ou -1 . ($c_{n+1} = u_n + c_n$ et $d_{n+1} = d_n + 2 c_n$) . CAVEING [6] remarque que cela permet d'obtenir des approximations de $\sqrt{2}$ alternativement par défaut et par excès: en effet, si d_n^2 est "proche" de $2 c_n^2$, alors $\frac{d n}{cn}$ est "proche" de $\sqrt{2}$. Ce procédé permet donc d'obtenir une règle de calcul d'approximation de $\sqrt{2}$ par comparaison des carrés d'entiers et doubles de carrés, mais le texte de THÉON ne se préoccupe que de propriétés de nombres entiers, sans jamais parler clairement d'approximation du rapport de la diagonale au côté d'un carré ($\sqrt{2}$) . On peut cependant se demander si le procédé était utilisé par les Grecs pour obtenir des approximations de racines carrées de petits nombres. Pour $\sqrt{3}$ par exemple, on peut essayer de comparer les carrés d'entiers et les triples de carrés (si p^2 est "proche" de $3\ q^2$ alors $\frac{p}{q}$ est une bonne approximation de $\sqrt{3}$), voire chercher un procédé itératif analogue à celui de THÉON. Mais aucun texte ne permet d'affirmer que les Grecs firent ce genre de calcul. A ce sujet, voir CAVEING [6] , GUILBAUD [5] .

Il existe d'ailleurs d'autres procédés de calcul d'approximations de racines carrées. Nous avions déjà vu en exercice l'algorithme babylonien (dit aussi méthode de HÉRON): en termes modernes, pour approcher $\sqrt{A}$, on forme la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$ à partir de u_0 quelconque positif. Mais cette méthode ne donne que des approximations par excès, alors qu'ARCHIMEDE utilise $\frac{265}{153}$, approximation par défaut de $\sqrt{3}$. En fait, on peut, à partir d'une approximation par excès, obtenir une approximation par défaut à l'aide d'un développement en fraction continuée. Ceci est équivalent à l'algorithme d'EUCLIDE et a été probablement utilisée par ARISTARQUE pour ses calculs astronomiques. (Voir Jean ITARD [3]).

On peut trouver d'autres idées (proches des développements en fraction continuée) sur la manière dont les Grecs pouvaient trouver des approximations de $\sqrt{2}$ dans *Les Eléments* d'EUCLIDE de Jean ITARD, mais il s'agit là de reconstitutions plausibles, pas de faits attestés par des textes.

En classe, nous avons cherché comment nous pourrions, avec nos méthodes modernes, approcher $\sqrt{3}$, en précisant bien que ce n'est pas ce qu'a fait ARCHIMEDE (nous utilisons une écriture symbolique de suites et des nombres négatifs); après avoir remarqué que $x^2 = 3$ peut s'écrire $x^2 - 4 = -1$ ou $x = 2 - \frac{1}{x+2}$, nous étudions la suite: $u_0 = \frac{5}{3}$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n+2}$.

On aurait pu aussi prolonger cette recherche par l'étude du développement de $\sqrt{3}$ en fraction continuée ($\frac{265}{153}$ est la 8ème réduite).

La recherche d'une suite récurrente de limite $\sqrt{3}$ rejoignait des exercices d'approximation de racines carrées déjà traités en classe: méthode de HÉRON et une méthode donnant le type d'algorithme qu'on trouve ici: si $A = a^2 + r$, alors si $x^2 = A$, x est solution de $x = a + \frac{r}{x+a}$ et on étudie la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = a + \dfrac{r}{u_n + a} \end{cases}$$

* *Les prolongements*

Il n'y a pas eu de réelle évaluation. Mais, l'intérêt des élèves a été très vif et l'étude de ce texte a suscité un certain nombre de questions. En particulier, au moment de l'étude de l'intégration, un élève a fait la remarque suivante: les intégrales servant à calculer des aires, on peut probablement obtenir des approximations de π par le calcul d'intégrales.

J'ai donc donné un peu plus tard un problème de calcul d'approximation de π suivant la méthode de NEWTON (approximation de $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2}\, dx$ par une intégration terme à terme du développement en série de $\sqrt{x}\,\sqrt{1 - x}$) ; ce problème figure dans la brochure M.:A.T.H. de l'IREM Paris VII. Le problème a été généralement bien traité et la correction a été l'occasion de parler de NEWTON, de *La méthode des fluxions* et de la naissance du calcul intégral.

A la fin du troisième trimestre, nous avons fait le bilan de l'année en classe et nous avons, entre autres, discuté de l'histoire des mathématiques. Tous les élèves s'accordent à trouver "intéressant" de faire de l'histoire des mathématiques; une élève aurait cependant préféré plus d'exercices de type baccalauréat. Tous ont été plutôt surpris au départ, n'ayant jamais fait ce genre de travail auparavant. L'un d'eux précise que cela lui rendait le cours plus intéressant en lui permettant de voir quels étaient les problèmes que se posaient les mathématiciens.

Nous avions eu d'autres occasions de parler d'histoire des mathématiques:

- Introduction historique des nombres complexes avec lecture d'un texte d'ARGAND.
- Introduction historique des logarithmes.
- Texte de *La Géométrie* de DESCARTES sur la trisection de l'angle, etc.

Annexe 1

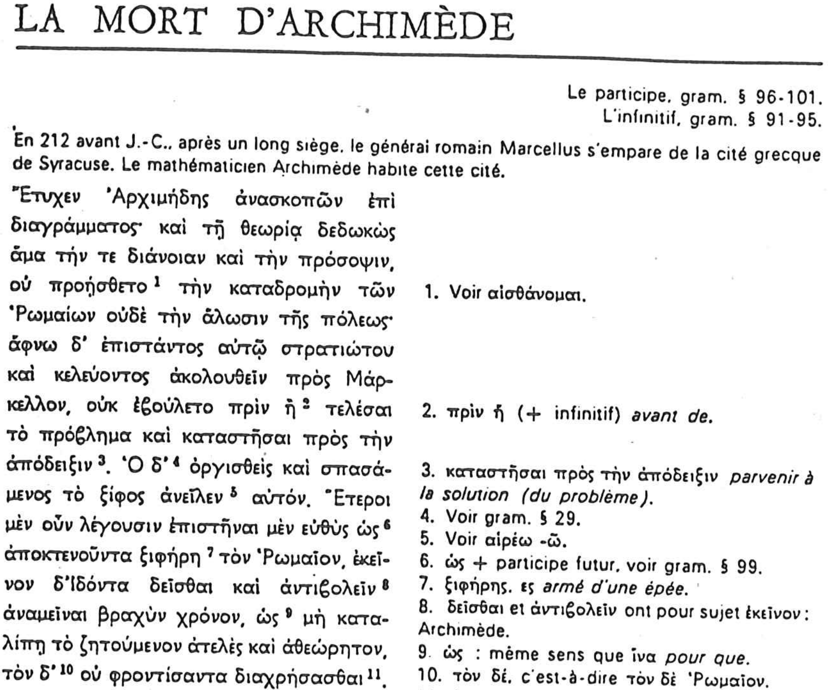
Utilisation du texte en classe de 3ème (élèves de 14-16 ans)

La lecture de ce texte a fait l'objet de trois expérimentations dans des classes de troisième (par M. BÜHLER, C. PERRINEAU, M. HALLEZ du groupe M.:A.T.H. de l'IREM Paris VII).

1) Travail effectué dans deux classes de 3ème en collaboration avec le professeur de grec

- en cours de grec (1h en présence des deux professeurs): traduction des trois propositions du texte d'ARCHIMEDE avec explication de leur signification.
- en cours de mathématiques (1h 30): travail dirigé sur les exercices joints en annexe (il s'agit là en fait d'une deuxième version des exercices, donnée par C. PERRINEAU à ses élèves).
- en cours de grec (1h): traduction du texte *La mort d'ARCHIMEDE* de PLUTARQUE (extrait du livre du grec de 3ème, collection Belin).

Ce travail (qui a eu lieu au premier trimestre) a été prolongé au second trimestre par un travail analogue sur *La mesure du cercle* d'HUYGENS (qui améliora la méthode), avec cette fois un calcul des périmètres des polygones inscrits et circonscrits au cercle.



LA MORT D'ARCHIMÈDE

Le participe. gram. § 96-101.
L'infinitif. gram. § 91-95.

En 212 avant J.-C., après un long siège, le général romain Marcellus s'empare de la cité grecque de Syracuse. Le mathématicien Archimède habite cette cité.

Ἔτυχεν Ἀρχιμήδης ἀνασκοπῶν ἐπὶ διαγράμματος· καὶ τῇ θεωρίᾳ δεδωκὼς ἅμα τήν τε διάνοιαν καὶ τὴν πρόσοψιν, οὐ προῄσθετο[1] τὴν καταδρομὴν τῶν Ῥωμαίων οὐδὲ τὴν ἅλωσιν τῆς πόλεως· ἄφνω δ' ἐπιστάντος αὐτῷ στρατιώτου καὶ κελεύοντος ἀκολουθεῖν πρὸς Μάρκελλον, οὐκ ἐβούλετο πρὶν ἢ[2] τελέσαι τὸ πρόβλημα καὶ καταστῆσαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν[3]. Ὁ δ'[4] ὀργισθεὶς καὶ σπασάμενος τὸ ξίφος ἀνεῖλεν[5] αὐτόν. Ἕτεροι μὲν οὖν λέγουσιν ἐπιστῆναι μὲν εὐθὺς ὡς[6] ἀποκτενοῦντα ξιφήρη[7] τὸν Ῥωμαῖον, ἐκεῖνον δ' ἰδόντα δεῖσθαι καὶ ἀντιβολεῖν[8] ἀναμεῖναι βραχὺν χρόνον, ὡς[9] μὴ καταλίπῃ τὸ ζητούμενον ἀτελὲς καὶ ἀθεώρητον, τὸν δ'[10] οὐ φροντίσαντα διαχρήσασθαι[11].

Plutarque, *Marcellus*.

1. Voir αἰσθάνομαι.
2. πρὶν ἢ (+ infinitif) *avant de*.
3. καταστῆσαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν *parvenir à la solution (du problème)*.
4. Voir gram. § 29.
5. Voir αἱρέω -ῶ.
6. ὡς + participe futur, voir gram. § 99.
7. ξιφήρης, ες *armé d'une épée*.
8. δεῖσθαι et ἀντιβολεῖν ont pour sujet ἐκεῖνον : Archimède.
9. ὡς : même sens que ἵνα *pour que*.
10. τὸν δέ, c'est-à-dire τὸν δὲ Ῥωμαῖον.
11. διαχρήσασθαι *tuer*.

2) Travail effectué dans deux classes de 3ème

Les exercices ont été donnés comme devoir à la maison, avec correction en classe (1 h). Les travaux rendus ont été en moyenne d'un niveau satisfaisant et ont montré un intérêt certain des élèves.

Certains des élèves n'ont pas réussi à trouver les résultats numériques exacts sous la forme donnée par l'énoncé (par exemple, $AD = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$), mais ont néanmoins fait le problème et trouvé des approximations décimales grâce à leur calculatrice (approximation à chaque pas du calcul) ... Ce qui, finalement, est plus proche de la démarche d'ARCHIMEDE !

Les élèves ont bien compris et apprécié la proposition 3 du texte et les meilleurs ont trouvé intéressante la proposition 1 (et ont su l'expliquer).

3) Travail effectué dans une classe de 3ème

Premier temps en classe (une demi-heure en novembre)
- construction des hexagones inscrit et circonscrit à un cercle;
- obtention de $3 < \pi$;
- discussion sur la possibilité d'obtenir un encadrement de π et la nécessité d'outils nouveaux pour le calcul de l'hexagone circonscrit (théorèmes de PYTHAGORE, THALES, racines carrées).

Deuxième temps (février-mars)
- calcul du côté de l'hexagone circonscrit et encadrement de π (en classe et à la maison);
- devoir à la maison: calculs des côtés des dodécagones inscrit et circonscrit et encadrement de π;
- correction en classe; lecture de la proposition 3 d'ARCHIMEDE.

Troisième temps: évaluation (2 h)
- devoir en classe sur les exercices joints.

Parallèlement, les élèves ont fait des recherches sur THALES, PYTHAGORE, EUCLIDE, ARCHIMEDE, ARISTOTE.

Exercice

Soit ($\mathcal{C}$) un cercle de centre O et de rayon 1. Soit A et B deux points de ($\mathcal{C}$) tels que AB = 1 .

1°) Quelle est la nature du triangle (AOB) ?
Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$?

En déduire une méthode de construction d'un *hexagone régulier inscrit* dans ($\mathfrak{C}$).
Faire la figure avec une grande unité de longueur (5 cm par exemple ou 10 cm).
Le périmètre P_6 de l'hexagone est bien sûr inférieur au périmètre P du cercle (principe de base de la méthode).
Calculer P (à l'aide de π), et P_6.
En déduire une première minoration de π .

2°) La médiatrice de [AB] coupe le segment [AB] en H et le petit arc AB en C.
Calculer OH. En déduire HC, puis AC.
(On doit trouver $AC = \sqrt{2-\sqrt{3}}$).
Soit P_{12} le périmètre do *dodécagone régulier inscrit* dans le cercle, dont [AC] est un côté.
Donner la valeur exacte de P_{12} , puis une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près.
$P_{12} < P$. En déduire une nouvelle minoration de π .

3°) La médiatrice de [AC] coupe le segment [AC] en K et le petit arc AC en D.
Calculer OK, puis KD. En déduire AD.
(On doit trouver: $OK = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $AD = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$).
Soit P_{24} le périmètre du *polygone régulier à 24 côtés inscrit* dans (C), dont [AD] est un côté.
Donner la valeur exacte de P_{24} , puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.
$P_{24} < P$. En déduire une nouvelle minoration de π .

ARCHIMEDE, qui, outre de génie, était doué d'une remarquable obstination, pousse le calcul jusqu'aux polygones à 96 côtés, inscrits, mais aussi circonscrits.
Ainsi, il put énoncer sa célèbre proposition:

> "Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre augmenté d'une valeur supérieure à la dix-soixante-et-onzième partie du diamètre et inférieure à la septième partie du diamètre."

Autrement dit: $P = 3D + X$
avec $\ldots \times D < X < \ldots \times D$
d'où $\ldots \times D < P < \ldots \times D$
et donc, en divisant par D,
$\ldots < \pi < \ldots$

Autre célèbre proposition d'Archimède, qu'il a énoncé AVANT son calcul sur le rapport du périmètre au diamètre d'un cercle:

> "Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle."

Qu'en pensez-vous ?

Annexe 2

Extrait de *De la Sphère et du Cylindre* d'ARCHIMEDE.
Livre I - Traduction C. MUGLER. Editions "Les belles lettres".

I. POSTULATS

J'admets ce qui suit :

1° De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite[1].

2° Quant aux autres lignes, elles sont inégales lorsque, situées dans un plan et ayant les mêmes extrémités, elles tournent l'une et l'autre leur concavité du même côté et que l'une d'entre elles est ou bien entièrement comprise entre l'autre et la droite ayant les mêmes extrémités qu'elle, ou bien en partie comprise, d'autres parties lui étant communes avec l'autre ligne. La ligne comprise est la plus courte.

Ces principes posés, si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le périmètre du polygone inscrit est plus court que la circonférence du cercle, car chacun des côtés du polygone est plus court que l'arc du cercle découpé par lui.

1.

Si on circonscrit un polygone à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que le pourtour du cercle.

Circonscrivons à un cercle le polygone marqué sur la figure. Je dis que le périmètre du polygone est plus grand que le pourtour du cercle[1].

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

α'. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

β'. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

α'.

Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. Λέγω ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

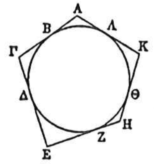


Fig. 1.

Puisque, en effet, la somme des segments de droite $BA+A\Lambda$ est plus grande que l'arc de cercle $B\Lambda$, du fait que la ligne brisée $BA\Lambda$ a mêmes extrémités que cet arc et comprend ce dernier, que de même $\Delta\Gamma+\Gamma B>\widehat{\Delta B}$, $\Lambda K+K\Theta>\widehat{\Lambda\Theta}$, $ZH+H\Theta>\widehat{Z\Theta}$ et, finalement, $\Delta E+EZ>\widehat{\Delta Z}$, tout le périmètre du polygone est supérieur à la périphérie du cercle.

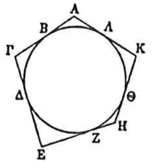


Fig. 1.

'Επεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Bibliographie

[1] DAHAN - DALMEDICO A. - PEIFFER J., *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*. Le Seuil Coll. Points Sciences. Paris, 1986.

[2] ENGEL A., *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*. Traduction D. REISZ. Cedic. Paris, 1979.

[3] ITARD J., *Essais d'histoire des mathématiques*. Blanchard, Paris, 1984.

[4] Groupe IREM Epistémologie et Histoire, *Mathématiques au fil des âges*. Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[5] GUILBAUD G.TH., *Leçons d'à peu près*. Bourgois, Paris, 1985.

[6] CAVEING, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Université Lille III, Lille, 1982.

[7] *Numéro Spécial* π . Supplément au Petit Archimède. ADCS, Amiens, 1980.

[8] M.:A.T.H., *Mathématiques: Approche par des textes historiques*. IREM Paris VII. Paris, 1986. '