Dériver ou ne pas dériver ?

Henry PLANE
Professeur de Mathématiques
Lycée J. Amyot - Auxerre
I.R.E.M. de Dijon

Il est toujours profitable, à un moment ou l'autre, dans le cadre d'un programme, d'user de l'histoire des mathématiques pour situer la place, dans la construction de l'édifice mathématique, de la notion étudiée. Ce peut être pour introduire cette notion, ce peut être pour en apprécier la valeur, ce peut être pour éviter une mécanisation exagérée de l'usage des résultats obtenus, mécanisation faisant souvent disparaître le fond des problèmes et masquant aux débutants tout le parti à en tirer sur le moment ou en vue de généralisations ultérieures.

L'expérience relatée ici a été faite en terminale C (la classe du baccalauréat mathématiques et physique), en cours d'année, avec des élèves pour qui la dérivée était devenue une sorte de réflexe conditionné face à la trilogie "fonction, courbe, tangente". C'est un texte de HUYGENS daté de 1667 *Règle pour trouver les tangentes aux lignes courbes* qui a servi de support.

Plus d'une fois les élèves avaient entendu le professeur leur dire que c'était le problème de la recherche de la tangente en un point d'une courbe qui avait, en quelque sorte, engendré le procédé appelé ultérieurement dérivation, procédé étudié ensuite pour lui-même et devenu outil de résolution de maints autres problèmes. Mais les mots "signification géométrique de la dérivée" tintaient néanmoins à leurs oreilles inversant cause et conséquence. L'expérience était à tenter en vue de préciser justement le problème.

Pour centrer l'effort et organiser la recherche on a limité le texte proposé à la première page du passage reproduit. Le travail a été divisé en trois temps.

1/ L'extrait polycopié a été distribué aux élèves, sans commentaire, avec mission, pour eux, de le lire; le professeur répondrait à leurs questions concernant le sens des mots, des expressions et des phrases lors d'un prochain cours.

Sur quels points portèrent questions et discussions ?

- Droite souvent employé pour segment de droite (cf. *Les éléments* d'EUCLIDE).

- AF = x , il s'agit d'une longueur, de même pour y et e.
  Le passage sur l'orientation de FE a été une excellente occasion de rappeler toute la richesse des outils: mesure relative, axe, axes de coordonnées. Mais nous ne sommes ici qu'en 1667. Il faudra attendre encore un bon siècle (cela a déjà été dit aux élèves en d'autres occasions). Quelqu'un ayant parlé à propos de z de valeur absolue, cette notion a pu être re-située conséquence et non cause de la notion de nombre relatif, et il a été insisté sur la distinction alors faite entre "différence entre a et b" et "excès de a sur b".

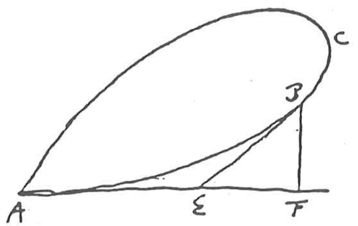
- Toucher, touchante: souvenir de FERMAT ...

- Nombre de dimensions: nous disons degré et pourtant carré, cube, ...

- Il a été remarqué qu'il n'était pas demandé à BF d'être orthogonal - perpendiculaire - à AF - et, dans le même ordre d'idée que x et y étaient mesurés avec la même unité: algèbre au service de la géométrie.

Texte distribué aux élèves:

Soit donnée une courbe telle que BC [Fig. 9] ayant une relation connue avec une droite AF donnée également en poſition. Par conſéquent l'ordonnée partant d'un point quelconque B de la courbe eſt la droite BF la quelle rencontre la droite AF ſous un angle donné BFA, et un point A dans la droite AF étant donné, la relation entre AF et FB eſt exprimée par une certaine équation. Suppoſons par exemple, en poſant AF $= x$ et FB $= y$, que ce ſoit l'équation



[Fig. 9]

$$x^3 = xya - y^3.$$

où a déſigne une certaine longueur.

S'il faut mener au point B une tangente BE qui rencontre la droite AF en E et qu'on poſe FE $= z$, la longueur de cette dernière d'après cette règle — la règle de Fermat abrégée — ſera tirée uniquement de l'équation donnée.

Transportons tous les termes de l'équation donnée dans le premier membre qui devient donc alors égal à zéro. Multiplions d'abord chacun des termes dans leſquels ſe trouve y par le nombre des dimenſions que cette lettre a dans le terme conſidéré: leur ſomme ſera notre numérateur. Multiplions enſuite de la même manière chaque terme contenant x par le nombre des dimenſions de cette dernière et diviſons chacun de ces termes par x: la ſomme obtenue ſera notre dénominateur. En formant la fraction de ce dénominateur avec le numérateur trouvé plus haut nous aurons la quantité égale à z ou FE. Quant aux fignes $+$ et $-$, il faut les garder partout comme ils font. Même fi par hafard la quantité du dénominateur ou du numérateur, ou l'une auffi bien que l'autre, eft négative, il faut pourtant les confidérer comme fi elles étaient pofitives, en obfervant feulement que lorfque l'une des deux eft pofitive et l'autre négative, FE doit être prife vers le point A; mais qu'elle doit être prife en fens contraire lorfque les deux quantités font ou bien pofitives ou bien négatives.

Dans le cas de la courbe propofée dont l'équation eft $x^3 + y^3 - axy = 0$ le numérateur deviendra d'après cette règle $3y^3 - axy$ et le dénominateur $3x^2 - ay$. Partant $z = \dfrac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$. C'eft une longueur connue, x, y et a étant données.

Confidérons de même une autre courbe ABH [Fig. 10] à équation

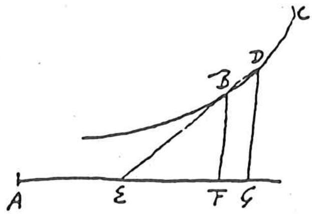
$$ax^2 - x^3 - q^2y = 0,$$

a et q étant des lignes données, tandis que AF $= x$ et FB $= y$. Soit BE la tangente et appelons FE z comme auparavant.

Le numérateur deviendra ici $-q^2y$ fuivant la règle. Et le dénominateur $2ax - 3x^2$.

D'où $z = \dfrac{-q^2y}{2ax - 3x^2}$. Or, comme le numérateur eft négatif, il faudra, lorfqu'il en eft de même du dénominateur, c.à.d. lorfque $2a < 3x$, prendre z ou FE du côté oppofé à celui où fe trouve A; mais lorfque $2a > 3x$, il faudra prendre FE du côté de A fuivant le précepte de la règle.

Pour expliquer la raifon en même temps que l'origine de la règle fimplifiée par nous, confidérons de nouveau une courbe BC [Fig. 11] à laquelle on demande de mener une tangente au point B.



[Fig. 11]

Prenons d'abord une droite EBD qui ne touche pas la courbe en B mais qui la coupe tant en ce point qu'en un autre D fort proche de B. Puiffe cette fécante rencontrer la droite AG en E, et menons des deux points B, D à la droite AG les deux ordonnées inclinées sous le même angle BF et DG. Soit AF $= x$ et FB $= y$ comme auparavant. Suppofons en outre que FG foit une longueur donnée e et cherchons FE $= z$.

2/ Après cette séance, pour expliquer et situer le texte, un deuxième travail fut proposé - toujours en préparation pour un cours suivant -

Avec les outils dont vous disposez, justifiez et expliquez le résultat relatif à la seconde courbe. Puis, en revenant sur la définition de la tangente, suggérée en fin de texte, essayez de rétablir le raisonnement et les calculs de HUYGENS.

Assez curieusement, les élèves n'ont pas saisi de prime abord la différence d'approche des calculs entre les deux courbes proposées, à savoir, $x^3 + y^3 - axy = 0$ et $ax^2 - x^3 - q^2 y = 0$. Ce n'est guère qu'au moment de la "correction" que se révéla le fait qu'à l'aide de la seconde relation, ils pouvaient exprimer y en fonction de x $\left(y = \frac{ax^2 - x^3}{q^2}\right)$ ce que la première relation ne leur permettait pas de faire.

Equation, fonction: vocables trop souvent utilisés par les élèves sans le discernement nécessaire. L'occasion était bonne d'y revenir d'autant que le texte étudié était contemporain de la "création" du mot fonction par LEIBNIZ (la méthode inverse des tangentes ou au sujet des fonctions -seu de fonctionibus- dans un manuscrit daté de 1673). Les élèves avaient déjà eu connaissance de l'historique de la notion de fonction à un autre moment du cours et il leur avait alors été distribué le petit texte que l'on trouvera en annexe 2.

Pour en revenir à nos courbes, peut-être aurait-il mieux valu laisser les élèves tenter leur chance, d'entrée de jeu, sur les deux à la fois ?

Comme il était assez normal de s'y attendre, la dérivée de $\frac{ax^2 - x}{q^2}$ fournit sans trop de peine $EF = -\frac{ax^2 - x^3}{2ax - 3x^2}$ où il fut donné, à la plupart, de reconnaître $EF = \frac{-q^2 y}{2ax - 3x^2}$ et la discussion concernant le "sens" de EF. Par contre pour retrouver le processus de HUYGENS, si les élèves établirent que $AG = x + e$ et $DG = y\left(1 + \frac{e}{z}\right)$ ainsi que la relation:

$$a(x+e)^2 - (x+e)^3 - q^2 y\left(1 + \frac{e}{z}\right) = 0$$

une partie seulement d'entre eux s'engagea sur la voie: sachant que f' est la limite pour e tendant vers zéro de $\frac{f(x+e) - f(x)}{e}$ que peut-on effectivement tirer de cette relation ? Les calculs furent donc repris ensemble. Ainsi, l'étude de $\frac{FB}{EF} = \frac{y}{z}$ limite de $\frac{a(x+e)^2 - (x+e)^3 - (ax^2 - x^3)}{q^2 e}$ pour e tendant vers zéro montra bien que les coefficients des termes en x correspondaient aux exposants - développement de $(x + e)^n$ - mais elle se heurta par contre à l'utilisation de termes en e^2 et e^3. Le professeur constata une fois encore que la notion de limite, même pour e tendant vers zéro, n'était pas des mieux acquises, alors que les calculs étaient correctement faits.

Ce fût donc une excellente occasion de reprise de cette notion. On dégagea ensuite que si y était la limite pour e tendant vers zéro de $\frac{1}{e}\left[y\left(1+\frac{e}{z}\right)-y\right]$, c'était également celle de $\frac{1}{ne}\left[y^n\left(1+\frac{e}{z}\right)^n - y^n\right]$.

Ceci conduit au troisième travail proposé.

3/ "Reprendre le raisonnement et les calculs sur le premier exemple". "Celui où il n'y a pas de fonction ?" demande quelqu'un. Cela assurait que la différence était perçue.

Des élèves se tirèrent sans embûches de cette partie, guidés qu'ils furent par la "correction" de la seconde préparation. Les difficultés qui apparurent pour les autres furent du même ordre qu'au cas précédent.

Quelqu'un fit une remarque: "Mais alors il se passait de dérivée !". Elle montre que, parce qu'un mot n'est pas prononcé, plus d'un croient que l'idée utilisée est autre. Vertu des mots !

Il est certes alors intéressant de tirer en conclusion de ce travail qu'il y a moyen de "calculer" la tangente à une courbe dont l'équation ne se présente pas sous forme de fonction. Cette porte ouverte sur l'avenir n'est pas sans avantage pour les élèves les plus curieux mais l'essentiel réside plutôt dans l'idée de l'étude d'une limite créée par une quantité "infiniment petite ou entièrement évanouissante" selon FERMAT ou HUYGENS.

C'est alors que l'on peut distribuer la suite du texte (Annexe 1) pour montrer aux élèves qu'ils ont su faire comme ce dernier.

Le procédé dégagé ici pourra être utilisé ultérieurement lors de l'étude des coniques dont l'équation n'est pas fonctionnelle.

Ainsi au point de coordonnées (X, Y) de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ la sous tangente est $\frac{-a^2Y^2}{b^2X}$. Par suite l'équation de la tangente $\frac{x-X}{-a^2Y} = \frac{y-Y}{b^2X}$ peut s'écrire $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ou encore $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1$.

Qu'en est-il de l'évaluation de cette expérience ? Elle est très diverse. Il y a le cas des élèves peu motivés pour lesquels c'est une complication puisque par ailleurs il existe une formule... Il y a, à l'autre extrémité, ceux qui discernent un moyen plus général de traiter un problème. En ce qui me concerne, je pense surtout avoir eu une occasion de revenir sur un mécanisme en insistant sur le raisonnement qui le guide et donc sur l'intelligence d'une question.

Toutefois s'il est isolé, c'est-à-dire si les retours-en-arrière, grâce à l'histoire des mathématiques, ne sont pas le fait d'une certaine habitude, un tel travail n'a guère de chance d'avoir un impact culturel.

Annexe 1

Cette page, suite du texte de HUYGENS, n'a été distribué aux élèves qu'à la fin du troisième temps.

On a donc EF : FB, c.à.d. $z : y = EG$ (ou $z + e$) : GD, d'où $GD = y + \frac{cy}{z}$. Il est évident que ceci est vrai pour une courbe quelconque.

Considérons maintenant l'équation exprimant la nature de la courbe; que ce soit par exemple celle proposée plus haut $x^3 + y^3 - xya = 0$, dans laquelle a désignait une longueur connue (AH). Or, il est évident que lorsque le point D est situé sur la courbe, les deux longueurs AG et GD, c.à.d. $x + e$ et $y + \frac{ey}{z}$, doivent avoir entr'elles la même relation que AF et FD, c.à.d. x et y. En d'autres termes, lorsque dans l'équation proposée on substitue partout $x + e$ à x et $y + \frac{cy}{z}$ à y, l'équation résultante aura de nouveau zéro dans le second membre. On aura donc:

$$x^3 + \boxed{zex^2} + ze^2x + e^3 + y^3 + \boxed{\frac{zey^3}{z}} + \frac{ze^2y^3}{z^2} + \frac{ze^3y^3}{z^3} - axy - \boxed{aey} - \boxed{\frac{aeyx}{z}} - \frac{ae^2y}{z} = 0$$

Il est certain que cette équation doit contenir les termes de l'équation précédente qui a servi à la formation, savoir $x^3 + y^3 - axy$. Et comme l'ensemble de ces termes est nul d'après la propriété de la courbe, il est par conséquent nécessaire que, ces termes ayant été supprimés, le reste aussi soit égal à zéro. Or, il est manifeste que dans tous les termes qui sont restés on trouve une ou plusieurs lettres e, et que par conséquent ils peuvent tous être divisés par cette longueur; et je fais qu'il faut égale à zéro, en négligeant les autres, tous ceux qui, après cette division, ne contiendront plus e. L'équation ainsi obtenue donnera la droite z ou FE; bien entendu dans le cas où BF est considérée comme une tangente de sorte que FE ou e est infiniment petite.

Car les termes dans lesquels e est restée représenteront alors des quantités infiniment petites ou entièrement évanouissantes.

In *Règle pour trouver les tangentes des lignes courbes*. Communication de HUYGENS à l'Académie des Sciences (1667).
Ce texte est publié en traduction française dans les *Œuvres complètes* de Ch. HUYGENS. (Tome 20, p. 249 et suivantes). Edité par la Société hollandaise des sciences. N. Nijhoff, La Haye, 1940.

Annexe 2

Petit historique autour de la notion et du mot

Le vocable même de "fonction" n'est apparu que tardivement (fin du 17ème siècle).

Le concept, par contre, s'est dégagé petit à petit dans quelques ouvrages tels: *La latitude des formes* d'ORESME (14ème siècle), l'étude de GALILÉE sur la dépendance de la vitesse par rapport au temps (vers 1640), les expressions algébriques liées aux courbes chez DESCARTES (à la même époque).

Dans l'Antiquité, il peut même être repéré dans la confection des tables des cordes liées aux arcs de cercle (les ancêtres de nos sinus). Les nombreuses tables de calcul publiées durant le 16ème siècle constituent également une approche significative.

Mais lorsque, s'exprimant en latin, le "géomètre" disait que, dans une expression, une quantité contenant deux grandeurs, on pouvait calculer l'une à partir de l'autre, il ne lui était pas nécessaire de faire appel à un mot particulier, un cas de déclinaison grammaticale pouvait suffire; au plus usait-il d'une préposition (a, ab, ex).

NEWTON, qui rédigeait en latin, semble avoir été le premier, vers 1670, à formuler un terme propre en usant du mot "genita" pour désigner une quantité obtenue, engendrée, à partir d'autres quantités et ce, au moyen des quatre opérations.

LEIBNIZ dans deux textes en latin des *Acta eruditorum* de 1673 et 1692 use du vocable "functio, functiones", mot forgé à partir du participe passé du verbe fungor - accomplir - remplir (une charge). Puis il francise le mot. Dans le *Journal des sçavans* en 1694, il écrit: (en français) "Entre deux fonctions quelconques de la ligne AC ...", et plus loin suit une définition en lien avec la question étudiée alors "J'appelle fonction toutes les portions de lignes qu'on fait en menant ...". Ailleurs il désigne, toujours en français, l'abscisse, l'ordonnée, la corde comme fonctions d'une courbe.

Le terme fut alors repris par d'autres. En juillet 1698, LEIBNIZ écrit à Jean BERNOULLI "J'ai plaisir à vous voir employer le terme fonction dans mon sens". Et BERNOULLI de lui répondre de Groningen au mois d'août "Pour noter une fonction d'une certaine quantité indéterminée x, j'aime utiliser la majuscule correspondante X ou la lettre grecque ξ. On peut voir immédiatement de quelle indéterminée dépend la fonction".

Le concept perd alors, petit à petit, son caractère géométrique immédiat.

Dans *les Mémoires de l'Académie des Sciences*, en 1718, BERNOULLI écrit: "DEFINITION. On appelle ici **fonction** d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes".

EULER prit la suite et dans une note de l'Académie de Saint Pétersbourg (1734), il introduit la notation $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ pour: "une fonction arbitraire de $\frac{x}{a}+c$". Dans *Introduction in analysis infinitorum* de 1748, il reprend la définition de BERNOULLI en ajoutant le mot "analytique", "... en conséquence toute expression analytique dans laquelle, à côté de la variable z, toutes les quantités qui composent cette expression sont des constantes, est une fonction de cette même z; ainsi $a+3z$, $az-4zz$, etc.". (On remarquera que ce texte est en latin, fonction y fait retour une fois défini) (1).

La notion de fonction n'est pas simple.

Un "dictionnaire pour débutants" du 20ème siècle relève seulement une expression comme: "Cet homme remplit la fonction de chef de gare" (c'est exactement le verbe fungor du latin !).

Il est, par ailleurs, assez significatif de noter également que le "dictionnaire étymologique" de DAUZAT ne donne rien quant à l'origine scientifique du mot.

Mais la notion ne cessera de se développer au cours du 19ème siècle et de nos jours encore. Elle déborde rapidement les mathématiques. Les sciences du reste en infléchissent le sens selon tel ou tel besoin propre.

Pour rester dans les seules mathématiques, c'est LAGRANGE qui écrit (An V de la République): "On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables".

CAUCHY paraît encore plus général dans son cours *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. "Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elle étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités expérimentées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable."

Enfin, des témoins du 20ème siècle: On trouve dans le *Petit Larousse*, 1968: "Fonction: math. grandeur dépendant d'une ou plusieurs variables"; et dans un manuel scolaire de 1975: "On appelle fonction de E vers F un objet mathématique défini par la triple donnée de 1) un ensemble E, 2) un ensemble F, 3) une forme propositionnelle à deux variables p(x, y) telle que pour tout élément x de E, il existe un élément y de F au plus".

Notes

(1) Maintes langues ont adopté et adapté fonction. Ainsi on trouvera funktion, function, funcion, funçao voire функция
L'arabe et le chinois font appel à d'autres vocables mais en évoquant un lien orienté d'une grandeur vers une autre.

Bibliographie

Sur le calcul des tangentes, on pourra consulter:

DIDEROT & D'ALEMBERT, *L'encyclopédie méthodique.* édition Panckouche, Mathématiques, tome III, article Tangente.
STRUICK, *A source book in mathematics.* Harward, 1969.

ainsi que les brochures écrites dans le même esprit que cet article:
IREM de Dijon, *De l'invention des tangentes,* 1981. I- FERMAT, DESCARTES; II- ROBERVAL.

Sur la notion de fonction, on pourra consulter:

YOUSCKEVITCH, *The concept of function up to the middle of the 19th century.* in Archive for history of exact sciences, 16, 1976, p. 37-38. Traduction française par BELLEMIN J.M. in Fragments d'histoire des mathématiques, n°1, Brochure A.P.M.E.P., 1981, p. 7-68.
DHOMBRES J., *Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liées à l'évolution du concept de fonction.* in Archive for history of exact sciences, 36, 1986, p. 91-181.
BELLEMIN et alii, *Vous avez dit fonction.* Brochure de l'IREM de Dijon, 1982.

Quelques dates

DESCARTES	1596 - 1650
FERMAT	1601 - 1665
HUYGENS	1629 - 1695
LEIBNIZ	1647 - 1716
ROBERVAL	1602 - 1675