Une année de mathématiques en terminale E présentées dans une perspective historique

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
Professeur de Mathématiques
Lycée Couffignal- Strasbourg
I.R.E.M. de Strasbourg

Les travaux des I.R.E.M. en général, le retentissement qu'ont connu les manifestations diverses (colloques, universités d'été) organisées depuis plus de dix ans par la commission Inter-IREM d'Histoire et d'Epistémologie des mathématiques en particulier, tout cela n'est certainement pas étranger à la lente mais incontestable modification de l'enseignement des mathématiques en France durant ces dernières années. Outre une remise en cause du cours magistral traditionnel au profit d'une pratique plus active de résolution de problèmes, on voit apparaître ici et là, dans les manuels mais surtout dans les préoccupations de nombreux collègues, un réel intérêt pour les aspects historiques de la science qu'ils enseignent. On en veut pour preuve le fait que, pour la première fois, les instructions officielles elles-mêmes précisent qu':

> *"il convient de mettre en valeur le contenu culturel des mathématiques; en particulier l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique."* (1)

Malheureusement, si ces programmes sont très explicites et détaillés sur ce qu'il faut faire et ce qu'il ne faut pas faire relativement au contenu mathématique à enseigner et aux travaux à effectuer, ils sont totalement muets en ce qui concerne la façon d'introduire cette perspective historique. Bien plus, rien n'est prévu dans la formation d'un professeur de mathématiques pour l'aider à assumer cette tâche pourtant souhaitée par les instructions officielles. C'est pourquoi l'expérience relatée ici est à prendre non comme un exemple, mais comme un simple point de départ à une réflexion critique sur ce que peut être un éclairage historique d'un cours de mathématiques en classe de lycée. Elle est aussi à situer dans l'ensemble des autres expériences mises en route par le groupe Inter-IREM d'Histoire des Mathématiques, lequel a le mérite de croire passionnément au rôle irremplaçable de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, et surtout de travailler à sa prise en compte dans un tel enseignement.

L'extrait de commentaire officiel cité plus haut, s'il attire à juste titre l'attention du professeur de mathématiques sur l'intérêt d'une perspective historique pour l'élève, semble ignorer par contre les modifications qu'une telle perspective engendre nécessairement dans sa façon d'enseigner comme dans le contenu de son enseignement.

D'abord l'histoire des mathématiques est une source inépuisable de problèmes réels qui donnent à cette matière réputée abstraite, un ancrage solide dans l'histoire de l'humanité en général, aussi bien que dans la vie quotidienne des hommes de chaque civilisation, que ce soit pour

- mesurer des distances, des longueurs, des aires, des volumes;
- repérer la position des astres et prévoir leur déplacement;
- résoudre des problèmes d'héritage, d'assurances, de navigation, de commerce, des problèmes liés à l'architecture, à la musique, à la peinture;

ou que ce soit comme l'outil théorique des sciences de la nature ou encore, tout simplement pour son propre divertissement.

Autant ces problèmes, par leur diversité, leur contexte, leur imprégnation dans les mœurs ou la culture d'une époque nous passionnent et peuvent susciter l'intérêt, voire une passion analogue chez l'élève, autant ils rendent manifeste le caractère stérile et ennuyeux des exercices purement formels, artificiels et répétitifs proposés aux élèves par tant de manuels des dernières années, comme par exemple:

- préciser l'ensemble de définition de telle et telle fonction,
- les fonctions suivantes sont-elles continues au point a ?

$$f(x) = x^2 - 4 \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad ; \quad a = 3 \quad ; \quad \text{etc.}$$

- étant donné $\varepsilon > 0$, trouver $\alpha > 0$ tel que $|x| < \alpha$ entraîne $|f(x)| < \varepsilon$ dans les cas suivants

1/ $f(x) = 3x^2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$

2/ $f(x) = \sqrt{2}\,|x|$ et $\varepsilon = 10^{-3}$ etc.

Autre aspect: l'histoire des mathématiques permet de mieux comprendre et cerner les difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans l'assimilation de nouveaux concepts ou outils mathématiques. L'étude de l'histoire du concept de fonction, de limite, d'intégrale par exemple, permet au professeur de trouver des chemins, de ménager des étapes et ainsi d'aider l'élève à construire progressivement un savoir mathématique sensé, dynamique, ouvert, à l'opposé de ce qu'il est pour tant d'entre eux: au mieux matière à exercices mécaniques et formels, au pire ensemble de formules rituelles, vides de sens, que le professeur manie devant lui comme un prestidigitateur.

Les programmes officiels eux-mêmes ont, là aussi, été obligés de tenir compte des enseignements de l'histoire, et ont renoncé maintenant à définir la notion de limite d'emblée sous sa forme élaborée et abstraite telle qu'elle est donnée par WEIERSTRASS. Ils ont supprimé la notion d'intégrale de RIEMANN longtemps au programme des T.C. et T.E. (2), notion trop fine pour les fonctions et les problèmes rencontrés par un élève de lycée, fut-ce de terminale scientifique. Il a fallu se rendre à l'évidence que, tout comme les générations de mathématiciens passées, l'élève doit d'abord rencontrer un concept nouveau dans une situation de problème, l'expérimenter, se heurter à des difficultés, des impasses, avant d'être à même de saisir toute la richesse, la subtilité, la puissance d'une définition qui est le fruit de dizaines parfois de centaines d'années de travail et de réflexion mathématique.

Enfin, l'histoire des mathématiques permet au professeur de se désolidariser sans complexe d'avec une pratique essentiellement déductiviste et dogmatique des mathématiques, où la conjecture et l'erreur n'avaient aucune part, où l'élève devait non pas tant chercher, inventer une solution à un problème, que savoir répéter ou adapter dans la forme et le vocabulaire enseignés, une méthode toute faite, rigide et stéréotypée. L'histoire montre, au contraire, au professeur, comme à l'élève, que le savoir mathématique s'est construit progressivement, quelquefois en suivant de belles routes larges et droites, mais beaucoup plus souvent en se perdant dans des dédales, des impasses, en se frottant à des contradictions, en s'acharnant sur des problèmes qui devaient en fin de compte se révéler impossibles !

Ces trois motivations m'animent depuis longtemps pour m'intéresser à l'histoire des mathématiques et à en parler quelquefois aux élèves. Mais le fait que cet intérêt soit pris en compte dans des commentaires officiels et surtout que ces commentaires soient coordonnés à un allégement notable du programme de T.E., cela m'a incité à intégrer franchement l'histoire dans mon cours pour cette classe.

La T.E. est la classe terminale d'un second cycle d'enseignement technologique. Cet enseignement, outre les matières générales habituelles comprend un certain nombre d'heures consacrées au dessin technique, à la technologie, au travail sur machine en atelier (11 heures au total par semaine). Ces heures sont compensées par l'étude d'une seule langue vivante, pas d'histoire-géographie au-delà de la classe de première, pas de sciences naturelles.

Cela donne, en moyenne, un profil d'élève très différent du modèle "humanités classiques" qui a longtemps régné sur l'enseignement français qu'il soit littéraire ou scientifique. Issu en grande majorité d'un milieu modeste: ouvrier, cultivateur, technicien, l'élève de T.E. est travailleur, pragmatique, réservé. Ne baignant pas dans un milieu culturel aisé, son expression sera souvent brève mais sensée, quelquefois maladroite, quelquefois complexée en face du discours facile et prolixe, comme en face du texte écrit. D'où une certaine réticence à aborder l'histoire des mathématiques par la lecture de textes anciens (voir plus loin).

La classe dans laquelle s'est déroulée l'expérience comprenait 34 élèves âgés de 17 à 20 ans; classe réceptive, studieuse, active, intéressée, mais évidemment trop chargée. Y sont prévues neuf heures de mathématiques par semaine dont une heure en classe dédoublée.

Le parti-pris a été de ne pas séparer les informations historiques du cours de mathématiques proprement dit, mais au contraire de les intégrer totalement à ce cours, soit pour l'aérer, essayer de le rendre plus vivant et intéressant, soit pour préparer et illustrer une notion nouvelle. Les données historiques se sont en conséquence présentées sous deux formes distinctes mais complémentaires:

- simple évocation d'un personnage à l'occasion d'un théorème, d'une formule ou d'une méthode, sa situation historique et géographique, son environnement culturel, parfois une anecdote;
- développement historique d'une invention, en situant le contexte, en dégageant les lignes de force à l'œuvre dans le progrès scientifique, en l'illustrant par divers exercices.

Conscient que cette façon de travailler était nouvelle pour les élèves, il fallait dès la première leçon les y préparer. C'est pourquoi il m'a paru indispensable de faire une séance introductive de deux heures sur le thème:

Pourquoi des mathématiques ? Comment sont-elles nées ?
Comment se sont-elle développées ?

De ces questions posées aux élèves, seule la première eut des réponses précises et intéressantes: apprendre à raisonner, apprendre à être logique, résoudre des problèmes, calculer. Je pus m'appuyer sur elles pour présenter diverses phases du développement historique des mathématiques.

I- La naissance de la géométrie comme mesure de la terre (3)

- évocation de la civilisation égyptienne - les crues du Nil - la reconstitution des terrains inondés - la construction d'un angle droit à l'aide d'une corde à 13 nœuds équidistants (voir par exemple HOGBEN p. 53);
- le théorème de PYTHAGORE;
- la recherche de tous les triplets pythagoriciens.

Ces trois points permettent déjà de montrer comment peu à peu, on est passé d'un problème pratique à un problème purement spéculatif d'arithmétique.

Bien entendu, il ne s'agit pas de présenter cette évolution depuis les pratiques des arpenteurs jusqu'à une spéculation arithmétique et une rigueur démonstrative comme un fait historique dûment établi. Nous n'avons aucune source authentique, aucun document d'époque. Les triangles rectangles figurant dans le papyrus de Rhind ne sont pas des triangles 3-4-5. Quant aux triplets pythagoriciens, ils étaient connus des Babyloniens (voir la tablette Plimton) et certaines "équations" montrent qu'ils connaissaient aussi le théorème de PYTHAGORE. Dans l'état actuel de nos connaissances, tout ce qu'on peut affirmer est que la "démonstration" de ce dernier doit être attribuée aux Grecs.

De fait, l'objectif visé pour l'instant, est seulement de montrer aux élèves qu'il existe une dynamique dans l'invention et l'activité mathématique, activité qu'on ne peut séparer de l'histoire même de la civilisation humaine. Il s'agit d'éveiller la curiosité et l'interrogation dans des esprits pour lesquels trop souvent les mathématiques sont seulement un jeu intellectuel abstrait, coupé de la vie quotidienne. Il s'agit de leur donner envie d'aller y voir par eux-mêmes en lisant des livres d'histoire des mathématiques.

• la mesure de la circonférence terrestre par ERATOSTHENE

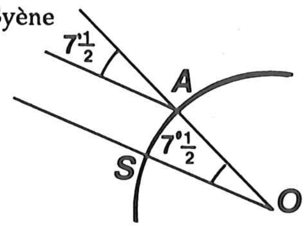
ERATOSTHENE, né à Cyrène vers 284 avant J.-C., est surtout connu pour son célèbre "crible" permettant de trouver les nombres premiers. A l'époque des faits rapportés ici, il vivait en Egypte à Alexandrie, sous le règne du roi PTOLÉMÉE III et nous avons des renseignements précis fournis par un certain CLÉOMEDE sur la méthode à la fois très simple et très ingénieuse qu'il utilisa pour mesurer la circonférence terrestre. Bibliothécaire, il disposait de tous les rapports où se trouvaient consignés les événements de quelque importance en relation avec le calendrier.

"Il apprit que, certain jour de l'année, le soleil se réfléchit à midi dans l'eau d'un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) non loin de la première cataracte du Nil, juste à la limite de la ceinture tropicale. Ainsi l'ombre disparaît à une certaine époque de l'année lorsque le soleil est au zénith, à midi. La réflexion dans le puits se produit quand le soleil est directement au-dessus de notre tête, c'est-à-dire, à la verticale. Le même jour à Alexandrie, à 800 km au nord de Syène l'ombre d'un pilier à midi, plaçait le soleil à 7° 1/2 au sud de la verticale."

(HOGBEN, p. 238)

Comme les rayons du soleil sont parallèles, l'angle de 7° 1/2 est aussi l'angle au centre SAO qui est donc peu différent de la cinquantième partie de la circonférence totale.

A: Alexandrie
S: Syène



D'où la valeur de la circonférence totale: 800 x 500 = 40 000 km. L'erreur d'ERATOSTHENE est inférieure à 80 km (soit 0,2 %) par rapport aux mesures actuelles.

A l'époque d'ERATOSTHENE on mesurait en stades égyptiens (1 stade = 157,5 m) et la distance entre Alexandrie et Syène était estimée à 5000 stades. ERATOSTHENE savait aussi que les deux villes étaient situées à peu près sur le même méridien. Pour rendre plus commode la divisibilité, il porte la longueur totale du méridien à 252 000 stades. Il fit encore le même calcul, en prenant pour base la distance de Syène à Méroé qu'il croyait également être sur le même méridien, et obtint un résultat concordant (Histoire de la Science, Encyclopédie de la Pléïade, p. 250).

Cet exemple a l'avantage de susciter chez les élèves beaucoup d'étonnement et de détruire dans leur esprit pas mal d'idées reçues sur la méconnaissance qu'auraient eue les Anciens, de la terre et du système solaire. Il permet d'expliquer que la science a connu des périodes d'obscurantisme et de retour en arrière. Il met aussi en relief la puissance de l'esprit humain capable de dépasser l'horizon de sa perception visuelle grâce au raisonnement. Il débouche sur la seconde phase:

II- Nécessité d'une construction purement intellectuelle et logique sortant du cadre de l'évidence sensible car:

- les sens sont trompeurs: de nombreux exemples peuvent être pris dans l'astronomie;
- il est satisfaisant et performant pour l'esprit de ramener l'infinité des propriétés des nombres ou de l'espace à quelques règles et définitions de base desquelles on déduit toutes les autres;
- l'examen approfondi des solutions, la recherche de meilleures méthodes, sans but pratique immédiat a amené les scientifiques à élaborer des outils intellectuels de plus en plus théoriques et efficaces;
- exemple d'EUCLIDE, comme aboutissement et longtemps modèle.

Vers 300 avant J.-C. environ, EUCLIDE a regroupé et mis en ordre toutes les connaissances de son époque, en géométrie plane et dans l'espace. En réalité on ne sait à peu près rien sur l'homme EUCLIDE et il n'est même pas interdit, à cause de variations dans le style mathématique d'un livre à l'autre, d'attribuer l'ensemble des treize livres qui composent les *Eléments* d'EUCLIDE à plusieurs personnes, peut-être une école dirigée et groupée autour d'un maître. L'important est que ces *Eléments* furent d'une telle maîtrise, d'une telle rigueur et efficacité qu'ils firent autorité en matière de géométrie pendant plus de vingt siècles. La raison en est que chez EUCLIDE, contrairement à ce qui existait avant, il y a en plus des faits et propriétés mathématiques toute une construction théorique structurée et logique qui partant de définitions, d'axiomes, de postulats arrive par un raisonnement déductif systématique à des théorèmes et des propositions.

Il me semble important, dans cette première séance de dégager ces deux aspects qui je crois conditionnent la perception par les élèves d'une mathématique en mouvement, ancrée dans la réalité humaine à la fois par son activité pratique et théorique, et réalisant un lien dynamique entre ces deux moments. Les élèves sauront alors que tel personnage évoqué ponctuellement est à replacer dans ce mouvement général et que l'histoire des mathématiques ne se réduit pas à quelques noms illustres. Alors l'anecdote même peut intervenir comme élément d'aération, de détente. Pour des élèves peu habitués aux longs développements, l'anecdote est souvent plus percutante par les traces qu'elle laisse dans la mémoire, et elle peut servir de tremplin à une prise en considération de l'histoire pour des gens ou des élèves peu motivés par un tel sujet au départ. J'en veux pour preuve l'exemple suivant.

Légende ou fait réel ? On trouve un peu partout cette histoire du petit GAUSS à qui l'instituteur demande, en même temps qu'à ses camarades, de calculer la somme des 100 premiers entiers. L'anecdote veut que GAUSS fut le premier à déposer son ardoise sur le bureau du maître, et cela quelques instants à peine après que celui-ci eut fini de poser sa question. Emerveillé par les dons extraordinaires de son jeune élève, il l'aurait envoyé à un mathématicien de ses amis, estimant qu'il n'avait plus grand'chose à lui apprendre. GAUSS avait tout simplement procédé ainsi: posant

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} S = & 1 + & 2 + & 3 + & \ldots + & 98 + & 99 + & 100 & \text{on peut aussi écrire} \\ S = & 100 + & 99 + & 98 + & \ldots + & 3 + & 2 + & 1 & \text{et en additionnant} \\ 2S = & 101 + & 101 + & 101 + & \ldots + & 101 + & 101 + & 101 & \text{par colonne} \end{array}$$

D'où le résultat $2S = 100 \times 101$ donc $S = 50 \times 101 = 5\,050$.

Je n'aurais pas relaté cette anecdote si deux ou trois semaines plus tard, lors d'un devoir surveillé demandant, entre autres, le calcul de la somme $\sum\limits_{p=0}^{p=n} p\, C_n^F$ un élève n'avait pas justement utilisé ce qu'il a d'emblée appelé "la méthode de GAUSS", en écrivant:

$$S = 0\, C_n^0 + 1\, C_n^1 + 2\, C_n^2 + \ldots + (n-2)\, C_n^{n-2} + (n-1)\, C_n^{n-1} + n\, C_n^n$$

$$S = n\, C_n^0 + (n-1)\, C_n^1 + (n-2)\, C_n^2 + \ldots + 1\, C_n^{n-1} + 0\, C_n^n$$

et en utilisant le fait que $C_n^{n-p} = C_n^p$. D'où

$$2\,S = n \sum_{p=0}^{n} C_n^p = n\, 2^n$$

(cette dernière somme étant connue de l'élève et $S = n\ 2^{n-1}$.

On objectera que l'histoire des mathématiques n'a rien à voir là-dedans et que l'élève a simplement bien compris une méthode de calcul que l'on présente tout aussi bien sans anecdote "GAUSS". Personnellement, je crois pourtant que la référence à l'histoire par l'intermédiaire de GAUSS aura aidé à mieux fixer l'attention et à stimuler les facultés de recherche des élèves. Mais bien entendu, on ne peut en rester là: le but poursuivi est l'introduction d'une perspective historique pour aider l'élève à "mieux comprendre les ressorts du développement scientifique". Plusieurs chapitres du programme de terminale scientifique et technique se prêtent à une telle introduction, et je l'ai tentée pour les notions suivantes:

- l'algèbre et la résolution des équations,
- les nombres complexes,
- les logarithmes,
- le calcul intégral,
- la construction de polygones réguliers,
- les coniques.

Le temps consacré à chaque question était d'environ une heure et demie, deux heures, ce qui me paraît raisonnable pour une disponibilité hebdomadaire de neuf heures, et réparti sur toute l'année. (Cela représente en gros 5 % du temps consacré à l'histoire, ou vingt-cinq minutes par semaine).

Ce temps n'est pas un temps où l'élève est inactif, où il se contenterait d'écouter passivement une conférence. Au contraire, il est sollicité pour résoudre des problèmes, des exercices au même titre que dans une séance ordinaire. Par exemple, une séance sur la construction des polygones réguliers conduit à construire effectivement tel ou tel polygone - à manipuler l'équation $X^n - 1 = 0$ pour telle ou telle valeur de n.

L'introduction du calcul intégral développe tout un problème sur la quadrature d'un segment de parabole par la méthode d'ARCHIMEDE; également sur la somme des carrés des n premiers entiers pour une quadrature par la méthode des rectangles.

Détaillons plus particulièrement les deux premières têtes de chapitre signalées:

1/ Algèbre et nombres complexes

Je fais assez vite, en début d'année, une séance sur l'algèbre comme outil de résolution de problèmes. Il me paraît en effet utile de distinguer trois notions aujourd'hui étroitement liées au point que l'une est facilement confondue avec l'autre. Ces trois notions sont:

· les équations et leur résolution,
· l'algèbre au sens propre, inventée par les Arabes,
· l'écriture symbolique par l'utilisation de signes et de lettres.

L'histoire nous permet de bien séparer ces trois aspects, qui se rencontrent à des moments très éloignés les uns des autres du développement mathématique.

Les équations
Exemples d'équations dans leur formulation littérale; problèmes du second degré des tablettes babyloniennes, problèmes hindous d'ARYABHATA (4).

L'algèbre
Comme "Science de la restauration et de la confrontation": "Hisab al jabr w'al muqâbalah" AL-KHWARIZMI et les équations du second degré:
- les six équations canoniques distinguées à cause de la non-utilisation des nombres négatifs dans la tradition arabe;
- exemples de problèmes traités par AL-KHWARIZMI (5).

L'écriture symbolique
Sa longue histoire ne permet que d'évoquer quelques exemples:
- l'équation générale du second degré par VIETE:

B in A q + C in A aeq D

traduction moderne: $Bx^2 + Cx = D$;
- écriture de radicaux par CARDAN

R.V.7 p : R.V.14 pour $\sqrt{7} + \sqrt{14}$

Ce paragraphe n'introduit pas de chapitre explicite du cours de terminale et l'on pourrait contester sa présence dans cette classe. Ce serait vrai si les élèves avaient reçu quelques repères historiques dans les classes précédentes, ce qui est rarement le cas. Bien plus, beaucoup d'entre eux ont sur la résolution des équations des idées très confuses, ramenant souvent cette question à une sorte de manipulation rituelle sur des nombres et des lettres où le sens du problème posé et la raison des opérations algébriques utilisées ont complètement disparu.

Le retour à l'histoire est alors le moyen qui me paraît le plus efficace pour faire éclater et corriger ces déformations. Par ailleurs, ce détour par l'histoire de l'algèbre est la meilleure préparation à l'introduction des nombres complexes, qui sans cela tombe sur les élèves comme un pur jeu intellectuel et, plus grave, en contradiction totale avec ce que les élèves ont appris les années précédentes sur les carrés et les racines carrées.

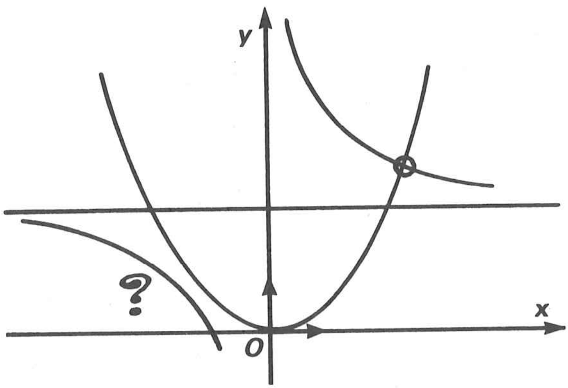
L'acte de naissance des nombres complexes
Les élèves qui arrivent en terminale ont résolu suffisamment (trop peut-être ?) d'équations, en particulier du second degré à l'aide de formules, pour se poser spontanément le problème d'une résolution de l'équation générale du troisième degré. Il se trouve que ce problème est aussi très riche en situa-

tions pédagogiques diverses et exploitables pour introduire plusieurs des notions essentielles du programme de terminale. Il faut éviter de partir d'une équation du 3ème degré ayant une solution entière que les élèves auraient vite déterminée à l'aide de leurs calculatrices, et ramèneraient trop rapidement le problème à une équation du second degré. Prenons par exemple l'équation:

(1) $X^3 = 6X + 6$

a) Etude graphique

Mise sous la forme $X^2 = 6 + \frac{6}{X}$ la résolution est ramenée à l'intersection d'une parabole: $y = X^2$ et d'une hyperbole équilatère $y = 6 + \frac{6}{X}$. Si la représentation graphique de ces deux courbes montre sans conteste l'existence d'une solution comprise entre 2 et 3, elle laisse planer un doute quant à l'existence d'autres solutions, négatives, entre -1 et -2.



Mais l'étude de la fonction $x \rightarrow f(x) = x^3 - 6x - 6$ donne le tableau de variations suivant:

$f'(x) = 3(x^2 - 2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

avec $M = 4\sqrt{2} - 6 < 0$ car $(4\sqrt{2})^2 = 32 < 36$

et $m = -4\sqrt{2} - 6 < 0$ donc existence d'une seule solution, supérieure à $\sqrt{2}$ pour l'équation (1).

Cette première partie permet
a) de réviser des notions sur les fonctions vues en classe de première;
b) de poser le problème de la continuité de f par le biais du théorème des valeurs intermédiaires;
c) de donner une première information sur les solutions de l'équation (1), tout en mettant en évidence le peu de précision de cette information.

b) La méthode de CARDAN-TARTAGLIA

Voir par exemple *Mathématiques au fil des âges,* chapitre 3, p. 103 à 108.
On cherche x sous la forme $a + b$ ce qui se ramène à chercher a et b vérifiant $a^3 + b^3 = 6$ et $ab = 2$.
a^3 et b^3 sont alors solutions de $t^2 - 6t + 8 = 0$.
D'où $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

c) Application à divers exemples

de façon à dégager progressivement les difficultés liées à cette méthode

α) $x^3 + 3x = 14$: on vérifie qu'elle admet une seule solution par les méthodes du § a). Les élèves trouvent facilement que cette solution est 2.
Mais en appliquant la méthode de CARDAN on détermine x sous la forme $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.
Un calcul à la machine leur fait voir que cette expression compliquée est bien égale à 2 mais comment le prouver ? La difficulté se résout en montrant qu'on peut trouver α et β entiers tels que

$$7 \pm 5\sqrt{2} = \left(\alpha \pm \beta\sqrt{2}\right)^3$$

ici $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

β) $x^3 = 14x + 4$. La recherche par les méthodes du § a) met en évidence trois solutions dont une seule est positive $x = 4$. Si l'on essaie la méthode de CARDAN on tombe sur une nouvelle difficulté.
En posant $x = a + b$ on obtient $a^3 + b^3 = 4$, $ab = 5$; a^3 et b^3 solutions de $t^2 - 4t + 125 = 0$; équation qui n'a visiblement pas de solutions dans **R** !

d) L'audace de BOMBELLI

qui ose calculer la solution positive sous la forme

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

qu'il simplifie de la même manière que dans l'exemple α) précédent, en montrant que

$$2 \pm \sqrt{-121} = \left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 \quad \text{d'où} \quad x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right)$$

et l'on récupère bien la solution $x = 4$!

Il est important bien sûr d'accompagner le traitement de ces exemples de la lecture des règles de TARTAGLIA et CARDAN et le texte de BOMBELLI sur "cette nouvelle sorte de racine carrée".

Cette présentation aide l'élève à comprendre que les nombres complexes sont nés à partir de pratiques de calculs formels mais efficaces, pour la résolution des équations du troisième degré. Elle soulève aussi d'autres problèmes comme celui des nombres négatifs car elle oblige à se limiter à deux cas:

* ou bien l'équation se présente sous la forme $X^3 + pX = q$ (avec p et q positifs) alors il n'y a qu'une solution, forcément positive;
* ou bien sous la forme $X^3 = pX + q$ (avec p et q positifs) alors il peut y avoir trois solutions, mais une seule est positive.

Ainsi des gens qui ont eu l'audace de calculer avec des imaginaires restaient bloqués pour utiliser des coefficients négatifs, ou des racines négatives (les fausses solutions de DESCARTES).

e) Eléments historiques brefs, sur la résolution des équations polynômes de degré supérieur à trois

Il est important à cette occasion d'informer, même sommairement, qu'il n'existe pas en général de formule pour des équations d'un degré quelconque, à des élèves qui ont trop tendance à considérer que les mathématiques sont avant tout affaire de formules.
Evocation des personnalités de LAGRANGE, ABEL et GALOIS.

2/ L'invention des logarithmes

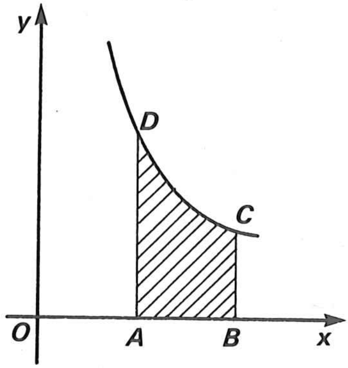
- Evocation du calvaire des astronomes de la Renaissance.
  Difficulté des calculs de racines carrées ou cubiques, de sinus, etc. Absence d'écriture décimale des nombres telle que nous l'utilisons aujourd'hui.

- Nécessité progressive d'une plus grande précision, en même temps qu'une simplification des calculs.

- Première tentative d'un algorithme remplaçant une multiplication par une addition: la prostaphérèse selon une méthode géométrique que l'on pourrait traduire par la formule $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$ et découverte par EBN JOUNIS (980-1083) est utilisée par TYCHO BRAHÉ (1546-1601).

- L'invention des logarithmes par NÉPER (1550-1617). Il ne m'a cependant pas paru possible de présenter la méthode même de NÉPER en détail; cela demanderait un trop grand investissement en temps aussi bien qu'en explicitation des techniques utilisées. J'explique simplement que NÉPER a trouvé un moyen et publié des tables permettant de remplacer les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions, les extractions de racines carrées par des divisions par deux.
  Je donne un exemple d'un tel calcul en utilisant ma vieille table de logarithmes "BOUVARD et RATINET".
  Cette position est aussi justifiée par le fait que le programme de mathématiques de la classe de terminale E demande la définition de la fonction logarithme népérien, comme primitive de $\frac{1}{x}$.

- Les progrès de l'analyse amènent Christiaan HUYGENS en 1651 à découvrir la quadrature arithmétique de l'hyperbole c'est-à-dire que si ABCD est défini par les points A et B sur un axe Ox, et C et D sur l'hyperbole d'équation $xy = 1$, alors
  aire ABCD = log OB – log OA .



Voir *Histoire des Logarithmes* par Charles NAUX et *The Historical Development of the Calculus* par C.H. EDWARDS.

3/ Bilan

Venons-en au bilan, et d'abord à travers la perception qu'ont eue les élèves eux-mêmes d'une année de mathématiques éclairée par des données historiques. Pour les aider à s'exprimer, je leur ai distribué le texte en annexe, complété par quinze affirmations sur l'histoire des mathématiques, proposées par E. BARBIN lors de l'université d'été du Mans. Les élèves pouvaient répondre anonymement, afin qu'ils se sentent entièrement libres d'exprimer leur appréciation. Malheureusement, j'ai eu le tort de remettre le questionnaire un peu trop tard -entre l'épreuve de philosophie et les autres épreuves- de sorte que beaucoup d'entre eux n'ont plus pris la peine de m'écrire leur réponse, trop sollicités qu'ils étaient par la préparation du bac. Tout de même dix élèves m'ont répondu sur une à deux pages pour: (6)

- *apprécier très positivement l'introduction d'une perspective historique dans le cours de mathématiques.*

"Cette année, en mathématiques, je n'ai pas seulement appris des formules, des recettes, ... parfois trop abstraites, mais j'ai appris à situer les événements mathématiques, à comprendre, à réfléchir sur le comment et le pourquoi, de l'apparition d'un nouveau chapitre dans mon cours.
Ceci, m'a souvent fait échapper à l'indifférence que je portais l'année précédente à certains chapitres. L'histoire des mathématiques est donc un atout non seulement pour celui qui s'y intéresse mais aussi pour l'ensemble des élèves. Mais l'enseignement de celui-ci ne doit pas être, à mon avis, distinct du cours. En effet, c'est la liaison des deux qui fait tout l'intérêt."
"Les étudiants en Arts Plastiques ont des cours obligatoires de l'histoire de l'art. Pourquoi nous, élèves dont la matière principale est la mathématique n'aurions-nous pas de cours d'histoire des mathématiques ?"
"A l'affirmation n°4 j'ajouterais que l'histoire des mathématiques permet une meilleure assimilation des mathématiques".
"La "naissance des coniques" est également un sujet qui m'a paru intéressant car je m'intéresse personnellement à l'astronomie."
"Tous ces éléments, je pense, amènent compréhension et envie de faire des mathématiques."
"POUR: elle peut permettre une plus grande compréhension de l'utilité des mathématiques dans la vie courante et ainsi augmenter la motivation des élèves. Au contraire d'une approche brutale des mathématiques, une approche avec une introduction culturelle est plus agréable. Elle nous aide à comprendre les causes, la démarche qui a fait que l'on arrive à tel ou tel théorème.
CONTRE: dans la plupart des cas historiques évoqués en cours d'année, il s'agissait de découvertes, de théorèmes passés. Pour montrer que les mathématiques sont une science vivante qui progresse n'aurait-il pas fallu aussi parler des recherches en cours, des découvertes récentes ?"

- *souhaiter une étude plus approfondie de certains thèmes*

"Parmi les sujets traités, les plus intéressants ont été, à mon avis, les nombres complexes et le calcul intégral. Par contre, je trouve que la construction des polygones réguliers devrait être plus approfondie."

"Les sujets qui m'ont paru les plus intéressants sont les nombres complexes et le calcul intégral ou l'on a vu la vraie raison d'existence et comment ils sont nés. J'aurais aimé que l'on approfondisse l'algèbre et la résolution des équations ainsi que la construction des polygones réguliers."

- *ne pas souhaiter en majorité la lecture de textes anciens*

"L'histoire des mathématiques pourrait être enseignée à partir de textes anciens mais le temps imparti à cette discipline ne serait plus suffisant."
"Néanmoins, la lecture de textes anciens enlèverait tout le charme de cette approche (mais ceci est sans doute une question d'appréciation: ceci est la mienne) et prendrait également une place trop importante dans le temps."
"Je ne pense pas qu'il faille compléter l'étude de l'histoire des mathématiques par l'étude de textes anciens, du moins pas pendant le cours de math. De telles études pourraient être envisagées en philosophie."
"La lecture de textes anciens ne pourra se faire d'après moi qu'en début de chapitre, une trop grande profusion de textes serait néfaste. L'histoire des mathématiques a pour intérêt d'attirer l'attention des élèves et non de donner un caractère rébarbatif. Quelques textes pourraient être étudiés en philosophie."
"Je pense que les textes anciens ne doivent pas être l'objectif principal de l'histoire des mathématiques, ils peuvent toutefois servir d'illustration pour un problème donné."
"A mon avis, il ne serait pas nécessaire de compléter l'information par l'étude de textes anciens mais il serait bien de présenter un résumé de certains textes, afin que les élèves aient quand même une vue de la manière dont les mathématiques étaient faites à l'époque."
"Il est difficile de définir l'importance de l'étude de textes anciens, nous n'en avons pas eu l'occasion, mais il serait intéressant de le faire."

- *de souhaiter que l'histoire des mathématiques soit enseignée par le professeur de mathématiques, mais pas toujours intégrée au cours de mathématiques.*

"Elle doit être réservée au professeur de mathématiques car il est le seul à posséder la compétence nécessaire pour cela, et cette approche constitue une très bonne introduction à son cours."
"Je pense que l'histoire des mathématiques devrait être enseignée non pas par des enseignants d'histoire mais par des enseignants de mathématiques. Elle doit être enseignée comme partie distincte du cours des mathématiques car il faut tout de même garder les heures de mathématiques qui ont été fixées pour le cours uniquement pour acquérir un bagage mathématique."

"Parmi les nombreuses affirmations, les plus intéressantes sont la [12], en effet la démarche qui consiste à poser le problème comme il s'est posé à l'époque et montrer comment on l'a résolu ou quelle idée a permis de le résoudre permet une meilleure compréhension du problème et de sa résolution; l'affirmation [10] s'oppose à ce concept, le plus grand reproche est celui de séparer l'histoire et la mathématique. Par contre, dans l'affirmation [3] cette séparation est plus séduisante, étudier l'histoire des mathématiques en histoire semblerait évident et très profitable dans la section à vocation scientifique. Mais cette étude serait mal venue en philosophie, d'où le rejet de l'affirmation [8]. De même, étudier l'histoire des mathématiques en vue de la seule chronologie me semble dénué de tout intérêt."
"Elle doit servir d'introduction succincte et ne pas se mélanger au cours. Car actuellement, s'il avait fallu encore relater l'histoire des mathématiques, le programme n'aurait pu être traité dans son intégralité. L'histoire des mathématiques entraînerait donc une modification des programmes."

Comme on le voit, la grande crainte est de ne pas arriver à traiter tout le programme, et cela pose un vrai problème dans une classe d'examen. Les allégements apportés aux programmes des classes de lycées ces dernières années en diminuent son accuité, mais une prise en compte plus explicite dans les instructions officielles (voir introduction) déculpabiliserait les professeurs et rassurerait les élèves.

Quant à moi, toutes ces réponses m'encouragent à continuer dans cette voie. Je pense néanmoins procéder un peu différemment l'année prochaine à la lumière des expériences de cette année, ainsi que des expériences réalisées par d'autres collègues:

* garder le principe d'une perspective historique complètement intégrée et chevillée au cours de mathématiques,
* mais limiter davantage les sujets pour en traiter deux ou trois plus en profondeur,
* confronter les élèves à un texte mathématique d'époque, malgré ce qu'ils en ont dit, car rien ne peut mieux concrétiser la distance qui existe entre la culture mathématique d'une époque et la nôtre, et ainsi vraiment cerner en profondeur la difficulté de l'invention, sa solidarité avec la culture d'une époque,
* susciter, au moins pour l'un ou l'autre élève plus motivé une recherche plus personnelle, par la lecture de livres ou par une recherche de documentation sur un sujet limité.

Annexe 1

Durant cette année scolaire, j'ai tenté de vous présenter un aperçu historique sur diverses questions ou chapitres de votre cours de mathématiques. Cet aperçu a pu prendre, selon la nature du sujet traité, deux aspects différents:

- soit une simple présentation ou évocation d'un personnage rencontré à l'occasion d'un théorème ou d'une méthode: dates, environnement culturel, parfois œuvres principales; ainsi THALES, PYTHAGORE, EUCLIDE, ERATOSTHENE, ARCHIMEDE, FERMAT, PASCAL, NEWTON, LEIBNITZ, EULER, GAUSS.
- soit une introduction historique détaillée, pour une notion nouvelle
  * introduction générale au cours de mathématiques, pourquoi, comment sont-elles nées et se sont-elles développées ?
  * les nombres complexes
  * les logarithmes
  * l'algèbre et la résolution des équations
  * le calcul intégral
  * la construction des polygones réguliers
  * les coniques.

Parmi ces personnages, parmi ces sujets traités, lesquels vous ont paru les plus intéressants, lesquels nécessiteraient, à votre avis, un développement plus important ? En particulier, vous paraît-il important de compléter cette information par l'étude de textes anciens, présentant le problème mathématique avec les concepts, le langage, les symboles d'une époque donnée, qui ne sont plus ceux d'aujourd'hui ?

D'une façon plus générale, voici diverses affirmations concernant l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Lesquelles feriez-vous vôtres, lesquelles vous paraissent discutables ? Développer votre opinion en une dizaine de lignes, y compris votre appréciation, ne figurant pas nécessairement parmi les affirmations ci-dessous.

Annexe 2 (7)

[1] L'histoire des mathématiques montre aux élèves que les mathématiques sont "une science vivante qui progresse".

[2] L'histoire des mathématiques permet une approche plus culturelle des mathématiques.

[3] L'histoire des sciences doit être enseignée par les enseignants d'histoire au même titre que l'histoire de l'art ou de la littérature.

[4] L'histoire des mathématiques sert à briser la conception dogmatique de l'enseignement des mathématiques.

[5] L'histoire des mathématiques sert à étudier les obstacles épistémologiques rencontrés dans la production du savoir mathématique pour mieux surmonter les obstacles pédagogiques.

[6] L'histoire des mathématiques montre que les concepts mathématiques ne sont pas des "vérités éternelles tombées du ciel" mais qu'ils sont construits pour répondre à des questions et des problèmes.

[7] L'histoire des mathématiques permet de donner une chronologie des théorèmes et des mathématiciens

[8] L'histoire des sciences doit être prise en compte dans un enseignement de philosophie.

[9] L'histoire des mathématiques est un thème intéressant pour les activités interdisciplinaires.

[10] L'histoire des mathématiques doit être enseignée par l'enseignant de mathématiques comme partie distincte du cours de mathématiques.

[11] L'histoire des mathématiques doit être enseignée essentiellement à partir de la lecture de textes anciens.

[12] L'histoire des mathématiques permet de construire une démarche pédagogique partant de problèmes et de questions et laissant place à la recherche des élèves.

[13] L'histoire des mathématiques situe à leur place le rôle de la conjecture, de l'erreur, de l'évidence, de l'intuition et de la rigueur dans l'activité et l'enseignement des mathématiques.

[14] L'histoire des mathématiques permet de montrer aux élèves le rôle des mathématiques dans la société.

[15] L'histoire des mathématiques permet de montrer aux élèves que les mathématiques "servent à quelque chose".

Notes

(1) Objectifs généraux des programmes C - D - E - 1986.
(2) T.C. : Terminales scientifiques de lycée à dominante Math-Physique.
T.E. : Terminales scientifiques de lycée technique à dominante Math-Physique - Technologie.
(3) Pour toute cette partie, on lira avec intérêt:
Mathématiques au fil des âges, chap. 1
Histoire des mathématiques, chap. 1 à 8, COLLETTE.
Les mathématiques pour tous, 1 à 6, HOGBEN.
(4) Voir *Mathématiques au fil des âges*, chap. 3
Histoire des mathématiques, chap. 2-7-8, COLLETTE.
(5) Voir *Mathématiques et mathématiciens*, Chap. 13 et 14, DEDRON-ITARD
(6) Les appréciations des élèves ont été reproduites telles quelles.
(7) E. BARBIN, Evaluation de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques. Le Mans, juillet 1984.

Bibliographie

Groupe IREM d'Histoire et d'Epistémologie des mathématiques, *Mathématiques au fil des âges*. Gauthier-Villars, Paris, 1986.
Amy DAHAN, Jeanne PEIFFER, *Route et dédales*. Le Seuil, Paris, 1986.
COLLETTE, *Histoire des mathématiques*. Editions du renouveau pédagogique, INC. 1973.
Histoire de la Science. Encyclopédie de la Pléïade, 1963.
Lancelot HOGBEN, *Les mathématiques pour tous*. Payot, Paris, 1950.
Tobias DANTZIG, *Le nombre: langage de la Science*. Réédité par Blanchard, Paris, 1974.
J. DHOMBRES, *Nombre, Mesure et continu*. Cedic-Nathan, Paris, 1978.
C. NAUX, *Histoire des logarithmes*. Blanchard, Paris, 1966.
C.H. EDWARDS, *The historical development of the calculus*. Springer-Verlag, 1979.
DEDRON-ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*. Magnard, Paris, 1959.