Michel SERFATI

La question de la "chose "

(Mathématiques et Ecriture)

1) Introduction.

Au colloque de Strasbourg , j'avais eu la très ambitieuse intention de parler de tout ce qui concerne, selon moi, " Mathématiques et Ecriture". J' y ai seulement trouvé le temps de mon introduction (un commentaire composé sur le style de Lambert en Mathématiques - il peut être fascinant -), et de brèves autres prémisses.
C'est donc une part de ce que je n'ai pu y dire que j'écris ici : un essai sur le statut du signe en Mathématiques.
A l'inevitable question première qui se pose ici clairement : pourquoi des signes ? la réponse, au fond banale, ne peut qu' être ici la même ,que ce soit en Mathématiques ou ailleurs : un signe doit servir à différencier. Comme dit excellement F.de Saussure, un signe , ce doit être " la fin de l'ambiguité." .Désir très légitime, certainement fécond, et ,à chaque instant, très fondateur. J'essaierai pourtant de montrer dans ces pages pourquoi ,à mon sens, c'est seulement apparemment que bien souvent ce désir se réalise , puis il bute et se contredit , enfin et ,d'une certaine façon - elle aussi féconde - "échoue."

Comme dit Paul Ricoeur ([8] ,page 881) "Les signes ont en effet un étonnant pouvoir substitutif : mis pour les choses, ils peuvent aussi être mis les uns pour les autres.." Etranges signes en effet qui se concatènent, s'agglutinent... : il y a un "jeu autonome des signes" ..

Certes, on peut dire aussi qu'un signe sert à" soulager la mémoire", " ne pas se perdre", "faire court "etc.... C'est vrai, sans doute, mais à un autre niveau, plus superficiel que le précédent .
D'abord, la mémoire n'est sans doute jamais vraiment aussi "soulagée",que devant la constatation d'une irréductible différence, celle entre le 0 et le 1, (exemple archétypique) , mais aussi la différence entre le fond de la feuille de papier d'une part, et d'autre part, à la fois la géométrie d'un signe (qui le différencie des autres) et l'encre dont il est écrit (qui le différencie du fond). En second lieu , que veut dire " faire court, " si ce n'est ,me semble-t-il , tâcher de rassembler , de subsumer ,sous une même différence,(celle du signe exposé) un ensemble d'autres : celà peut être efficace,(c'est ce qu'écrit Descartes) ,ce n'est évidemment jamais équivalent.

C'est sur des exemples ,et en particulier sur celui de l'avènement de la la notation cartésienne, que je traiterai de l'étude des signes en

Mathématiques ; c'est là où l'on observe, me semble-t-il, *in statu nascendi*, la façon dont tout système de signes se constitue d'abord chez un sujet, puis dans le *socius*.

A cet effet , je puiserai abondamment dans "A history of Mathematical notations " ([9]) de Florian Cajori. Ces deux tomes sont un vrai monument . Cajori , entomologiste minutieux, a en effet partout fouillé et recherché les diverses occurences de signes divers : il consacre par exemple seize pages ([9] p.200/216) à la description des signes, ou ensembles de signes, ou encore absence de signes ou dispositions typographiques destinées à rendre compte dans le passé et le présent ,de ce qu' aujourd'hui on appelle somme ou différence. Autre part, il consacre un chapitre à la dénotation de ce qui est inconnu dans un calcul ("signs for Unknown numbers" ; [9] p 339/341), ou bien à ce que j'appelle " comment on déroge dans l'écriture mathématique à l'ordre linéaire ": la question des signes d'agrégation. ([9] p. 342/356).)

Ce qui frappe tout d'abord le lecteur moderne, c'est le caractère contingent des ensembles de signes en Mathématiques.,qui, longtemps,ont été une affaire privée.

L' émergence d'un système de signes accepté par tous se fait lentement et douloureusement au cours des siècles ,se heurtant d'abord aux intérêts individuels dans tous les sens du terme : tel symbole émane de celui-ci , homme plus célèbre ou mieux en cour, ayant donc une plus grande faculté de publier, aussi aux rivalités de diverses sortes (on pourrait s'accorder autour d'un signe qui résume une ville contre une autre , ou bien rassemble une petite cour allemande contre sa rivale,etc..), aussi au caractère longtemps insulaire des travaux en Mathématiques : les chercheurs relativement éloignés géographiquement s'ignorant pour une part ,et développant chacun dans son coin un morceau de théorie ancré dans la notation.

"Enfin", vient le XVII° siècle , et des intérêts un peu plus légitimes parviennent à se superposer aux précédents : pour perdurer, un signe doit certes être déjà reconnu et utilisé par un assez grand nombre de mathématiciens.,ceci pouvant figer une situation de rapports de force déjà établie.,mais il doit désormais aussi montrer efficacité et plus grande adéquation à ses objectifs initiaux : distinguer, séparer, à quoi s'ajoute maintenant , être simple à imprimer.

L'analyse de la venue au jour d'un ensemble de signes " modernes " reconnus par tous , a donc pour moi quelque chose qui se décrirait en terme de sélection naturelle.

2) * Diophante et le cubo-cube.

Au début (enfin presque : 3° siècle avant J.C !), était Diophante Descartes se réfère souvent à Diophante ,qu'il estime être un maître de ce qu'il appelle " l'Analyse des Anciens." De quoi s'agit -il ? Ecoutons Diophante en ses oeuvres dans les premières pages du livre I de"l'Arithmétique "([1] page 2) :

"Ainsi on appelle puissance le carré et sa marque distinctive est un Δ ayant comme indice un Y ; c'est à dire que la puissance est Δ^{Y} .On appelle cube ce qui résulte de la multiplication du carré par sa propre racine,et sa marque distinctive est un K ayant comme indice Y ; c'est à dire que le cube est K^{Y} .On appelle bicarré...c'est à dire que le bicarré est $\Delta^{Y}\Delta$."

Enfin,et plus bas (et après le cubocube,en passant par le carré-cube........!):

"Enfin,le nombre qui ne possède aucune des particularités précédentes,mais qui ne possède une quantité indéterminées d'unités s'appelle l'arithme et sa marque distinctive est ζ ."

On peut sûrement croire ici qu'il y a autant de "nombres" aux statuts distincts,, grandeurs connues ou inconnues de genre différent, avec des "marques distinctives" : les grandeurs -quarré, les grandeurs -cube, et puis la grandeur-inconnue tout court (l'arithme) ,qui ,venant après toutes les autres , est encore d'une autre nature. Toutes ces grandeurs sont désignées dans l'écriture par des symboles différents et sans grand véritable rapport logique entre eux .
Telle qu'elle est donc posée dès l'abord (début du livre I.des "Arithmétiques"), cette distinction entre type de grandeurs, - au moins pour les arithmes, carrés et cubes-, est clairement d'origine et intuitive , géométrique et semble un des piliers du temple mathématique chez Diophante . Cependant, et c'est ce qui s'offre à Viète et au premier Descartes (celui des *Regulae*) comme une contradiction , dans la suite de son texte , Diophante passe sans remords d'un type de grandeur à l'autre par un très long ensemble de règles-comptines (en mots ,donc.......) ,comme :" Le carré de l'arithme multiplié par son cube donne son carré-cube." ([1] page 4) ..De plus ,et surtout , les textes de problèmes de Diophante mélangent allègrement à chaque pas - et c'est évidemment leur intérêt !- les inconnues de divers types .Par exemple : " Trouver trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux ,diminué du nombre restant,forme un quarré."([1] page 99 ; Problème XIII);

D'un côté ,donc : origine géométrique des choses et des noms de choses : côté ou racine,carré, cube etc.... ; de l'autre , calcul numérique sur des nombres .Pour Diophante, il n'est pas même question ici de confusion : s'agissant de nombres entiers : à un nombre , Diophante associe une longueur ,et à une longueur un nombre ; Il peut adapter la chose au cas des nombres fractionnaires.

Quant aux symboles, Diophante note donc ς d'une part , et Δ^{Y} d'autre part. N 'importe quoi ferait évidemment l'affaire, pourvu qu'il ne se confonde pas avec un symbole que Diophante utilise à d'autres fins.

De sorte que Diophante nous livre par exemple ceci :

$K^{Y}\bar{\alpha}\,\Delta^{Y}\overline{\iota\gamma}\,\varsigma\bar{\varepsilon}\,\overset{0}{M}\bar{\beta}$ " où $\overset{0}{M}$ est utilisé pour les unités et montrer que $\bar{\beta}$ ou 2

est le terme absolu et non une partie ......" ([9] , page 73)(*)

On peut appeler cette période le moment du *graffiti*, adéquat à dénoter le caractère individuel, presque clandestin ,de ce qui se met en place chez un écrivain lorsque, pour lui même et pour faire court dans la rude élaboration d'un texte , il fait choix d'un symbole ,que, confusément,il pense devoir être momentané, et ,en tous cas, le concerner seul. De cet instant, j'en parlerai aussi comme du "moment de la notation ", opposé donc à celui du signe,qui est social par nature.

3°)Res in Rem

C'est une situation courante en Mathématiques que quelque chose manque quelque part,et en même temps (car çà ne va pas necessairement ensemble), qu'on la recherche...Alors , d'une part, on lui donne un nom symbolique de "ce qui manque.", d'autre part - mais parfois seulement - on lui attribue un graffiti spécifique.

D'abord,et comme on sait ,ce qui manque, c'est ce qu'on désire .
C'est donc : "Couleur" pour les Indous, " dirham " (c'est à dire argent) ,ou encore "bien", ou "fondement" pour les Arabes , plus récemment et plus essentiellement en Europe : "la chose" ..De nos jours ,on dit "l'inconnue."
Les Indiens , donnent des noms de couleurs aux choses qui leur font défaut . Dans Brahmagupta,on trouve, par exemple : le noir, le bleu ,le jaune le blanc et le rouge (respectivement la seconde, troisième,quatrième,cinquième et sixième inconnue) ([9] ,p 379)(**)

(*) $(X^3 + 13 X^2 + 5 X + 2)$

(**) *ca* pour *calaca*(**noir**)(la seconde inconnue)
nî pour *nîlaca*(**le bleu**)(la troisième inconnue)
pî pour *pîlaca* (**le jaune**)(la 4°)
pa pour *pandu*(**le blanc**)(la 5°)
lo pour *lohita*(**le rouge**) (la 6°) ([9] ,p 379)

Dans cette histoire, les Arabes , voient pour leur compte des questions pratiques de possession matérielle, d'argent ,et d'héritage : Abou-Kamil (900 après J.C) modifie la pratique indoue , pour désigner les inconnues par des noms de pièces de monnaie. C'est encore un Arabe ,Al -Karkhî, qui,le premier , appele la première inconnue " la chose", la seconde "la mesure " (ou la partie)([9] ,p 379)
Mais c'est chez al -Kwarismî que la dénominations est encore la plus claire .Ecoutons Youschkevitch là dessus :

"En Algèbre,on considère trois sortes de nombres : les nombres simples ou dirham (de la drachme grecque ; unité monétaire) ,le gizr (racine) ou say' (chose)....Le mâl est le produit de gizr par lui-même........Dans la partie consacrée aux héritages et testaments, mâl signifie " bien." .le mot est très probablement la traduction du mot sanscrit mula qui signifie la racine d'un arbre ou d'une plante,mais aussi le fondement, l'origine,etc...." ([10] p. 35)

Plus tard et ailleurs, en Europe, Leonard de Pise , pour dénommer ce qui lui manque, utilise le nom latin, véritablement essentiel de " res." (la" chose ") , et l 'accord semble se faire autour de ce mot-valise .

Luca Pacioli ([9] , p 107) la dénomme pareillement "la chose" (la *cosa* italienne) ,et la *coss* allemande : aux XVI et XVII° siècles , l'inconnue-carré est ,de son côté, pareillement désignée d'un nom latin "census", qu' utilise par exemple Régiomontanus . Et c'est une maxime à l'époque que : "Res in rem fit census", (la chose multipliée par la chose fait de "l'inconnue carré") qui traduit bien le côté structurellement différent de "res" et de "census".

4) la question de la chose : le moment du graffiti :

C'étaient là les noms qu'on donne ' à ce qui manque".Il y a aussi la façon dont on l'écrit , c'est à dire, et s'il existe, le signe, et c'est une autre affaire : on a tout à l'heure vu le ζ, graffiti de Diophante ,
Voici des exemples d'autres graffiti bien connus des spécialistes :
Al-Qalasâdî utilise son graffiti pour l'inconnue :

et un autre différent (tout comme Diophante) pour l'inconnue-carré :

inconnues qui *surmontent* chacune leur coefficient ! ([9] p.93).

De même, pour les Européens : .Regiomontanus écrit un graffiti ressemblant à un $\bar{\psi}$ ([9], p 95) , un autre(₫) pour le carré .

Rudolff utilise un graffiti bien à lui (sorte de *ℛ)* ([9], p 135)

Stiefel ,de son côté, reprend bien la notation ℛ de Rudolff s'il utilise une seule inconmue ,mais change d'idée s'il en veut d'autres, qu'il dénomme alors A ,B ,C ,D ([9], p 139/41) .

Au milieu du 17° siècle (1647), l' anglais Oughtred, un homme plein de ressources en matière de notations ,écrit :

$$- 2 \text{ q} + 3 \text{ l} = 21$$

pour : *" moins deux fois le carré de la chose, à quoi s'ajoute la chose elle-meme valent 21 "* ([9], p 190/91 et 337).
Oughtred repère donc logiquement ce qui manque dans le calcul par une absence ambigue : celle de toute notation.
Relativement à l'écriture de l'inconnue , Oughtred s'est donc ici comporté comme Cardan (non comme Viète) : il l'a indiquée par son absence (dans d'autres textes , Oughtred note l'inconnue A et Aq)

5) quadratus ,quadrata ,quadratum.

Commençons par un conte vraisemblable : au nombre 5 , écrit sur ma feuille de papier (ou sur le sable des iles grecques, ou sur un papyrus alexandrin......), j'associe 25, que j'écris côte à côte ,un peu à droite. Avec la même disposition, à côté de 13 , j'écris 169.

C'est maintenant la Renaissance,en Italie..Avec ce même objectif immédiat , Luca Pacioli écrit (dans " *Summa di Aritmetica*") d'un côté les nombres simples (*"simplices"*) de l'autre les carrés des *simplices* " (les " *quadrata* "), avec un trait horizontal tout simple entre les deux.

simplices		*quadrata*	
5	______________	25	
13	______________	169	([9], p. 111)

L'adjectif latin " quadratus" (convenablement décliné, bien entendu.......) rencontre un certain succès social, puisque de son côté , Cardan par exemple l'utilise isolément plus tard

5 quadratus ou 13 quadratus.

En sorte que dans l' *Ars Magna* vous pouvez par exemple lire :

"Probatio ut in exemplo , cubus & quadratus 3 aequantur 21".)

c'est à dire " la preuve est la même que dans l'exemple : "l'inconnue au cube à quoi s'ajoute trois fois l'inconnue au carré, valent 21." ([9],p. 116) L'inconnue en tant que telle ne figure donc pas dans l'enoncé de Cardan . Par contre, l''adjectif "cubus" qui s'y trouve a le même type de fonction que le "quadratus" (adjectif qualificatif latin , décliné, associé au nom d'une grandeur,qui doit être consécutivement et deux fois de suite multipliée par elle-même) .C'est à dire qu'en regard de : "5 cubus" , j'écris 125.

.Ce "quadratus" peu à peu se répand et se transforme chez certains auteurs, par exemple en se raccourcissant en " q" , plus simple et plus court à imprimer.

6) Cossiques (?)

L'idéologie véhiculée par le type de notations de Diophante , relayée par les Arabes se répand tant bien que mal en Europe au Moyen-Age et à la Renaissance..Pour les dénominations, on voit que c'est désormais "la chose" que l'on recherche : "Res" , donc, en Latin, elle est donc "cosa" pour les Italiens ,et "coss" pour les Allemands .Quant aux symboles ici employés, bien que peu reconnus et mal répandus ,on les appelle "cossiques". J'ai plus haut décrit la diversité et contingence des symboles pour désigner ce qui manque dans le calcul. Mais pour d' autres affaires mathématiques ,c'est pareil : le cossique, c'est un univers médiéval de symboles mal arrimés, divers ,contradictoires, pour désigner par exemple les injonctions mathématiques les plus courantes comme "fais la somme de ces deux grandeurs." ...." égale ces deux autres.",etc.....Néanmoins,et avec le temps , on se dégage peu à peu de l' écriture mathématique en langue naturelle (c'est à dire en latin !) comme tout à l'heure l'exemple de Cardan :

cubus & quadratus 3 aequantur 21

et vient laborieusement au jour la pratique et l'idée d'une écriture nouvelle qui serait faite de symboles spécifiques,(même s'ils continuent de différer beaucoup d'un homme à l'autre) ,qu'on peut commencer d'appeler une écriture mathématique,une écriture de l'Algèbre.......Cependant, plus on symbolise, plus on s'éloigne - mécaniquement - de la géomètrie et de ce support visuel intuitif très efficace qu'elle offre pour se représenter les grandeurs, qu'elles soient ou non. connues.

En d'autres termes,ce que commencent à écrire Regiomontanus ou Tartaglia par exemple c'est bien souvent une écriture formelle (la " chose " y est bien lointaine) , avec ce qu'elle recèle désormais de ludique et d'abstrait , où il n' y a plus guère de support géométrique à l'imagination dans le calcul.
Un exemplaire à l'état d'achèvement relatif et que , pour faire bref, je prendrai pour exemple , est cet ensemble de notations cossiques que, Descartes utilise dans le début de ses écrits mathématiques (1619 ! il a vingt trois ans) ,"Cogitationes Privatae "([3] ,pages 213 /256) , et sa lettre à Beeckman du 26 Mars 1619 ,([3] ,pages 154 / 156),où on lit par exemple :

"Atque hac arte quadruplo plures quaestiones et longe difficiliores solvi poterunt..........;13 enim diversa genera aequationes cubicarum numero,qualia tantum sunt tria aequationum communium :
nempe inter 1 ξ et 0 χ + 0 vel 0 χ - 0N, vel denique 0N - 0 χ ."

C'est à dire : " Et par ce quadruple moyen ,on pourra résoudre de nombreuses et difficiles questions : en effet je compte 13 sortes de cubiques,sur lesquelles trois équations communes :
c'est un fait que l'on a ou bien 1 ξ égalé à 0 χ + 0, ou bien à 0 χ - 0 N, ou bien enfin à 0 N - 0 χ ....."
Une 'équation commune " est une équation du second degré , que Descartes fait donc ici figurer dans son inventaire des cubiques. χ est est la chose cherchée (*res*) , ξ (*Census ou Quadratus*) est le carré, N (*Numerus*) le nombre absolu, et 0 une quantité connue, mais quelconque. Descartes attribue probablement à 0 (qui précède χ ou N) un statut d'opérateur , par quoi il le distingue donc de N. Tout ceci est un modèle de l'écriture cossique,avec chaque fois un mélange particulier de symboles et de langue naturelle (ici , par exemple, il y a un symbole + ; pas de signe spécifique pour l'égalité , représentée ici par "*et*".).

7) Viete et les constantes : la logistique suit

C'est la fin du XVI° siècle, le temps de Viète . François Viete construit une part de son système de notations contre un ordre (bien) établi : grandeurs données/ inconnues du calcul: il introduit en effet une notation symbolique par des lettres aussi bien pour les unes que pour les autres .Si pour les quantités inconnues, il y était d'une certaine façon tenu, (précisément parce qu'elles sont inconnues........) ,il n'en est pas de même pour les grandeurs constantes dont il peut s'assurer au contraire de la constance en écrivant chaque fois leur valeur numérique.

C'est donc une manière de procédé révolutionnaire . Voici Viète :

" *Que ce travail puisse être facilité par un certain artifice,il est necessaire de distinguer les grandeurs données de celles inconnues et que l'on recherche par un symbolisme bien reperé,uniforme et facilement visible,comme on peut l'effectuer en désignant les quantités recherchées par la lettre A,ou par une autre voyelle E,I,O,U,Y et les grandeurs données par B,G,D ou d'autres consonnes.* "(Viète ; Opera Mathematica ; 1646 p .8. Cité dans [9] p 183)

La " chose" devient donc chez Viète une grandeur inconnue que l'on recherche, avec pour exacte contrepartie la grandeur donnée. Ce qui frappe en effet dans ce texte, c'est que les deux types de grandeur (données/inconnues) sont ,par la notation de Viète ,mises sur le même plan (c'est ce qui est tout à fait nouveau) ,avant d'être à nouveau séparées et, par cette même écriture.

Son procédé, que Viète appelle " logistique spécieuse" , traite et manipule donc des lettres qui valent (?) pour des choses abstraites ,des "espéces", et prend sens de s'opposer à la logistique "numéreuse",qui ne veut connaître que des nombres.Celà autorise en même temps Viéte à changer de niveau et à passer (et nous faire donc passer......) d'un lot d'exemples spécifiés à un concept : celui de constante, implicitement dotée de ce statut paradoxal de grandeur fixée mais non explicitée, ni explicitable, quantité immuable mais qui ne peut être exhibée.On fournira du sens,dans l'après-coup , presque trois siècles plus tard avec la construction d'un endroit (ensemble) où "puiser" les constantes.

.Comme on peut le penser ,la notation de Viète était ,dans une certaine mesure, psychologiquement dangereuse et difficile à assumer - même si Viète prend soin de réserver deux types de lettres différents à des usages différents-, par le risque latent de confusion et donc le danger imaginaire de les voir se confondre qu'elle pouvait impliquer entre des objets jusque là posés comme distincts, et soigneusement étudiés comme tels.
Il ne faut pas aller chercher ailleurs,me semble-t-il, la durée extraordinaire entre les Grecs et Viéte : vingt siècles.

8) Viete : genres et scalaires.

Diophante,on l'a vu, associe (implicitement) un nombre à une grandeur, et une grandeur à un nombre.C'est sans problèmes s'il s'agit de nombres au sens de Diophante ,c'est à dire des entiers,éventuellement des fractions.

Mais dès lors qu'il s'agit peut s'agir de quantités imprécises, indéterminées - d'autant plus qu'elles sont désormais représentées par des lettres - alors , il y a un défaut chez Diophante, dit Viète ([2] ,page 24) ,qui estime que :

" La cause de l'obscurité des Analytiques des anciens est qu'ils n'ont pris garde à ces genres et n'ont entendu ces choses."
Les Anciens qui ont traité de l'Algèbre sans acception des genres adjoustoient et soustraoient indifféremment toutes les grandeurs les unes des autres,soit qu'ellès fussent de mesme ou divers genres,comme une ligne et superficie,un quarré avec son costé...."

Viète critique donc la position de Diophante ,(peut-être parce qu'il envisage sans le dire -et sans le savoir - de s'occuper, lui Viète ,d'autres choses que de nombres entiers ou fractionnaires), position qu'il juge inconséquente, et c'est lui qui propose une distinction nouvelle,en forme de compromis historique : *distinguer deux types* de qualités dans les grandeurs (qu'elles soient connues ou inconnues)..

Distinction majeure : d'abord, leur "genre " , qu'il définit par un premier type d'adjectif : planus ,solidus, planus-planus....Par exemple, A planus : signifie que A est une grandeur-carré ,ou ce que j'appelle une inconnue-carré ; de même ,A solidus que A est une inconnue-cube. etc......) . Au delà de planus-planus, il en est nombre d'autres : planus-solidus,solidus-solidus, etc...... Viète a évidemment puisé l'origine de ce concept de genre dans la distinction intuitive que lui procure la géométrie.

D'autre part, Viète examine la "scalarité" d'une grandeur , à laquelle il associe une seconde batterie d'adjectifs : quadratus, cubus, biquadratus..: A quadratus , par exemple, c'est l'inconnue A ou la grandeur A multipliée par elle-même , le carré de l'inconnue donc; de même, A cubus ,l'inconnue-cube. C'est un concept de distinction numérique sans doute valable pour lui à partir du support des nombres entiers ou fractionnaires.

Pour ce qui est du " quarré " ,chose essentielle , je dis donc que Viète a mis en forme quelque chose d'une distinction radicale entre "quadratus' et "census" .

Armé de cette distinction , Viète prescrit donc la régle d'or de l' 'homogénéité dans le calcul :" Pour autant qu'une grandeur doit estre adjoustée à une grandeur,et que les Homogènes n'affectent les Hétérogènes,les grandeurs proposée à adjouster sont Homogènes" ([2] page 30)
Il écrit donc légitimement

" Et si A q - D planus estoit donnée à adjouster à B planus - 2 D plani,la somme serait Aq + Bp - 3 Dp " ([2] page 31)

Ou encore,ailleurs,dans *l'Isagoge*, cette équation :

" B in A quadratum plus D plano in A aequari Z solido."(*) ([9] ,p. 379)

Récapitulons : D est un nom de grandeur connue , affublée de l'adjectif *planus*- à l'ablatif - qui attribue à D le genre" plan ". A est un nom de " chose" , c'est à dire d'inconnue , " *quadratus*" est l'adjectif latin (au nominatif....) et " A quadratus " est le carré de l'inconnue . " *Aequari* " est le verbe latin qui vaut pour l'égalité (dans sa necessaire forme passive).

Ouf...! Avec Viete ,on ne mélangera donc plus les torchons ("planus") et les serviettes ("solidus").......Le " 2" de l"exemple de la page 10 est un nombres entier , simplement mis pour la quantité de la chose considérée ,c'est à dire ici :"deux fois celle-ci qui s'écrit après ".

Comme d'autres, Viète peut aussi vouloir faire bref, (et aussi éviter les déclinaisons.......) , donc noter A q au lieu A quadratus .
Mais ,il lui faut également ,et comme chez Diophante ,des règles de composition des adjectifs : quadratus,cubus ,sursolidus etc..., ou des symboles : q, c, qq , qc , ..&c. .Viète en fait donc une table ([2] ,p. 41) Cette systématisation des comptines de Diophante ,est devenu ici un jeu codifié (par une table) sur les symboles :En voici le début :

Table des produicts des grandeurs scalaires

[illegible]	q	c	qq	qc	cc	qqc
q	qq	qc	cc	qqc	qcc	ccc
c	qc	cc	qqc	qcc	ccc	qqcc
qq	cc					
qc						
cc						
qqc						

Une fois assumées ses distinctions,et établies ses règles - qu'il veut intangibles- d'homogéneité ,Viète ne se pose pas,me semble-t-il, la question de "représenter à son imagination" le résultat de ses écritures,ce qui est au contraire un problème majeur de la psychologie et donc de la philosophie de Descartes , (Il y a une génération et demie entre Viète (1540- 1603) et Descartes (1596 - 1667))..Descartes,en effet, ne veut pas quitter le terrain de ce qui est pour lui la réalité interprétable.

(*) $B.A^2 + D^2A - Z^3$,où A est l'inconnue ,et où les consonnes sont les grandeurs connues.

9) Les "Cogitationes privatae" de Descartes

C'est faute de mieux, et à contre-coeur,que Descartes commence par utiliser pour ses débuts en Mathématiques (nous sommes en 1619 ; Viète est mort depuis seize ans) ,ce qu'il trouve sur le marché, c'est à dire les notations cossiques de Clavius .Dans ces écritures barbares , Descartes en effet, ne trouve pas - et c'est important pour lui- de signification intuitive aux symboles employés, ni même de ce qu'il recherche,c'est à dire le résultat du calcul. Milhaud ([4] ,page 42) note que Descartes cherche même à obtenir comme solution à ses équations cubiques des "longueurs" , et non pas des formules calculables. Descartes juge les notations cossiques compliquées (c'est à dire qu'elles ne parlent pas à son imagination ,ce qui n'était pas une question pour Viète), et ,dans ces premiers écrits, se trompe abondamment dans le calcul........

10) $2a^3$: *les "Regulae "*

Neuf ans plus tard, autour des années 1628, l'ambition de Descartes est devenue bien grande : il veut donner au monde " des Règles pour la direction de l'esprit" (*Regulae ad directionem ingenii,* ci-dessous notées *Regulae*),règles directement inspirées des reflexions et des prescriptions que lui procurent les mathématiques. Ce texte,ensemble de vingt et une règles ,dont seules dix-huit sont développées ,est une sorte de monument .Par le constant parallèle entre des prescriptions provenant du pur registre des mathématiques et celui des principes qui doivent gouverner,selon Descartes, tout esprit humain bien fait, ce texte est probablement,et avec le "Discours de la Méthode" ,où il reprend et épure les *Regulae*, un texte majeur de l'humanité en Occident, par ce qu'il y définit d'une forme de sujet.

Par exemple,le Régle IV ([5],page 15), est intitulée : *"La méthode est necessaire pour la recherche de la vérité".* Ce qui peut paraître un énoncé ontologique universel. Descartes , y cependant traite très abondamment des Mathématiques. Voici Descartes en ses oeuvres :

" Et maintenant ,il existe une espèce d'arithmétique,qu'on nomme algèbre,faite pour éxécuter sur les nombres ce que les anciens faisaient sur les figures..............."" En vérité,il me semble que des traces de cette vraie mathématique se voient encore chez Pappus et Diophante,qui,sans appartenir aux premiers âges,ont cependant vécu bien des siècles avant nous. ([5],page 17)

(p 18) il y eut enfin des hommes d'un grand esprit qui se sont efforcés en ce siècle à la ressusciter: car la méthode qu'on appelle du nom étranger d'algèbre,n'est pas autre chose,semble-t-il, pourvu toutefois qu'on parvienne à la débarrasser des chiffres nombreux et des figures embrouillées qui la surchargent,afin qu'elle possède désormais cette clarté et cette facilité suprême qui doit se trouver comme nous l'avons dit,dans la vraie mathématique."

C'est en effet dans ce qu'il appelle la vraie mathématique que Descartes s'est proposé de trouver/retrouver la vérité ; pour atteindre ce grand résultat, il lui faut, à la fois se souvenir que Diophante en a détenu une part ,et aussi que les algébristes cossiques modernes, ses contemporains se sont " essayés à la ressusciter", mais,dit-il ,sans y parvenir , du fait d'une l'écriture qu'il faut donc absolument, selon Descartes, purger de tout ce qu'elle contient- cossiquement - de multiple ou d'embrouillé .

Comment faire ? Il s'en explique dans la règle XVI : Ce texte,est à juste titre considéré comme l'acte de naissance de toute la notation moderne , cartésienne . Il contient ,à mon avis, une contradiction féconde :

Voici d'abord l' énoncé même de la Règle XVI : ([5], p. 76)

"Quant aux choses qui n'exigent pas l'attention immédiate de l'esprit, quoiqu'elles soient nécessaires pour la conclusion, il vaut mieux les désigner par des signes très courts plutôt que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra faillir, et la pensée ne sera cependant pas forcée de se partager pour les retenir, tandis qu'elle s'appliquera à en chercher d'autres."

et,plus loin (p 76) :

" ....et celà au moyen de signes très courts afin qu'après avoir examiné chaque chose distinctement suivant la Règle IX, nous puissions suivant la Régle XI, les parcourir d'un mouvement très rapide de pensée et avoir l'intuition du plus grand nombre possible d'entre elles en même temps."

Admirons au passage l'abnégation de celui qui , avant d'agir , étudie la règle IX, avant de lire la XI, pour enfin pouvoir aborder la XVI,et retenons que , pour Descartes,Il est essentiel donc que les signes soient" très courts ".C'est la seule exigence qu'il mette ici en avant.
Cette position me semble bien discutable .A mon sens,une "bonne " notation doit en effet gérer un compromis entre l'efficacité et la rigueur : des signes courts sont efficaces ; des signes trop courts portent en germe un risque de confusion avec d'autres.......ce dont Descartes ne semble pas se soucier ici.

.Descartes , dans les lignes qui suivent, et après avoir vanté les avantages de l'écriture ,déclare qu'il lui semble donc necessaire de rassembler sous un même signe,le plus court possible, tout ce qui est "unique dans la résolution d'une difficulté ". Par difficulté , Descartes entend ici problème ou question de mathématique à résoudre, et, par " ce qui est unique " toute quantité connue ou non. Ecoutons Descartes :

" Donc,dans tout ce qu'il faudra considérer comme un dans la solution d'une difficulté,nous le désignerons par un signe unique,qu'on peut imaginer comme on voudra. Mais pour plus de facilité,nous nous servirons des lettres a,b,c,etc...pour désigner les grandeurs déjà connues et A,B,C, etc...pour les grandeurs inconnues puis souvent nous placerons devant elles les chiffres 1,2,3,4 etc... pour exprimer leurs quantités,et d'un autre côté,nous leurs ajouterons ces mêmes chiffres pour exprimer le nombre de relations qu'on devra y comprendre "

Descartes est donc d'abord impeccablement fidéle à Viète qu'il a déclaré n'avoir pas lu.
Ensuite de quoi, viennent dans le texte ,ces trois assertions P1, P2, P3:

P1
" ainsi, si j'écris 2 a^3, c'est comme si je disais deux fois la grandeur dans laquelle entrent trois relations et qui est désignée par la lettre a ." (page 76)

On note d'abord en passant que Descartes pense - fort justement - qu'écrire (ici, des Mathématiques) ,ce n'est pas tout fait désigner la réalité des choses,mais seulement leur "comme si" , et plus précisement le "comme si " de leur énonciation . Plus essentiellement , P1 est un énoncé fondateur, véritable acte de naissance de tout simplement ceci : l'écriture d'une grandeur avec un petit chiffre à sa droite, en haut ,notation dite aujourd'hui exponentielle. Descartes,plus loin :

P 2 "' Il faut remarquer encore que,par nombre de relations,il faut entendre les proportions qui se suivent en ordre continu ,proportions que,dans l'algèbre ordinaire,on chercher à exprimer par plusieurs dimensions et plusieurs figures ,et dont on nomme la première *racine*,la seconde *carré*, la troisième *cube*, la quatrième *bicarré*, etc.." (page 77)

Ceci est une respectueuse paraphrase de la première partie du texte de Diophante ,cité plus haut. Ensuite :

P3".Ces termes m'ont moi-même longtemps trompé, je l'avoue,car après la ligne et le carré, rien de plus clair ne semblait pouvoir être proposé à mon imagination que le cube et d'autres figures semblables .Mais après beaucoup d'expérience,je m'aperçus ....qu'il faut rejeter entièrement de telles dénominations,de peur qu'elles ne troublent la pensée, car, quoiqu'on puisse appeler une grandeur cube ou bicarré,on ne doit jamais la présenter autrement à l'imagination que comme une ligne ou une surface ......" (page 77)
Par ligne , entendez la ligne droite : *linea recta* : une portion rectiligne du plan, et par surface quelque chose comme une portion du plan suffisamment régulière .
L'ensemble de ces trois énoncés me paraît contradictoire . Revenons d'abord à P1 : Utilisant une terminologie à la Viete ,on peut comprendre 2 a^3 dans P1 , ou bien comme : " deux fois **a cubus**" (interprétation "scalaire" ,"numérique", où"nombre " est pris ici au sens de Descartes, sans doute différent à la fois de Diophante et Viète), ou bien : "deux fois **a solidus**" (interprétation "géométrique", "en genre" au sens de Viète)

Si on choisit l 'interprétation "a cubus", alors la grandeur concernée est effectivement dénommée a ,mais le *"dans laquelle entrent trois relations"* n'a plus de sens selon P 2, puisque, dans ce cas, une grandeur dans laquelle entrent trois relations est par nature un solide, ce que a n'est pas nécessairement ici . Dans cette interprétation, néanmoins , P3 pourrait être rendue intelligible en termes numériques,car, ici, 2 étant un nombre entier, et moyennant une "unité d'emprunt " chère à Descartes , $2\ a^3$ peut désigner le volume double de celui du cube matériel de côté a .

Si on retient l'interprétation " a solidus" , alors P1 et P2 sont acceptables pour signifier deux fois la grandeur : "a solide." .Mais P3 devient énigmatique puisqu'il faut *"présenter à l'imagination"* un solide comme une ligne, alors que cette dernière espèce de grandeur est précisément construite de cette distinction.

La notation de Descartes assume donc une contradiction : à mon sens, elle désigne **à la fois** A cubus et A solidus , c'est à dire qu'elle mêle précisément ce que Viète prenait tant de soin à distinguer. Et je crois que Descartes dit vrai ,en assurant contre toute vraisemblance,qu'il n'a pas lu Viète,pourtant publié dans cette Hollande que Descartes connait bien.

Cette contradiction se trouve à la conjonction de deux mouvements de pensée : l'Analyse des Anciens et l'Algèbre des Modernes.et Descartes s'est par ailleurs très clairement situé à cette croisée des chemins ,déclarant vouloir prendre dans chacun ce qu'il y trouve de bon, les mêler et les concilier dans son oeuvre rejetant ce que chacun d'eux lui semble présenter d'imparfait pour corriger " l'un par l'autre"..Neuf ans après les *Regulae*, dans le "Discours de la Méthode , " le second Descartes , désormais plus sûr de lui, devient tout à fait clair sur le sujet :

"mais que,pour les retenir,ou les comprendre plusieurs ensemble,il fallait que je les expliquasse(*designarem* ; [7], p 221) par quelques symboles,les plus courts qu'il me serait possible ; et que par ce moyen,j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre." ([7],page 19.)

Descartes reconnait ici que dans la fabrication de sa notation, Il a été contraint par cette necessité de "comprendre ensemble " des objets dissemblables, c'est à dire de faire s'interpénètrer dans une même écriture (un calcul) des "res " et des "census" , des "x^2" et des "x^3" , choses qui sont à la fois homogènes et in-homogènes., semblables et différentes. On comprend aujourd'hui que le concept de polynôme est ici en germe dans la pensée même de Descartes.

Revenons donc à l'interprétation de 2 a^3 : c'est donc une certaine quantité (la quantité deux) d'une certaine grandeur.(a solide) Certes, Descartes peut numériser l'ensemble : il suffit simplement accompagner 2 a^3 (imaginairement ?) d'une" unité d'emprunt."(qui n'est là que par convention) Alors , 2 a^3 désigne une certaine quantité d'unités......Descartes pourrait s'arrêter là : c'est à mon sens la position définitive, l'aboutissement de Viète.

Ce qui est au contraire essentiel pour Descartes ,c'est - à si juste titre !-"son imagination. et ses sens" ("Discours" ,[7],page 19.,ligne 26) .Pour exister, pour lui, les choses doivent en effet pouvoir être représentées aux sens ..

Est donc , pour Descartes, ce qu'il peut être se représenter comme étant construit : les archétypes de ces existants sont ,dans cette ébauche que sont, pour une part, les *Regulae*,- la <u>ligne</u> et la <u>surface</u> . A ce moment , (1628), il lui est necessaire donc de montrer,- c'est ce qu'il fait dans les *Regulae* - comment il passe , pour ce qui est de la construction de la ligne à la surface et vice-versa.

<u>10) Le passage à la "ligne"</u>

Ce n'est pas commode d'assumer ouvertement en mots une contradiction inscrite et dissimulée dans une notation, et l'embarras de Descartes est manifeste dans la Règle XVI „ce que souligne le choix de ses mots (" Ces termes m'ont moi-même longtemps **trompé**, je l'avoue,car je m'aperçus ....qu'il faut rejeter entièrement de telles dénominations,de peur qu'elles ne **troublent la pensée**,.")

On peut d'autre part aussi penser qu'en1628, Descartes ,un peu effrayé par l' audace de sa démarche première, ne va pas jusqu"au bout d'une pensée subversive : à quoi bon en effet maintenir les surfaces, puisque les lignes peuvent suffire, et les lignes seulement ? nécessairement présentes dans toute construction ,les lignes sont aussi les plus simples..C'est sans doute ce que Descartes n'ose pas encore faire en 1628. .Et il est bien possible que son éditeur Hollandais, Van Schooten, ait ici mieux entendu Descartes que Descartes lui- même :

Ecoutons Cajory :

" Descartes préférait la notation a.a à a^2.....Fr. Van Schooten ,en 1646 ,suivait Descartes en écrivant q.q, x..x plutôt que q^2 , x^2 ,; mais dans l'édition de 1649 de la "Géomètrie",il utilisera de préférence x^2 " ([9]; p349)

Dans le "Discours de la Méthode " postérieur,et point d' achèvement sur cette question de l'évolution chez Descartes, seule demeure en effet " la ligne " :

"Puis,ayant pris garde que,pour les connaître,j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier,je les devais supposer en des lignes,à ,cause que je ne trouvais rien de plus simple,ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens "

Pour le premier Descartes ,il y a d'un côté les grandeurs qui existent dès qu'elles peuvent être construites,et de l'autres les "nombres ." Mais quelle est l'image (puisque c'est bien de celà qu'il s'agit) des nombres "cartésiens" ? Si , à tout" nombre" il peut associer une grandeur, qu'en est-il pour Descartes de l'autre question : à toute grandeur,quel que soit son genre, peut-on associer un nombre ?

Or, ce que postule implicitement la notation $2\ a^3$, c'est que c'est effectivement possible quelque part : en celà , cette notation est un coup de force fondateur : celui donc de dire qu'il est un endroit où puiser les nombres associés aux figures. Mais celà est compliqué, d'abord parce que c'est abstrait,c'est à dire précisément ce que Descartes voulait éviter ! (*)

D'autre part et surtout, cette notation ,me semble-t-il , va ici, et comme chez Viète, localement à l'inverse de sa fonction usuelle de séparation ,opération psychologiquement difficile : elle mélange par l'écriture " A cubus" et "A solidus". Il ne faut pas non plus ,à mon sens, chercher ailleurs l'extraordinaire longévité des notations de type diophantien,relayées dans l'algèbre cossique.

Dans la "Géométrie", Descartes a bien fait taire et scrupules et hésitations, et pris de l'assurance sur tous les plans. D'abord, seule demeure, royale, "la ligne." . Et c'est un achèvement :

Voici Descartes :

" Où est il est à remarquer que,par a^3, ou b^3 ou semblables, je ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples,encore que, pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des quarrés ou des cubes, &c. " ([6] , p.371)

En conséquence, l'écriture mathématique dans la "Géomètrie" ([6] , p. 373) est devenue ceci :

" ce que j'écris en cette sorte

.... ou $z^3 = + a z^2 + bb z - c^3$ ......

c'est à dire....... le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z,plus le quarré de b multiplié par z , moins le cubde c ; & ainsi des autres..........." ([6] , p.371)

(*) ,c'est aussi une contradiction peu simple à gérer mathématiquement : en droit mathématique pur, le bulletin de naissance des nombres réels,signé de Dedekind, date de 1873 ! C'est lui qui fait droit à la notation de Descartes.

Descartes a donc réglé ses problèmes de conscience avec l'homogénéité:

" je fais le triangle rectangle dont le côté LM est égal à *b*, racine carrée de la quantité connué *bb* & l'autre, LN, est 1/2 *a*, la moitié de l'autre quantité connue,qui était multipliée par *z* que je suppose être la ligne inconnue.." ([6], page 375)

Pour contourner ce roc de l'homogéneité, remarquons aussi (voir à ce sujet [13], page 48) que Descartes a utilisé ce que j'appellerai l' artifice de l'unité (qu'il dit parfois "d'emprunt "), qu'il avait introduite dans les *Regulae* , et qu'il érige en système dans la" Géométrie" :

" comme ,s'il faut tirer la racine cubique de *aabb* - *b*, il faut penser que la quantité *aabb* est divisée une fois par l'unité , & que l'autre quantité *b* est multipliée deux fois par la mesme." ([6], p.371)

Je crois bien qu'il faut ici parler d'artifice : car, bien entendu ,en Géométrie , l'homogénéité demeure et demeurera un concept opératoire : une vraie tentative pour la prendre en compte (et non la faire disparaître) est sans doute la géométrie projective et ses coordonnées homogènes.

Cette notation cartésienne vient à son heure : pour Descartes d'abord, dont on comprend à la lumière de ceci combien il est hanté par ce que Milhaud appelle le "continu de la quantité.", qui me paraît en effet être le très nécessaire produit du rejet par Descartes (dans le" Discours") d'une certaine forme de contingence des objets mathématiques :

"..........ces sciences particulières qu'on nomme communément mathématiques ; et voyant qu'encore que leurs objets soient différents,elles ne laissent pas de s'accorder toutes,en ce qu'elles n' y considérent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent,je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée.;même aussi sans les y astreindre aucunement,afin de pouvoir d'autant mieux les appliquer après à tous les autres auxquels elles conviendraient."

Ce qui 'émerge en effet ici, sous l'aspect contingent ,anecdotique, des carrés ,des cubes,etc.....,et en général de tous les "sujets" spécifiés , particuliarisés ,c'est l' aspect universel des "divers rapports ou proportions qui s'y trouvent. ".Descartes dit ici : "Il y a du Nombre."

Elle vient aussi à son heure sur le plan de l'efficacité. En effet, la nouvelle notation (dite désormais " exponentielle ") , est adoptée et répandue, ; on est désormais autorisé à écrire :

$$a^3.a^2 = a^{3+2} = a^5 \quad .$$

de sorte que le jeu sur les mots de Diophante et Viète devient ici un jeu sur les nombres : jeu connu ,éprouvé, permis,mémorisable .D'autre part ,la classification des inconnues- puissance (et aussi donc des puissances de l'inconnue) se fait désormais suivant l'ordre naturel de l'ensemble des nombres entiers d'où, en germe désormais, une rassurante classification d'équations et de courbes selon leur degré ,- instaurant enfin , là où c'était magma, l' ordre dans la nature et la maison - à terme aussi le concept de polynôme, en place d'un lot d'exemples spécifiés, concept qui se clive à son tour par le jeu d'une nouvelle différenciation : la distinction entre fonction et polynôme,etc....

Après Viète et Descartes, et par la grâce (douloureusement acquise) de la notation, rien n' a plus été comme avant en Mathématiques : il suffit pour s'en convaincre de comparer un texte du XVIII° siècle ,d'une part à un texte moderne, d'autre part à un texte du XVII° ou évidemment antérieur.Il y a, donc en cette première moitié du XVII° siècle, un saut épistémologique, permis par la reconnaissance d'une nouvelle écriture : en d'autres termes encore, les mathématiques,ont à ce moment accédé à un certain âge adulte,qui est celui de l'assomption du symbole.

11) Le moment du signe pur

Exit donc le moyen-âge cossique: la notation cartésienne nouvelle se .répand aussitôt presque partout en Europe:
Constatons que celle-ci est contingente : fruit du désir d'un homme, elle s'inscrit elle -même dans le cadre de sa conception d'un sujet coïncidant avec sa conscience, maître de sa raison, soumis à un Dieu lointain,mais présent. Cette notation cartésienne des puissances est là, me semble-t-il comme l'aboutissement d'une suite de syllogismes que je résume (un peu vite) : Dieu est garant de la clarté des Idées .La vérité ne s'atteint que par des idées claires. L'archétype de la vérité est la vraie mathématique. Or,elle-même ne se trouve authentiquement que dans une écriture qui ne soit ni confuse ,ni embrouillée.

Toujours est-il qu'en la seconde moitié du XVII° siècle, la notation de Descartes se répand à la fois très vite, chez de grands auteurs, et dans tous les pays. "La notation cartesienne fut utilisée par C. Huyghens et P.Mersenne dans leur correspondance.....En Angeleterre, J.Wallis fut l'un des premiers auteurs à utiliser le symbolisme exponentiel de Descartes."([9], page 351).

Presque tous les mathématiciens s'accordent donc à noter X^2,X^3, X^4 .On a donc désormais $X.X = X^2$ Plus besoin de réciter la maxime : "Res in rem fit Census" , ici désormais résumée en trois signes.

On constate qu'aujourd'hui, et sur ce point, les mathématiciens de tous les coins de la planète utilisent la notation cartésienne pour ensemble de signes commun.

Remarquons en passant, et pour conclusion provisoire ,comment chacun d'entre nous sait bien ,qu'il est cependant tenu de le retrouver à l'occasion,ce moment historique du graffiti. Hier comme aujourd 'hui, pour véritablement "entrer" dans la démonstration d'un autre, la comprendre ,se l'approprier, pour pouvoir l'utiliser librement, (c'est à dire à autre chose.....) , il est nécessaire de la "rejouer", ,la plume à la main (comme dit Apéry) ,et pour celà d 'y introduire *nos notations* : en effet, il ne s'agit plus ici de signes, mais d'un mot qui fait retour : de notations, par quoi nécessairement le sujet se réintroduit dans son calcul.

Observons aussi que les mathématiques sont (avec la musique) la seule activité humaine où l'on parle de "notations."

Revenons aux puissances : " je " sais donc noter X^2 ou X^3. Noter X^n est encore une autre affaire ; sa genèse est trop longue à exposer ici : un enfant demanderait, naturellement : que vaut n ? Sans doute requiert-elle le même type de démarche doublement difficile de Viète pour prendre en charge ces deux contradictions : d'une part, " le symbole " n " est arbitraire ,mais fixé ! d'autre part, qu'il faut un endroit où puiser les "n"......

Il y a cependant un temps,où "tout le monde " écrit X^n..

Alors on a , avec deux nombres entiers n et p quelconques ,cette belle écriture

$$X^n . X^p = X^{n+p}$$

qu'on peut regarder , pour une part ,comme signant la fin d'une certaine préhistoire des mathématiques.

On pourrait appeler ce moment celui du "signe pur", succédant à celui de la "notation" ,un moment de vérité , avec un beau signe bien précis, à la signification assurée, si ce n'était me semble-t-il, un moment virtuel , théorique,davantage inscrit dans le temps "logique" que dans la chronologie.

13) Puissances,puissances.

En effet le signe , social par nature ,subit le sort des objets sociaux : dès qu'il est prétendument fixé par l'usage ,à la suite de la démarche personnelle de son créateur, il "travaille" chez les autres,à divers niveaux .Ce que j'appellerai le "jeu autonome des signes."

Commençons par une fable , qui prolonge l'exemple de X^n : aussitôt cette dernière nouvelle notation adoptée ,elle fait se poser ,en vertu de sa forme même , des questions dont l'énoncé n'était pas seulement pensable avant sa création . Je sais écrire un exposant . pourquoi pas alors un exposant sur un exposant ? Superposer deux nombres ? ceci désormais apparaît comme un assemblage permis par la nouvelle langue mathématique .Et donc cette question :

Que vaut X^{n^p} ? Par exemple 2^{3^4} ? Or si l'on se prend à calculer $(2^3)^4$ d'une part ,et $2^{(3^4)}$ d'autre part ,on comprend vite la différence !

Notation nouvelle , à peine créée pour mettre fin à l'ambiguité,elle en appelle aussitôt d'autres ,qu'il faut à nouveau prévenir par une autre notation , ici un signe d'agrégation : des parenthèses. Sous ce manque dans la notation cartesienne, pointe un concept : l'associativité : penser la non associativité, c'est en effet pouvoir penser l'associativité.

Ce premier effet des signes ,est de type "conscient" . C'est à dire que c'est de façon directe et "légitime," que le mathématicien s'aperçoit que cette superposition de deux tels assemblages récemment permis n'est pas autorisée, puisqu'ambigue. Quelque chose vient à manquer,aux effets cependants féconds, mais qui n'étaient en aucune façon le problème de Descartes : sa notation travaille ici chez d'autres évidemment en dehors de lui.

14) Exponentielles ,dit-il.........

Le second effet des signes est plus subtil,car,ancré me semble-t-il dans l'inconscient du sujet. Poursuivons la fable du "je."
"je" croit donc savoir ce que veut dire : 2^3, 2^4,.....2^n .

Et puis un jour,un jour de rêve éveillé, "je " se dit : "et si je remplaçais n par 1/2 . Ca n'a pas de sens...........Une demi-fois deux ! Je peux toujours l'écrire avec des symboles ; çà ne garantit pas son existence,c'est de l'impossible,mais de l'impossible écrit ,ce qui n'est pas la même-chose......C'est ,par contre, carrément absurde à écrire en langue commune (une demi fois deux.).........Mais essayons néanmoins de trouver un lieu où gérer ceci."

"Supposons donc -pour un instant ,bien sûr ! - que $2^{(1/2)} = \alpha$ existe, et "vérifie les lois de l'Algèbre ordinaire" , c'est à dire l'écriture précedente :

$$\text{Alors} : \quad 2^{(1/2)}\, 2^{(1/2)} = 2^{(1/2)+(1/2)} = 2^1$$

$$\text{et donc} \quad \alpha^2 = 2.$$

De sorte que "je "est très enclin à *définir* $2^{(1/2)}$ par $\sqrt{2}$, et que, si "je "s'autorise à le faire de la sorte , alors la belle relation précedente

$$\alpha.\alpha = \alpha^2$$

sera une fois de plus vérifiée, ce qui au fond me satisfait pleinement.."

Ici donc, et pour donner sens à un symbole qui n'en n'a pas, on cherche et trouve particulièrement adaptée à l' objet du moment, dont on fait en sorte par la nouvelle définition qu'elle soit encore et toujours vérifiée.

L'écriture joue donc ici le rôle de pôle, je dirai de *paradigme*; ce mot un peu galvaudé me semble ici prendre un plein sens.

A ce stade,on sait écrire et comprendre $2^{\frac{p}{n}}$ avec p et n entiers . par exemple $2^{3/2}$.

Un autre jour de rêve éveillé," je" se propose de remplacer n par $\sqrt{3}$! Que pourrait bien signifier $2^{\sqrt{3}}$? Racine de trois fois deux ! Ca a certainement moins de sens encore.! Et un peu moins aisé , le détour pour trouver un lieu où ceci est jouable. A cette fin, on utilise encore une autre écriture ailleurs valide,dont on veut qu'elle le demeure ici. Pour ce faire,on utilise des Logarithmes,définis depuis le dix-septième siècle par Napier à son usage personne, fort différent ,de ce qui suit:.Voici l'histoire :

" Je " sait que par exemple : $\text{Log}\,(2^3) = 3\,\text{Log}\,2$,

Relation toute aussi vraie avec toute " puissance "r , entiere ou fractionnaire,c'est à dire qu'est valide la relation :

$$\text{Log}(2^r) = r\,\text{Log}2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pourquoi donc ne pas définir $2^{\sqrt{3}}$ par la propriété :

$$\text{Log}(2^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}\,.\text{Log}\,2. \qquad ???$$

C'est possible, car d'une part : $\sqrt{3}$ .Log 2. est un nombre fort calculable, D'autre part, si le logarithme est connu, il est sûr que le nombre est connu. " Je "connait donc Log ($2^{\sqrt{3}}$). Et " je" en déduit" donc une valeur pour ($2^{\sqrt{3}}$).

C'est à nouveau ici le même mécanisme ; pour donner sens à un symbole qui n'en n'a pas, on cherche et trouve une écriture équivalente à d'autres, mais localement adaptée , et dont on fait en sorte par la nouvelle définition qu"elle soit encore et toujours vérifiée.

L'écriture paradigmatique est donc dans cet exemple :

$$\text{Log}(2^r) = r\,\text{Log}2.$$

Je n'en ai pas terminé avec le cas de l'exponentielle : x^r a désormais un sens avec r réel positif, et même irrationnel.,comme $\sqrt{3}$. Peut-on maintenant remplacer r par un nombre complexe ? Que peut bien signifier par exemple 2^i ? Procédé de définition analogue , mais un peu plus long : une écriture le rend également " possible" ,et je ne le développerai pas ici , :

Restant dans le cadre des puissances,on peut en effet encore raffiner : Et si " je" remplaçait r par une matrice (c'est à dire un tableau de nombres) ?

C'est encore une autre question, apparemment encore plus dépourvue de sens ,et évidemment encore plus loin de Descartes.....

Que peut bien signifier par exemple $2^{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -9 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$?

Clairement ,il me semble qu'il s'agit ici de la mise en acte d'un désir inconscient de mettre en rapport deux objets absolument dissemblables ; (ici un nombre, ayant pour exposant un tableau de nombres) , et qu'il arrive en Mathématiques - c'est le cas ici, mais je ne développerai pas davantage la technique spécifique de la chose , faite de matrices et de convergence de séries entières - qu' on puisse trouver un lieu où ceci soit jouable , un endroit mathématique donc où fournir sens à l'écriture.

Il s'agit là,à mon sens, d'une création métaphorique d'objet par rupture de sens , qui se fait à un moment où,comme dit quelque part " Schiller," la raison baisse la garde", et cesse de veiller aux portes...".

15)Paradigmes.

Voici d' autres mises en actes , plus récentes , donc un peu plus compliquées, mais aussi très exemplaires de cette même démarche.
Je crois d'abord qu'on peut y rattacher en Algèbre l'étude systématique des anneaux, dont on peut dire qu' elle a été entreprise afin qu'y soit toujours vérifiée d'une certaine façon, un théorème fondamental de l'arithmétique des entiers : la décomposition en facteurs premiers. Comme il apparaît que ce n'est pas possible sur un anneau quelconque, on fabrique des structures successives ,objets intermédiaires(idéaux de diverses sortes) ,en place de facteurs premiers,etc...Bref, l'écriture du théorème de décomposition en facteurs premiers joue ici le rôle de paradigme.

Un second exemple est celui des "fonctions de Dirac", qui étaient une authentique absurdité logique pour les mathématiciens et n'étaient certes pas des fonctions (nulles en dehors de l'orgine ,leur intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 ! (cf;par exemple :[12] page 295), mais une métaphore opératoire pour les physiciens. Cà marchait quand on substituait ces pseudo-fonctions dans le théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution ,dont on voulait qu'il soit, lui , toujours vérifié .

Pour rendre ceci possible ,c'est à dire pour faire venir à l'existence mathématique une métaphore opératoire pour d'autres ,Laurent Schwartz a mis sur pied ce qu'il a "appelé une généralisation des fonctions : la notion de "distributions" qui, prend pour *définition* des nouveaux objets une des *propriétés* des fonctions bornées . Le procédé,modèle favori de l'axiomatisation consiste donc en un échange des places du sujet et de l'objet) : toute fonction localement intégrable est en ce sens une distribution,mais il y a des distributions que ne sont pas associées à des fonctions.Le résultat est donc que le théorème de la la transformée de Fourier marche "au sens des distributions", (elles sont faites pour çà !),mais qu'on récolte alors toute une dialectique de problèmes inouïs (en ce sens où il me semble que ,comme tout à l'heure Descartes, Schwartz n'y avait pas pensé en créant sa théorie) due ici à la bifurcation qui désormais peut se poser pour presque tout problème fonctionnel : telle propriété est elle valable "au sens des distributions"? ou seulement au "sens des fonctions"). L'écriture paradigmatique est donc ici le théorème sur la transformée de Fourier.

Restant dans cette même théorie des distributions , mais ayant changé d'écriture paradigmatique ,pour choisir cette fois la très immédiate formule d'intégration par parties, on parvient à trouver "dérivables" - au sens des distributions - ,des fonctions qui ne le sont pas.

Fournir des solutions à une équation qui n'en a pas, rendre dérivables des fonctions qui ne le sont pas,c'est une part du mouvement des mathématiques que de trouver un autre lieu ou poser et gérer les contradictions. L'écriture codée,en vertu de sa forme, postule ,mieux que d'autres,l'existence d'êtres écrits, et suggére métaphoriquement la création d'autres.

Rupture de sens qui n'est jamais plus sensible ni , comme on l'a vu, davantage appréciée , que lorsqu'elle met en rapport deux objets absolument hétérogènes : par exemple un sinus et une matrice ; ou bien un espace fonctionnel et une projection orthogonale. ou encore l'ensemble de matrices orthogononales et la compacité . Il y a une sorte de plaisir,comme une jouissance à mettre en relation deux objets tout à fait dissemblables. Dans un registre autre , Proust que c'est là une marque distinctive de son propre style.
La mathématique est donc un peut être un lieu d'où l'on se poser (et espérer résoudre) le type de question suivante : "Etant donnés une table de dissection et un fer à repasser existe t-il une place d'où l'on puisse les considérer comme équivalents ? " (selon un mot de Lautréamont)

On songe aussi irrésisitiblement à "l'Interprétation des Rêves" où ,selon Freud, ,l'inconscient apparaît comme un lieu d'où l'on peut considérer comme équivalents - pour le sujet, et par une longue chaîne d'équivalences valides pour lui dans sa logique structurelle inconsciente- deux hannetons et l'"Adam Bede" de George Eliot. (*le Rêve des hannetons*, [11] ,p. 252)

<u>16) Un sens est une forme</u>

On dira : et le sens dans tout celà ? Où le trouve-t-on. ? Comment peut on se permettre da pareilles fantaisies ? Comment expliquer qu'elles soient légitimées dans l'après-coup à la fois en Mathématiques et dans les sciences appliquées ? Quel rapport en Mathématiques entre le signe et le sens ?
Ces questions méritent évidemment une autre étude. Je voudrais conclure - sans clôturer - par deux remarques éparses sur le signe, les Mathématiques et le sens.

D'une part il faut noter que la linguistique contemporaine a quelque peu bousculé des conceptions naïves du signe et du sens : le signifiant mathématique (comme tout autre) ne se définit ,ni plus,ni moins., que par tout ce qu'il n'est pas : seules signifient des différences , les oppositions à tous les autres symboles : .C'est une position constante des linguistes depuis Saussure, qui se redouble en ceci : il en est exactement de même du sens , qui n'est autre chose que la contrepartie du signifiant (l'autre "face de la feuille" de papier) : dès lors, " un sens , c'est une forme." (.[11] ,page 882),

J'ai, pour ma part , essayé de montrer dans cet article, que le libre jeu sur les signes est, en Mathématiques , bien davantage clair, possible et licite (si ce mot a un sens) qu'ailleurs , dès lors que les Mathématique s'écrivent par symboles hors la langue commune .C'est donc pourquoi ceci est demeuré difficile - presque impossible peut être , à l'exception de ce qui s'écrit en chiffres dans un système de numération - tant qu'elle s'est inscrite dans le cadre de la langue naturelle , qui est donc paradoxalement ici bien plus strict .Sans doute ce phénomène tire -t-il son orignie de l'écart très grand qui existe en Mathématiques entre symbole et réel , écart qui autorise donc- en dépit ,bien entendu , de la prétendue univocité du signe - tous les jeux de l'imagination, mais à la condition expresse de trouver ensuite un lieu - mathématique - où les légitimer .

<u>Michel SERFATI</u>

Bibliographie

[1] **Diophante d'Alexandrie** ;"Les Arithmétiques " ; avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke ; Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard ; Paris 1959

[2] **François Viète** " INTRODUCTION EN L'ART ANALYTIC" ou "NOUVELLE ALGEBRE" *OEUVRE DANS LEQUEL SONT* veus les plus miraculeux effects des sciences mathématiques pour l''invention et solution tant des problèmes que des Théorèmes proposez en icelles ; TRADUIT EN NOSTRE LANGUE et commenté et illustré d'exemples par J.L Sieur de VAU-LEZARD Mathématicien ; Fayard Editeur . Paris .

[3] **Descartes** : Oeuvres de Descartes .Edition Adam et Tannery. Tome X ; Librairie Philosophique J.Vrin. ; Paris 1986.

[4] **Gaston Milhaud** : "Descartes savant" ; Librairie Félix Alcan .; Paris 1921

[5] **Descartes** : " Oeuvres et lettres " ;Edition de la Pleïade. (pages 5/87) " Règles pour la direction de l'esprit" . ; traduction de G.Le Roy.

[6] **Descartes** : Oeuvres . Edition Adam et Tannery ; Tome VI (pages 39/488) *"Regulae ad directionem ingenii"* ; Librairie Philosophique J.VRIN Paris 1986.

[7] ;**Descartes** . "Discours de la Méthode " ; texte et commentaire de E. Gilson ; Librairie Philosophique J.VRIN ; .Paris 1962.

[8] **Paul Ricoeur** ; "Signe et Sens " ; Encyclopaedia Universalis ; tome XVI p.881/884

[9] **Florian Cajory** ; "A history of Mathematical notations " Volume 1 ; " Notations in elementary Mathematics" ; The Open Court Publishing Company (La Salle . Illinois)

[10] **A.P Youschkevitch** : "Les Mathématiques Arabes.(VII° - XV° siécles) ".; avec une préface de René Taton ; J. VRIN Editeur Paris 1976.

[11] **S. Freud** :" L'interprétation des Rêves." traduit par E .Meyerson Presses Universitaires de France ; Paris ; édition de 1980.

[12] **Paul Kree** " Distributions" ; Encyclopaedia Universalis. (tome VI page 295),

[13] **Gilles G.Granger** : "Essai d'une philosophie du style " ..Armand Colin éditeur ; Paris 1968.

****