Jacques Borowczyk
IREM de Poitiers

Horner et la communauté mathématique du XIX ^{e} siècle

L' an VIII de la République français, année 1800 de notre ère, les presses de l'imprimerie Levrault frères de Strasbourg faisaient paraître un ouvrage de 400 pages in-4° intitulé " *Du calcul des dérivations et de ses usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel*". Son auteur Louis-François-Antoine ARBOGAST, professeur de mathématiques à l'Ecole Centrale de Strasbourg y travailait depuis de longues années et, cet ouvrage constitue avec un "*Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux dérivées partielles*" présenté à l'Académie impériale de Saint Petersbourg pour concourir au prix proposé en 1787 et qui fut couronné dans l'Assemblée du 29 novembre 1790 l'essentiel de son œuvre mathématique. Nous verrons l'usage qu'en fera quelques années plus tard en Angleterre W. G. Horner.

Pour faire plus ample connaissance de ce mathématicien alsacien, ajoutons qu' ARBOGAST, né à Mutzig le 4 octobre 1759 mort à Strasbourg le 8 avril 1803 (1), a reçu une formation juridique et, devenu avocat plaidant au Conseil souverain d'Alsace, dans la tradition amorcée par d'illustres juristes comme Viète ou Fermat ayant un goût prononcé pour les mathématiques, il s'adonna à cette science et se fit nommer en 1783 au collège de Colmar pour y enseigner la géométrie puis en même temps professeur de mathématiques au corps royal d'artillerie et professeur de physique au Collège national de Strasbourg dont il devint quelques années plus tard recteur. Il se fit connaître ainsi des électeurs du Bas-Rhin et qui l'élirent en août 1791 à l'Assemblée législative, et le réélirent, un an plus tard le 6 septembre 1792 membre de la Convention. Il participa aux travaux du Comité d'Instruction Publique jusqu'en l'an V-1795 . Il rédigea en son nom un "Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique" présenté à la Convention nationale. Le citoyen ARBOGAST, député du département du Bas-Rhin , fit imprimer en 1793 un rapport "Sur l'uniformité et le système général des poids et mesures déterminé sur la mesure du méridien terrestre", proposa et fit décréter le nouveau système. Lors de la création de l'école polytechnique, il fut nommé instituteur d'analyse. Il devint associé à l'Institut le 9 ventôse an IV. Il retourna à Strasbourg lors de la création des écoles centrales en juillet 1795 et accepta d'enseigner la géométrie et les mathématiques à l'Ecole Centrale du Bas-Rhin de 1796 à 1802. Son intérêt se porta aussi sur l'histoire et la philosophie des mathématiques : il réunit des mémoires originaux ou des lettres de Fermat, Descartes, Jean Bernoulli, Varignon et L'Hospital. Ses manuscrits furent remis àun professeur de La Fère, M. François. L'un d'entre eux, un *Essai sur de nouveaux principes du calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniments petits* et de celle des limites figure au catalogue de la Biblioteca Medicea-Laurenziana de Florence. Refermons cette parenthèse alsacienne et tournons nous toujours en ce début du XIXe siècle vers le sud-ouest de l'Angleterre, dans le comté de Somerset .

C'est dans la ville principale de ce comté, à Bristol, que William George HORNER est né en 1786. Son père le Révérend William HORNER est un ministre wesleyen . Son éducation est confiée à la 'Kingswood School', près de Bristol et dès l'âge de 16 ans, William George HORNER exerce la fonction de maître assistant (assistant master) contre une rémunération 40 livres par an. En 1806, il prend la direction de l'établissement qu'il quitte en 1809 pour aller fonder à 'Grosvenor Place' près de Bath, ville distante de 11 Miles et 1/2 de Bristol sa propre école dont il assurera la direction sa vie durant. A sa mort le 22 septembre 1837, il laisse une femme et plusieurs enfants dont l'un William HORNER prend alors la direction de l'école.

Ainsi résumée la biographie de William George HORNER (1786 - 1837) ne comporte guère de faits saillants: des études à Kingswood School près de Bristol, et à partir de 1809 une carrière d'enseignant et de chef d'établissement à Bristol puis à Bath , dans le comté de Somerset .

(1) et non le 8 avril 1805 ou le 18 avril 1803 come l'indiquent respectivement le Dictionnaire de biographie française et le Dictionary of Scientific Biography : cf annexe 2 Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique , par M. Hachette, avril-mai 1808. Les registres des procès verbaux de la classe des sciences physiques et mathématique de l'Institut indiquent que leur associé Arbogast est décédé le 19 Germinal an 11 (t. II p. 643).

C'est à Bath, que son intérêt pour la résolution numérique des équations va se rmanifester et qu'il va proposer d'appréciables améliorations des techniques d'approximation des racines des équations polynomiales de degré quelconque auxquelles son nom reste attaché. Son apport principal à ces questions porte sur le calcul des coefficients des transformées de polynômes.

On connaît fort peu de choses de la formation mathématique de William Horner : il ne fréquente pas d'université. Cependant, il a certainement lu des grands traités de Newton ' De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas' ou 'Analysis per Quantitatem Series ' ou encore ' Arithmetica universalis'.

Il a pris connaissace des travaux de certains mathématiciens du continent comme Léonhard Euler, 'Introductio in Analysin infinitorum '(1748), et d' auteurs français . Le 'Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés' que Joseph-Louis Lagrange publie en l'an VI-1798, l'ouvrage d'Arbogast " Du calcul des dérivations", publié à Strasbourg en 1800 , et la première édition publiée à Paris en 18O7 de la "Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique" de François-Désiré Budan lui sont familiers. Il lit probablement le français et empruntera certaines expressions à ce dernier ouvrage, qui probablement a stimulé ses recherches. Son auteur François Budan est alors présenté comme docteur en médecine de l'Ecole de Paris; c'est un descendant de colons français de l'île de Saint-Domingue où il est né à Limonade en 1861 et qui a enseigné au collège royal de Nantes avant la Révolution . Budan deviendra en 1808 Inspecteur général des études de l'Université , fonction qu'il exerce auprès du Ministère de l'Instruction publique jusqu'en 1832.

Par contre, d'autres travaux de ses contemporains du continent ne semblent pas lui être parvenus: à l'occasion d'un concours organisé par la *Società Italiana delle Scienze*, un professeur de mathématiques de Modène, Paolo Ruffini présente en 1804 un procédé effectif de calcul par approximations des solutions d'équations de degré quelconque pratiquement identique (aux dispositions des calculs intermédiaires près) à la méthode que présente en 1819 Horner.

Paolo Ruffini (1765 - 1822) est connu par ailleurs pour ses contributions sur l'impossibilité de résoudre algébriquement une équation de degré 5.

La première publication des travaux de William George HORNER est un mémoire intitulé "*A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation*" que Davies Gilbert présente devant la Royal Society le 1er juillet 1819 et qui sera publié dans le volume 109 des **Philosophical Transactions of the Royal Society** en décembre 1819 (pp. 308 - 335). Nous verrons les difficultés qui furent surmontées pour que cette publication se réalise.

Se souvenant des controverses entre Newton et Leibniz , Horner indique au bas de la première page, que s'il a tant tenu à soummettre son travail à la Royal Society c'est surtout par souci d'assurer la propriété de la découverte d'un Anglais. Il écrit : « *En soumettant à la Société Royale cet essai en vue de le publier dans les Transactions Philosophiques, le seul but de l'auteur est de parer à toute controverse en assurant à un Anglais la propriété d'une découverte utile. Il est certainement fondé à la qualifier d'utile, quoiqu'elle soit le fruit de spéculations purement mathématiques; car de toutes les recherches de mathématiques pures, l'approximation est le sujet qui rencontre le plus directement et le plus fréquemment les besoins pratiques du.calculateur.*

Jusqu'à quel point la manière dont il a eu l'avantage de l'envisager a conduit à satisfaire ces besoins, ce n'est pas à lui de le dire; mais sa conviction est qu'à la fois l'Arithmétique et l'Algèbre ont ainsi bénéficié de quelques améliorations et ont vu leur union renforcée. Le fossé qui séparait l'une et l'autre s'est ainsi comblé pour n'être plus qu'une pente douce et uniforme.»

Bien que cette méthode soit très proche des méthodes développées en Chine dès le 13e siècle, et dans le monde arabo-musulman, il ne semble pas que Horner en ait eu connaissance; de même il ne cite pas des travaux antérieurs sur les approximations de solutions d'équations numériques : cette publication comme les versions suivantes se réfère au "Calcul des dérivées " d'Arbogast déja cité, ce qui , que nos amis alsaciens ne nous en tiennent pas rigueur, n'en facilite pas la lecture ainsi qu'aux ouvrages suivants:

HALLEY *Speculum Analyticum* , et des articles de 1694 de la revue '*Philosophical Transaction*'
NEWTON *Arithmetica universalis* (1722)
BUDAN *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques* (1807)
LAGRANGE *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (1798-anVI)
EULER *Introductio in Analysin infinitorum* (1748)
et un ouvrage d'enseignement qui a cours à cette époque
HUTTON *A Course of Mathematics for the Royal Military Academy* (1798-1801).

Horner évoque aussi les noms de LEGENDRE, WOOD, DE GUA et les Tables de ... SHARPE pour ses calculs logarithmiques.

Ne sont pas mentionnées des contributions de certains auteurs à ce sujet tels François Viète (*De Numerosa Potestatum ad Exegesin Resolutione*, 1600), ou même celles d'Anglais comme Harriot (*Clavis*,1631), Oughtred (*Artis Analyticæ*, 1631) ou Wallis (*Algebra*) mais il est vrai que les ouvrages de Lagrange et de Budan commencent par des intoductions historiques qui situent les apports de ces auteurs.

Les travaux de Horner furent publiés de nouveau en 1838 dans le "**Ladies Diary** "; de nouvelles versions évitant le recours au Calcul infinitésimal ont paru à Londres en 1830 ("Horae arithmeticae ") dans **The Mathematical Repository** de T. Leybourn; parallèlement , Paolo RUFFINI publiait en 1813 un aritcle exposant cette méthode n'utilisant pas le Calcul différentiel et intégral. Enfin une version simplifiée et complétée a été publiée après la mort de son auteur sous le titre "*Sur la transformation algébrique telle qu'elle peut être déduite des principes premiers et en liaison avec l'approximation continue et la théorie des différences finies et infinitésimales comprenant également quelques nouvelles approches des solutions numériques* " en 1845 dans les volumes 1 et 2 de la revue **The Mathematician .**

Dans la présentation de ce texte, l'éditeur de la revue T. S. Davies écrit : « *La première publication de Mr Horner sur les équations a été imprimée dans les Transactions philosophiques en 1819 ; et Mr Horner m'a souvent dit que l'insertion de cette communication dans cette publication a rencontré beaucoup d'hostilité et que ce fut en effet davantage grâce à l'influence et au sérieux de Mr Davies Gilbert qu'en vertu d'un quelconque respect pour l'auteur que son sujet ou sa façon de le traiter lui permit que sa communication soit acceptée. Le caractère élémentaire était l'objection avouée, sa façon de le traiter a été finalement ce qui a déterminé l'accord pour le publier.* *La première publication de Mr Horner sur les équations a été imprimée dans les Transactions philosophiques en 1819 ; et Mr Horner m'a souvent dit que l'insertion de cette communication dans cette publication a rencontré beaucoup d'hostilité et que ce fut en effet davantage grâce à l'influence et au sérieux de Mr Davies Gilbert qu'en vertu d'un quelconque respect pour l'auteur que son sujet ou sa façon de le traiter lui permit que sa communication soit acceptée. Le caractère élémentaire était l'objection avouée, sa façon de le traiter a été finalement ce qui a déterminé l'accord pour le publier.*

Cet essai a été ré-imprimé dans l'Almanach des Dames en 1838 et la plupart de nos lecteurs connaissent certainement cette publication. Il n'y a pas de doute que la manière dont il a été rédigé a favorisé sa publication, cependant on peut la considérer comme malheureuse puisqu'elle requiert beaucoup plus de connaissances mathématiques de haut niveau pour suivre le raisonnement que la nature des investigations elles-mêmes ne le rendrait souhaitable. Mr Horner lui-même était si sensible à cette objection qu'il a immédiatement tenté une simplification des principes. En fin de compte et en conséquence de ces essais, le document que nous allons présenter au public pour la première fois est resté complètement inconnu pendant plus de vingt ans, l'objection faite était sa longueur, l'auteur l'a réduite parce qu'il avait l'impression que sa publication en serait facilitée. A la fin de ses travaux, l'article a été déposé aux archives : il n'y a pas de doute que la qualité qui rendait difficile sa publication dans les Transactions *sera une recommandation pour la plupart des lecteurs du* Mathématicien. *En effet, ne serait-ce qu'en tant que méthode générale de recherche comme l'atteste la grande culture mathématique de l'auteur et comme l'atteste le caractère délicat et difficile de la pensée, cette communication ne saurait discréditer désormais aucun auteur ni aucune publication. Ce document en effet est plein de vues originales; on y verra aussi que même après un tel délai, chacune de ses parties est instructive*».

Du schéma de Horner au triangle de Horner :

Le procédé d'évaluation de la valeur d'un polynôme par le procédé appellé désormais 'schéma de Horner' était connu en Angleterre dès le XVIIIè siècle : dans le traité 'De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas' (1669) Newton décrit "sa " méthode pour résoudre l'équation $x^3 - 2x = 5$: par des changements d'équations provenant de décalages de l'origine x= p + 2 , 0,1 + q = p , etc. Il ajoute : « Je ne sais si cette méthode de résolution des équations est largement répandue, mais elle me semble de façon certaine, être, au regard de toutes les autres, plus simple et mieux adaptée à la pratique.[...] Pour ce qui est du travail que cela représente, on le verra en substituant les quantités les unes aux autres, mais je pense, cela pouvant être réalisé de plusieurs manières, que la façon suivante est la plus commode, surtout quand les nombres coefficients sont composés de plusieurs chiffres. Soit p+3 à substituer à y dans l'équation

$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12\,y + 17 = 0$.

Puisque l'on peut transformer cette équation en

y - 4 x y : + 5 x y : - 12 x y : + 17

On obtient une nouvelle équation de la façon suivante :
p - 1 x p + 3 = pp + 2p - 3
et pp + 2p - 3 multiplié par p + 3 égale $p^3 + 5\,p^2 + 8p - 18$
et $p^3 + 5\,p^2 + 8p - 18$ multiplié par p + 3 égale $p^4 + 8p^3 + 23pp + 18p - 18$
et , $p^4 + 8p^3 + 23pp + 18p - 1 = 0$ ce qu'on cherchait ».

Un ouvrage de Newton publié à Londres en 1711 *Analysis per Quantitatem Series* indique de la même façon comment calculer en peu d'opérations la valeur de $y^4 - 4\,y^3 + 5\,y^2 - 12\,y + 17$.
Plus tard d'Alembert démontre que si un nombre a mis à la place de x dans une équation polynomiale satisfait cette équation alors le premier membre est un polynôme divisible par (x - a), démonstration qui prouve que si, P(x)= Q(x) (x-a) + R alors P(a) = R.
Les résultats présentés en 1807 par F.-D. Budan pour résoudre des équations polynomiales méritent notre attention : l 'algorithme que Budan a soumis à la Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut dès l'an XI (1804) permet d'obtenir par de simples additions et soustractions tous les termes des transformées en (x-1), (x-2) , etc ..., d'une équation polynomiale donnée en x.
Le procédé de Budan permet ainsi de connaître les valeurs entières qui sont solutions à une unité près d'une équation de degré quelconque. Ayant ainsi déterminé un encadrement par des entiers r et r+1 d'une (ou plusieurs) racine(s) par le procédé de Budan, on a obtenu l'équation transformée en (x-r) : cette équation a une (ou plusieurs) racine(s) entre 0 et 1. Celles-ci peuvent être approchées par la méthode de Newton en ne conservant que le polynôme de degré 1, ou par le même procédé par un balayage systématique après le changement d'inconnue y=10(x-r). On peut donc déterminer les racines à 1/10 près. Puis continuer ainsi. Les seules opérations arithmétiques utilisées sont l'addition et la soustraction. Mais elles sont fort nombreuses!
Budan semle pressentir la division des tâches de l'algorithmique et, avec une vision anticipatrice il note «*Notre principal objet dans cet Ouvrage, a été de présenter, pour la résolution des équations numériques, une Méthode qui fut praticable, comme mécaniquement ; la science du calcul pouvant, de même que les arts, avoir ses manouvriers , et en tirer , dans des travaux en grand de notables avantages.*»
Budan est plus connu pour la généralisation de la règle des signes de Descartes donnant un majorant du nombre de racines d'une équation comprises entre deux nombres donnés (par exemple entre 0 et un réel positif p) qu'il énonça dès 1803 avant d'en fournir en 1811 une démonstration complète. Ce résultat avait été enseigné à l'école polytechnique par Joseph Fourier qui ne le publia pour la première fois qu'en 1820.
Horner étend le procédé de Budan pour écrire l'équation transformée en (x-r) et s'autorise l'usage de la multiplication. C'est ici que la référence au Calcul intégral peut intervenir, mais comme on le verra , on pourra s'en affranchir:
le développement de Taylor du polynôme f permet d'écrire

$$f(r+h) = f(r) + f'(r).\,h + f''(r).h^{2} + \dots + f^{(n)}(r)h^{n}$$

Il peut être interprété comme résultant de divisions successives de polynômes

$$f(r+h) = [\,f'(r) + f''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-1}\,].h + f(r)$$
$$[\,f'(r) + f''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-1}\,] = [\,f''(r) + f'''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-2}\,].h + f'(r)$$
$$[\,f''(r) + f'''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-2}\,] = [\,f'''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-3}\,].h + f''(r)$$
$$[\,f'''(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-3}] = [\,f^{(4)}(r) + f^{(5)}(r).h + \dots + f^{(n)}(r)h^{n-4}\,].h + f'''(r)$$

La répétition de cette division va produire le triangle de Horner dont les éléments diagonaux vont fournir les coefficients du polynôme après un changement d'origine des abscisses (division synthétique).
Citons l'exemple II du mémoire de 1819 qui reprend l'équation cubique utilisée ci-dessus par Newton: la disposition des calculs sera systématisée plus tard :

« Ex II. Quelle est la valeur de x dans l'équation $x^3 - 2x = 5$.
La racine est manifestement légèrement plus grande que 2 . Faisons x = 2 + z , et l'équation devient
$$1 = 10\,z + 6\,z^2 + z^3.$$
Ainsi, en disposant les dérivées

6. 10..
1.000(
6

Le premier chiffre sera évidemment si près de 1 , que en anticipant son effet sur le diviseur, nous sommes assurés qu'il sera très prés de 106. Ainsi

10.6) 1.000(.094 première correction

Le carré est $94^{2} = 8836$.

Ainsi nous aurons

6 . . .	10......	1.000000000(.094
094	572836	993846584
6094x94=	10572836	6153416
188	581672	
	3	

Le premier chiffre de la prochaine correction sera évidemment 5 ; comme précédemment nous anticipons son effet d'un chiffre de plus . Le diviseur sera donc 1158 correct jusqu'au dernier chiffre . Ainsi

6094 10572836

18855148 5 8 1 6 7 2

6153416

628255148x5&.= 34647014901904 61533978541781019

110296. 111579727014901204

1721458218981

34650056

[...]

Et la racine est

x = 2.09445514815423265 90,&.

correcte jusqu'à la 18ème décimale avec trois approximations».

En 1822, soit 3 ans après la publication de Horner, Budan publie une réédition de son ouvrage de 1807 augmentée d'un appendice à la nouvelle Méthode et suivie d'un Aperçu concernant les suites 'syntagmatiques'. Sous ce vocable qu'il introduit pour indiquer que les termes sont coordonnés, Budan veut désigner des suites qui lui servent à exprimer un algorithme pour la transformation d'un polynôme en x du degré n, en un polynôme équivalent, du même degr, en (x- u) , u étant positif ou négatif , entier ou fractionnaire : pour Budan la syngtagmatique d'une suite $a_0 , a_1 , \dots a_n$ est la suite $a_0 , a_1^{(1)} , \dots a_n^{(1)}$ définie par

$a_k^{(1)} = a_k + u\, a_{k-1}^{(1)}$ pour $k = 1 .. n$.

On reconnaît là la systématisation du procédé signalé par Newton. Budan ajoute

« Ceci posé , pour obtenir les coefficients d'un polynôme en (x - u) équivalent au polynôme d'un même degré n, $a_0 , a_1 , \dots a_n$ dont les coefficients donnés sont $a_0 , a_1 , \dots a_n$, écrivez ceux-ci , comme formant une suite , en écrivant 0 pour un terme , quand 0 sera le coefficient d'une puissance de x ; c'est-à-dire, quand cette puissance manquera dans le polynôme : ensuite vous vous procurerez successivement la première de cette suite ; puis ses 2e.,3e.,4e.,etc, en calculant à chaque fois un terme de moins ; les derniers termes respectifs représentés par $a_0 , a_1 , \dots a_n$ seront respectivement les coefficients de $(x-u)^0$, $(x - u)^1$, $(x- u)^{n-1}$; quand au coefficient de $(x - u)^n$, il sera le même que celui de x^n ; c'est-à-dire a_0.»

C'est dire que Budan dans un langage différent prolongeant ses travaux de 1803 et 1807 donne le procédé de construction du triangle de Horner. A-il eu connaissance des résultats de Ruffini ou de Horner ? Le vocabulaire et les généralisations qu'il donne nous permettent d'en douter. V. Dans un essai historique sur la théorie des équations, Aubry écrira même en 1895 que Budan « a expliqué en détail ses divers procédés dans sa *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques* (Paris, 1808), méthode reproduite par Horner (*Phil.* Trans, 1819), dont elle a gardé le nom.»

La transformée mixte :

Dans la publication posthume de 1845 , Horner fidèle à ses propres notations donne cette disposition des calculs pour former le triangle du polynôme

$A_0\, x^n + B_0\, x^{n-1} + C_0\, x^{n-2} + \dots\dots\dots + K_0\, x^3 + L_0\, x^2 + M_0\, x + N_0$

pour le changement d'origine x= z - r :

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & A_0 & B_0 & C_0 & \dots\dots & K_0 & L_0 & M_0 & N_0 \\
 & 0 & A_1 r & B_1 r & \dots\dots & H_1 r & K_1 r & L_1 r & M_1 r \\
\hline
r^n\ , & A_1 & B_1 & C_1 & \dots\dots & K_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\
 & 0 & A_2 r & B_2 r & \dots\dots & H_2 r & K_2 r & L_2 r & \\
\hline
r^{n-1}\ , & A_2 & B_2 & C_2 & \dots\dots & H_2 & K_2 & L_2 & M_2 \\
 & 0 & A_3 r & B_3 r & \dots\dots & H_3 r & K_3 r & & \\
\hline
r^{n-2}\ , & A_3 & B_3 & C_3 & \dots\dots & K_3 & L_3 & &
\end{array}
$$

Horner introduit aussi un autre procédé pour construire les coefficients du polynôme provenant du décalage de l'origine des abscisses tout en conservant la possibilité d'évaluer le polynôme de départ à la nouvelle origine : en termes d'Algèbre linéaire le premier procédé correspond au changement de base des polynomes de $\{1\ x\ x^2 \dots\ x^n\}$ en $\{\ 1\ x\text{-}r\ (\ x\text{-}r)^2 \dots (x\text{-}r)^n\}$ la transformée mixte permet de prendre en compte différents décalages successifs et d'exprimer le même polynôme successivement dans les bases :

$\{\ 1, (x-r_1), (x-r_1)\, x\ , (x-r_1)\, x^2, \dots\ , (x-r_1)\, x^{n-1}\ \}$

$\{\ 1, (x-r_2), (x-r_2)(x-r_1)\ , (x-r_2)(x-r_1)\, x\ , (x-r_2)(x-r_1)\, x^2, \dots\ , (x-r_1)\, x^{n-2}\ \}$

.

$\{\ 1, (x-r_2), (x-r_2)(x-r_1)\ , (x-r_2)(x-r_1) \dots (x-r_m) \,..(x-r_2)(x-r_1)\ ,$
$(x-r_m) \,..(x-r_2)(x-r_1)\, x\ , (x-r_m) \,..(x-r_2)(x-r_1)\, x^2, \dots\ , (x-r_m) \,..(x-r_2)(x-r_1)\, x^{n-m}\ \}$

dans le formalisme utilisé par Horner à l'article 13, cela donne :

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & A_0 & B_0 & \dots\dots & K_0 & L_0 & M_0 & N_0 \\
 & 0 & A_1 r_1 & \dots\dots & H_1 r_1 & K_1 r_1 & L_1 r_1 & M_1 r_1 \\
\hline
r_1{}^n\ , & A_1 & B_1 & \dots\dots & K_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\
 & 0 & A_2 r_2 & \dots\dots & H_2 r_2 & K_2 r_2 & L_2 r_2 & M_2(r_2-r_1) \\
\hline
r_2{}^{n-1}\ , & A_2 & B_2 & \dots\dots & K_2 & L_2 & M_2 & N_2 \\
 & 0 & A_3 r_3 & \dots\dots & H_3 r_3 & K_3 r_3 & L_3(r_3-r_1) & M_2(r_3-r_2) \\
\hline
r_3{}^{n-2}\ , & A_3 & B_3 & \dots\dots & K_3 & L_3 & M_3 & N_3 \\
 & 0 & A_4 r_4 & \dots\dots & H_4 r_4 & K_3(r_4-r_1) & L_3(r_4-r_2) & M_2(r_4-r_3) \\
\hline
r_4{}^{n-3}\ , & A_4 & B_4 & \dots\dots & K_4 & L_4 & M_4 & N_4
\end{array}
$$

....

and generally,

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \dots & K_{m-1} & L_{m-1} & M_{m-1} & N_{m-1} \\
\dots & & H_{mm}(r_m-r_{m-4}) & K_m(r_m-r_{m-3}) & L_m(r_m-r_{m-2}) & M_m(r_m-r_{m-1}) \\
\hline
 & \dots & K_m & L_m & M_m & N_m
\end{array}
$$

Nous reproduisons en annexe 5 un exemple de l'utilisation de la transformée mixte permettant d'aprécier la précision des calculs conduits par Horner.

Dans le langage de Budan , les transformées mixtes d'une suite $a_0, a_1, \dots a_n$ pour des syntagmes (des décalages) r_1 , $r_2 \dots r_m$ sont les suites $a_0, a_1^{(1)}, \dots a_n^{(1)}$ $a_0, a_1^{(2)}, \dots a_n^{(2)}$ .... $a_0, a_1^{(m)}, \dots a_n^{(m)}$ définies par

$a_k^{(p)} = a_k^{(p-1)} + r_p\, a_{k-1}^{(p)}$ pour $k = 1 .. n-p+1$

$a_k^{(p)} = a_k^{(p-1)} + (r_p - r_{p+1+k-n})\, a_{k-1}^{(p)}$ pour $k = n-p+2 .. n$.

Malheureusement vers la fin du mémoire de 1819, Horner emporté par son enthousiasme a l'imprudence d'ajouter d'obscurs commentaires: « Etant donné que les notations utilisées peuvent être employées sans restriction, il est évident qu'il n'y a pas de classes d'équations tant finies, irrationnelles ou transcendantes auxquelles notre méthode ne puisse s'appliquer ». Mais des exemples convaincants manquent , et pour cause!

Diffusion de la méthode de Horner

La diffusion de la méthode de Horner dans le monde anglo-saxon a été favorisée par les écrits de J. R. Young et Augustus De Morgan qui la décrivent l'allègent et la complètent dans plusieurs de leurs ouvrages ou s'y réfèrent dans des articles. A. De Morgan calcule la racine de l'équation $x^3 - 2x = 5$ avec 1100 chiffres significatifs et, d'autres Anglais ayant revendiqué l'invention de Horner, De Morgan publie une étude historique pour défendre les droits d'antériorité de Horner; il la désigne sous le nom de méthode unifiée de Viète, Newton et Horner. Elle s'est très rapidement répandue en Angleterre (y compris au niveau scolaire) et aux Etats-Unis , puis plus tard dans les pays de langue allemande , mais d'après Florian CAJORI (1859-1930), elle était pratiquement inconnue en France au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle bien que Budan en ait fournit une version dans sa réédition de 1822 de sa *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, livre qui était parmi les ouvrages recommandés pour l'enseignement par le Conseil de l'Instruction publique (compte tenu peut-être des fonctions de son auteur).

La préface de l'article du **Mathematician** ' On algebraic transformations' fait état cependant d' une certaine amertume de son défunt auteur : son éditeur T. S. Davies y écrit «*Aucun mathématicien n'a autant contribué que Mr Horner à l'amélioration de la résolution numérique des équations et peut-être qu'aucune autre personne n'a quitté le monde avec autant de raisons pour se considérer comme traité avec un mépris immérité et même une hostilité personnelle liés à ses recherches: il n'est pas très difficile d'expliquer cette situation et cela enseigne une leçon à chaque mathématicien : à savoir que pour obtenir une réputation à laquelle ses découvertes lui donnent droit le mathématicien doit non seulement faire ses découvertes mais aussi d'une manière ou d'une autre se rattacher lui-même à une classe de façon à assurer une publicité de ses travaux sur l'esprit public; une bonne dose d'intrigue et fort peu de science suffiront pour agir sur la réputation auprès des contemporains, bien mieux que beaucoup de science ne pourra jamais faire pour lui: ceci en fait est une vérité bien mélancolique mais néanmoins c'est une vérité* ».

Documents annexes :

1. Notes bibliographiques
2. Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique (1808)
3. Notice sur les travaux mathématiques de M Budan de Boislaurent, Inspecteur général des études (sans date, probablementvers 1825) B. N. Ln^{27}.3213
4. pages 326 et 327 du mémoire original de 1819
5. traduction des articles 27 à 31 de l'article posthume de 1845.

Bibliographie

AUBRY (V.) *Essai historique sur la théorie des équations*, Journal de mathématiques spéciales, 1895, t.19, p.40, , 1897, t. 21, p.61.

BUDAN (F. D.) *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, Paris, 1807.

BUDAN DE BOISLAURENT (F. D.) *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, revue, augmentée d'un appendice, et suivie d'un apperçu concernant les suites syntagmatiques, Paris , 1822.

CAJORI (F.) *A history of the arithmetical methods of approximation tto the roots of numerical equations of one unknown quantity* , Colorado college Studies, Sciences serie xii 7, 1910, pp. 171-215, 217-287.

CAJORI (F.) *Horner 's Method of Approximation Anticipated by Ruffini*, Bulletin of American Mathemetical Society, XVII , 1911, pp. 409-414.

DE GUA DE MALVES (abbé Jean-Paul) *Démonstration de la règle de Descartes, pour connaître le nombre de racines positives et négatives dans les équations qui n'ont point de racines imaginaires*, Mém. Ac. Sc., 1741, pp.72-96.

DE MORGAN (A.) *On Involution and Evolution* , The Penny Cyclopædia , vol. XIII, London, 1839.

Notices on the Progress of the Problem of Evolution , The Companion to the British Almanac, London, 1839, pp. 34-52.

FOURIER (J.) *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, Bulletin des sciences, 1820, pp. 156-165 et 181-187 ; Œuvres , II, pp 289-314.

FOURIER (J.) *Analyse des équations déterminées*. Première partie, Paris. 1831 (édité par C.L.M.H. Navier).

HORNER (W. G.) *A New Method of Solving Numerical Equations of all Orders by Continuous Approximation* , Philosophical Transactions of the Royal Society, 109, 1819, pp 308-335.

HORNER (W. G.) *Horæ arithmeticæ* , The Mathematical Repository [T. Leybourn ed.], n°18, vol 5, part II, London, 1830.

HORNER (W. G.) *On algebraic transformations*, The Mathematician, Vol 1, 1845, pp. 108-112, 136-142 , 311-316 ; Vol. II, pp. 32-37, 129-132.

HUTTON , (C.) *A course of mathematics ior the use of Cadets in the Royal Military Academy*, 1798-1801.

GOLDSTINNE (H. H.) *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century* , Springer-Verlag, 1977.

LAGRANGE (J.-L.) *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris , Duprat, 1798-an VI, 2e éd. augmentée1808; 3e éd. 1826 avec une introduction de Poinsot, T. VIII des Œuvres complètes.

RUFFINI (P.) *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*, Modena, 1804.

RUFFINI (P.) *Di un nuovo metodo generale di estrare le radici numeriche* , Memorie di matematica e di fisica della società italianna delle scienze, Verona, 1813, T XVI, parte I , pp 373-436; Parte II, pp.1-15.

YOUNG (J. R.) *An elementary Treatise on Algebra*, London, 1826.

YOUNG (J. R.) *The Theory and Solution of Algebraical Equations*, London , 1835, 2nd ed.1843

Poitiers, le 22 mars 1988

Jacques BOROWCZYK
IREM de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX

NOTES BIOGRAPHIQUES

Budan de Boislaurent François-Désiré (Limonade 1761 - Paris 1840)

Budan de Boislaurent est issu d'une illustre famille qui d'après la tradition serait originaire de Sicile et dont la venue en France est contemporaine des guerres d'Italie : l'un de ses ancêtres accompagnant l'un des comtes d'Anjou. La présence de membres de la famille Budan est attestée en Bretagne, à Saumur et en Guadeloupe dès le XVIIème siècle où elle a obtenu une concession du gouvernement.
François-Désiré Budan est né le 28 septembre 1761 à Limonade, village de la colonie de Saint Domingue devenue République de Haïti, il épouse le 13 février 1809 à Paris Thérèse-Désirée de PIOLENC, née le 20 septembre 1779 à Nances en Savoie dont il a eu un fils et deux filles ; il est décédé à Paris le 6 octobre 1840.
François Budan a enseigné au collège royal de Nantes d'octobre 1779 à 1787, et il était suppléant au collège de France lorsqu'fut nommé Inspecteur général des études le 21 septembre 1808, fonction qu'il exerça jusqu'à son départ à la retraite le 6 octobre 1835. Il fut décoré de l'ordre royal de la Légion d'Honneur en 1814. L'essentiel de son apport scientifique porte sur la résolution des équations numériques pour laquelle il proposa l'algorithme de l'an XI (1803) développé en calcul syntagmatique (méthode analogue à celle de Horner) et une extension de la règle des signes de Descartes connue désormais sous le nom de règle de Budan-Fourier, plus maniable que la règle de Sturm. Les polémiques avec Joseph Fourier sur des questions de priorité sur la découverte de l'extension de la règle de Descartes sont célèbres.
Caplat G. Les Inspecteurs généraux de l'Instruction publique. Dictionnaire biographique, 1802-1914, 1986, Paris.

De Morgan , Augustus (Madura 1806 - Londres 1871)

Fils du colonel De Morgan de l'armée des Indes, De Morgan est né à Madura mais, dès l'âge de 7 mois ses parents s'installèrent en Angleterre à Worcester et il fit ses études dans différents établissements dont le collège de la Trinité à Cambridge de 1823 à 1827. De Morgan fut professeur de mathématiques au nouveau collège de l'Université de Londres de 1828 à 1866 avec une interruption de 1831 à 1836 par solidarité avec un professeur d'anatomie. En 1837 , il épousa Sophia-Elisabeth Frend qui écrivit sa biographie en 1882. Il contribua à la création de la London Mathematical Society dont il fut le premier président en 1865. De Morgan fut un auteur prolifique de textes d'enseignements (The Differential and Integral Calculus en 1842 et d'articles de vulgarisation (pour la revue The Mathematician ou The British Almanac and Companion ou encore 850 articles de la 'Penny Cyclopædia', l'encyclopédie à un sous) . Ses principaux apports portent sur l'analyse et la logique. Il est l'auteur du terme 'induction mathématique'.
Vie et œuvre : L. Oppermann , Tidskrift for Mathematik (3), t 1 , 1871
John M. Dubbey D. S. B.

Young, John Radford (Londres 1799 - Peckham 1885)

Young est un autodidacte qui devint enseignant à partir de 1823, année où il commença à publier un traité élémentaire d'Algèbre en 8 volumes. Young favorisa la diffusion des méthodes d'analyse du continent en Grande Bretagne. Il écrivit de nombreux ouvrages d'enseignement.Young eu un emploi au collège de Belfast de 1833 à 1849.
Ses travaux portent surtout sur les racines imaginaires des équations numériques et, il donna en 1844 une preuve de la règle de Newton pour déterminer le nombre de racines imaginaires d'une équation.

Des raisons de santé empêchant M. Labey de faire cette année le cours d'analyse de la première division, il est suppléé dans ses fonctions par M. Ampère, répétiteur d'analyse.

M. Lancret, que nous avons cité dans cette Correspondance comme auteur de plusieurs mémoires de géométrie, qui avoit rempli avec la plus haute distinction une place de chef d'étude, tandis qu'il étoit encore élève de l'Ecole Polytechnique, a terminé sa carrière, à peine commencée, le 17 décembre 1807; il étoit né à Paris le 15 décembre 1774. Entré à l'Ecole le 1er. frimaire an 3, il a passé à l'Ecole des ponts et chaussées en nivose an 6; il fut nommé membre de cette célèbre commission des sciences et arts qui a été organisée à Paris au mois de germinal an 6, pour accompagner l'armée française en Orient. Le gouvernement ayant ordonné, en pluviose an 10, la formation d'un ouvrage sur l'Egypte, le Ministre de l'Intérieur nomma une commission spéciale chargée de diriger l'exécution de cet ouvrage, et la composa de MM. Monge, Berthollet, Fourier, Conté, Costaz, Girard, Desgenettes et *Lancret*. M. Conté étoit commissaire du ministre, et M. Lancret secrétaire de la commission; en décembre 1805, M. Conté mourut et fut remplacé par M. Lancret; les fonctions de secrétaire furent confiées à M. Jomard, ancien élève, ingénieur géographe, l'ami particulier de M. Laucret; à ce titre, M. Jomard se propose de consacrer quelques pages du grand ouvrage sur l'Egypte à la mémoire du savant et vertueux Lancret; il publiera la part qu'il a prise à cet ouvrage, ainsi que ses mémoires particuliers : ce tribut d'éloges payé à celui qui, jeune encore, se distinguoit et comme artiste et comme savant, le fera pleurer de ceux même à qui ses qualités personnelles n'étoient pas connues.

H. C.

M. Arbogast, nommé instituteur d'analyse de l'Ecole Polytechnique à l'époque de sa création (voyez la Correspondance, pag. 333), est mort à Strasbourg le 8 avril 1803 : il étoit né à Mutzig, département du Bas-Rhin, le 4 octobre 1759. Il se livra d'abord à l'étude du droit; mais entraîné par son goût pour les mathématiques, il sollicita et obtint en 1783 la chaire de géométrie au collége de Colmar; en 1789 il quitta cette place pour occuper celle de professeur de mathématiques à l'Ecole d'artillerie de Strasbourg; pendant la révolution, l'administration départementale le nomma recteur du collége

catholique de cette ville; son zèle à remplir les fonctions de recteur lui mérita les suffrages du corps électoral du Bas-Rhin, qui le nomma député à la Convention nationale; il étoit membre du comité d'instruction publique lorsqu'il fut nommé professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique; un an après (en ventôse an 4), il fut associé à l'Institut national. Il quitta Paris à l'époque de la création des Ecoles centrales, pour retourner à Strasbourg, où l'on établit une de ces écoles; il continua à y enseigner les mathématiques, jusqu'à l'époque de sa mort prématurée; il n'étoit pas marié, et il a laissé à ses héritiers une fortune assez considérable.

Son principal ouvrage est le *Calcul des dérivations*, qu'il a publié en 1800 (un vol. in-4°. de 400 pages, imprimé à Strasbourg); il a laissé plusieurs manuscrits à son ami M. François, professeur de l'Ecole d'artillerie de La Fère, qui a eu la bonté de m'envoyer des notes sur les travaux de ce géomètre.

H. C.

EXAMINATEURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour le Concours de 1807.

Paris, ...	M. FRANCŒUR.
Tournée du Sud-ouest, ...	M. MONGE (Louis).
Tournée du Nord-ouest, ...	M. LEVÊQUE.
Tournée du Sud-est, ...	M. DINET.

Les examens ont été ouverts le 15 août 1807; et les cours pour la 2e. division, formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 9 novembre.

Notice sur les travaux mathématiques de M Budan de Boislaurent Inspecteur général des études

M Budan de Boislaurent a publié , en 18O7, une Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques ; ouvrage qui, a été compté, par la première classe de l'Institut, parmi ceux qui ont contribué au progrès de la science. M le Secrétaire de la Classe disoit à la même époque « que cette méthode est d'un degré de simplicité qu'on n'osoit espérer, et qui sera difficilement surpassé ».

La Grange, dans son Traité sur la même matière, imprimé en 1808, a bien voulu s'énoncer comme il suit, au sujet du même ouvrage : « L' auteur y donne un moyen simple et élégant de former les coefficients des transformées, et appliquant la règle de Descartes à ces transformées et à d'autres déduites de celles-là, il trouve les limites de toutes les racines et leurs valeurs aussi approchées qu'on veut. On peut dire que cet ouvrage ne laisse rien à désirer sur la résolution des équations numériques dont toutes les racines sont réelles, et il pourroit à cet égard, servir de supplément au présent Traité».

Et suivant le Rapport de la Classe sur le progrès des sciences : « Cette méthode qui, pour la facilité , ne laisse rien à désirer, est peut-être aussi la moins incomplète qu'il soit possible d'obtenir. C'est du moins le sentiment manifesté par M. La Grange qui, plus que personne, a le droit d'avoir un avis sur ce point si difficile et épineux».

En 1811 , M Budan de Boislaurent a donné un Mémoire contenant plusieurs Théorêmes nouveaux relatif aux successions de signes dans les Suites et les Equations. La première classe de l'Institut a donné son approbation au Mémoire, et a reconnu dans le dernier de ces Théorêmes une extension de la règle de Descartes qui méritoit son attention et l'insertion dans le Recueil des Savants étrangers.

Un Appendice à la nouvelle méthode, publié en 1822 par M Budan de Boislaurent contient plusieurs Théorêmes et Procédés nouveaux, ainsi qu'une Formule servant à la décomposition d'une équation de degré pair en facteurs réels du second degré.

L'Aperçu de M Budan de Boislaurent , imprimé la même année, concernant les Suites Syntagmatiques, traite d'une matière entièrement neuve, pour laquelle il a a dû créer un terme nouveau. Son travail l'a conduit à de nouvelles Formules. Des suites étant placées les unes au-dessus des autres, étant coordonnées entre elles terme à terme, et liées par cette équation de relation $A_n^{(m)} - A_{n-1}^{(m)} u_{n-1} = A_n^{(m-1)}$ dans laquelle l'ordre de la Suite est marqué par l'indice supérieur, le rang du terme par l'indice inférieur, et le facteur u_{n-1} appelé Module Syntagmatique, est sujet à varier d'un rang à l'autre, M Budan de Boislaurent présente l'expression générale d'un terme quelconque, pris dans ces Suites, en fonction, 1° des valeurs successives du module u_0 , u_1 , ... u_{n-1} 2° des termes de l'une quelconque de ces Suites depuis $A_0^{(m)}$ jusqu'à $A_n^{(m)}$, ou bien de ceux d'une Suite formée par les termes $A_0^{(m)}$, $A_1^{(m)}$, ...$A_n^{(m-1)}$; le premier terme dont l'indice est zéro, ayant une même valeur dans chaque Suite. Cette double expression est contenue dans les Formules suivantes :

1re Form. $$A_{\mathit{n}}^{m+\mathit{m}} = A_n^{(m-1)} + \frac{m}{1} A_{n-1}^{(m)} u_{n-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} A_{n-2}^{(m)} u_{n-1} u_{n-2} + \dots$$
$$+ \frac{m\dots(m+n-1)}{1\dots n} A_0^{(m)} u_{n-1} \dots u_0 .$$

En échangeant m en *-m*, on obtient l'expression générale de $A_n^{(m-\mathit{m})}$.

2e Form. $$A^n_{(m+\mathit{m})} = \frac{(m+n)\dots(m+1)}{1\dots n} A_0^{(m)} u_{n-1}\dots u_0 + \frac{(m+n)\dots(m+2)}{1\dots(n-1)} \nabla^{\zeta}_{1} A_n^{(m)} u_{n-1}\dots u_1$$
$$+ \dots + \frac{m+n}{1} \nabla_{\zeta}^{n-1} A_0^{(m)} u_{n-1} + \nabla_{\zeta}^{n} A_0^{(m)};$$

dans laquelle Formule les termes $A_1^{(m-1)}$, $A_1^{(m-2)}$, etc , que l'auteur appelle différences syntagmatiques 1re, 2e, etc, de $A_0^{(m)}$, sont représentés par $\nabla_{\zeta}^{1} A_0^{(m)}$, $\nabla_{\zeta}^{2} A_0^{(m)}$, etc le Delta renversé est ici accompagné du caractère grec ζ pour distinguer cette notation de celle dont La Place s'est servi dans son Calcul des Fonctions Génératrices.

En changeant aussi m en -m dans cette seconde Formule, on obtient l'expression générale de $A_n^{(m-\mathit{m})}$. Les valeurs désignées dans les deux Formules par les lettres A et u peuvent être tout ce qu'on voudra, constantes ou variables. Si dans la seconde, on fait m = 0 , $A_0^{(m)}$ une fonction de x, et le module constant, et égal à l'unité, on retrouve pour lors les différences ordinaires, et pour l'expression de $A_n^{(m)}$, la Formule connue qui n'est qu'un cas individuel de la Formule générale de l'auteur.

Peut-être, serait-il permis d'appliquer au Calcul des Suites Syntagmatiques ces paroles de Newton : *His via ad majora sternitur.*

A. PIHAN DELAFOREST , Imprimeur de Monsieur et de la Cour de Cassation, rue des Noyers, n° 37.

problem; and I say this to invite comparison, not so much with his mode of treating it, as with theirs.

Ex. II. What is the value of x in the equation $x^3-2x=5$.

The root is manifestly a very little greater than 2. Make it $x=2+z$, and the equation becomes

$$1=10z+6z^2+z^3.$$

Hence, arranging the derivees,

6.	10 . .	$\dot{1}.0\dot{0}0$ (
	6	

The first digit will obviously be so nearly 1, that by anticipating its effect on the divisor, we are sure this will be very nearly 106. Hence

10.6) 1.000(.094 first correction

The square is $94^2=8836$.

Hence we have

6 . . .	10	$\dot{1}.00\dot{0}00\dot{0}00\dot{0}$(.094
094	572836	993846584
6094×94=	10572836	6153416
188	581672	
	3	

The first digit of the next correction will evidently be 5; the effect of which we have as before anticipated as far as one digit. The divisor will therefore be 11158 correct to the last figure. Hence

11158)6153416(55148, second correction.

The square is 30413, &c. to 10 digits.

Hence,

6094	10572836	
18855148	581672	6153416
	34647014901904	6153396785417810 19
628255148×5 &c.=	1115797270149012 04	172145821 8981
110296.	34650056	
	1	

Consequently,

$$1116143772)17214582189790(1542326590,22$$

This third correction is carried two places beyond the extent of the divisor, for the sake of ascertaining rigidly the degree of accuracy now attained. For this purpose, we proceed thus:

628 &c. × 154 &c. =, 968, &c. is the true correction of the last divisor. Our anticipated correction was 1,000. For which if we substitute 968 &c. it will appear that our divisor should have ended in 1,678, &c. instead of 2. The error is, ,322 &c. which induces an ultimate error of (111 &c. : 154 &c. : :, 322 &c. &c. :),44 &c. Consequently, our third correction should be . . . . 1542326590,66, &c. agreeing to 10 figures with the value previously determined. And the root is

$$x = 2.0945514815423265 90, \&c.$$

correct in the 18th decimal place at three approximations.

So rapid an advance is to be expected only under very favorable data. Yet this example clearly affixes to the new method, a character of unusual boldness and certainty; advantages derived from the overt manner of conducting the work, which thus contains its own proof.

The abbreviations used in the close of this example, are of a description sufficiently obvious and inartificial; but in order to perfect the algorithm of our method in its application to higher equations, and to the progress by simple digits, attention must be given to the following general principles of

Compendious Operation.

27. We have seen that every new digit of the root occasions the resolvend to be extended n figures to the right, and the m^{th} derivee $n-m$ figures; so that if the work be carried on as with a view to unlimited progress, every new

'HORNER -

27. Nous en arrivons maintenant au sujet de la synthèse et de l'analyse numériques dans leur acceptation la plus large ; et comme les conditions du théorème général ne nous lient à aucune loi particulière de variation, nous prendrons la plupart du temps les incréments de la racine pour indiquer seulement les chiffres qui la composent, appréciés avec la valeur exacte dans les notations décimales.

L'ordre dans lequel nous prenons les chiffres n'a pas d'importance au moins dans les opérations synthétiques. L'un d'entre eux ou une tranche plus grande de l'écriture de la racine si c'est plus commode étant utilisé comme multiplicateur constant dans la première transformation, la procédure qui s'ensuit obéit à la loi générale.

Ex. 1 - Comme illustration familière soit à trouver le cube de 835 271.
Premier mode. En considérant le coefficient x^3 seulement et en commençant par le chiffre final : alors les multiplicateurs m sont utilisés p fois entièrement puis diminués à partir de la droite.

1	0	0	0
	1	1	1
$(m^3 =) 1^3$	1	1	$1 = 1^3$
	71	72	35791
	..	504	......
	72	5113	$357911 = 71^3$
$7, 1^2, 7$	271	2401	195446
	....	686	......
$2, 7, 1^2, 27, 2$	343	97723	$19902511 = 271^3$
	527	11226	146426615
	....	28065	....
$5, 27^2$, &c.	5613	29285323	$146446517511 = 5271^3$
	352	204065	4373220969
	......	122439	....
$3, 5, 2^2$, &c.	40813	1457740323	$4387865620 7511 = 35271^3$
	835	2627439	5827060242584
	......	7006504	....
$8, 3, 5^2$	875813	728382530323	$582749902914607511 = 835271^3$

Dans le calcul ordinaire, les deux premières lignes de ce travail peuvent être supprimées de même que l'évaluation des cubes successifs. Ces détails étant mentionnés ici uniquement dans un but d'illustration. Respectant le mode d'opération les règles d'additions de la première colonne sont suffisamment explicités : une partie de ces additions ne dépassant pas deux chiffres et une partie des derniers introduits est utilisée pour obtenir la somme figurant au-dessus.

Les produits partiels apparaissent à leur place dans la partie correspondante de la seconde colonne et le montant de cette partie étant multiplié par un chiffre seulement du même multiplicateur et celui-ci étant le dernier introduit dans le calcul, le produit est reporté à la colonne finale.

Deuxième mode, en commençant par le premier chiffre et comme il est habituel pour la racine cubique les coefficients de $(x_8 + 8)^3$.

	24 .	192 ..	
	3	729	512 ...
			52787 ...
3^2	243	19929	10395875 ...
	35	7395	418435208 ...
		12325	146499676183 ...
			2093030424511
$3,5^2,5$	2465	2079175	582749902914607511.
	352	125010	
		50004	the cube required.
$3,5,2^2,52,2$	25002	209217604	
	527	501094	
		1753829	
$5,2,7^2$, &c.	250547	20928525169	
	271	17540187	
		2505741	
$2,7,1^2$, &c.	2505741	2093030424511	

Dans cet exemple et dans tous les exemples suivants les multiplicateurs sont diminués à partir de la gauche.

Article 28. Mais si nous réfléchissons sur les caractères distinctifs de l'évolution, qui ont été discutés antérieurement, il apparaîtra que dans ce mode-ci l'exemple est traité par la méthode la mieux adaptée au but de l'analyse. En commençant par les termes de plus haut degré nous assurons une stabilité croissante du diviseur et des coefficients en général. Et aussi, en prenant $fx + f(x_m + r_m)$ comme base du travail, nous faisons la même chose que ce qui est fait pour les équations dans la méthode des limites déjà expliquée : à savoir, la présence d'un diviseur assez fiable dans le premier cas. Par conséquent, nous prenons en considération la commodité du lecteur, en donnant une interprétation du théorème général telle qu'elle s'accordera avec cette procédure.

Multiplier le premier coefficient par les n derniers chiffres de la racine, ou par tous les chiffres de la racine s'il y en a moins que n, et ajouter le produit au second coefficient : au troisième coefficient, ajouter le produit de cette somme par les $(n-1)$ derniers de ses chiffres, ou par tous ses chiffres s'ils sont moins de $(n - 1)$: et ainsi de suite.

Le produit qui est reporté à la fin dans la dernière colonne sera à ajouter ou à soustraire, selon que le problème est synthétique ou analytique.

Ex 2. - Extraire la racine quatrième de 1 5171 0880 9900 6561.

	24.	216..	864...	15171088099006561(0241 •
	2	484	41168	1296
2^4	242.	22084	908168..	2211088
	24	4888	4534112	1816336
		9776	9068224	
				3917520990
24^3	2444.	2267056	962577344	3850309376
	241	49362	930614884	
		49872	232653721	972116146561
		24681		972116146561
241^3	24681	232653721	972116146561	......

Article 29. En multipliant, on observera que je commence par le chiffre de gauche du multiplicateur. L'utilité de cette disposition apparaîtra en formant les additions, et plus encore, quand les termes à ajouter les plus petits seront ignorés dans le travail de contraction. On ne doit pas non plus être perplexe à propos des termes du dessus. Nous devons seulement observer comment le premier chiffre du multiplicateur est situé en regard du coefficient situé au dessus dans la première colonne ; car les produits successifs se décaleront continuellement d'une position vers la droite.

Ou plus généralement, on a :

Si le nouveau coefficient d'une colonne quelconque avance de p chiffres vers la droite de l'ancien, et doit être multiplié par m chiffres, le premier terme à ajouter au prochain coefficient ancien doit commencer à $p + 1 - (m - 1)$, c'est à dire à $p - m + 2$ chiffres à sa droite. Si $m > 2$, ceci voudra dire à $p + m - 2$ chiffres à sa gauche.

30. En prenant p négatif, nous obtenons une règle semblable pour commencer les contractions : à savoir - si p chiffres sont enlevés de n'importe quel coefficient et que ce coefficient doit recevoir m additions alors p - m + 2 chiffres doivent être enlevés du prochain coefficient de gauche et ainsi de suite en reculant. Quand $m > 2$ ceci signifie que $p + m - 2$ chiffres ou certaines marques les représentant doivent être ajoutés.

L'étendue normale de la première addition étant ainsi assurée et désignée par des lignes verticales, les m - 1 places restantes de chaque nouveau coefficient peuvent être marquées par des points, et en partie négligées tandis que les additions qui restent à faire sont disposées selon la méthode habituelle de la multiplication contractée.

A chaque nouvelle étape de contraction, la ligne verticale doit être tracée à la même distance à gauche de tous les points.

Exemple 3. Trouver la racine de $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x - 321 = 0$.

Une première solution approchée est fournie par la méthode de l'article (23),

	1	2	3	4	5	-321
1^5............	1	3	6	10	15	-306
2^4............	1	5	16	42	99	-207
3^3............	1	8	40	162	423	+216

Ainsi la racine commence par 2. Nous complétons la transformation ainsi par l'article (24),

	1	5	16	42	99	-207
2^3............	1	7	30	102	201	
2^2............	1	9	48	150		
2^1............	1	11	59			
1	1	12				

Précisons la solution . La racine de l'équation réduite

$$x_2^5 + 12x_2^4 + 59x_2^3 + 150x_2^2 + 201x_2 - 207 = 0$$

est plus grande que $\frac{207}{423}$ ou .5 et elle est plus petite que $\frac{207}{201+75+15}$

ou .7 . Par conséquent,

	12.	59..	150	201	207 (·638605803324
	6	756	39936	1139616	15897636
6^5	126.	6656	189936	3149616	5
	63	7938	4493694	1422718722	150230400000
$6,3^4$	1323.	3969	2246847	711359361	139304119743
	638	748949	23711978 7	4643470658 1	40926280257
$6,3,8^3$	13 8,6,8	83208	5024561 04	87164285 82	38031030028
	6 3 8 6	4160 4	251228 05	23243809 55	2895250229
$6,3,8,6^2$	,,1,4 51	1109 44	66994 15	475387875 3 47	2867504760
		837 4,2,6 84	290547 6,1 94	2353102 0 8	27745469
		87 06	2790 27	176482 6 5	23904796
		4 35	744 07	4779174 60 0 8	3840674
		1 16	55 80	1769 58	3824781
		9	234 13,7 76	14 75	15893
		9,3,0 09	74	478095 8 93	14343
			5	1 4 7	1550
			2,9,4 93	2 3	1434
				478097 5 9	116
					95
					21
					19
					2

D'où il résulte que la racine est 2.638605803324, valeur exacte jusqu'à la 12ème décimale. Dans ma publication précédente, le dernier chiffre était trop grand, par suite d'une légère erreur commise dans la première colonne au début des contractions.

31. En proposant de nouveau ce problème, je souhaite inviter à comparer avec ma méthode par transformées pures, déjà connue du public. Il apparaîtra, je pense, que si la très grande précision de celle-ci assure infailliblement qu'il n'y aura pas d'erreur ni dans l'arrangement ni dans les contractions du travail, la nouvelle méthode a cependant des avantages importants qui lui sont particuliers. Elle nécessite un plus petit nombre d'additions et celles-ci sont déterminées par de simples multiplications et non par l'emploi mental combiné de multiplications et d'additions ; de plus il ne peut pas y avoir de changement de signe dans un ensemble d'additions.

De plus, il est clair que tout ce qui a été avancé pour déterminer l'adaptation universelle de la première méthode aux équations s'applique au moins avec la même force à celles-ci. Car dans la recherche, N, M, L, etc., sont interchangeables avec les expressions universelles f, Df, D^2f, etc., par lesquelles les quantités irrationnelles et transcendantes sont réduites à la forme algébrique régulière.

En fait, comme nous l'avons vu, la seule différence entre les deux méthodes est que les transformations de la nouvelle procédure ne portent que sur les chiffres de la racine alors que dans l'autre, à chaque chiffre s'ajoutent n incréments de zéros : en n'en utilisant qu'un certain nombre beaucoup de solutions diverses peuvent être obtenues mais il suffira de les avoir mentionnées.

32. Avant d'abandonner cette partie du sujet, il y a une caractéristique de la théorie des équations qui doit être mentionnée et qui s'harmonise tout particulièrement avec les principes de la transformation par division, à partir de laquelle procède la recherche des solutions. C'est ceci, à savoir que la dépressio et l'approximation continue sont une seule et même chose. Dès qu'une racine quel conque de l'équation est déterminée de manière précise ou avec assez de précision, le terme constant doit s'annuler effectivement ou virtuellement et les coefficients restants constituent la formule déprimée qui permet de déterminer les autres racines réelles.

Quand la méthode des transformations pures est utilisée la formule déprimée est déjà prête pour la solution, étant fonction pure des racines restantes, chacune étant déterminée de la racine connue en omettant le dernier incrément. Si les transformations sont mixtes et si un incrément zéro est utilisé pour rectifier le nouveau terme constant les racines sont les différences entre les racines inconnues et la racine connue. Ou bien si r est la dernière racine déterminée, on peut utiliser l'incrément -r pour retrouver les racines de l'équation d'origine.

Cependant divers inconvénients sont liés à l'utilisation pratique de ces principes pour trouver les autres solutions, dûs en particulier au grand nombre de chiffres des coefficients restants et la nécessité d'une gestion longue et compliquée des contractions. Pour ces raisons je pense que de manière générale l'on trouvera préférable de procéder séparément pour chaque racine à partir des données de la solution initiale. C'est donc surtout en référence à ce stade de l'approximation que les remarques précédentes ont une utilité pratique cela permet d'agir avec une plus grande commodité ce qui est le but de la méthode des diviseurs.

Exemple. Quelles sont les racines de $x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 7x + 42 = 0$?

	1	2	-22	7	+42	
1^4........	1	3	-19	-12	+30	
2^3........	1	5	- 9	-30	+ 0	2 est une racine
2^2........	1	7	5	-25		
3^1........	1	10	25	0		3 est une racine
-1^1........	1	9	7			
-2	1	7				

En conséquence les racines sont 2, 3 et les racines de $x^2 + 7x + 7 = 0$ ou encore 2, 3 et $-\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{-11})$.
Ici l'incrément 1 est remplacé par 0 une fois la racine 2 déterminée ; et après avoir trouvé la racine 3 par -3, parce que tous les signes étant positifs cela montre que toutes les racines positives ont été trouvées puis deux fois par 0 pour compléter la transformée pure qui contient les autres racines.