LES DIFFICULTES THEORIQUES DE L'INTRODUCTION DES INFINIMENT PETITS EN MATHEMATIQUES

J.P. WURTZ

Comme il advient souvent en mathématiques lorsque apparaissent des notions nouvelles et fécondes, l'introduction des infiniment petits s'est d'abord opérée au détriment de la rigueur, et a donné prise, de ce fait, à des critiques qui, rétrospectivement, nous semblent relever de combats d'arrière-garde. Il n'empêche que ces objections n'étaient pas dépourvues de valeur, et que les obstacles théoriques ainsi recensés n'ont pu être vraiment surmontés, pour la première fois, qu'au 19e siècle. Nous allons examiner quels étaient ces obstacles théoriques auxquels se heurta le calcul différentiel à ses débuts [(1)]. Puis nous étudierons comment Leibniz, confronté à ces critiques, s'est tourné et retourné pour les désamorcer.

Lisons, pour découvrir les problèmes qui surgirent dès la fondation du nouveau calcul, le premier postulat introduit par L'Hospital dans son *Analyse des infiniment petits* , immédiatement après la définition des "différences"[(2)] : "On demande qu'on puisse

---

(1) *Le premier article consacré au calcul différentiel fut le mémoire de LEIBNIZ* Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, *paru dans les* Acta Eruditorum *d'octobre 1684. NEWTON, dont la découverte était antérieure, n'avait encore rien publié sur son nouveau calcul (appelé par lui "méthode des fluxions"). Le premier* traité *de calcul différentiel,* L'Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes, *du MARQUIS DE L'HOSPITAL, est paru en 1696. L'Hospital s'est d'ailleurs inspiré très largement de l'initiation au calcul leibnizien que lui avait donnée Jean BERNOULLI en 1691/92. Le premier ouvrage critique sur le calcul infinitésimal sera publié en 1694 par Bernhard NIEUWENTIJT, sous le titre :* Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis. *Il sera suivi en 1695 par un ouvrage beaucoup plus vaste du même auteur,* Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae. *NiEUWENTIJT critique d'ailleurs moins l'analyse infinitésimale elle-même (qu'il développe sur des bases qui lui paraissent assainies) que les principes sur lesquels CAVALIERI, BARROW, NEWTON et LEIBNIZ l'avaient fondée. A l'Académie Royale des Sciences de Paris, le combat contre le nouveau calcul sera mené à partir de 1700 (si l'on fait abstraction de quelques réserves, plus ponctuelles semble-t-il, faites par LA HIRE dès 1697), essentiellement par Michel ROLLE, sans doute poussé et encouragé par l'abbé GALLOIS, qui interviendra d'ailleurs personnellement dans le débat.*

(2) *LEIBNIZ et L'HOSPITAL appellent "différences" des quantités comme dx et dy.*

prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même".

Cette "demande" soulève plusieurs difficultés. Tout d'abord, l'utilisation, dans les démonstrations, du signe d'égalité après suppression des quantités infiniment petites, donc négligeables en comparaison des autres pose problème, puisque la quantité supprimée n'est pas nulle. On pouvait considérer comme illicite l'utilisation de ce signe entre grandeurs différant d'une quantité même infiniment petite. Nieuwentijt et Rolle s'élevèrent en tout cas contre cette assimilation de deux quantités non égales. C'est ainsi que Nieuwentijt fit remarquer que "seules sont égales des quantités dont la différence est nulle, ou égale à zéro" ; et, après lui, Rolle, d'après les *Registres des procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences*, a présenté la difficulté suivante : "Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut être prise pour égale à cette même grandeur", difficulté qui à son tour en soulève cette autre : "Si les différentielles sont des zéros absolus". La difficulté est d'autant plus grande que les différentielles secondes sont elles-mêmes infiniment petites en comparaison des différentielles du 1er ordre, celles du 3e ordre infiniment petites par rapport à celles du 2e ordre, etc... Voilà donc des différentielles qu'on peut négliger dans des égalités comme si elles étaient assimilables à zéro, alors qu'elles doivent être considérées comme infiniment grandes à l'égard de différentielles d'ordre supérieur. Comme l'écrit d'une façon assez emphatique Fontenelle dans sa préface à l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital : "L'analyse qu'on explique dans cet ouvrage ... compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connaître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisièmes, quatrièmes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis". Rolle exposera ainsi cet aspect de la question : "Si en géométrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres"[(1)]. Et en 1734, dans *The Analyst,* Berkeley (qui, lui, conteste non les résultats du calcul infinitésimal, mais la manière dont les mathématiciens y parviennent, la validité des principes sur lesquels ils se fondent) écrira au sujet des fluxions de différents ordres : "... les vitesses des vitesses, les seconde, troisième, quatrième et cinquième vitesses, etc..., dépassent, si je ne me trompe pas, tout entendement humain ... A coup sûr, en quelque sens que ce soit, une seconde ou une troisième fluxion paraît être un obscur mystère. La vitesse commençante d'une vitesse commençante, l'accroissement naissant d'un accroissement naissant, c'est-à-dire d'une chose qui n'a pas de grandeur, considérez-la sous quelque jour qu'il vous plaît, vous découvrirez, si je ne me trompe pas, qu'elle est impossible à concevoir clairement ... Et si une seconde fluxion est inconcevable, que devons-nous alors penser des troisième, quatrième, cinquième fluxions, et ainsi de suite sans fin ? "[(2)]

(1) *Les citations du* Registre des procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences *(énoncé des difficultés soulevées par ROLLE), ainsi que le texte de BERKELEY qui va suivre (en traduction), sont donnés d'après : M. BLAY,* Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *dans* : Revue d'Histoire des Sciences, *tome XXXIX/3,1986.*

(2) *Voir la note précédente.*

Mais une autre difficulté apparaît encore, qui, moins évidente à l'époque, ne peut manquer de nous frapper aujourd'hui. Si en vertu du postulat déjà cité de l'ouvrage de l'Hospital, une quantité donnée augmentée d'une quantité infiniment petite par rapport à elle doit être considérée comme demeurant la même, il s'ensuit qu'une quantité donnée augmentée un nombre fini de fois d'une quantité infiniment moindre qu'elle devra également être considérée comme demeurant la même. Le produit d'un infiniment petit par un nombre fini est donc négligeable à côté de la quantité à laquelle il est ajouté : les augmentations successives ne pourront jamais égaler une quantité du même ordre de grandeur que la quantité initiale. L'Hospital l'écrit d'ailleurs clairement dans la section IV de l'*Analyse des infiniment petits*, lorsque, après avoir défini les différences secondes, troisièmes, etc..., il précise, dans une "remarque" : "Toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites ... par rapport à une autre ... demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : et ... afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini". Autrement dit, le produit d'un infiniment petit par un nombre fini ne pourra jamais égaler une quantité d'un ordre de grandeur supérieur. On ne saurait mieux dire que ce que nous appelons aujourd'hui l'axiome d'Archimède n'est pas respecté, ou, pour employer le langage d'Euclide, qu'il n'y a pas de "raison" entre une grandeur donnée et une autre, infiniment petite en comparaison d'elle. En fait, cela en soi ne paraissait pas gênant aux esprits de l'époque. Alors que pour nous aujourd'hui l'axiome d'Archimède est à l'arithmétique ce que le cinquième postulat d'Euclide, sous la forme que lui a donnée Posidonius, est à la géométrie, les contemporains de Leibniz n'étaient pas encore sensibles à cet aspect. Ainsi, ce qui dérangeait Nieuwentijt, ce n'était pas tellement la transgression de ce que nous nommons actuellement l'axiome d'Archimède. Il ne lui paraissait pas scandaleux d'admettre qu'un infiniment petit, multiplié par un nombre fini, ne puisse égaler une quantité ordinaire donnée. En revanche, il refusait d'admettre qu'une quantité infiniment petite, même multipliée par un nombre infini, puisse ne jamais égaler une quantité ordinaire donnée. Selon lui, "tout ce qui, multiplié par un nombre infini, ne peut égaler aucune quantité donnée, aussi petite soit-elle, ne doit pas être compté parmi les êtres, et doit être tenu pour égal à zéro *(nihilo)*" ; ce "n'est pas une quantité, mais, en matière de géométrie, c'est un simple rien *(merum nihil)*". Fort de ce dernier principe, il refusa non seulement des produits tels que dx dx, mais également les différentielles de degré supérieur à l, telles ddx, d^3x etc...

Leibniz laissera à Varignon le soin de répondre à Rolle ; mais il se donnera la peine de répondre explicitement à Nieuwentijt, et il est intéressant d'examiner sa réplique.

Mais auparavant, il est utile de noter que Leibniz semblait avoir compris très tôt que les fondements de son calcul étaient mal assurés. Dès ses premiers écrits s'y rapportant, il avait voulu, comme il l'expliquera plus tard, exposer ce calcul d'une façon qui écartât des scrupules d'ordre logique, et il avait essayé de le tenir à l'abri des controverses métaphysiques. C'est pourquoi, dans le mémoire de 1684, il avait appelé dx "une droite prise arbitrairement", et défini dy, pour un point de la courbe, comme la droite qui est à dx comme l'ordonnée à la sous-tangente, évitant ainsi de faire intervenir la notion d'infiniment petit dans la définition des différentielles, et ce bien que, des manuscrits et sa correspondance en témoignent , il les eût considérées depuis longtemps comme des infiniment petits. Et, si en 1686 il s'enhardira à publier un texte où les côtés du triangle caractéristique, "quantités différentielles", sont qualifiés d'infiniment petits, il ne tardera pas à s'efforcer de rendre son calcul acceptable également pour ceux que cette notion rebuterait. *Si quelqu'un se refuse*, écrit-il dans un mémoire publié en 1689, à employer des infiniment petits, il *peut* prendre des quantités d'une petitesse suffisante pour qu'elles soient incomparables aux quantités communes, et pour que l'erreur qu'elles produisent soit dénuée d'importance, inférieure à une erreur donnée. La différence de deux quantités communes, lorsqu'elle est incomparable à ces quantités, sera alors dite incomparablement petite. Ainsi la Terre peut être prise pour un point, ou le diamètre de la Terre pour une ligne infiniment petite relativement au Ciel. On pourra alors considérer des différences “infiniment petites” par rapport à des grandeurs déjà infiniment petites, autrement dit des différences “infiniment infiniment petites”, et ainsi de suite, et définir ainsi une infinité de degrés de l'infiniment petit, tout comme, corrélativement, de l'infini. A titre d'exemple, si le mouvement est représenté par une ligne commune parcourue par un mobile en un temps donné, la vitesse sera représentée par une ligne infiniment petite, et l'accélération par une ligne infiniment infiniment petite. Ces considérations, précise Leibniz, doivent être prises pour des “lemmes” de sa “méthode des quantités incomparables” et de “l'analyse des infinis”, qu'il appellera plus tard ses “lemmes des incomparables”.

Dans sa réponse aux critiques émises par Nieuwentijt contre le fondement même de son calcul, Leibniz fut obligé de préciser sa pensée, et d'abandonner les faux-fuyants.

Il affirma d'abord qu'il faisait grand cas du zèle de ceux qui veulent tout démontrer rigoureusement jusqu'aux premiers principes, mais qu'il ne fallait pas qu'un excès de scrupule logique vînt créer une barrière, ou que sous un tel prétexte on rejetât des découvertes et qu'on se privât de leurs fruits. Il ajouta qu'il tenait pour égales non seulement des quantités dont la différence est tout à fait nulle, mais aussi des quantités dont la différence est incomparablement petite. Et Leibniz d'illustrer par un exemple et de définir cette idée de grandeurs incomparables. Si à une ligne on ajoute un point d'une autre ligne, ou si à une surface on ajoute une ligne, on n'augmente pas par cette opération la quantité initiale. Il en est de même si à une ligne on ajoute une portion de ligne incomparablement plus petite.(1) Ne sont comparables, explique Leibniz, que des quantités homogènes, c'est-à-dire des quantités dont l'une, multipliée par un nombre fini, peut surpasser l'autre (autrement dit celles qui satisfont à ce que nous appelons aujourd'hui l'axiome d'Archimède). Sont donc incomparables des quantités qui ne remplissent pas cette condition (c'est-à-dire qui ne respectent pas l'axiome d'Archimède). Et Leibniz pose que des quantités qui ne diffèrent que d'une quantité incomparablement petite par rapport à elles sont égales, comme l'ont admis aussi, écrit-il, Archimède et d'autres après lui. Or c'est précisément ce que l'on veut dire lorsqu'on affirme qu'une différence est inférieure à n'importe quelle quantité donnée.Rejeter une telle définition de l'égalité, c'est disputer de mots. Ainsi se justifie selon Leibniz, qui renvoie à ce sujet à ses “lemmes des incomparables” de 1689, que l'on néglige des quantités incomparablement inférieures aux autres.

Comment d'autre part, demande Leibniz, Nieuwentijt peut-il prétendre que des côtés dx et dy sont des quantités, et qu'un carré tel que dx dx, ou un rectangle tel que dx dy, ne sont rien ? D'autre part, lorsque les abscisses sont en progression géométrique et les ordonnées en progression arithmétique, x est à dx comme dx à ddx ; “or il serait étrange de dire que x et dx sont des grandeurs, et que leur troisième proportionnelle ddx ne le soit point”. Certes, le produit de quantités telles que dx dx, dy dy, dx dy, ou encore telles que ddx, qui sont infiniment infiniment petites, par un nombre infini du premier

(1) *On voit que dans ces exemples, aussi bien les points que des portions infiniment petites de lignes semblent être considérés comme des rudiments de ligne. Dans la* Theoria motus abstracti*(1671), seuls les points apparaissaient comme des rudiments de lignes. Une lettre de LEIBNIZ du 11.9.1716 exclura au contraire cette possibilité : "les points ... ne sont que des extrémités et nullement des parties ou composants de la ligne".*

degré ne peut être une grandeur ordinaire. Mais, contrairement à ce qu'affirme Nieuwentijt, cela ne prouve en rien que ces quantités sont égales à 0. Car leur produit par un nombre infiniment infini ou infini du second degré est une grandeur ordinaire. De façon générale, un infiniment petit d'un certain degré, multiplié par un nombre infini du même degré, donne une quantité ordinaire.

Leibniz ne se contente d'ailleurs pas de montrer ainsi qu'il est légitime et nécessaire d'admettre des infinis et des infinitésimaux de degré plus élevé, ni même de rappeler la valeur heuristique, la fertilité de ces notions en mathématiques. Il invoque également leur utilité en physique : "la vérité de ces différenciations successives et la légitimité de leur usage sont confirmées par les choses mêmes" ; ainsi, pour reprendre un exemple déjà utilisé ailleurs, le mouvement, la vitesse et l'accélération se comportent comme une quantité ordinaire, une quantité différentielle et une quantité différentio-différentielle[(1)].

Ce qui nous paraît important dans ce texte, c'est tout d'abord que Leibniz y précise sa notion de quantités incomparables en en donnant une définition rigoureuse ; mais c'est surtout qu'il y affirme l'existence d'ordres, de degrés, dans l'infiniment petit comme aussi dans l'infiniment grand, et qu'il y assume l'idée selon laquelle l'ensemble formé des quantités assignables et des infiniment petits, tout comme d'ailleurs celui formé des quantités ordinaires et des infiniment grands, ne satisfait pas à l'axiome d'Archimède.

Cette position est cependant la plus radicale qu'il ait prise. Il l'infléchira progressivement par la suite, peut-être quelque peu ébranlé malgré tout par les objections qui lui avaient été opposées, ou encore rendu circonspect pour des raisons d'ordre physique. Pour bien nous en convaincre, abandonnons pour un temps l'ordre chronologique et intéressons-nous à un texte de 1701 où, après avoir relevé la sûreté du chemin proposé par le marquis de l'Hospital dans son *Analyse des infiniment petits*, il enchaîne : "J'ajouterai même à ce que cet illustre mathématicien en a dit, qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais seulement comme lorsqu'on dit dans l'optique, que les rayons du Soleil viennent d'un point infiniment éloigné, et ainsi sont estimés parallèles". Et même, comme pour relativiser la portée de ses affirmations et de ses exemples antérieurs, il illustre l'existence de plusieurs degrés d'infinis et d'infiniment petits par l'exemple que voici : le diamètre d'une boule que nous manions est un point en comparaison du rayon du globe terrestre, qui à son tour est un point à l'égard de la distance des fixes ; et réciproquement "la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamètre de la boule". Et il conclut par ces mots : "Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer".

Arrêtons-nous sur le premier exemple. Ecrire dans ce contexte que les rayons solaires peuvent être estimés parallèles, compte tenu de l'éloignement de leur source, n'est-ce pas confondre la précision exigible en mathématique et celle suffisante en physique ? Il n'est plus question ici d'erreur inférieure à n'importe quelle grandeur donnée, donc à toute quantité assignable, mais d'une erreur telle que la différence avec la réalité soit négligeable, en raison de la faiblesse des sens ou des instruments de mesure. Galilée ne

(1) *Dans un texte publié en août 1694, LEIBNIZ avait marqué plus explicitement encore que le fait même que ces notions s'appliquent aux choses est un garant de leur légitimité. Non seulement il y avait mentionné que les frères BERNOULLI avaient trouvé son calcul "propre pour résoudre des problèmes physico-mathématiques, dont la porte paraissait fermée auparavant", mais encore il avait précisé que ce nouveau calcul "enveloppe la considération de l'infini", pour conclure : "Enfin notre méthode étant proprement cette partie de la mathématique générale qui traite de l'infini, c'est ce qui fait qu'on en a fort besoin, en appliquant les mathématiques à la physique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature".*

s'exprimait pas autrement, quand il écrivait qu'on pouvait considérer avec Archimède le fléau de la balance comme "une ligne droite dont chaque point est équidistant du centre commun des graves", des fils perpendiculaires comme parallèles, et que la trajectoire d'un projectile lancé horizontalement pouvait être tenue pour parabolique, bien que les prémisses à partir desquelles ce résultat avait été démontré ne fussent pas rigoureusement exactes.

Le second exemple également est stupéfiant à un double titre. Tout d'abord le diamètre (ou le rayon) "d'une boule que nous manions" n'est pas incomparablement petit par rapport à celui de la Terre, au sens précis que Leibniz avait donné à cette expression dans sa réponse à Nieuwentijt. Car le rapport du diamètre (ou du rayon) du globe terrestre à celui de la boule est fini. Il existe un nombre fini n tel que le produit par n de la deuxième de ces mesures atteigne ou excède la première. L'axiome d'Archimède est donc ici respecté. En second lieu, le diamètre de la boule est une grandeur ordinaire, sensible, assignable ; il n'est pas inférieur à toute grandeur assignable, et n'est infiniment petit qu'en comparaison d'une distance infinie. Il est donc étrange (et peut-être significatif) que Leibniz ait choisi précisément une telle grandeur pour illustrer la notion d'infiniment petit. Or Leibniz ne reniera jamais cet exemple, puisqu'on en retrouvera un semblable, plus explicitement formulé, dans une lettre écrite en 1716, l'année de sa mort. Il y explique que si l'on considère le diamètre du globe de la Terre comme une ligne ordinaire assignable, il faut concevoir le diamètre d'un grain de sable comme une différence du premier degré, et celui d'un petit élément du grain de sable comme une différentielle du second degré. Là encore, force est de constater que ces "différentielles" ne sont pas des grandeurs "incomparablement" plus petites, au sens rigoureux que cette expression avait pour Leibniz en 1695, que celles dont elles sont dites les différentielles, et que l'axiome d'Archimède est donc respecté, et qu'au surplus le diamètre d'un grain de sable ou celui d'une petite partie de celui-ci ne sont pas des grandeurs infinitésimales, c'est-à-dire inférieures à toute grandeur assignable.

Certes, lorsque Varignon, troublé, lui demanda des explications, Leibniz lui répondit d'abord (en février 1702) que, une fois de plus, il avait voulu "marquer qu'on n'a point besoin de faire dépendre l'analyse mathématique des controverses métaphysiques, ni d'assurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, en comparaison des nôtres". Et il ajouta : "C'est pourquoi, afin d'éviter ces subtilités, j'ai cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisait d'expliquer ici l'infini par l'incomparable, c'est-à-dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nôtres ; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables ... Mais il faut considérer en même temps, que ces incomparables communs ... pouvant être pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnements géométriques, font l'effet des infiniment petits rigoureux, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre énonciation, il s'ensuit par notre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, étant en notre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela ... Si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$), lesquelles toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'être utiles, et même nécessaires à exprimer analytiquement des grandeurs réelles".

Mais il est facile de se rendre compte que ce n'était derechef qu'un faux-fuyant de la part de Leibniz. Car celui-ci avouera peu après à Varignon (en juin 1702) qu'il n'est "pas trop persuadé" lui-même "qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses idéales ou comme des fictions bien fondées", et dans une lettre déjà citée de 1716, il écrira à Dangicourt : "Quand ils [nos amis] disputèrent en France avec l'Abbé Gallois, le Père Gouge et d'autres, je leur témoignai, que je ne croyais point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre ... Mais comme Mr. le Marquis de l'Hospital croyait que par là je trahissais la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que j'en avais dit dans un endroit des Actes de Leipzig, et il me fut aisé de déférer à leur prière".

En fait, dès 1698, donc trois ans avant l'article qui avait déclenché cette discussion, Leibniz avait fait part à Jean Bernoulli de son doute concernant la réalité des infiniment petits : "Il se pourrait bien que les infinis que nous concevons et les infiniment petits soient imaginaires, mais aptes à déterminer le réel, comme le font d'ordinaire aussi les racines imaginaires". Supposons en effet que nous nous donnions des lignes réelles infiniment petites ; il s'ensuivrait que nous devrions admettre aussi l'existence de droites limitées de part et d'autre, qui soient aux ordinaires comme l'infini au fini, ce qui signifierait qu'il y aurait dans l'espace un point auquel il soit impossible de parvenir depuis un point donné en un temps assignable, par un mouvement uniforme. Il faudrait, pareillement, concevoir un temps limité de part et d'autre et pourtant infini, donc un certain genre d'éternité pour ainsi dire limitée : un vivant pourrait à la fois ne point mourir en un nombre assignable d'années et cependant mourir un jour, "toutes choses que je n'oserais admettre sans y être contraint par des démonstrations indubitables".

Peu après, s'étant demandé s'il peut y avoir une portion de matière dont la raison à une autre soit inassignable, ou s'il existe une ligne droite limitée des deux côtés et dont cependant la raison à une autre soit infinie ou infiniment petite, il avait noté : "nous l'admettons utilement dans le calcul ; mais il n'en découle pas que cela puisse exister dans la nature".

On devine l'étonnement de Jean Bernoulli, qui répliquera que, puisque Leibniz admet la division actuelle de la matière en des parties infinies en nombre, ce qui implique qu'un corps fini a des parties infinies en nombre, "la plus petite de ces parties doit avoir au tout une raison inassignable ou infiniment petite".

Leibniz se verra obligé de préciser sa pensée : "Quoique, je le concède, il n'existe pas de portion de la matière qui ne soit divisée en acte, on n'arrive pas pour autant à des éléments insécables, ou à des portions les plus petites, à des portions infiniment petites, mais seulement à des portions toujours plus petites, et cependant ordinaires".

Il n'est pas question ici de résumer toute cette discussion entre Leibniz et Jean Bernoulli, qui s'étend sur d'assez nombreuses lettres. Retenons simplement encore cette objection de Bernoulli : Supposons qu'une quantité finie soit divisée en des parties selon la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Tant que le nombre de termes est fini, chaque terme sera fini ; mais si tous les termes existent en acte, il y en aura bien dont la grandeur soit infiniment petite. Leibniz répondra à cet argument que, même si l'on suppose que tous les termes de cette série existent en acte, il ne s'ensuit pas qu'il y en ait un qui soit infinitésimal : il n'existe en acte que n'importe quelle fraction finie et *assignable* aussi petite que l'on voudra.

On retiendra essentiellement trois faits de cette discussion avec Bernoulli. Tout d'abord, qu'à cette époque Leibniz ne nie ni la réalité ni le caractère fictif des infiniment petits. *Peut-être bien*, dit-il, les infinis et les infiniment petits sont-ils imaginaires, et il *craint* que la nature ne souffre pas ce qui est ainsi conçu dans l'analyse nouvelle ; les arguments qu'il met en avant sont simplement présentés comme des raisons motivant ce doute et le refus des objections de Bernoulli, qui ne veut l'admettre. Leibniz prend bien soin de préciser qu'on ne peut vraiment démontrer ni la possibilité, ni l'impossibilité des infiniment petits : "la question reste en suspens". On retiendra en second lieu que, dans la perspective envisagée, la notion de quantité inassignable semble être entièrement bannie : il ne reste que des parties toujours plus petites, mais "ordinaires", et les termes décroissants de la série prise comme exemple sont toujours des fractions finies assignables aussi petites que l'on voudra. Il reste, et c'est là le troisième point, que le calcul infinitésimal n'est jamais remis en cause : même si les infinitésimaux sont des fictions, des êtres idéaux, ils n'en sont pas moins aptes à déterminer le réel, comme les racines imaginaires ne laissent pas de régir les choses, quoiqu'elles n'existent pas dans les parties de la matière. Donc, même s'il n'existe réellement ni infinis, ni infiniment petits, il suffit pour le calcul qu'ils soient conçus à titre de fictions, de notions idéales, comme les racines imaginaires ; "car toujours, ce qui est conclu moyennant ces infinis et ces infiniment petits peut être démontré par un raisonnement par l'absurde, par ma méthode des incomparables".

Pour ce qui est de l'essai d'élimination de la notion de quantité inassignable, ces textes de 1698 paraissent avoir représenté la prise de position la plus extrême de Leibniz. Car cette notion réapparaîtra par la suite, sans que d'ailleurs Leibniz renie en quoi que ce soit ses autres positions nouvelles, et ce déjà fin décembre 1698, lorsque dans une lettre à Wallis il qualifie d'inassignable le triangle caractéristique, et fait intervenir dans son raisonnement des cordes inassignables et des segments inassignables d'un cercle. En revanche, Leibniz ne renonça jamais à l'idée selon laquelle la notion d'infinitésimale est une notion idéale, une fiction. Bien au contraire, ce qui lui était apparu en 1698 comme "en suspens", ce qu'il avait présenté comme une croyance en 1702, est présenté comme une certitude dans un mémoire paru en 1712. Partant de ce que :

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} ,$$

ce qui conduit à ce paradoxe que la raison du plus grand au plus petit doit être dite égale à celle du plus petit au plus grand, Leibniz en conclut, par un raisonnement où intervient le logarithme de ces quantités, que ces raisons ne sont pas réelles, mais imaginaires (comme est imaginaire le logarithme de - 1). Il y a ainsi, écrit-il, des choses qui ne sont pas réellement vraies, même si elles sont employées de façon sûre et utile dans les calculs. On rencontre, de la sorte, des énoncés qui sont "vrais par tolérance". Ils ne supportent pas la rigueur, mais sont d'une grande utilité dans les calculs et dans l'art d'inventer. Et Leibniz de poursuivre : "De même que je nie qu'un rapport dont un terme est une quantité inférieure à zéro soit réel, de même aussi je nie qu'il y ait à proprement parler un nombre infini ou infiniment petit". Lorsque nous disons qu'une erreur est infiniment petite, il faut entendre par là plus petite que n'importe quelle erreur donnée. Leibniz reprend alors une comparaison qui nous est à présent familière : si nous parlons de quantités ordinaires, infiniment petites et infiniment infiniment petites, c'est comme si nous comparions le diamètre de l'orbe des fixes, celui de la Terre et celui d'un grain de poussière. Ces façons de parler sont des expressions commodes, courtes, mais qui ne sont vraies que par tolérance, et qui n'acquièrent consistance que par l'explication. Et, pour mettre définitivement les choses au point, Leibniz précise bien que ces remarques peuvent servir utilement à se préserver de "concepts chimériques". Cette certitude sera confirmée dans une lettre de septembre 1713, où notre auteur assurera que sa pensée selon laquelle les quantités infiniment petites et les quantités infinies sont des fictions, mais des fictions utiles, repose sur des "preuves incontestables".

Cette évolution des conceptions leibniziennes relatives au statut des infiniment petits ne doit cependant pas masquer la permanence de certains thèmes. Tout d'abord, qu'elles soient considérées comme réelles ou comme fictives, toujours les quantités infiniment petites sont telles par rapport à d'autres grandeurs. La définition même des différentielles de divers ordres, qui entraîne que des infiniment petits soient négligeables non seulement devant une grandeur ordinaire, mais encore devant un infiniment petit d'un ordre moins élevé, imposait d'ailleurs d'emblée cette relativité, sans laquelle le calcul infinitésimal n'est guère concevable. De ce fait - et c'est là la seconde idée toujours présente dans la pensée mathématique de Leibniz (sauf peut-être dans la période d'élaboration de ce calcul) - les infiniment petits ne peuvent être considérés comme égaux à zéro. Troisièmement enfin, Leibniz a toujours pensé que les infiniment petits obéissent aux mêmes lois que les grandeurs ordinaires. Dans tous ses calculs faisant intervenir des différentielles et des quantités assignables, il applique les mêmes règles à ces différents types de grandeurs. "Les règles du fini réussissent dans l'infini ... ; et ... vice versa les règles de l'infini réussissent dans le fini", comme il l'écrit à Varignon. De même que les racines imaginaires, les infinis et les infiniment petits, bien que fictifs, ont leur "*fundamentum in re* " ; ils "sont tellement fondés que tout se fait dans la géométrie, et même dans la nature, comme si c'étaient des parfaites réalités".

Mais d'où vient que les propriétés des opérations licites dans le cas des grandeurs ordinaires puissent être appliquées impunément à des grandeurs "sur le point d'évanouir", lorsqu'on prend "tout d'un coup l'incomparablement petit au lieu de ce qu'on peut assigner toujours plus petit à l'infini" ? Leibniz l'explique par sa "loi de la continuité", applicable aussi bien en mathématiques qu'en physique, "en vertu de laquelle il est permis de considérer le repos comme un mouvement infiniment petit ... et la coïncidence comme une distance infiniment petite, et l'égalité comme la dernière des inégalités", donc de prendre "l'égalité pour un cas particulier de l'inégalité et le repos pour un cas particulier du mouvement", etc ..., "supposant non pas que la différence des grandeurs qui deviennent égales est déjà rien, mais qu'elle est dans l'acte d'évanouir, et de même du mouvement, qu'il n'est pas encore rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'être". Bref, les infiniment petits sont conçus "comme s'évanouissant certes dans le rien, en conservant cependant le caractère de ce qui s'évanouit". Si ce caractère se conserve, c'est précisément parce qu'en application de cette loi, "tout changement doit arriver par des passages inassignables et jamais par saut". Dès lors "tout ce qu'on dit du mouvement, de l'inégalité ..., se doit vérifier aussi, quand on suppose ces choses infiniment petites ..."

On voit donc que Leibniz a eu clairement conscience à la fois de ce qui permettait et justifiait son calcul, et, sinon de la fragilité, du moins de l'absence de rigueur absolue de son fondement, à tel point que Fontenelle, qui croyait à la rigueur totale des notions d'infiniment petit et d'infiniment grand, a pu le comparer à un architecte qui "a fait un bâtiment si hardi, qu'il n'ose lui-même y loger". Nous constatons, quant à nous, que, dans sa quête d'un statut précis des infiniment petits, Leibniz a tour à tour, dans ses deux positions extrêmes de 1695 et de 1698, fait un premier pas dans les deux voies sur lesquelles le 19e siècle d'abord, le 20e ensuite, se sont engagés pour fonder son nouveau calcul en toute rigueur. Lorqu'en 1698, dans sa discussion avec Jean Bernoulli, il tend à écarter la notion même de grandeur infiniment petite et à ne retenir que des grandeurs assignables, inférieures cependant à n'importe quelle quantité également assignable que l'on veuille choisir, ne prépare-t-il pas la voie au courant qui, de Bolzano à Weierstrass et à Cauchy, fondera le calcul infinitésimal en éliminant toute référence à des nombres infiniment petits et en introduisant des différences dont la valeur absolue peut être rendue inférieure à quelque nombre positif ε que l'on se donne ? Et lorsqu'en 1695, répondant à Nieuwentijt, il affirme au contraire l'existence d'infiniment petits et d'infiniment grands qui, en vertu de leur définition même, joints aux nombres ordinaires, ne respectent pas l'axiome d'Archimède, mais sur lesquels on peut opérer comme sur ces nombres ordinaires, n'a-t-il pas préparé la voie à l'analyse non standard de Robinson, qui a pu affirmer que le contenu de son livre montre que ces idées leibniziennes "peuvent être pleinement justifiées", et qu'elles "mènent à une approche nouvelle et féconde de l'analyse classique et de mainte autre branche des mathématiques" ?