ESQUISSE D'UNE HISTOIRE DE TRANSPOSITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Georges GLAESER

I TRANSPOSITIONS

C'est hors de l'école que s'apprennent les savoir-faire les plus courants de la vie quotidienne : pour se nourrir, voyager, vendre, acheter ... l'instruction ne fournit, au mieux que des compléments d'information.

> Les **apprentissages sans enseignement** sont ceux qui se réalisent au contact de l'environnement.

L'**enseignement** au contraire repose sur une préparation intentionnelle de la matière à inculquer : elle est préalablement analysée, décomposée, dépouillée des détails non significatifs, complétée par des explications, illustrée par des exemples. On la présente alors à l'apprenant selon un *timing* dûment planifié : cette gestion de temps prévoit non seulement l'ordre dans lequel les divers items seront exposés, mais aussi les longs intervalles de temps, qui permettent une maturation, une assimilation des bases.

> Une **transposition** est une modification du contenu, ou de son mode de présentation effectuée dans le but de faciliter l'apprentissage

Glaeser 1987

Remarquons (qu'au même titre que le mot *permutation*, en mathématique) les mots transposition (ou modification) désignent soit une *action* soit le *résultat* de cette action : ce dernier ne s'avère pas toujours conforme aux souhaits de celui qui entreprend l'action. Le contexte permettra, si nécessaire, de distinguer ces deux acceptions.

A côté des enseignements dispensés par un **maître** dont c'est la profession, il existe des **apprentissages autodidactes** réalisés par exemple grâce à des *livres*.Les connaissances transmises ont été soumises à des transpositions séculaires ; les auteurs les plus originaux empruntent beaucoup à la tradition, mais y apportent quelques modifications personnelles : les innovations sont parfois abandonnées ou, au contraire, reprises et améliorées par la postérité.

La **classe** n'est pas l'unique théâtre de tous les enseignements : c'est d'ailleurs une institution récente. Mais le temps scolaire ne représente dans l'enseignement élémentaire actuel que 900 heures sur 8760. Et les années de scolarisation ne sont qu'une faible fraction de la vie d'un individu. Bien des activités imposées ou suggérées par l'école (devoir, leçon, observation du milieu, lectures) se déroulent hors de la salle de classe. (L'Ouvert n° 26).

Le **professeur apprend beaucoup en enseignant** (bien après avoir "terminé" ses études institutionalisées). Expliquons ce paradoxe :

Pour préparer un cours sur un sujet nouveau, il consulte systématiquement plusieurs livres ; il reformule systématiquement le contenu ; il invente de nouveaux arguments. Il parcourt le domaine d'étude selon divers itinéraires, en variant les points de départ et d'aboutissement. Il explore aussi l'environnement culturel, en composant des exercices et autres activités. Brefs, **il transpose** !
L'exposé linéaire qu'il fournira à ses élèves, gomme tous les chemins de traverses qu'il aura découverts. Par contre, il bénéficiera de l'analyse qu'il aura réalisée en dévoilant la structure complexe du sujet traité. De plus il prendra conscience des difficultés, en observant les réactions de ses élèves.

"La meilleure façon de se familiariser avec un sujet, c'est de lui consacrer un livre !" ?

Qui peut me donner le nom de l'auteur de cette célèbre boutade ?

La *didactique* d'une discipline est l'étude des mécanismes d'apprentissage qui mettent en œuvre des enseignements.

Pour se constituer en science, la didactique des mathématiques recourt surtout à des *méthodologies expérimentales* . Mais elle recherche, en outre dans *l'histoire de l'enseignement* des informations qui éclairent les phénomènes pédagogiques de notre temps.

Et ce qui nous intéresse le plus, ce sont les *ruptures* qui balayent nos pratiques éducatives. C'est ce qui conduit à esquisser une histoire *centrée sur les transpositions.*

Dans le cadre d'une seule conférence, je ne puis qu'évoquer une *histoire en pointillés,* choisissant ça et là quelques points significatifs.

1° Je survolerai le long règne de la *pédagogie sans élèves* , au cours de laquelle toute la pédagogie porte sur la modification du texte enseigné, sur la fabrication du message, sans égard à sa réception.
Je n'évoquerai donc que l'histoire d'un très petit nombre de livres, ancêtres de nos *manuels scolaires* .
Je préciserai d'abord ce que signifient ces termes :

Un *manuel* se caractérise
par certains modes d'emploi pédagogiques,
par le public auquel il s'adresse (âge et niveau des lecteurs).

Un *manuel scolaire*
est adopté par des *établissements d'enseignement,*
à l'usage des *professeurs* ou des *élèves* .
Ces derniers sont *contraints,* en principe, de consulter
ce livre, et à *apprendre des passages par cœur* .

2° Une rupture fondamentale semble liée à l'avènement d'une *pédagogie de l'exercice et du problème*, dont l'histoire mériterait déjà, à elle seule, tout un enseignement annuel.

3° Je regrette de ne pouvoir aborder ici une *histoire de la formation des maîtres* ; et spécialement celle du XXe siècle, qui mériterait à elle seule beaucoup de recherches supplémentaires.

II DEUX MILLE ANS DE TRANSPOSITIONS DU TEXTE D'EUCLIDE

Jadis on croyait à une liaison rigide, absolue, irréductible entre la connaissance et le texte

A cette époque ...

Connaître : c'est savoir interpréter le texte et le mémoriser
Apprendre : c'est le psalmodier, le restituer ou le commenter.

Quant au *texte* lui-même, c'était (outre les Ecritures sacrées des diverses religions) Aristote, Hippocrate ...

En mathématiques, c'était essentiellement "Les Eléments" d'Euclide (IIIe siècle avant J.C)

Les livres anciens étaient surtout des *textes évolutifs* . Constamment recopié, remanié au cours des siècles, le chef d'œuvre d'Euclide est en état permanent de transposition. La plus ancienne copie dont nous disposons est postérieure de cinq siècles environ à ses premières versions.

Les changements relevés ne sont parfois que des lapsus de copistes. Mais on inclut souvent dans le texte les dernières améliorations scientifiques ... Et souvent, on prétend apporter des modifications qui rendraient l'exposé plus clair, mieux enseignable. Ce processus se poursuit au cours de l'histoire des traductions de l'ouvrage dans diverses langues savantes (latin, hébreu, arabe ...) et des *adaptations* , dont on trouvera un premier inventaire dans l'article d'Alexandre Koyre (in Taton 1957).

Les "Eléments" s'adressaient essentiellement à des *savants de haut niveau.* Vers le XVIe siècle, apparaissent des versions destinées à des "commençants" : mais on croyait alors que les mathématiques les plus élémentaires (les opérations de l'arithmétique par exemple, et même la numération (le "chiffrage")) n'étaient pas accessibles aux enfants.

Au XVIIe siècle, on commence à disposer d'adaptations du texte d'Euclide, qui sont des manuels scolaires destinés à des adolescents agés. Le plus célèbre fut celui de Clavius (1574), en usage durant tout le XVIIe siècle dans les établissements de Jésuites où l'étude des mathématiques débutait (pour des élèves hautement sélectionnés) vers 19 ans environ !

Plus tard s'amorce un processus d'adaptation des Eléments d'Euclide à des élèves plus jeunes. Le manuel de Robert Simpson (1756) connut un vif succès de librairie (30 éditions) en Grande-Bretagne.

Citons encore la "Géométrie de Port-Royal": les *"Nouveaux élémens* [1] *de Géométrie"* rédigés par Antoine Arnauld (1667). Ce *n'était pas un manuel* : Les Petites Ecoles de Port-Royal disposaient de collaborateurs fort compétents en mathématiques (Blaise Pascal), qui rédigèrent en partie ces nouveaux "Elémens" et la célèbre "Logique ou l'Art de Penser" (1662), par Arnauld et Nicole. Mais, au témoignage même de Jacqueline Pascal le programme d'études du célèbre établissement janséniste ne comportait ni calcul, ni géométrie "si ce n'est une heure de "gets" (jetons) les dimanches et jours de fête, lorsqu'il pleuvait !" (Carré, 1971).

Une des caractéristiques des sous-produits d'Euclide du XVII et XVIIIe siècle est – à mon avis – une régression du point de vue de la clarté. Les auteurs pensaient rendre l'exposé plus accessible, en éliminant les excès de rigueurs.Mais les résultats ne furent pas probants. L'idéologie de la "Lumière naturelle", chère à Pascal, était plutôt une *obscure clarté !!*

III CLAIRAUT (1713 - 1765)

Les premières transpositions qui concernent vraiment la didactique des mathématiques émanent des contestataires d'Euclide. Claude-Alexis Clairaut fut l'artisan le plus important de cette rupture. Les deux ouvrages d'enseignement écrits par ce grand savant "Elémens de Géométrie" (1741) et "Elémens d'algèbre" (1746) eurent le mérite de déclencher cent ans plus tard un débat sur la diversité des modes d'enseignement en mathématiques et leurs mérites respectifs. Ce débat n'est pas encore éteint.

J'ai exposé dans (Glaeser 1983) quelques uns des principes de la pédagogie de Clairaut, en les illustrant d'exemples empruntés à sa "Géométrie". Je complète ici cet article en insistant sur les transpositions qui apparaissent dans son "Algèbre".

Clairaut fut un pionnier de ce que l'on peut appeler la *méthode d'exposition magistrale par le problème.*
Auparavant le discours dogmatique fournissait des réponses à des *questions non posées.*

Clairaut invente des progressions de questions ingénieuses-auxquelles il apporte aussitôt *ses* réponses.
C'est là une rupture radicale vis-à-vis d'Euclide.
Un siècle et demi plus tard l'étape suivante est franchie (par exemple par Martin Wagenschein) :
C'est l'apprentissage par *problèmes posés et résolus par l'élève,* ce que des situations judicieusement choisies par le professeur rendent possible.
C'est une rupture radicale vis-à-vis de Clairaut.

(1) Orthographe ancienne

Des admirateurs trop naïfs de Clairaut ne se contentent pas de rendre justice aux progrès considérables qu'il a accomplis. Ils lui prêtent, en outre, des *intentions* évidemment *anachroniques* .

Jusqu'au XVIIe siècle, l'enseignement des mathématiques concerne un nombre infime d'individus, adultes ou adolescents âgés. Il existe cependant des exceptions :

L'épisode sumérien (3000 ans av J.C.)(S.N. Kramer 1975) et l'épisode florentin (12e au 15e siècle après J.C) (Van Egmont 1980).
Dans ces deux cas, on sait que les écoliers commençaient leurs études vers 7-9 ans ; on connaît les énoncés des activités qu'on leur proposait (par exemple un répertoire de 400 exercices étudiés dans les nombreuses *boutiques à calcul* italiennes).

Ces traditions se sont perdues. On ne connaît pas d'exemples analogues au XVIIIe siècle : tous les documents d'époque, tous les témoignages d'anciens élèves, ne mentionnent pas d'enseignement mathématique, systématique avant 19 ans (sauf si un élève particulièrement doué était admis à suivre des enseignements destinés aux adultes, ou disposait de leçons privées).
On ne peut parler de didactique tant qu'on se cantonne dans la pédagogie sans élèves : au temps de Clairaut, nul ne songe à mettre des "apprenants" adultes en observation pour étudier les mécanismes de la formation de la compréhension ... Nous n'en sommes encore qu'à la *préhistoire de la didactique.*

Cependant, cette époque est l'un des âges forts de la pédagogie-fiction. On disserte sur les comportements d'apprentissage de quelques Emiles, fruits de l'imagination d'écrivains utopistes.

Clairaut n'en est pas là. Il a effectivement mis en oeuvre un enseignement non scolaire et autodidacte (I). Il s'adressait à un public adulte, qui prenait plaisir à s'instruire sans obligations ni sanctions. Les livres de Clairaut font de la vulgarisation au meilleur sens du terme (Glaeser 1987) . Cette approche se rattache à ce que j'ai nommé la *pédagogie mondaine*, dans une intention descriptive ... sans connotation péjorative.

Je persisterai dans cette opinion tant qu'on ne me présentera pas des documents qui attestent de l'utilisation des deux ouvrages cités de Clairaut, comme outils de travail entre les mains d'adolescents, élèves d'un établissement d'enseignement. Alors, et alors seulement, je proclamerai que les "Elémens" de Clairaut sont des manuels scolaires !

Dans l'inventaire des ouvrages utilisés dans les diverses écoles d'ingénieurs (Taton, 1964) on cite rarement les Clairaut, et toujours comme *ouvrages d'accompagnement ou d'agrément* : ils figurent sur les rayons de la bibliothèque du professeur. Stendhal en témoigne, à propos de l'Ecole Centrale de Grenoble, dont il fut l'élève de 1796 à 1799. (in "La vie de Henri Brûlard) : "Nous suivions le plat cours de Bezout, mais M. Dupuy *(son professeur de mathématiques)* eut le bon esprit de nous parler de Clairaut ... ... Clairaut était fort pour ouvrir l'esprit, que Bezout tendait à laisser à jamais bouché. Chaque proposition dans Bezout a l'air d'un grand secret appris d'une bonne femme voisine"

Les pédagogues du XVIIIe siècle s'inspiraient volontiers de la philosophie **sensualiste** de Condillac (1714-1780). Dans ses formulations les plus excessives, cette doctrine professait que toute connaissance, toute compréhension, dérive essentiellement de la sensation. Le credo pédagogique de J.J. Rousseau et de Pestalozzi s'exprime par cette maxime : "Pour expliquer, il suffit de *montrer* ". Destutt de Tracy va encore plus loin, dans l'excès : il affirme que "Penser, c'est toujours sentir et ce n'est rien que sentir".

Les géomètres actuels sont unanimes pour affirmer que "pour comprendre la géométrie, il ne suffit pas de regarder la figure !!" Dans une faible mesure, le raisonnement géométrique se construit peu à peu **à partir** du donné empirique. Mais il s'élabore surtout **contre** les apparences de la sensation.

Il s'agit donc, pour l'enseignement mathématique de trouver un compromis : d'un côté, il est parfois raisonnable de **substituer la monstration à la démonstration** ; mais il ne faut pas en abuser.

Les livres de Clairaut réalisent un certain équilibre entre ces deux tendances : on doit en discuter pour décider si certaines de ses options sont raisonnables, et d'autres franchement excessives (Glaeser 1983).

La méthode de Clairaut, défendue d'une façon académique dans les écrits pédagogiques de Sylvestre Lacroix (1765-1843), fut effectivement mise en œuvre dans l'enseignement secondaire français. Mais ce ne sera que sous l'influence d'Emile **Blutel,** vers 1920. Il aura fallu qu'auparavant Carlo Bourlet, Blutel et P. Chenevier fassent subir à l'œuvre du pionnier, beaucoup de transpositions décisives. (Cf. les manuels de P. Chenevier avec leur préfaces écrites par Blutel).

Clairaut fut à l'origine de certaines pratiques moins heureuses ; notamment il eut souvent recours à des **artifices pédagogiques** destinés à contourner certaines difficultés. Ces procédés devaient envahir l'enseignement secondaire français dans la première moitié du XXe siècle.

Il s'agissait alors d'enseigner coûte que coûte certaines questions du programme, qui exigeaient naturellement certains prérequis, encore inconnus des élèves. Il fallait alors inventer des acrobaties intellectuelles, dont Henri Lebesgue démonta les mécanismes dans "Les coniques" (1942).
L'exemple le plus ridicule à mon avis fut introduit lorsque le programme demanda d'exposer la théorie des polaires par rapport à un cercle *C*, à des élèves qui n'avaient pas encore étudié les nombres complexes.
Rappelons la définition classique : deux points M et N sont *conjugués* par rapport à *C* si la droite MN coupe *C* en deux points A et B de sorte que la division (M,N ; A,B) soit harmonique. Cette définition tombe en défaut, lorsque la droite MN ne coupe pas le cercle, et elle aurait conduit à une théorie boiteuse, obligeant à distinguer une profusion de cas de figures.

Pour débrouiller cet écheveau, on imagina une définition "réelle" des points conjugués, basée sur une étude préalable des *cercles orthogonaux.* Evidemmment ce détour ne pouvait être justifié aux yeux des élèves doués d'un minimum d'esprit critique. Bientôt on s'avisa que cet artifice n'était pas encore satisfaisant. On "améliora" la construction, en introduisant la notion de cercles *pseudo-orthogonaux* ...
Bref, cette présentation délirante, fut qualifiée à l'époque de méthode pédagogique élégante (consulter les manuels de géométrie de la classe de Mathématiques élémentaires des années 1930 à 1950 - ainsi que (Lebesgue 1942)).

On trouve chez Clairaut un tel détour tortueux lorsqu'il s'agit de faire accepter à ses lecteurs la redoutable **règle des signes** (Glaeser 1981) , utilisée dès le 4ème siècle après J.C, mais jugée *incompréhensible* par les plus grands mathématiciens jusqu'au début du XXe siècle !

L'artifice de Clairaut commence très naturellement par une initiation à la résolution de problèmes numériques par l'*algèbre* : il utilise à cette fin un choix d'exercices gradués formulés en termes pratiques (partages, rencontres de courriers, robinets ... etc). Les réponses sont des nombres positifs, et cette initiation à l'utilisation **d'inconnues littérales** n'offre guère de grande difficulté.
Suit alors une longue digression de 50 pages ! Clairaut repose les mêmes problèmes ; mais cette fois-ci les **données sont représentées par des lettres.** Tout en établissant les formules de résolution des équations, Clairaut familiarise ses lecteurs avec le calcul littéral.

Jusque là rien à redire si ce n'est que ces calculs sont plutôt ennuyeux et que le lecteur est peu incité à s'exercer lui-même. Revenant aux problèmes numériques initiaux, Clairaut retrouve les réponses numériques (positives) en appliquant les formules trouvées.

C'est là que survient le **tour de passe-passe** décisif ! Il choisit maintenant des données positives qui aboutissent à des soustractions "impossibles" ! (au niveau où se trouvent les lecteurs des "Elemens d'Algèbre").

Sans s'attarder sur cette situation troublante, Clairaut reprend les problèmes, sans algèbre, et montre que les réponses "impossibles" s'interprètent en terme de **déficit**. Les nombres négatifs sont introduits dans la foulée, et sont justifiés par des *arguments d'efficacité* : ces nombres "impossibles" sont légitimes, puisque "ça marche" dans les quelques exemples imaginés ...
Supposons que par une maladresse (qu'il se garde bien de commettre), Clairaut ait choisi des données numériques qui conduisent à des **divisions par zéro**, dans les formules paramétriques. Il aurait alors été contraint d'expliquer que ce choix de données numériques, qui conduit à des opérations "impossibles", n'est pas acceptable !

N'importe qui pourrait objecter alors que le même argument réfuterait le raisonnement d'efficacité précédent : c'est d'ailleurs ce qu'affirmait Lazare Carnot, dans sa "Géométrie de position" (1803) lorsqu'il condamnait l'emploi des quantités négatives.

Les enseignants savent bien que lorsqu'on escamote une difficulté, elle risque de ressurgir en d'autres occasions. L'artifice de Clairaut, qui peut réussir pour un temps avec des lecteurs à l'esprit peu éveillé ne manquera pas de jeter un trouble, en maintes occasions ultérieures.

Clairaut fut aussi le pionnier de la fameuse *méthode de redécouverte*, qu'il présente ainsi :

PREFACE.

JE me ſuis propoſé de ſuivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Elémens de Géométrie : J'ai tâché d'y donner des regles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs euſſent pû ſuivre. Nulle vérité n'y eſt préſentée ſous la forme de Théorêmes, toutes ſemblent être découvertes en s'exerçant ſur les Problêmes que le beſoin ou la curioſité ont fait entreprendre de réſoudre.

L'exemple précédent montre bien que cette prétention historique n'utilise qu'une histoire-fiction, qui méconnait l'ordre des difficultés que l'épistémologie moderne a dévoilé :

a) En fait, l'article de Clairaut est basé sur une erreur de jugement. Il ignore que l'utilisation des *paramètres* est bien plus difficile que l'emploi des *inconnues* . La première est apparue (avec Viete ou Leibnitz) plus de mille ans après Diophante : l'usage des quantités supposées connues mais non précisées – momentanément *constantes* mais qu'on fera varier ultérieurement – est très difficile à comprendre. Lorsque Diophante propose un problème général il particularise aussitôt les données pour n'avoir à raisonner que sur du numérique.
Ainsi la prétendue méthode de redécouverte de Clairaut ne suit pas un cheminement de pensée qui aurait pu être suivi par les anciens savants ; elle se base sur une épistémologie fictive et anachronique.

b) La démarche de Clairaut postule que la difficulté pédagogique essentielle est de faire admettre l'*utilisation* de la règle des signes.
Il se trompe complètement de cible : c'est la *justification* de cette règle, et non son emploi qui troubla, pendant seize siècles, les plus grands mathématiciens. Stendhal calculait correctement sur les nombres négatifs, conformément à ce que son maître lui disait de faire. Mais il ne comprenait pas pourquoi "– × – donne +".
A titre d'introduction à un algorithme, l'article de Clairaut est inutile. A titre de justification, il ne justifie rien.

c) Contrairement à ce que déclare Clairaut dans la préface citée, l'algèbre n'a pas été inventée sous la pression des nécessités pratiques : il suffit de feuilleter l'œuvre de Diophante pour constater qu'aucune équation diophantienne qu'il résout ne s'impose par des arguments d'utilité !

L'œuvre pédagogique de Clairaut illustre bien ce que pouvaient être, en son temps, les meilleurs essais de transposition : on remaniait l'exposé tant sur le fond que dans son agencement ; on l'illustrait par un choix judicieux des exemples illustratifs. L'influence de "l'apprenant" y est tout à fait négligeable. D'ailleurs ... de jeunes élèves, il n'y en a pas encore !

IV A L'AUBE DU CHANGEMENT

Ce ne fut qu'au XIXe siècle que commence la **scolarisation universelle**, le plus grand bouleversement culturel de l'histoire. Auparavant, un pourcentage dérisoire de la population des nations les plus avancées apprenait à lire et à écrire. Désormais plus de 50 % de l'*humanité* est soumise à des contraintes scolaires.

En France, cette mutation se préparait, à petite échelle, dès le XVIIIe siècle, par la création de nombreuses écoles supérieures techniques et militaires. L'effectif des élèves, âgés de plus de 17 ans, y reste encore faible ... Mais ces établissements servirent de bancs d'essai pour la pédagogie qui assura l'accueil de la masse de la population scolarisée progressivement pendant tout le XIXe siècle.
On trouvera dans (Taton 1964) une histoire institutionnelle de ces grandes écoles ..., et aussi une liste d'ouvrages qui y furent utilisés. Ce qui nous manque le plus, c'est la

restitution du climat des études. Aux documents officiels, il faudrait ajouter l'iconographie des scènes scolaires, pour lequel l'Atlas de (Alt 1960) est précieux.

La pédagogie se réduisait au **cours magistral dicté**. En 1722, Varignon dictait son cours de mathématique en latin. En 1741, un de ses successeurs, l'abbé de La Caille dicte déjà en français : il imagine de distribuer à ses auditeurs des cahiers imprimés qui **résument** son cours oral.

Au contraire, le père Torne fait imprimer (1754) un manuel remarquable, à l'usage des élèves de son collège, où il **développe** l'essentiel de son cours oral résumé .

Ainsi apparaît une controverse pédagogique fort vive, à l'aube de la Révolution, à propos de la distinction entre les **abrégés** et **les éléments**, et leurs mérites respectifs.

Désormais, le livre d'étude semble changer de rôle. On rejette les auxiliaires de loisirs éclairés et l'on réclame des **outils de travail**.

Au centre de ces débats, La Chalotais proclame dès 1763, ce qu'on pourrait appeler aujourd'hui le mythe de **l'exposé-miracle** : non seulement c'est un des postulats de la pédagogie sans élèves mais aussi l'instrument d'une **pédagogie sans maîtres compétents !!** N'écrivait-il pas : “Ces livres seraient la meilleure instruction que les maîtres puissent donner, et tiendraient lieu de toute autre méthode ... Ces livres bien faits dispenseraient de maîtres formés” ? (cité dans (Schubring 1984)).

V LEGENDRE (1752-1833)

Un concours officiel fut organisé en 1794 pour sélectionner les meilleurs manuels scolaires. Deux auteurs recueillirent tous les suffrages : Etienne Bezout (1730-1783) et Adrien-Marie Legendre.

Le premier écrivit en 1764 un célèbre “Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine” qui s'adressait initialement à des étudiants de plus de 17 ans. Mais du vivant de l'auteur, (ainsi qu'à titre posthume), ce manuel évolua. Il fut le principal instrument de l'extraordinaire processus d'abaissement de l'âge d'initiation aux mathématiques. On possède de nombreux témoignages sur l'utilisation effective des livres de Bezout dans l'enseignement (dont ceux de Chateaubriand, Stendhal, Victor Hugo ...)

Les “Elémens de Géométrie”(1794) de Legendre connurent un succès considérable à travers ses nombreuses variantes. Nous reviendrons bientôt sur l'édition posthume, publiée par A. Blanchet (1845) qui fut reliée en un seul volume avec la dernière édition, relue par l'auteur. On a là un excellent instrument pour observer les changements qui se réaliseront durant quinze années cruciales pour l'enseignement mathématique.

Une des traductions anglaises est dûe à l'illustre écrivain Thomas Carlyle ... En 1885, on utilisait encore le Legendre à l'université de Yale (aux Etas-Unis).

Legendre réalisa une double rupture, tant vis à vis d'Euclide que de Clairaut.
Il remanie entièrement l'agencement des “Eléments” d'Euclide, en réinventant beau-

coup de démonstrations nouvelles et plus simples. Le recours aux **cas d'égalité des triangles** y est plus systématique. Du point de vue scientifique, cette option est peut-être critiquable ("A bas le triangle" s'écriait naguère Dieudonné)
A la réflexion, je pense que c'est pourtant un outil pédagogique efficace pour développer chez des débutants l'aptitude à construire de courtes séquences déductives.

- Legendre a innové aussi en utilisant le **symbolisme algébrique** dans ce qu'on nommait la *géométrie spéculative* (en opposition avec la géométrie analytique).

- La rupture avec Clairaut se traduit surtout par un retour à des **exigences de rigueur**.S'il lui arrive de déraper, au plan de la logique, Legendre ne se contente pas, comme le fait la géométrie de Port-Royal (Arnauld 1667) de quelques affirmations aussi péremptoires que fausses.

Plutôt que d'énumérer ici les nombreux détails sur lesquels le manuel de Legendre a apporté des modifications utiles, je me concentrerai sur une transposition très importante : le changement radical de la signification de l'expression **ligne droite**, depuis Euclide jusqu'à nos jours !

Il s'agit d'un bouleversement aveuglant lorsqu'on embrasse du regard l'histoire des mathématiques à **l'échelle des millénaires**. Mais il est passé complètement inaperçu de ceux qui vivaient l'évènement à **l'échelle des années.**

Jadis une *ligne droite* désignait ce qu'aujourd'hui nous nommons un *segment de droite* . Faute de l'avoir compris, un lecteur moderne des "Eléments d'Euclide" se heurte constamment à des obscurités, qu'il attribue au manque de rigueur des Anciens, alors que c'est un changement de signification qui est en cause.

Ainsi Euclide ne pouvait énoncer : "Par deux points distincts passe une ligne droite et une seule" (parce que manifestement il en passe beaucoup de longueurs différentes !). C'est ce qui explique "l'incompréhensible" sixième postulat d'Euclide qui se formule ainsi :

Deux lignes droites ne renferment pas d'espace.

Il exprime qu'il n'existe pas deux segments de droite distincts de mêmes extrémités (Pour le lecteur moderne non averti, ce postulat est manifestement contraire à l'expérience courante : deux droites parallèles *infinies*, renferment une *bande* .)

Pour pouvoir définir des lignes droites parallèles, Euclide doit postuler la possibilité de *prolonger* une ligne droite (ce qui pour une droite infinie n'a pas de sens !) Et il ne peut formuler son célèbre 5ème postulat, comme nous le faisons de nos jours :
"Par un point du plan ne passe qu'*une seule* parallèle à une ligne droite donnée"
(En effet, dans le contexte d'Euclide, cet énoncé est manifestement faux : par un point on peut tracer une infinité de segments de droite de même direction).
L'épistémologue s'interroge :

Depuis quand est-on passé de la conception archaïque de la ligne droite, à notre conception moderne ?

Grosso modo, le tournant s'est produit dans la seconde moitié du XIXe siècle. Mais on est passé (par exemple au XVIIe siècle) par une longue période de laxisme, en matière de formulation.

C'est ainsi que dans les "Nouveaux Elémens de Géométrie" d'Antoine Arnauld (1667) (c'est la Géométrie de Port-Royal) on trouve les passages suivants. On y notera, au milieu de l'exposé du troisième axiome, une acception de l'expression "ligne droite" qui n'est valable que pour une droite idéale, indéfiniment prolongée :

82 NOUVEAUX ELEMENS

lors que l'on compare plusieurs lignes ensemble, on les ſuppoſe toûjours dans ces premiers elemens comme eſtant posées, ou décrites ſur un même plan, c'eſt à dire ſur une même ſuperficie plate ; ce qu'il ſuffit d'avoir dit une fois pour toutes.

PREMIERE SECTION.

DE LA LIGNE DROITE.

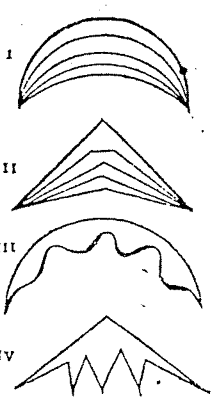
V. Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en eſt tres claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même choſe par ce mot. Mais il eſt bon de remarquer ce que nous concevons naturellement eſtre enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre ſi l'on veut pour ſa definition.

La ligne droite eſt la plus courte eſtenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, eſt auſſi la plus courte : ce qui a donné occaſion à Archimede d'établir ce principe ou Axiome.

PREMIER AXIOME.

VI. Si deux lignes ſur le même plan ont les extremitez communes & ſont courbes ou creuſes vers la même part, celle qui eſt contenüe eſt plus courte que celle qui la contient. I'ay dit courbes ou creuſes, car cela n'eſt pas ſeulement vray des lignes courbes comme dans la i. figure, mais auſſi des droites comme dans la II, lors que deux ou pluſieurs lignes droites ſe joignant font un creux. Car alors deux ou pluſieurs lignes droites ſont conſiderées comme une ſeule ligne courbe qui ſeroit creuſe vers ce coſté là.



Mais il faut bien remarquer ces mots, (vers la même part) car cela ne ſeroit pas vray, ſi la même ligne courbe eſtoit creuſe vers differens coſtez comme dans la III figure, ou ſi diverſes lignes droites

DE GEOMETRIE. LIVRE V. 83

conſiderées comme une ſeule ligne faiſoient auſſi des creux de differens coſtez comme dans la IV figure ; car alors la contenante pourroit eſtre plus courte que la contenüe.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

AYANT deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre. VII.

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par conſequent eſt l'unique & naturelle meſure de la diſtance entre ces deux points. L'inſtrument dont on ſe ſert pour cela s'appelle *regle*.

TROISIEME AXIOME OU DEMANDE.

LA ſimplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une poſée on la peut prolonger de part & d'autre juſques à l'infini, c'eſt à dire tant que l'on veut. VIII.

D'où il s'enſuit que la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoiſſant deux points dans une ligne droite, nous la connoiſſons toute.

Ou, que deux points eſtant donnez de poſition, toute la ligne droite eſt donnée.

QUATRIEME AXIOME.

SI une ligne droite eſt immediatement couchée ſur une autre en une de ſes parties, elle le ſera en toutes, pourveu que l'une & l'autre ſoit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne ſeront proprement qu'une même ligne. IX.

CINQUIEME AXIOME.

DEUX lignes droites ne ſe peuvent couper qu'en un point. X.

SIXIEME AXIOME.

DEUX lignes droites qui eſtant prolongées vers un même coſté s'approchent peu à peu, ſe couperont à la fin. XI.

Euclide prend cette propoſition pour un principe & avec raiſon : car elle a aſſez de clarté pour s'en contenter, & ce ſeroit perdre le temps inutilement que de ſe rompre la teſte pour la prouver par un long circuit.

L ij

Legendre est plus rigoureux : mais il n'a pas franchi ce pas là ! Il écrit :

> La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.
> D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.

Il ne s'agit ici que de segments. C'est dans l'édition posthume (1845) (Blanchet) qu'apparaît la ligne droite indéfiniment et idéalement prolongée :

> VIII. La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est la plus courte entre deux quelconques de ses points.
> On doit regarder comme évident que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite, et que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue.

Il semblerait donc que la transposition se soit enfin opérée. Mais Blanchet lui-même oublie constamment le changement qu'il a introduit ! Il parle de *droites égales* ... Pour définir des parallèles il use du pléonasme suivant :

> Les **parallèles** sont des lignes droites qui ne peuvent se rencontrer à quelques distances qu'on les prolonge l'une et l'autre.

L'adoption de cette transposition fut fort longue. En 1920 Carlo Bourlet insiste clairement sur ce point, dans l'avertissement à son cours abrégé de géométrie (Bourlet 1920) :

> Une droite *indéfinie* n'a pas de moitié. D'ailleurs, pour ôter définitivement aux élèves l'idée qu'une droite indéfinie se partage en deux parties égales de la même façon qu'un segment fini, il suffit de leur faire remarquer que, si d'une semi-droite on détache un segment fini (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), il reste encore une semi-droite superposable point par point à la première.

Il serait intéressant de suivre, de 1845 à 1920 l'évolution du discours mathématique sur ce point, de manuels en manuels. L'introduction d'une terminologie nuancée (segments, semi-droites, ouverts, fermés, (à gauche et à droite)) apparaît souvent de nos jours comme un pédantisme superflu. Dans beaucoup de cas, c'est bien un luxe inutile mais c'est, de temps en temps, une nécessité incontournable.

IV *DES ELEVES ... ENFIN !*

Au début de l'enseignement scolaire, l'enseignement mathématique reste encore un **soliloque** du professeur. Le public sert de *faire-valoir,* comme il arrive dans un spectacle de music-hall, où l'on invite l'assistance à reprendre le refrain en chœur, ou à taper dans les mains. Mais les réactions de l'élève n'influencent guère le contenu du discours magistral. Parfois, on fait passer un élève au tableau, pour *réciter sa leçon,* c'est-à-dire pour restituer des réponses préparées à l'avance, à des questions répertoriées.

L'enseignement moderne, lié à la scolarisation de masse apparaît comme la **conquête progressive de l'autonomie de l'élève.** Un siècle et demi d'invention pédagogique a contribué à doubler l'exposé d'un cours par des activités scolaires variées. Celles-ci sont proposées aux *apprenants* . Le maître intervient plus ou moins dans leur exécution. On les désigne généralement sous les dénominations globales **d'exercices ou problèmes** ou encore de **travaux pratiques.**

Je me souviens d'un collègue qui se vantait d'avoir proposé dans sa classe *plus de 400 exercices !* Pour beaucoup d'enseignants, "l'exo" est une unité de mesure qui correspond à moins de 10 minutes d'activités scolaires !
Je lui répondis que je venais de passer une heure entière en 5ème à faire utiliser les tables de levers et couchers du soleil et de la lune - publiées par l'almanach des postes. La classe, partagée en 12 petits groupes (1 pour chaque mois), calculait la durée des jours et des nuits, ainsi que les heures du passage du soleil et de la lune au méridien. Les calculs furent ensuite relevés, sur des courbes représentatives. Etait-ce un exercice unique ? Sinon avais-je "perdu du temps" ? Cette activité était-elle conforme aux programmes ? En tout cas, ce fut une excellente occasion d'observer des faits numériques et cosmographiques, de s'instruire et de s'éduquer.

Les exercices que nous envisageons dorénavant portent sur un ou plusieurs **thèmes mathématiques** (dans l'exemple précédent, sur le calcul dans les systèmes de numérations sexagésimaux et la cosmographie). Ils sont exploités par l'enseignant après une *mise en énoncé* adaptée à un objectif pédagogique particulier.

Les adeptes de la pédagogie sans élèves préparent leurs séances d'exercies en résolvant par avance (de préférence de diverses façons) les énoncés qu'ils proposeront, et prévoient les commentaires mathématiques qu'ils en feront.

Du point de vue de notre didactique, il convient en outre de prévoir les **comportement interactifs des élèves et du maître face à chaque énoncé.**

Exemple

Thème : L'équation numérique du 1er degré

Elle peut donner lieu à une profusion de situations didactiques différentes. Nous n'en évoquons ici que trois :

1° On peut interroger un élève au tableau, en lui demandant, par exemple, de résoudre l'équation :
$2x - 19 = 1/5(3x - 15)$.
On exige qu'il applique sans hésitation les algorithmes classiques qu'on lui aura enseignés précédemment.

Un **échec** complet est jugé très **significatif.** L'élève n'a pas travaillé ... Il n'a pas appris sa leçon. On lui inflige une mauvaise note, voire un pensum.

Une **réussite** est beaucoup plus ambigüe. L'élève est-il génial, intelligent, docile, travailleur, soigneux ... ? Quelle note va-t-on lui donner, et selon quels critères ?

2° Les deux situations suivantes provoquées par l'énoncé suivant sont bien différentes :
" Résoudre l'équation :

$$\frac{x - 1987}{25} + \frac{x - 1988}{24} + \frac{x - 1989}{23} = \frac{x - 25}{1987} + \frac{x - 24}{1988} + \frac{x - 23}{1989} \text{ "}$$

La question est posée, à la fin d'une classe et commentée par le maître quinze jours plus tard : l'élève n'est pas soumis à des contraintes de temps.

2a) Si un élève résout cette question sans calcul, après avoir contemplé l'équation pendant quelques minutes, on peut lui accorder une bonne intuition. S'il doit réfléchir plus longtemps et trouver la racine après des cheminements de pensée plus ou moins tortueux, ce n'est pas mal non plus !
Mais qui le blâmera s'il sèche longtemps sans trouver, bien qu'a posteriori la réponse lui paraisse évidente ?
Ici, le **succès est significatif** et on ne peut rien conclure d'un échec.

2b) Il se trouvera peut-être un élève, habile au calcul et courageux, qui se lancera dans une réduction au même dénominateur, pour aboutir finalement à la réponse. Que peut-on conclure de cet exploit ? L'élève est doué de qualités de *soins* , d'*attention* , de *fiabilité* , mais il ne brille pas apparemment par une imagination extraordinaire ! Evidemment les succès a) et b) ne sont pas comparables.

Les règlements scolaires contraignent parfois les enseignants à attribuer des notes (de 0 à 20 ...) à tous les exercices qu'ils proposent. On prend alors des moyennes, arbitrairement pondérées, de toutes les notes ainsi collectées : le résultat fournira la fameuse moyenne trimestrielle, destinée à informer les familles sur les aptitudes et le travail de leurs enfants.
Il est évidemment impossible de distinguer à l'aide d'une seule note équitable les deux profils schématisés par les comportements a) et b).

En 1973, j'ai tenté une taxonomie synthétique des nombreuses situations d'exercices et problèmes, imaginées depuis un siècle et demi. Et l'I.R.E.M. de Strasbourg produisit collectivement les 6 fascicules du **Livre du Problème** [LP] où l'on s'intéressait à l'activité des élèves, aux interventions du maître (et non plus aux seuls énoncés d'exercices).

Une saine formation des maîtres devrait entraîner à gérer ces diverses façons de conduire des séances d'exercices et à mettre en œuvre les diverses dialectiques qu'utilise Guy Brousseau. Les enseignants doivent savoir développer un même thème mathématique selon des objectifs pédagogiques différents. D'ailleurs un même énoncé proposé à des élèves d'âge ou de niveau très différent peut provoquer des activités dont les déroulements ne se ressemblent guère. (Le fascicule 3 [LP3] consacré au thème mathématique de la parité illustre bien ce que l'on entend par là).

Voici une grille, analogue à celle qui est proposée dans [LP1]. Elle isole quelques uns des facteurs qui permettent de distinguer les divers types d'exercices et de problèmes.

PRINCIPALES VARIABLES DIDACTIQUES DES EXERCICES OU PROBLEMES

ANTÉCÉDENTS DES ÉLEVES Quel est leur âge et leur niveau ? Quels sont les connaissances et habitudes prérequises avant que la question leur soit posée ?

FORMULATION DES QUESTIONS Orales, dictées, polycopiées, présentées par le maître, empruntées à un livre ? L'énoncé est-il fourni entièrement, sous forme définitive, au début, ou bien sera-t-il remanié (par des élèves ou le maître) au cours du travail ?

RÉPONSE Orale ou écrite, au propre ou au brouillon, sur cahier, copie, ardoise ... Les réponses exigées se réduisent-elles à un résultat ... ou bien doivent-elles être commentées ou justifiées ?

TEMPS ACCORDÉ pour fournir la réponse : Fraction de minutes, des heures ou des mois. Temps limités ?

RECHERCHE en classe ou hors de l'école ; individuelle par équipe ou avec participation de toute la classe ... Recours à des aides extérieures. Obligation du secret (comme à l'examen) ou recherche collective ?

MATÉRIEL Interdiction, autorisation ou obligation de se documenter. Liste limitative des documents ? Utilisation d'instruments (à volonté ou imposés)

INTERVENTION DU MAITRE Fréquence et nature de ses interventions. Dirige-t-il la recherche en l'influençant, ou se contente-t-il d'encouragements ? Fournit-il des informations ou des conseils ? Émet-il des jugements de valeur ?

ÉVALUATION La distinction entre réponse “juste” ou “erronnée” est-elle fermée à l'avance ou négociable ? Comment sont reconnues les réponses *partiellement* correctes (ou fausses) ? Ces décisions font-elles objet d'un débat avec les élèves ?
La tâche donne-t-elle lieu à une note ? une appréciation ? des sanctions ? (positives ou négatives) ?
L'échec (resp. le succès) sont-ils significatifs ?
L'évaluation sur une tâche précise contribuera-t-elle à l'élaboration du *profil* de l'élève ? A un résultat d'examen à sanction sociale ?

VII ÉLABORATION DU STOCK D'ÉNONCÉS

La tradition nous a légué peu de matériels pédagogiques utilisables en classe.
Voici quelques exceptions :

1° On dispose d'une vaste anthologie de **mathématique récréative** d'origine extrême orientale, perse, grecque, arabe etc ... L'ouvrage le plus célèbre sous ce rapport fut assurément le livre de Bachet de Meziriac "Problesmes playsants et délectables qui se font par les nombres" (1613)
Ce trésor s'est notablement enrichi, grâce à Edouard Lucas, Samuel Loyd, Martin Gardner etc ...
Bien qu'il ne s'agisse là que d'une *mathématique de divertissement* , cette veine fut souvent exploitée en pédagogie scolaire.

2° Les aventures *sumériennes* et *florentines* mentionnées en (III) ont laissé des corpus d'énoncés d'exercices. Mais ce trésor ne fut exhumé qu'au XXe siècle : il n'influença guère l'enseignement scolaire.

3° Beaucoup d'ouvrages de mathématiques contiennent dans le corps de l'exposé quelques exercices entièrement résolus par l'auteur. (Ceux de Clairaut, d'Euler, du marquis de L'Hospital sont typiques). Dans la mesure où la réponse apparaît au lecteur, avant qu'il ait eu le temps, le loisir ou *l'obligation* de s'exercer, ce ne sont pas des exercices !

4° Les écoles d'ingénieurs du XVIIIe siècle proposaient systématiquement à leurs rares élèves des tâches techniques de dessin ou de calcul. Il resterait au didacticien-épistémologue à collecter et à dépouiller les productions d'élèves conservées en archives, pour découvrir la part d'autonomie qui était laissée aux apprenants (il s'agit d'exercices d'arpentage, de géométrie descriptive, de stéréotomie, de projets mécaniques).

Mais à l'origine, la principale source d'énoncés relève de l'engouement pour la *bachomanie* : l'institution de nombreux examens et concours provoque une demande de préparation à ces épreuves. Le marché de l'édition exploite cette clientèle.

Ainsi paraissent au début du XIXe siècle des recueils de sujets d'examens tels ceux de Reynaud et Duhamel (1823), de Georges Ritt (1836) ... En Allemagne, E. Bardey compile des énoncés, et ses recueils sont traduits en diverses langues (en français de 1870 à 1920).

Les premières fournées témoignent de la médiocrité de l'imagination pédagogique : un énoncé d'exercice se griffonne sur un coin de table, sans qu'une réflexion pédagogique préalable dégage des objectifs et oriente la mise en forme. Voici par exemple une batterie typique d'exercices empruntés à un recueil de Georges Ritt :

Effectuer les multiplications suivantes.

6. 57. 58. $3a\times 5b$. $7a^2\times 8ab$. $12a^2b\times 7a^2bc^2$.

9. 60. $-5abc\times 8abd$ $14a^2bcx\times(-8ab^3x)$.

1. 62. $7ab\times 8a^2\times 7bc$. $(6a+2b-8c)7a$

3. $(-5a^2+3ab-8b^2)(-9ab)$.

4. 65. $(a+b)(a+b)$. $(a-b)(a-b)$.

6. 67. $(a+b)(c+d)$. $(a+b-c)(d-e)$.

8. $(2a-3b-8c-d+9e)(7f+2g-h)$.

9. $(a+b)(a-b)$.

70. $(5ab+3ac-4bc)(7ab-18ac+2bc+d)$.

71. $(x^2-3x-7)(x-2)$.

72. $(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x)$.

73. $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$.

74. $(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)(a+2b)$.

75. $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)$.

76. $(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)(a^3-3a^2$
$+3ab^2-b^3)$.

77. $(5a^3b^3c^3-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6)(2a^3b^3c^2+3a^4b^4c^5-6a^7b^4c^3)$

Dans un premier temps, de tels exercices sont utilisés n'importe comment, pour faire n'importe quoi.

Par exemple, on choisit 20 questions de ces types au hasard, et l'on attribue un point par réponse correcte. Après quoi, on décide que l'épreuve est réussie si le candidat obtient la moyenne.

Ce n'est que vers 1920 qu'apparaît la *docimologie*. Le progrès décisif est dû à Charles-Edouard Spearman (1863-1945)(Spearman 1927). Il pose correctement la question d'une évaluation scientifique des aptitudes, et invente un outil statistique puissant : *l'analyse factorielle.*

Bientôt paraissent des **solutionnaires**: ce sont des recueils d'énoncés accompagnés de leurs solutions ; puis des **méthodologies**, qui exposent des méthodes toutes standardisées pour résoudre des épreuves qui se donnent aux examens, où des problèmes d'un certain type (Petersen 1866).

L'usage des énoncés, insérés en fin de manuels (ou en fin de chapitre) semble plus récent. L'exemple le plus ancien que je connaisse est justement l'édition posthume Blanchet (1845) de la Géométrie de Legendre : on y trouve 10 pages d'énoncés de géométrie plane et autant de géométrie dans l'espace.
L'habitude ne s'en est pas imposée rapidement. Dans les "Applications de l'Algèbre à la Géométrie de M. Bourdon (1872), l'auteur éprouve le besoin de prévenir le lecteur :

"Nous croyons devoir terminer cette introduction, en proposant quelques exercices … ". Suivent onze énoncés élémentaires et ternes ; ce sont les seuls qui figurent dans l'ouvrage.

A la fin du XIXe siècle, apparaissent des **activités plus culturelles**. Ce ne sont plus des problèmes d'examen ! (Bien qu'on continue parfois à les noter).

Voici quelques *beaux calculs* que Carlo Bourlet (1896) a exhumés des œuvres de quelques grands mathématiciens. Ici, deux solutions paramétriques de l'équation diophantienne :

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3$$

Comparer avec le triste ramassis du spécimen cité de Georges Ritt.

21. Démontrer que l'on a l'identité

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 + u^3$$

lorsqu'on prend, soit :

$$\begin{aligned}
x &= (f^2 + 3g^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
y &= -(f^2 + 3g^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
z &= -(f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f^2 + 3g^2),\\
u &= (f'^2 + 3g'^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f^2 + 3g^2)
\end{aligned}$$

(EULER).

soit encore :

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,\\
y &= -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b,\\
z &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,\\
u &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1.
\end{aligned}$$

(BINET).

L'institution des Frères des Ecoles Chrétiennes compila systématiquement des thèmes d'exercices ; cette érudition est surtout orientée vers des questions ayant un intérêt par elles-mêmes. Les volumes les plus intéressants sont signés F. JM ou F. JG (Frère Jean-Marie(?) ou Frère Jean Gabriel(?))... ou portent la mention "par une réunion de professeurs".

Ainsi commence, surtout en France une nouvelle utilisation de l'exercice destiné à présenter des **compléments** ou même des questions **hors programme** qu'un bon élève devrait connaître.

♣ Exemples

1° Même si le *tétraèdre régulier* est explicitement cité dans les programmes, le professeur doit choisir, dans ce vaste sujet, ce qu'il dira dans le cours, et ce qu'il proposera aux élèves curieux ou studieux.
Ainsi proposera-t-on en fin de chapitre le calcul du volume, des rayons des sphères passant pas les sommets ou tangentes aux faces … et *aux arêtes !*

On en demandera un dessin (par exemple une épure de géométrie descriptive) sous divers points de vue.

2° On peut alimenter la curiosité de quelques élèves en leur présentant les *suites de Fibonacci* , la *construction du pentagone régulier* à la règle et au compas, le *nombre d'or* , des *calculs d'éclipses* ou de *phases de la lune* ... etc...

Dans ces cas, l'objectif visé n'est pas la préparation à des examens (sauf si l'on sait qu'il est bon de connaître quelques questions hors programmes - par exemple la droite de Simpson ou le cercle d'Euler qui inspirent souvent les interrogateurs. Il ne s'agit pas davantage à faire chercher longtemps. Le **but visé est l'information** . Et c'est ainsi que se développe la technique de **l'exercice d'exposition** qui fleurit surtout entre 1920 et 1960 (LP1 - Chapitre 1).

Ce style de *mise en exercice* , est destiné à informer rapidement un élève sans le faire trop *sécher*, en lui fournissant les principales idées qu'il risquerait de ne trouver lui-même qu'au prix d'une *perte de temps*.

C'est sous cette forme que sont présentés dans Bourbaki les exemples et les contre-exemples, ainsi que les questions annexes. En voici un spécimen, tiré du premier chapitre § 7 de "l'Algèbre".
Le thème est la génération du Groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations de n objets.

¶ 7) *a*) Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions (raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments non invariants par la permutation considérée).

b) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n-1$ transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, ... $(1\ n)$, et aussi par les $n-1$ transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, ..., $(n-1\ \ n)$ (utiliser la formule (1) de l'exerc. 6).

c) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les *deux* permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ 3\ ...\ n)$ (même méthode).

On aurait pu poser la même question sous forme d'un **Problème de Recherche** formulé ainsi :
"Quel est le nombre minimum de permutations qui peuvent engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$?"
Mais, même pour un mathématicien expérimenté qui ne connaitrait pas le résultat, la recherche serait hasardeuse et en moyenne de durée assez longue.

L'exercice d'exposition, au contraire, **découpe la question** en sous-questions posées dans un ordre efficace. Je conseille **d'attribuer un titre** à de tels énoncés : il ne faut pas que l'élève résolve la question sans prendre conscience de l'intérêt de l'information qu'il vient de recueillir.

La vogue des exercices d'exposition, en France, conduisit à bien des aberrations pédagogiques. On utilisa ce style de rédaction hors de propos. Ainsi on rédigea beaucoup de problèmes d'examen sous cette forme.

Ceci provoquait les effets pervers suivants :

a) Le travail étant complètement mâché, le candidat n'a aucun moyen de faire valoir ses qualités (à l'exception de quelques savoir-faire algorithmiques ou de quelques connaissances mémorisées ...)

b) Si l'énoncé est long, on peut obtenir une excellente note, sans arriver à la fin de l'épreuve ... On résout localement, sans savoir où l'on va ...
Après avoir passé 7 heures à travailler sur le problème d'Agrégation masculine de 1929 (Dollon 1931), un candidat pouvait ignorer complètement qu'il venait de s'initier aux principes d'une géométrie non-euclidienne !
Au cours de la correction d'une séance de préparation au concours consacrée à cette épreuve, j'ai demandé à mes étudiants s'ils avaient entendu parler du demi-plan de Poincaré. Personne, (même ceux qui m'avaient remis de longues copies) ne leva la main !

c) Un énoncé d'épreuve d'examen est destiné à l'évaluation des aptitudes ou des connaissances des candidats. Les problèmes d'exposition ne sont pas adaptés à cet objectif.

Les problèmes de recherche se sont développés, hors de France, depuis longtemps. C'est en 1894 que la compétition Eötvos fut instituée en Hongrie. Les Olympiades Internationales de Mathématiques sont instituées depuis 1959 (Gerrl 1976). C'est en 1973 que l'IREM de Strasbourg a créé le Rallye Mathématique d'Alsace, qui mobilise tous les ans environ un millier de participants. L'initiative fut suivie par quelques autres IREM.

Un **Problème** est une activité *éducative* qui vise surtout à développer des **habitudes de curiosité et de recherche ;** les *connaissances* qu'il peut faire acquérir ne sont qu'un sous-produit secondaire qui ne sont pas systématiquement recherchées. (C'est l'un des traits qui le distingue des *situations-problèmes*, systématiquement étudiées par Guy Brousseau).

Selon la grille proposée ci-dessus, les principales caractéristiques d'un problème sont les suivantes :

- *Formulation* . L'énoncé est très court, provocateur, débarassé de toute indication permettant une solution rapide. Il est parfois rédigé d'une façon volontairement imprécise et incomplète, laissant à l'élève l'occasion d'apporter la rigueur indispensable. Un des objectifs est d'entraîner à *se poser des questions*.

- La *durée de la recherche,* est, sauf intuition exceptionnelle, de plus d'une heure ... parfois de plusieurs mois.
Pour un mathématicien cette durée peut dépasser des années (voir dans Glaeser 1983 l'exemple d'une découverte que Gauss mit plus de 15 ans à mener à son terme !).

- On évite de proposer un problème qui exige des connaissances trop particulières. En tout cas, l'élève doit être en mesure *d'inventer* une information qui lui ferait défaut. On l'invite à se documenter si nécessaire, et la consultation de livres n'est pas tabou ... Mais, en principe, la clé qui résout un problème dépend rarement d'un renseignement.

- Enfin, un problème ne peut donner lieu à une *évaluation bilatérale* : j'ai quelquefois signalé à un jury d'examen que tel étudiant avait été le seul à résoudre un problème, afin qu'il en soit tenu compte, en cas de besoin. Mais on ne peut faire grief à quiconque de n'avoir pas inventé une idée ingénieuse ! (Voir l'exemple page 14 de l'équation du premier degré).

L'introduction de ce nouveau type d'activité fut d'abord accueilli avec scepticisme par le corps enseignant . Les critiques furent véhémentes ! L'introduction d'activités heuristiques à l'école était, affirmait-on, *irréalisables, élitistes, incompatibles avec les programmes* ... Toutes ces objections furent balayées en quelques années, là où l'effort fut réellement entrepris. On trouvera dans l'Ouvert (Ouvert n° 13, 16, 24, 26) des comptes rendus d'activités qui prouvent bien que c'est faisable et souhaitable.

L'introduction de *problèmes* dans l'enseignement, au titre d'ingrédients d'un menu didactique équilibré fut une *transposition importante* . Mais il ne suffisait pas de fournir le matériel mathématique pour cela. La nécessité de convaincre des professeurs à se lancer dans l'aventure fut le facteur décisif.

Pendant plusieurs mois, des professeurs s'habituèrent, à l'IREM à résoudre eux-mêmes des problèmes ! L'étonnement de certains d'entre eux fut spectaculaire. Mais ils hésitaient à proposer ces énoncés à des élèves ... "Ils n'y arriveront jamais ... ! " répétait-on.
Un ou deux stagiaires intrépides se jetèrent à l'eau et firent part à leurs collègues des étonnants résultats obtenus ! Nos élèves trouvaient des choses inattendues ... Ce n'était pas toujours le "premier de la classe" officiel qui réussissait le mieux (ainsi, l'activité heuristique permettait à certains élèves, mal à l'aise dans l'assimilation d'un cours, mais riche en aptitudes créatrices de se faire valoir auprès du maître et des condisciples).
Et très vite, ces expériences isolées se répandirent dans toute l'académie . Et aujourd'hui, on trouve un solide noyau d'enseignants qui proposent de temps à autre des activités, qui auraient été jugées peu orthodoxes dix ans plus tôt.

Ainsi apparaît un aspect essentiel de la transposition. Des milliers d'innovateurs ont inventé de nouvelles façons de conduire une classe. Mais ce travail ne prend tout son sens que si la communication s'effectue à l'intérieur du corps enseignant. Sinon, tous ces efforts sont perdus.

Je ne détaillerai pas ici l'histoire des exercices de **mathématiques appliquées**. Clairaut fut assurément un pionnier en la matière.

L'utilisation de **manipulations** apparaît dans l'enseignement primaire sous la rubrique : travaux manuels (découpages, pliages, construction de modèles etc ...).

Peu appréciées lors du règne exclusif d'une mathématique spéculative, elles reparaissent actuellement, avec l'engouement justifié pour les nouveaux auxilliaires de calcul et de dessin (ordinateurs, calculettes).

Le colloque inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" nous a montré ce que sont les efforts de transpositions contemporains pour rendre un matériel **mathématico-historique** accessible à nos élèves.

Une technique qui est souvent mise en œuvre est de doubler un texte ancien (dont la langue nous est difficilement accessible) d'une adaptation sous forme *d'exercice d'exposition* . Après avoir résolu un problème réécrit dans le style actuel, nos élèves peuvent lire les textes originaux ce qui replace les grandes découvertes dans leur contexte.

L'enseignement magistral traditionnel, qui était répétitif et contraignant, a contribué à donner une image fausse de la mathématique.

Mais l'imagination pédagogique fécondée par la didactique expérimentale bouleverse actuellement les méthodes d'enseignement.

On ne se contente plus de transposer le discours magistral au niveau de l'auditoire. On invente des situations didactiques où l'élève est confronté à des questions mathématiques et divers agents éducatifs (instruments, écrits, maîtres, condisciples etc...). La compréhension s'élabore en surmontant ces conflits.

* * *
* *
*

Bibliographie

R. ALT Bilderatlas zur Schul und Erziehungsgeschichte. Volk und Wissen Verlag. Berlin DDR - (1960 et 1965)

A. ARNAULD 1667
"Nouveaux élémens de géométrie" (Réédité par l'I.R.E.M. de Dijon 1983)

A. ARNAULD et P. NICOLE 1662
"La logique ou l'Art de penser". Réédité Flammarion - Paris 1970

E. BEZOUT Cours de Mathématiques à l'Usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Paris Muser 1764

E. BLUTEL "Le devoir du moment". Bulletin de l'A.P.M. n° 55 - 1928

M. BOURDON Application de l'Algèbre à la Géométrie. Gauthiers-Villars Paris 1872.

C. BOURLET Leçons d'Algèbre Elémentaire. Armand Colin - Paris 1886

C. BOURLET Cours abrégé de Géométrie. Hachette. Paris - 7e édition 1920.

L. CARRE Les pédagogues de Port-Royal - Slatkine Genève 1971

P. CHENEVIER
Collection de manuels, comprenant notamment : "Précis de Géométrie plane" 4e et 3e. Préface de E. Blutel. Hachette 1925.

C.A. CLAIRAUT
Elémens de Géométrie. David fils. Paris 1741.

C.A. CLAIRAUT
Elémens d'Algèbre. David fils.1746

W. van EGMONT
The commercial revolution and the beginning of western mathematics in Renaissance 1300-1500. Doctoral Thesis - Indiana University 1980.

FITZ-PATRICK et CHEVREL
Les exercices d'Arithmétiques (énoncés et solutions) - Hermann Paris 1900.

D. GERLL et G. GIRARD
Les Olympiades Internationales de mathématiques - Hachette Paris 1976.

G. GLAESER "Epistémologie des nombres relatifs" R.D.M. Vol. 2-3. La Pensée Sauvage - Grenoble 1981

G. GLAESER a) A propos de la pédagogie de Clairaut -RDM Vol. 4-3 1983

G. GLAESER b) Genèse et maturation précoce d'une découverte mathématique. Gazette des mathématiciens n°21 S.M.F. 1983.

G. GLAESER Transposition : Polycopié - Strasbourg 1987 ... (à paraître)

IREM de Strasbourg
$(LP_1)(LP_3)$. Le livre du Problème. Fascicule 1 et 3. Cedic - Paris 1977

S.N. KRAMER
A Sumerian composition relating to the education of a scribe. Journal ot the American Oriental Society. Vol 69 - 1949

S.N. KRAMER L'histoire commence à Sumer -, Paris Artaud 1975

H. LEBESGUE
Les coniques. Gauthier-Villars. Paris 1942

A.LEGENDRE **1794**
Elémens de Géométrie avec des additions de M.A. BLANCHET, suivi de la 14e édition Firmin-Didot - Paris 1845

J. PETERSEN **1866**
Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques. (Traduction française) Gauthier-Villars Paris 1880.

H. PIERON Examens et docimologie P.U.F. Paris 1963

REYNAUD et DUHAMEL
Les problèmes et développements sur les diverses parties des mathématiques - Paris 1823

G. RITT Problèmes d'algèbre et exercices de calcul. Hachette - Paris 1836

G. RITT Manuel des aspirants à l'école polytechnique . Hachette - Paris 1839

G. SCHUBRING
Essai sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques particulièrement en France et en Prusse. R.D.M. Vol. 5-3 1954

C.E. SPEARMAN **1927**
The abilities of man. Mac Milan. Londres - Traduction française (Darnois) "Les aptitudes de l'homme". Conservatoire des Arts et Métiers - Paris 1936

R. TATON Histoire générale des sciences. P.U.F. - Paris 1957

R. TATON Enseignement et diffusion des Sciences en France au XVIIIe siècle - Herman - Paris 1964.