ALGORITHMES DE CALCULS CHEZ ARCHIMEDE

Etude de "La mesure du cercle"

Martine BUHLER

Il s'agissait du récit d'une expérimentation en classe de terminale C sur le texte "La mesure du cercle" d'Archimède :

- les élèves ont fait les exercices joints (Annexe 1) en devoir à la maison
- nous avons corrigé les exercices et lu une partie du texte (Annexe 2) en classe : la première partie de la démonstration de la proposition 3 : "Le périmètre de tout cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté d'une valeur supérieure à la dix-soixante et onzième partie du diamètre".
- nous avons examiné (trop) rapidement quelques méthodes d'approximation de racines carrées à l'époque d'Archimède ... et à la nôtre.

(En tout : 3 heures de travail en classe)

1 LECTURE DU TEXTE

La lecture du texte d'Archimède est intéressante à plus d'un titre.
La formulation entièrement géométrique de la proposition et de sa démonstration surprend les élèves. Archimède ne s'occupe pas d'un nombre (pour nous : π) mais du rapport du périmètre au diamètre.
On voit parfaitement en lisant le texte que le procédé d'Archimède est itératif : connaissant la longueur du côté d'un polygone régulier circonscrit au cercle, il donne une méthode du calcul du côté d'un polygone régulier circonscrit ayant le double de côtés.

En termes (trop) modernes :

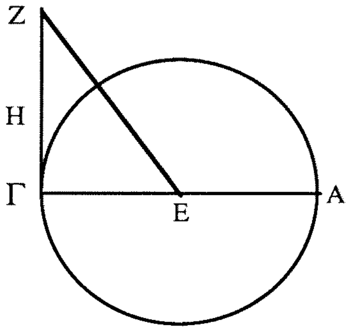

Fig. 64 du texte

(EH) : bissectrice de l'angle $\widehat{ZE\Gamma}$
[ZΓ] : demi-côté d'un polygone régulier circonscrit au cercle
[ΓH] : demi-côté du polygone ayant le le double de côtés

On a $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{ZE}{ZH}$ (car (EH) est la bissectrice de $\widehat{ZE\Gamma}$; ceci avait été démontré antérieurement en exercice

Donc $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{ZH + \Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma}$

D'autre part : $\frac{EH}{\Gamma H} = \sqrt{1 + \frac{E\Gamma^2}{\Gamma H^2}}$ (théorème de Pythagore)

Autrement dit, pour un angle au centre $\widehat{\Gamma EZ}$ donné, on pose :

$u_n = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$ $\qquad v_n = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}}$

Alors, pour l'angle “suivant”, i.e. moitié de $\widehat{\Gamma EZ}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + v_n$$

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}^2}$$

Connaissant u_0 et v_0 (Archimède part d'un angle de 30° : “Le tiers d'un droit”), on peut calculer u_n et v_n, ce qui donnera une majoration de

$\frac{P}{D}$ (rapport du périmètre du cercle au diamètre).

En effet, le côté opposé de l'angle au centre est le demi-côté du polygone et l'hypoténuse est le demi-diamètre.

Donc $v_n = \frac{D}{C_n}$, avec C_n : côté du polygone.

On obtient donc ainsi $\frac{D}{P_n}$, où P_n est le périmètre du polygone,
or $\frac{P_n}{D} > \frac{P}{D}$.

2 Approximations utilisées

Pour arriver à l'approximation

$$\frac{10}{71} \text{ pour le rapport } \frac{P}{D},$$

Archimède calcule le rapport du périmètre du polygone à 96 côtés (circonscrit au cercle) au diamètre du cercle, par approximations successives des rapports (vus en 1) relatifs aux polygones à 6, 12, 24, 48 côtés.

Comme le calcul final de $\frac{P_n}{D}$ nécessite une approximation par excès, il nous faut des approximations par défaut de ce que j'ai appelé u_n.

Le calcul d'Archimède est mené avec rigueur et on peut s'intéresser aux approximations de racines carrées utilisées.

Par exemple, Archimède utilise $\frac{265}{153}$ pour $\sqrt{3}$ (ligne 8 p. 1 du texte),

en précisant bien, quand cela est nécessaire, qu'il sagit d'une approximation par défaut (ligne 12). Quels sont, à l'époque d'Archimède, les moyens d'arriver à ce résultat ? Nous ne savons pas comment Archimède fait ce calcul, il ne l'explique pas. Nous ne pouvons que conjecturer des moyens possibles.

Théon de Smyrne (IIe siècle après J.C) compare (dans "Exposé des notions mathématiques utiles pour lire Platon") les carrés d'entiers et les doubles de carrés d'entiers, pour trouver des approximations de $\sqrt{2}$. Le même procédé fonctionne pour trouver des approximations de $\sqrt{3}$: il faut alors comparer les carrés de nombres entiers et les triples de ces carrés :

> par exemple $48(=3 \times 4^2)$ est "proche" de $49(=7^2)$
>
> donc $\frac{7}{4}$ est "proche" de $\sqrt{3}$. Mais il est long d'arriver ainsi à $\frac{265}{153}$! (On lira avec plaisir et profit les "leçons d'à peu près" de G. Th. Guilbaud)

La méthode babylonnienne ou de Héron, donne rapidement d'excellentes approximations, mais par excès. (On peut lire un extrait des "Métriques" de Héron d'Alexandrie (Ier siècle après J.C.) dans "Mathématiques au fil des âges" page 137). Rappelons la méthode brièvement et de manière moderniste : partant de u_0, approximation quelconque de $\sqrt{a}(a > o)$, on calcule par récurrence u_n défini par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + \frac{a}{u_n}).$$

On peut cependant, de diverses manières, obtenir une approximation par défaut à partir d'une approximation par excès.
La méthode de Héron, partant de 1, donne comme approximations successives de $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{2}(1+\frac{3}{1})=2$$

$$\frac{1}{2}(2+\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{7}{4}+\frac{3\times 7}{4})=\frac{97}{56}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{97}{56}+\frac{3\times 56}{97})=\frac{18817}{10864}$$ (approximation par excès à moins de 10^{-8} près !)

Or, les Grecs connaissaient des moyens de simplifier des fractions pour obtenir de bonnes valeurs approchées. Aristarque de Samos (IIe siècle avant J.C.) remplace - sans explication - dans ses calculs d'astronomie

$$\frac{71755875}{61735500} \text{ par } \frac{43}{37}.$$

On peut penser qu'il a utiliser l'algorithme d'Euclide (voir à ce sujet les textes d'Itard : "Essais pour une histoire des mathématiques p. 46), ce qui revient pour nous à développer

$$\frac{71755875}{61735500}$$

en fraction continuée et à arrêter le calcul à la quatrième réduite.

A partir de $\frac{18817}{10864}$, on peut ainsi arriver à $\frac{265}{153}$ en calculant la neuvième réduite.

Pour les courageux, on peut même examiner les calculs que donne l'utilisation de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
18\,817 &= 10\,864 + 7953\\
10\,864 &= 7\,953 + 2911\\
7\,953 &= 2\times 2911 + 2131\\
2\,911 &= 2\,131 + 780\\
2\,131 &= 2\times 780 + 571\\
780 &= 571 + 209\\
571 &= 2\times 209 + 153\\
209 &= 153 + 56\\
153 &= 2\times 56 + 41
\end{aligned}$$

On néglige 41, on obtient :

$$\begin{aligned}153 &\approx 2 \times 56\\ 209 &\approx 3 \times 56\\ 571 &\approx 2 \times 3 \times 56 + 2 \times 56\\ &\approx 8 \times 56\\ 780 &\approx 11 \times 56\end{aligned}$$

et en remontant les calculs $10\,864 \approx 153 \times 56$

$18\,817 \approx 265 \times 56$

d'où $\dfrac{18\,817}{10\,864} \approx \dfrac{265}{153}$

Un autre moyen d'obtenir une approximation par défaut à l'aide d'une approximation par excès est de calculer des “moyennes”.

La méthode de Héron donne $\dfrac{97}{56}$ comme approximation par excès de $\sqrt{3}$.

Alors $\dfrac{3 \times 56}{97} = \dfrac{168}{97}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$.

Calculons $\dfrac{97 + 168}{56 + 97}$.

On obtient $\dfrac{265}{153}$,

approximation “intermédiaire” de $\sqrt{3}$ dont on vérifie qu'elle est par défaut :

$$3 \times 153^2 = 70\,227 \text{ et } 265^2 = 70\,225.$$

(d'après une astucieuse remarque de J. Borowczyk)

Nous n'avons pas eu le temps de faire tous ces calculs en classe. Nous avons parlé de Théon et de Héron ; nous avions d'ailleurs examiné auparavant en exercice la méthode de Héron et une méthode proche de celle de Bombelli avec un point de vue moderne de suites définies par récurrence convergeant vers $\sqrt{a}$ et nous avons, à l'occasion de la lecture de ce texte, cherché une suite récurrente convergeant vers $\sqrt{3}$.

La lecture du texte d'Archimède a beaucoup intéressé la classe ; les élèves ont montré une grande curiosité pour les différentes méthodes de calcul de π : l'un d'eux a d'ailleurs fait remarquer plus tard, lors du cours sur les intégrales, qu'on devait pouvoir calculer π en calculant des intégrales puisque celles-ci servent à calculer des aires. J'ai alors donné un devoir (à la maison) reprenant les calculs de Newton permettant d'obtenir π (Voir “La méthode des fluxions”).

En termes modernes, il s'agit de calculer une approximation de

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2}\, dx$ en développant en série $\sqrt{1 - x}$ (formule du binôme).

Le problème et le texte de Newton se trouvent dans la brochure n°61 de l'I.R.E.M. Paris 7 M. : A.T.H. (Mathématiques : Approche par des Textes Historiques) p. 24.

ANNEXE 1

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité la plus reculée jusqu'aux recherches les plus récentes d'algorithmes performants pour calculer π.

Les exercices suivants permettent de trouver un algorithme de calcul de π, en suivant la méthode d'Archimède ; nous lirons d'ailleurs un extrait de "La mesure du cercle" d'Archimède.

Exercice 1 : encadrement de π

1° a) Soit C un cercle de centre 0 de rayon 1. Quel est son périmètre ?

b) Inscrire dans C un hexagone régulier $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$. Quel est le périmètre de l'hexagone ?

c) La médiatrice de chaque côté $[A_iA_{i+1}]$ de l'hexagone coupe le petit arc $(\widehat{A_iA_{i+1}})$ du cercle en un point par lequel on mène la tangente au cercle.
Expliquer pourquoi on obtient ainsi un hexagone régulier circonscrit au cercle.
Calculer son périmètre.

d) A l'aide de a), b), c), donner un encadrement de π (décimal).

2° a) Sur la même figure, inscrire dans C un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.

b) Circoncrire à C un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.

c) Donner un encadrement de π.

3° **Algorithm de calcul**

On appelle : . c_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrits dans C et p_n son périmètre (que valent c_0, p_0, c_1, p_1?)

. t_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à C et q_n son périmètre (que valent t_0, q_0, t_1, q_1 ?)

a) Déterminer une relation de récurrence liant c_n et c_{n-1}.

b) Ecrire un programme permettant d'obtenir à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée de c_n et $1/2p_n$ pour n quelconque.

Au choix c) ou c) bis :

c) Déterminer une relation de récurrence liant t_n et t_{n-1}. Programmer la machine pour obtenir $1/2p_n$ et $1/2q_n$.

c)bis Déterminer une relation liant c_n et t_n. Programmer la machine pour obtenir $1/2p_n$ et $1/2q_n$.

d) Donner à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées par défaut de $1/2p_4$, $1/2p_5$ $1/2p_{10}$ et par excès de $1/2q_4$, $1/2q_5$, $1/2q_{10}$.
En déduire des encadrements décimaux de π. A quelle précision avez-vous obtenu π ?

e) Que pensez-vous de la convergence des suites $(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$?

Exercice 2 : étude des suites $(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$

1° On appelle [AB] un côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrit dans un cercle ***C*** de rayon 1 de centre 0.
Soit θ la mesure en radians, comprise entre 0 et π, de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.

a) Déterminer θ.

b) Calculer c_n = AB à l'aide des lignes trigonométriques de $\theta/2$. En déduire une expression de $1/2p_n$.

c) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (x étant exprimé en radians).
Etudier la convergence et la limite de $(1/2p_n)_{n \in N}$

2° Faire un travail analogue avec un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à ***C***.
Etudier la convergence et la limite de $(1/2q_n)_{n \in N}$.
Que savez-vous d'Archimède et de l'époque à laquelle il vivait ? En avez-vous entendu parler en classe ? Dans quel cours et à quelle occasion ?

Annexe 2 : Archimède : "La mesure du cercle"
Traduction Ch. Mugler Ed. "Les Belles Lettres", t1, 1970

3.

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ, et par permutation et par composition. Il s'ensuit que la somme de ΖΕ et ΕΓ est à ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ ; le rapport de ΓΕ à ΓΗ est ainsi supérieur au rapport de 571 à 153. Le rapport du carré sur ΕΗ au carré sur ΗΓ est donc égal au rapport de 349 450 à 23 409 ; par conséquent ΕΗ est à ΗΓ comme 591 1/8 est à 153.

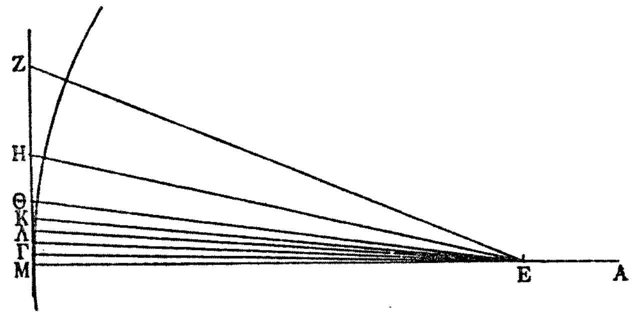

Fig. 64.

Bissectons de même l'angle ΗΕΓ par ΕΘ ; pour les mêmes raisons (sc. que plus haut), le rapport de ΕΓ à ΓΘ est donc supérieur au rapport de 1162 1/8 à 153 ; il s'ensuit que le rapport de ΘΕ à ΘΓ est supérieur au rapport de 1172 1/8 à 153. Bissectons encore l'angle ΘΕΓ par ΕΚ ; le rapport de ΕΓ à ΚΓ est donc supérieur au rapport de 2334 1/4 à 153. Bissectons encore l'angle ΚΕΓ par ΛΕ ; ΕΓ a donc à ΛΓ un rapport supérieur à celui de 4673 ½ à 153. Du moment donc que l'angle ΖΕΓ, égal au tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, l'angle ΛΕΓ est la 48e partie d'un angle droit. Donnons-nous un angle ΓΕΜ égal à ΛΕΓ de même sommet Ε[1] ; l'angle ΛΕΜ est ainsi la 24e partie d'un angle droit ; il s'ensuit que le segment de droite ΛΜ est un côté du polygone circonscrit au cercle ayant 96 côtés. Puisque, donc, on a démontré que le rapport

γ'.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ· μήκει ἄρα, ὃν φϘα η' πρὸς ρνγ. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ

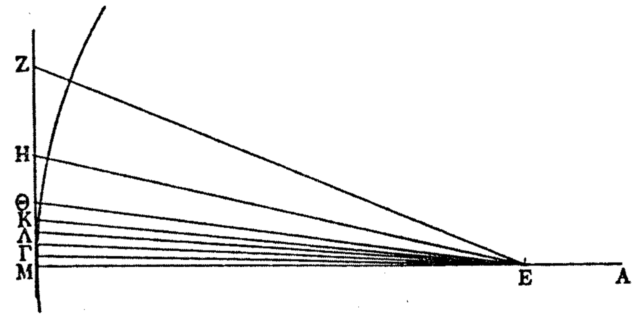

Fig. 64.

τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξβ η' πρὸς ρνγ· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροβ η' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δ' πρὸς ρνγ· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ δ' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ L' πρὸς ρνγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη'. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ'. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος Ϙς. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν de ΕΓ à ΓΔ est supérieur au rapport de 4673 ½ à 153, que ΑΓ est le double de ΕΓ et ΛΜ le double de ΓΛ, le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est supérieur au rapport de 4673 ½ à 14688. Et 14688 est le triple de 4673 ½, avec un reste de 667 ½, qui est inférieur à la 7e partie de 4673 ½ ; par conséquent le (sc. périmètre du) polygone circonscrit au cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté d'une partie du diamètre supérieure au septième. A plus forte raison[1] donc le périmètre du cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième.

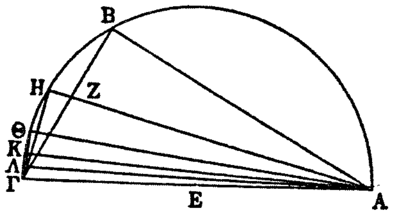

Fig. 65.

Soit un cercle, ΑΓ le diamètre, l'angle ΒΑΓ égal à la troisième partie d'un angle droit ; le rapport de ΑΒ à ΒΓ est donc inférieur au rapport de 1351 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΒ est égal au rapport de 1560 à 780. Bissectons l'angle ΒΑΓ par ΑΗ. Du moment donc que l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ[2] et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à l'angle ΗΑΓ. L'angle droit ΑΗΓ étant en commun[3], le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ[4]. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ ; ΑΗ est donc[5] à ΗΓ comme ΓΗ est à ΗΖ et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ aussi comme la somme de ΓΑ et ΑΒ est à ΒΓ[6], et par conséquent la somme de ΒΑ et ΑΓ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Pour ces

ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ,δχογ ∠' πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟς γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,δχογ ∠' πρὸς Μ^α ,δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ ∠', ἅπερ τῶν ,δχογ ∠' ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

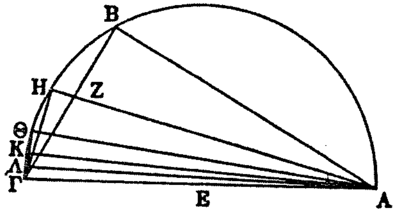

Fig. 65.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ατνα πρὸς ψπ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ,αφξ πρὸς ψπ]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ raisons, le rapport de ΑΗ à ΗΓ est donc inférieur au rapport de 2911 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΗ est inférieur au rapport de 3013 1/2+1/4 à 780. Bissectons l'angle ΓΑΗ par ΑΘ ; pour les mêmes raisons que plus haut le rapport de ΑΘ à ΘΓ est inférieur au rapport de 5924 1/2+1/4 à 780 ou de 1823 à 240 ; car chacun des termes (sc. du dernier rapport) est les 4/13 du terme (sc. correspondant du premier rapport) ; le rapport de ΑΓ à ΓΘ est donc inférieur au rapport de 1838 9/11 à 240. Bissectons aussi l'angle ΘΑΓ par ΚΑ. Le rapport de ΑΚ à ΚΓ est inférieur au rapport de 1007 à 66, puisque des seconds termes chacun vaut les 11/40 d'un autre nombre ; le rapport de ΑΓ à ΚΓ est donc inférieur à celui de 1009 1/6 à 66. Bissectons encore l'angle ΚΑΓ par ΛΑ ; le rapport de ΑΛ à ΛΓ est donc inférieur au rapport de 2016 1/6 à 66, le rapport de ΑΓ à ΓΛ est inférieur au rapport de 2017 1/4 à 66. Inversement donc le rapport du périmètre du polygone au diamètre est supérieur au rapport de 6336 à 2017 1/4 et 6336 est supérieur au produit de 3 10/71 par 2017 1/4. Il s'ensuit que le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans le cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71 ; à plus forte raison[1] donc le (sc. périmètre du) cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71.

Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.

τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ β϶λια πρὸς ψπ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ,γιγ ∠′ δ′ πρὸς ψπ. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ · ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ε϶κδ ∠′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ · ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′ · ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ · καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξϛ · ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ϛ′ πρὸς ξϛ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ · ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ βιϛ ϛ′ πρὸς ξϛ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξϛ. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛτλϛ πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′ · καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′ · ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα′.

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα′ μείζων.

BIBLIOGRAPHIE

Sur le nombre π :

Numéro spécial π	Supplément au petit Archimède	A.D.C.S. C61 Rue St Fuscien, 80000 AMIENS

Sur les approximations

Leçons d'à peu près	G. Th. Guilbaud	BOURGEOIS

Sur l'histoire des mathématiques

Mathématiques au fil des âges	I.R.E.M. Groupe Epistémologie et Histoire	GAUTHIER-VILLARS
Routes et Dédales une histoire des mathématiques	J. Peiffer A. Dahan-Dalmedico	POINTS - SCIENCE SEUIL
Mathématiques et Mathématiciens	P. Dedron J. Itard	MAGNARD

Sur les algorithmes

Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique	A. Engel	CEDIC