

SOPHIE GERMAIN
UNE FEMME AUX MARGES DE LA COMMUNAUTE
SCIENTIFIQUE

AMY DAHAN DALMEDICO
(C.N.R.S. PARIS)

I. JEUNESSE. MILIEU SOCIAL ET FORMATION.

Sophie Germain est née le 1^{er} Avril 1776, dans une famille parisienne bourgeoise qui avait atteint un niveau de vie confortable et prospère après plusieurs générations d'activité commerçante. Les détails précis manquent sur sa famille. Son père, Ambroise-François Germain, s'engagea brièvement mais activement pendant la Révolution Française, comme député élu du Tiers-Etat à l'Assemblée Constituante de 1789. Selon l'Almanach des Adresses de Paris et celles des députés à l'Assemblée nationale législative pour 1792, il était marchand de soie en bottes, 236 rue saint denis ; selon le Dictionnaire des parlementaires, il était fils de Thomas Germain, orfèvre, sculpteur et architecte, et lui-même orfèvre, quand il fut élu.

Député, on note deux discours qu'il prononça, l'un le 8 Octobre 1790, l'autre le 5 Mai 1791. A propos d'un projet sur la Caisse d'Escompte, il combat au nom des commerçants, lui un *marchand* titre dont il s'honore, tous ces "*banquiers et ces messieurs qu'on nomme faiseurs d'affaires*", déclarant "*qu'il a toujours fait profession publique de regarder l'agiotage comme un crime d'état.*" Son père appartenait à cette bourgeoisie libérale et instruite, pétrie de la philosophie des auteurs du XVIII^{ème} siècle, qui après avoir espéré dans les tentatives réformatrices de Turgot, s'était radicalisée jusqu'à vouloir se débarrasser d'un certain nombre de servitudes de l'Ancien Régime. Il fut un moment Directeur de la Banque,

mais on ne trouve plus trace de son nom dans une assemblée politique. Peut-être le cours des événements avait-il dépassé ses opinions. Il devait mourir à 95 ans en 1821.

Sophie est la 2^e de ses 3 filles, et elle resta d'ailleurs financièrement dépendante de son père toute sa vie, puisqu'elle ne devait jamais se marier ni obtenir une position sociale pouvant lui assurer une quelconque rémunération. A 13 ans on la dit timide, ombrageuse, d'un physique plutôt ingrat. Trouvant sa maison pleine de discussions sur l'argent, la politique, les changements, elle semble trouver dans la bibliothèque de son père, un refuge rassurant et qui de plus va lui apparaître intellectuellement très excitant.

Toutes les notices biographiques sur Sophie Germain évoquent de façon épique cette période où se révèle son goût pour les mathématiques, qu'elle découvre d'abord dans l'Histoire des Mathématiques de Montucla. Par exemple la lecture de la mort d'Archimède lors de la prise de Syracuse, Archimède tellement absorbé par ses travaux scientifiques qu'il se laisse surprendre sans résister par les soldats romains, semble l'avoir beaucoup marquée. Il est sûr qu'elle est impressionnée par cet univers mathématique et s'y jette à corps perdu.

Seule, dépourvue de conseils, elle se met à étudier tout ce qui lui tombe sous la main avec une ardeur qui ne semble pas du goût de sa famille. Libri raconte comment elle a surmonté les obstacles que ses parents ont essayé de mettre pour freiner cette passion des mathématiques, sans doute extraordinaire pour son âge et incongrue pour son sexe : en se levant la nuit, enveloppée dans des couvertures, l'encre gelant dans l'encrier, à la lueur d'une bougie, ses parents ayant enlevé le feu, les habits, la lampe de sa chambre. (Notice nécrologique parue dans le *Journal des Débats*, 18 Mai 1832). Tard dans sa vie, il lui arrivait d'évoquer encore ces premiers moments d'éblouissement où elle se met à découvrir et comprendre l'Analyse. Ses parents cédèrent sans doute devant cette détermination farouche, et Sophie Germain progressa, passant du traité de Bezout aux œuvres mêmes de Newton et Euler.

Sophie Germain a 19 ans quand l'Ecole Polytechnique est fondée

en 1795 ; Libri indique qu'avec l'établissement de cette école et celle de l'Ecole Normale de l'An III quelques mois auparavant, Sophie avait obtenu les notes de cours de différents professeurs , en particulier celui de chimie de Fourcroy et surtout celui d'analyse de Lagrange l'avaient fortement intéressée. Les professeurs avaient l'habitude de demander à la fin du cours à leurs étudiants leurs observations . Sophie Germain envoya les siennes à Lagrange , en utilisant le nom de Le Blanc, un ancien élève de l'Ecole Polytechnique , d'un an plus âgé qu'elle et qui devait entrer à l'Ecole des Ponts et Chaussées . On ignore s'il y eut un arrangement amical entre Sophie Germain et LeBlanc et de fait la connaissance des moeurs sociales de l'époque ne permet pas d'apprécier quelle était la marge de manoeuvre d'une jeune fille de sa classe ayant ses intérêts et ses capacités intellectuelles . Si Sophie menait une vie austère et assez renfermée , évitant les mondanités , elle ne manifestait pas de timidité quand des questions de savoir scientifique étaient en jeu.

C'est en tout cas par ce biais qu'elle connut Lagrange ; son nom courut dans la communauté scientifique piquée de curiosité, et plusieurs savants viennent à elle . Elle est invitée ici ou là , à des dîners d'hommes . M. A - J Cousin mathématicien et auteur de *Leçons sur le Calcul Différentiel et Intégral* demande à lui présenter ses respects ; J - B Gaspard d'Ansse de Villoison , helléniste distingué , lui adresse des vers grecs et latins à paraître dans le Magasin encyclopédique , et Sophie Germain s'en offusque vivement . En Novembre 1797 , une visite de Lalande tourne mal et indigné Sophie Germain . Si l'incident reste inexpliqué , il est certain que c'est " *L'Astronomie des Dames* " dont Lalande était l'auteur qui a été à l'origine de l'ombrage.

Un mot sur cette littérature de vulgarisation scientifique du 18° s. particulièrement destinée au public féminin. Les femmes qui donnaient le ton dans de nombreux salons , et pour qui les sciences étaient exclues de toute formation , étaient bien obligées de trouver quelquepart les notions élémentaires de physique pour participer à la conversation qui tournait très fréquemment sur ce sujet. Parmi ces ouvrages, on peut citer aussi les " *Entretiens sur la pluralité des mondes* " de Fontenelle, le " *Newtonianisme* "

pour les Dames" d'Algarotti . Dans les deux cas il s'agit de Dialogues où une dame (de préférence une marquise) apprend la physique de son interlocuteur. Pour Algarotti, les femmes ne s'intéressant qu'à la galanterie et à l'amour , c'est par ce biais qu'il faut leur enseigner la physique. Citons un passage de l'article de Andreas Kleinert :

"Newton est présenté comme quelqu'un qui sait dicter aux dames des leçons de toilette . *Quelle raison oblige les Dames (...) à mettre plus de rouge pour paraître dans une Loge à l'Opéra , que pour promener leurs appas dans les Tuileries?* A l'aide de son prisme , Newton donne la réponse : *La lumière des flambeaux n'est pas aussi blanche que celle du jour , elle tire sur le jaunâtre et lorsqu'on la fait passer au travers d'un prisme , on voit que les rayons jaunes y sont les plus brillants . Ainsi moins une dame aura chargé son rouge , plus il se ressentira du jaune qui abonde dans cette espèce de lumière.(...) Cette raison veut qu'on augmente la dose du rouge pour aller à l'Opéra , sans quoi le rouge des Belles , et les yeux de leurs Adorateurs ne trouveraient point leurs comptes aux bougies , autant qu'à la clarté du jour.*

Aussi la marquise n'a-t-elle aucun problème à comprendre la loi des carrés de la distance qui est valable pour la gravitation et pour l'intensité de la lumière , car elle connaît une analogie concluante :

J'ai quelque tentation de croire que dans l'amour on suit cette loi des carrés à l'égard des lieux , ou plutôt à l'égard des temps : ainsi après huit jours d'absence , la tendresse devient 64 fois moindre qu'elle ne l'était le premier jour. "...

Et Kleinert remarque que les considérations de ce genre sont si nombreuses qu'elles prennent le pas sur les passages où il s'agit vraiment de physique.

Sophie Germain qui lisait Newton ou *Le Système du Monde* de Laplace n'a pas supporté qu'on lui suggère un livre relevant de cette littérature pour femmes frivoles et a largement fait savoir que Lalande n'était pas de ses amis.

Des scientifiques lui adressent des "paradoxes" , à la mode à la fin

du 18^e siècle , et de petits problèmes qu'elle résout mais ce n'est visiblement pas ce qu'elle attendait. On peut souligner un hasard et un désordre dans sa formation scientifique : ouvrages, problèmes, notes de lectures se succèdent au gré des rencontres ou des discussions sans aucun plan . Certaines lacunes pèseront très lourd .

Sophie Germain vivait à l'écart , non seulement de la société des hommes scientifiques mais aussi de celle des femmes éduquées dont certaines s'associaient à des hommes de leurs familles pour s'intégrer tant soit peu à la vie scientifique (Madame Lalande, La Duchesse de Gotta...).

Si plusieurs contemporains soulignent sa modestie et sa réserve , nous pouvons nous demander ce que cela recouvre : est-ce une réelle timidité qui lui fait éviter les rencontres et la vie sociale mondaine ? , ou est-ce un sens privé de sa supériorité qui lui fait envisager son travail comme faisant partie , non de la scène sociale contemporaine , mais de la marche de l'esprit humain, au sens des Encyclopédistes et de Condorcet, vers le progrès et la vérité ? Isolée comme elle l'était à cause de son sexe, Sophie Germain n'avait pas les moyens de percevoir la modification des formes et du statut du travail scientifique à cette époque : un travail qui devient chaque jour moins solitaire mais au contraire lié à la vie d'une communauté scientifique croissante en nombre et en influence , dont les institutions et les échanges s'organisent.

La jeunesse de Sophie Germain semble avoir été peuplée d'idées et d'abstractions , mais la personne en chair et en os, malheureusement , nous échappe.

II.LA THEORIE DES NOMBRES . LES RELATIONS AVEC GAUSS.

En 1789 Legendre avait publié son livre sur La Théorie des Nombres et en 1801 Gauss publiait les Disquisitiones Arithmeticae ; Sophie Germain se lance avec enthousiasme dans l'étude de ces ouvrages.

Alors qu' elle s'est toujours montrée agacée et impatientée par les attentions sociales d'hommes cultivés (d'Ansse de Villoison...), pour la première fois elle va se sentir gratifiée par une certaine reconnaissance

professionnelle de vrais scientifiques . Le domaine de la théorie des nombres lui offre l'occasion d'un accomplissement et de réelles avancées. Elle s'y engage , sans doute encouragée par Legendre et Lagrange . Pendant quelques années elle assimile les méthodes nouvelles et difficiles des Disquisitiones: congruences, résidus quadratiques et biquadratiques, théorie des formes...; enhardie par les joies de la découverte elle écrit à Gauss.

On connaît une dizaine de lettres de Sophie Germain à Gauss, échelonnées entre Novembre 1804 et Mai 1809 . Les trois premières sont signées Le Blanc puisque Sophie Germain , "*craignant le ridicule attaché au nom de femme savante* " comme elle l'écrira plus tard , avait utilisé à nouveau son premier pseudonyme pour s'adresser au "Prince des Mathématiciens".

Dans sa première lettre , Sophie Germain écrit à Gauss qu'elle peut démontrer que $x^n + y^n = z^n$ est impossible si $n = p - 1$ où p est un nombre premier de la forme $8k + 7$ et lui expose sa méthode. Elle ajoute : "*Malheureusement l'étendue de mon esprit ne répond pas à la vivacité de mes goûts , et je sens qu'il y a une sorte de témérité à importuner un homme de génie lorsqu'on a d'autre titre à son attention qu'une admiration nécessairement partagée par tous ses lecteurs .*"

Citons un passage de la première réponse de Gauss :

" *Monsieur (!),*

(....) Je me félicite , que l'Arithmétique acquiert en Vous un ami aussi habile . Surtout votre nouvelle démonstration pour les nombres premiers , dont z est résidu ou non résidu m'a extrêmement plu ; elle est très fine , quoique elle semble isolée , et ne pouvoir s'appliquer à d'autres nombres ..

Et Gauss ajoute, témoignant une fois de plus ici de son sens profond de l'unité des mathématiques : "*J'ai très souvent considéré avec admiration l'enchaînement singulier des vérités arithmétiques . Par exemple le théorème que je nomme fondamental (art. 131) et les théorèmes particuliers concernant les résidus -1, +2, s'entrelacent à une foule d'autres vérités , où l'on ne les aurait jamais cherchés . Outre les deux démonstrations que j'ai données dans mon ouvrage je suis en possession de*

deux ou trois autres , qui du moins ne le cèdent pas à celles-là en question d'élégance. " (16 Juin 1805)

C'est au moment de la campagne d'Iéna en 1806 que Sophie Germain se souvenant d'Archimède , s'inquiète pour Gauss et dépêche un message à un général de ses amis . Son identité est dévoilée et Gauss lui écrit : "*... Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement , en voyant se métamorphoser mon correspondant estimé Mr. Leblanc en ce illustre personnage qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurais peine à croire . Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas , les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir . Mais lorsqu'une personne de ce sexe , qui par nos mœurs et par nos préjugés , doit rencontrer infiniment d'obstacles et de difficultés , que les hommes , à se familiariser avec ces recherches épineuses , sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché , il faut sans doute , qu'elle ait le plus noble courage , des talents tout à fait extraordinaires , le génie supérieur .(...)*

Les notes savantes , dont vos lettres sont si richement remplies , m'ont donné mille plaisirs . Je les ai étudiées avec attention , et j'admire la facilité , avec laquelle vous avez pénétré toutes les branches de l'Arithmétique , et la sagacité avec laquelle vous avez su généraliser et perfectionner ." (30 Avril 1807)

Gauss poursuit en réfléchissant aux multiples suggestions de sa correspondante, corrigeant au passage une erreur de Sophie Germain qui avait affirmé que "*si la somme des puissances $n^{ème}$ de deux nombres quelconques est de la forme $h^2 + n f^2$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la même forme.*"

Il lui donne un exemple numérique où la règle est en défaut : on a $15^{11} + 8^{11} = h^2 + 11 f^2$ mais non $15 + 8 = x^2 + 11 y^2$.

Il poursuit en lui annonçant qu'il a obtenus de nouveaux résultats concernant les résidus cubiques et bicarrés mais dont les démonstrations nécessiteraient un "*mémoire expres*" tant elles sont délicates. Comme

pour excuser son silence sur ce point , il écrit encore : " *Voici une autre proposition relative aux résidus carrés , dont la démonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas pour ne pas vous dérober le plaisir de la développer vous-même , si vous la trouverez digne d'occuper quelques moments de votre loisir.* "

Il n'y a aucune raison de penser que le jugement flatteur de Gauss à cette époque n'ait pas été sincère . D'ailleurs on peut constater dans ses lettres à Olbers que sa correspondance avec LeBlanc-Germain l'a intéressé et stimulé . Mais Gauss a des problèmes de vie personnelle, de carrière à mener, de livres à éditer...problèmes qu'il évoque dans les lettres. Il s'occupe de mécanique céleste , d'astronomie, néglige la théorie des nombres . Ses contributions suivantes dans ce domaine n'interviendront qu'en 1828 et 1832; il s'agit de 2 mémoires classiques sur la réciprocité biquadratique.

A partir de 1808 , il suspend la correspondance , et ne répond pas à un commentaire mathématique de Sophie Germain dans lequel elle énonçait pour la première fois ce qui deviendra "son" théorème. Sophie Germain , elle, ne connaît pas les contraintes de la vie , du travail. Aucun poste n'est ouvert pour elle. Elle s'occupe de mathématiques , purement , abstraitement , passionnément.

Les résultats de Sophie Germain ne seront largement connus que par la mention qu'en fera Legendre dans un mémoire de 1823 paru dans les Mémoires de de l'Académie des Sciences de l'année 1827 (tome VI). Ils seront ensuite mentionnés en note dans le 2ème Supplément à la Théorie des Nombres , paru en 1830.

Or entre la lettre d'Euler à Goldbach de 1753 disant qu'il a réussi à démontrer le théorème de Fermat pour $n=3$ et qu'il observe que la démonstration est très différente que pour $n=4$, et les travaux de Kummer sur les facteurs idéaux de 1840 , le théorème de Sophie Germain est le plus important résultat relatif au théorème de Fermat.

Remarquons d'ailleurs que les relations de Gauss et Legendre étaient plutôt tendues et c'est un mérite de Sophie que d'avoir pu s'entendre avec les deux plus grands spécialistes de la théorie des nombres

de cette époque.

Rappelons que le (grand) "théorème de Fermat" est l'affirmation selon laquelle l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour des nombres entiers positifs quelconques, et pour tout entier n supérieur à 2.

le théorème de Sophie Germain

Le premier théorème démontré par Sophie Germain est le suivant :

Si $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, alors l'un des trois nombres x, y, z est divisible par 5.

(L'avantage de cette écriture est de faire jouer à x, y , et z des rôles symétriques.)

Présentons les grandes étapes du résultat de Sophie Germain, dans une marche très proche de la sienne

1ère étape:

On écrit :

$$-x^5 = (y+z)(y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4)$$

On peut supposer x, y, z , 2 à 2 premiers entre eux, sinon on exhibe un diviseur commun et on simplifie ; On démontre que les deux facteurs du 2ème membre sont premiers entre eux.

En effet si p divise $y+z$,

$$y \equiv -z \pmod{p}$$

$$\text{et alors } y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4 \equiv 5y^4 \pmod{p}$$

Si p divise le 2ème facteur, il divise $5y^4$ alors :

- soit $p=5$ et x est divisible par 5, ce qui doit être prouvé
- soit p divise $y+z$ et y et alors y et z ne sont pas premiers entre eux.

Donc on a établi que :

Si $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ et si x, y, z sont premiers 2 à 2, et si tous les 3 sont premiers à 5, alors $y+z$ et $y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4$ sont mutuellement

premiers.

2ème étape

Le produit des deux facteurs précédents est une puissance 5ème ,
puisque il vaut :

$$y^5 + z^5 = -x^5 = (-x)^5$$

On démontre alors que chacun d'eux est une puissance 5ème , par un argument de descente infinie; argument qui avait été utilisé par Euler pour démontrer le théorème de Fermat pour $n=3$.

Mais x, y, z jouent des rôles analogues . On a donc :

$$y+z = a^5, \quad y^4 - y^3 z + y^2 z^2 - y z^3 + z^4 = \alpha^5, \quad x = -a\alpha$$

$$z+x = b^5, \quad z^4 - \dots + x^4 = \beta^5, \quad y = -b\beta$$

$$x+y = c^5, \quad x^4 - \dots + y^4 = \gamma^5, \quad z = -c\gamma$$

On va montrer que c'est impossible .

La clé de la démonstration, qui est l'idée propre de Sophie Germain est ici de voir que modulo 11, les puissances 5ème sont - 1, 0, + 1 .

En effet par le petit théorème de Fermat ,

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{sauf si } x=0$$

$$\text{c.a.d. } x^{10} \equiv 1 \pmod{11}, \text{ soit } x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

Alors $x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0 \pmod{11}$ est possible si et seulement si x ou y ou z est congru à 0 (mod 11) .

Revenons à l'hypothèse $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ où x, y, z premiers 2 à 2 et premiers 5.

On doit trouver $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, vérifiant les conditions ci-dessus.

$$x^5 + y^5 + z^5 = 0 \Rightarrow x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0 \pmod{11}$$

donc un des 3 nombres doit être congru à 0 (mod 11), par exemple x .

$$\text{Donc } 2x = b^5 + c^5 + (-a)^5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Un des 3 nombres b, c , ou a doit être divisible par 11 . Mais :

- b ne peut être divisible par 11, car alors y et x auraient le facteur 11,
- c ne peut pas être divisible par 11, car z et x auraient le facteur 11,
- reste a.

Ainsi a doit être divisible par 11. Mais ceci est impossible car alors :

$$y \equiv -z \pmod{11} \text{ et } \alpha^5 \equiv 5y^4 \pmod{11}$$

Mais $x \equiv 0 \pmod{11}$

$$x^4 + \dots + y^4 = \gamma^5 \Rightarrow \gamma^5 \equiv y^4 \pmod{11}$$

$$y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4 = \alpha^5 \Rightarrow \alpha^5 \equiv 5\gamma^5 \pmod{11}$$

Puisque les puissances 5 ème (mod 11) sont 0, +1, -1, ceci implique

$\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{11}$ et contredit que x et z relativement premiers.

Le théorème de Sophie Germain est démontré.

Avec exactement les mêmes arguments , on peut démontrer le théorème plus général:

Si n est premier impair et si 2n+1 est premier, alors $x^n + y^n = z^n$ implique que x, y, ou z est divisible par n.

La démonstration devait être publiée par Legendre, mais l'idée en est donnée dans la lettre à Gauss.

Ainsi pour démontrer le théorème de Fermat pour n=5, ou n=11, ou de nombreux autres nombres premiers , il suffit de montrer que :

$x^n + y^n + z^n = 0$ est impossible avec l'hypothèse supplémentaire que l'un des trois nombres est divisible par n .

(Le cas où deux des nombres et donc a fortiori les 3 , sont divisibles par n , est déjà exclu car x, y, z, sont 2 à 2 premiers entre eux.)

Il est devenu traditionnel , en grande partie à cause du résultat précédent , de diviser le théorème de Fermat en 2 cas :

- 1er cas : quand aucun des 3 nombres x, y, z n'est divisible par n

- 2ème cas : quand un seul des trois nombres est divisible par n

Le théorème précédent revient à dire que :

Si n est premier tel que $2n+1$ est premier , alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour les puissances n -èmes.

Le travail est simplifié de moitié .

De façon surprenante le premier cas du théorème de Fermat s'est avéré le plus élémentaire . De plus même quand le théorème échoue , par exemple pour $n = 7$ puisque 15 non premier , on peut souvent aboutir en prenant un autre entier au lieu de $2n+1$, dans ce cas avec $4n + 1 = 29$ premier. En effet les 7èmes puissances mod(29) sont 0, +1, -1, +12, -12 et on montre de façon analogue que :

$x^7 + y^7 + z^7 \equiv 0 \pmod{29}$ est possible si l'un des 3 nombres est nul, mod29.

Ce qu'on appelle aujourd'hui (c.f.Edwards) le

Théorème de Sophie Germain :

Soit n un nombre premier. S'il existe un nombre premier p tel que

$$\text{- i) } x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x, y \text{ ou } z \text{ est } \equiv 0 \pmod{p}$$

et - ii) $x^n \equiv n \pmod{p}$ est impossible,

Alors le 1er cas du théorème de Fermat est vrai pour n .

Utilisant son théorème , Sophie Germain était capable de prouver le 1er cas du théorème de Fermat pour tous les nombres premiers inférieurs à 100, c.a.d. que pour tout nombre premier impair n inférieur à 100, elle a pu trouver un autre nombre premier p vérifiant les conditions i) et ii). Legendre devait aller jusqu'aux nombres premiers n inférieurs à 197.

Indiquons que le théorème de Fermat pour $n=5$ (c.a.d. en fait le 2ème cas) devait être établi par Dirichlet et par Legendre (indépendamment) en 1825 .

III- LES ESSAIS POUR UNE THEORIE MATHEMATIQUE DES SURFACES ELASTIQUES

les expériences de Chladni

A partir de 1809 Sophie Germain change de domaine de travail et de recherche . Le prétexte en est le suivant : En 1808, Chladni acousticien et ingénieur allemand vient à Paris présenter des expériences sur les modes de vibrations des plaques élastiques devant les membres de la 1ère classe de l'Institut.

Le principe de ces expériences était simple : il s'agissait de saupoudrer de sable fin des plaques plates de formes variées et de les soumettre à des vibrations. En donnant un coup d'archet sur leurs bords, les expériences de Chladni montraient qu'une plaque plane vibrante donne lieu à des courbes ou des lignes de points immobiles , sur lesquels les grains de sable se concentrent , de même qu'une corde qui vibre a des noeuds pour lesquels il n'y a pas de mouvement. Les figures formées étaient symétriques, assez spectaculaires , cercles, étoiles, et autres figures géométriques. En général, il fixait les plaques en un point intérieur qui devenait un noeud et laissait les bords libres ; quelquefois un point du bord ou tout un côté étaient fixés . La forme des courbes nodales dépendait de celle des plaques , de la position des points fixes tenant les plaques , et de la façon dont on les frappait ("ton pur" ou non) .Chladni analysa les figures de sable en les classant suivant leur forme géométrique et en notant pour chacune , une hauteur de son correspondante . Ainsi il indiquait que les figures et les sons d'une plaque vibrante sont analogues aux formes et aux tons des modes harmoniques d'une corde.

Ces expériences présentées devant le "gratin scientifique" parisien - ce groupe d'élite de 60 personnes qui composait la 1ère Classe de mathématiques et de sciences physiques de l'Institut- ont suscité curiosité, émoi et intérêt . Elles furent répétées devant Napoléon qui avait gagné une place à l'Institut depuis 1800.

le sujet du grand prix

L'Académie avait l'habitude de proposer et juger un Prix

chaque année en sciences physiques et mathématiques . On élisait une commission de 4 ou 5 personnes dans la 1ère classe qui choisissait un sujet et établissait un programme pour le Prix . Les candidats avaient 2 ans pour rendre le travail qui était jugé anonymement. L'Académie proposa en 1809 la question suivante : *"Donner la théorie mathématique des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience"*.

Le sujet était très difficile (il ne commencera à être élucidé qu'après 1860) et il fut remis 2 fois en concours : les concepts fondamentaux de la théorie des corps élastiques sont alors inexistent et n'apparaîtront qu'avec les travaux de Cauchy en 1823 ; on a besoin de la notion d'invariant d'une surface courbe et de concepts de géométrie différentielle qui ne seront définis que dans le mémoire sur la théorie des surfaces de Gauss de 1827 ; enfin le sujet nécessite la mise en oeuvre et la maîtrise de techniques variationnelles délicates . Lagrange avait déclaré que ce problème "nécessitait un nouveau genre d'analyse". Finalement aucun scientifique ne relèvera le défi de l'Académie et Sophie Germain sera la seule concurrente en titre . Sa connaissance du calcul des variations et des techniques d'analyse était trop partielle pour qu'elle s'effrayât de difficultés insoupçonnées.

Sophie Germain devait présenter trois mémoires successifs en 1811, 1813 et 1815. Le premier d'entre eux provoqua une contribution de Lagrange; Poisson rédigea un mémoire en 1814; des membres parmi les plus éminents de la Classe de Mathématiques et Physique de l'Institut firent partie des jurys successifs (Laplace, Lagrange, Legendre, Lacroix, Malus, Poisson, Carnot) et furent concernés de près ou de plus loin par ce sujet. Pendant quelques années Sophie Germain put se sentir au coeur d'un domaine de recherches mis au premier plan.

Mais Sophie Germain est restée une étrangère pour la communauté scientifique , maintenue à une distance certaine de la vie professionnelle: chaque contact, chaque rencontre est un événement social formel qui implique une lettre d'invitation , quelquefois une demande de permission , de prévoir transport ou raccompagnement etc. Ainsi

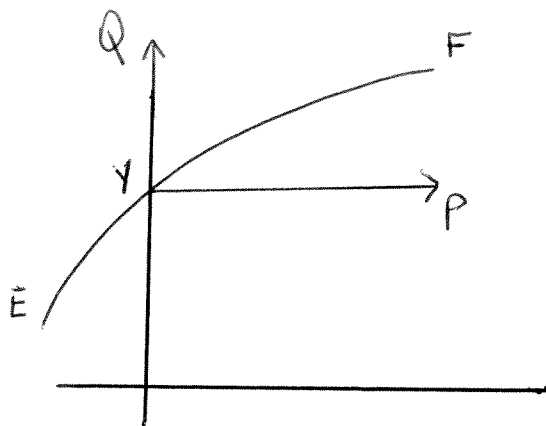
marginalisée, elle n'a pas d'occasion de discuter avec ses collègues de sujets d'intérêt commun . Sa formation reste aussi très lacunaire. Tout ceci n'avait pas eu trop d'inconvénients dans le cas de la théorie des nombres , dont les techniques toutes récentes étaient concentrées dans un ou deux ouvrages capitaux et où la communauté intéressée se réduisait à 5 ou 6 personnes. Par contre cet état de fait handicaperait gravement les efforts de Sophie Germain dans le domaine de la physique mathématique.

Sa vision de la méthodologie mathématique propre à l'explication de phénomènes physiques venait seulement de la lecture de la *Mécanique Analytique* de Lagrange et de traductions laborieuses de mémoires latins d'Euler sur la vibration des tiges élastiques, encouragées par une correspondance avec Legendre. Il est évident que la façon dont Sophie Germain entreprend ses recherches est très différente de celle que l'on peut attendre d'un "scientifique professionnel" comme l'est par exemple Poisson.

Procéder par analogie avec Euler

Fondamentalement, Sophie Germain veut procéder pour les surfaces par **analogie** avec le raisonnement qu'Euler a suivi dans le cas unidimensionnel des tiges et des cordes. (Analogie , c'est d'ailleurs le maître-mot et le concept unificateur de son Essai Philosophique posthume). Un flot de correspondance avec Legendre et un copieux manuscrit prouvent qu'elle se met à étudier avec acharnement le mémoire d'Euler de 1779.

Euler avait cherché une équation intégral-différentielle exprimant l'équilibre des moments des forces s'exerçant sur une portion EY d'une lame EF.



Il écrivait l'équation

$$\int dy \int P ds - \int dx \int Q ds = \frac{V}{r}$$

où le membre de gauche représente l'effet des forces externes appliquées, dont les composantes sont P suivant l'axe des x, et Q suivant l'axe des y. Ces forces tendent à courber et déplacer la tige produisant un rayon de courbure r et V est une constante d'élasticité dépendant du matériau de la tige. Le membre de droite représente donc les forces internes d'élasticité qui contrebalancent les forces extérieures appliquées et qui sont donc inversement proportionnelles au rayon de courbure de la tige.

Cette idée de proportionnalité de la force d'élasticité à la courbure avait en fait été déjà utilisée par Jacques Bernoulli en 1705, dans son important mémoire sur l'*elastica*, mais en 1811 Sophie Germain ignorait encore ce travail.

Euler considérait le cas d'une tige horizontale effectuant de petites vibrations verticales et négligeait les déplacements horizontaux des points. Il aboutissait notamment à une équation différentielle du type

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k \frac{d^4 z}{dx^4}$$

dont il étudiait les solutions.

De façon analogue donc, Sophie Germain part de l'équation suivante

$$\int dz dy \int P ds + \int dz dx \int Q ds - 2 \int dx dy \int R ds = V \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right]$$

pour représenter l'équilibre de n'importe quel élément de la plaque ; équation à propos de laquelle elle écrit au début du mémoire de 1811 soumis au Prix : *"Je me contente de la donner au commencement de mon mémoire sans entrer dans aucun détail sur la manière dont je l'ai trouvée..."*.

Elle explique que cette équation " suppose que pour un point quelconque de cette surface on ait établi 3 coordonnées orthogonales savoir x, y, z, de sorte que l'élément soit exprimé suivant l'usage par l'équation

$$ds = dx dy (1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2)^{1/2},$$

la masse de cet élément le sera alors par ds "

Ici aussi, le membre de gauche représente l'effet des forces extérieures appliquées (dont les composantes suivant les 3 axes orthogonaux sont P, Q et R), V est une constante d'élasticité liée à la nature du matériau, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, est la somme des rayons principaux de courbures de la surface, qui est censée mesurer la déformation de la plaque. Rappelons que les courbures principales sont les courbures maximale et minimale parmi toutes les courbures des sections normales en un point de la surface. Sophie Germain appellera ultérieurement courbure moyenne la demi-somme des courbures principales, nous y reviendrons.

Ainsi ce que Sophie Germain appellera toujours "***mon hypothèse***", faite par analogie avec ce qu'elle a compris d'Euler, est le fait que la force élastique (ou *moment* et dans le premier mémoire de 1811, elle utilise indifféremment les deux termes) est proportionnelle à la somme des courbures principales.

Puis à partir de cette relation d'équilibre supposée, Sophie Germain fait comme Euler plusieurs autres suppositions simplificatrices sur les déplacements et rotations de la plaque ; en particulier elle suppose que les déplacements des points de la surface sont petits et s'effectuent le long des normales en chaque point à la surface. Elle différencie quatre fois l'équation par rapport à x et y et obtient une équation aux dérivées partielles du sixième ordre.

Enfin, pour ne retenir que les solutions régulières qui seules, dit-elle, donnent un véritable "son" et non du "bruit", Sophie Germain efface la dépendance par rapport au temps et déduit la relation

$$z(x, y) = \frac{f^6}{2} \left(\frac{d^6 z}{dx^4 dz^2} + \frac{d^6 z}{dy^4 dx^2} \right)$$

dont elle cherche les solutions régulières dans des cas particuliers, au moyen de séries trigonométriques comme Euler l'avait fait pour la tige.

En fait, plusieurs points sont très contestables dans son mémoire qui dans l'ensemble est erroné. Le traitement mathématique présente de nombreuses insuffisances et la notion de force élastique elle-même est très floue. S'y trouvent confondues la notion eulérienne de *force élastique*, et la notion lagrangienne de *moment élastique* qui est une quantité scalaire, soumise aux méthodes variationnelles de la *Mécanique*

Analytique et qui s'apparente à une force de liaison . De fait S. Germain n'utilise pas les propriétés directionnelles de la force et sa démarche n'est pas valide. Cette confusion entre force et moment élastique entraîne une ambiguïté conceptuelle dans la formulation même de son hypothèse.

Mais l'idée de faire jouer, dans le cadre de la théorie des surfaces, à la somme des courbures principales d'une surface le même rôle que la courbure de la ligne élastique dans la théorie des verges, est originale. Elle s'appuie sur l'intuition qu'une surface (d'épaisseur négligeable) se comporte comme la somme de ses indivisibles (les lignes) et que le mouvement imprimé à la surface peut être considéré comme la superposition des mouvements que les lignes prendraient si elles étaient réellement séparées et ébranlées isolément. Nous verrons comment Sophie Germain tentera de la justifier dans ses essais ultérieurs. En 1811, elle se contente d'indiquer en note que si elle a retenu l'expression $(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})$, c'est que pour de petites vibrations les termes en $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r'}$, ou d'autres fonctions des courbures principales sont négligeables par rapport à leur somme.

Dans un Supplément à son Mémoire, arrivé après la clôture du Concours, Sophie Germain essaie de légitimer son *hypothèse*, en l'induisant du cas de la tige, traité par Lagrange dans l'édition de 1811 de la *Mécanique Analytique*. Mais Sophie Germain ne maîtrise pas correctement les techniques du calcul des variations et sa généralisation est défectueuse. Le jury de l'Académie décida de remettre le sujet en concours pour Octobre 1813.

Pourtant Lagrange qui a eu en mains cette première version de Sophie Germain, en tire profit, corrige l'analyse mathématique et obtient à partir de son hypothèse, mais en y ajoutant des propriétés aux bords adéquates, la base pour décrire le comportement statique et dynamique des plaques. De Lagrange, on ne connaît d'ailleurs que l'équation trouvée, qui s'écrit pour z très petit :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \left[\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right] = 0$$

et une brève *Note* (manuscrite) *communiquée, aux Commissions pour le Prix de la surface élastique* en décembre 1811, et citée par Navier en 1828, lors de sa controverse avec Poisson .

le 2ème concours

Pour le 2ème concours, il semble que Sophie Germain ait travaillé seule, avec une confiance croissante en son approche première. D'ailleurs Lagrange n'avait-il pas utilisé avec succès son idée ?

Cette fois elle sait qu'elle veut aboutir à l'équation obtenue par l'éminent maître et elle cherche à justifier son **hypothèse** par des considérations géométriques sur la déformation d'un plan .

Sophie Germain considère un plan auquel quatre points sont supposés appartenir initialement. Ensuite elle cherche à calculer l'angle déterminé, après la déformation , par les plans passant respectivement par les 1^e, 2^e et 4^e points et par les 1^e, 3^e et 4^e points.

Sophie Germain ici aussi cherche à étendre par analogie le principe utilisé par Euler pour une simple courbe, et encore imaginé par Jacques Bernoulli (1705), principe qui stipule que la force d'élasticité résulte de la **résistance** que les éléments successifs de la tige opposent à être fléchis les uns sur les autres, et à changer leur angle de contingence actuel.

Mais comment exprimer cette condition pour une surface où la flexion peut avoir lieu en tous sens ? Ce qui fait ici cruellement défaut pour la réalisation de progrès décisifs dans ce domaine est une théorie de géométrie différentielle des surfaces qui ne devait émerger qu'après 1830.

Sa tentative est très critiquée par Legendre qui lui écrit le 4 Décembre 1813 :

"Lagrange a eu raison de considérer deux éléments consécutifs dans la courbe élastique et de mesurer l'élasticité par l'angle compris entre les deux éléments. On n'a pas d'éléments analogues dans les surfaces, ou du moins ceux que nous avons considérés ne sont pas dans le signe de l'analogie [...]. Il y a dans tout cela beaucoup d'obscurité"

Et Legendre poursuit : *"Il paraît reconnu cependant que votre équation est réellement celle de la surface vibrante. En mettant l'analyse à part, le reste peut être bon, en ce qui concerne l'explication de:*

phénomènes. Si la commission de l'Institut était de cet avis vous pourriez au moins être mentionnée honorablement". Ce fut bien le cas.

Sophie Germain reçut une mention honorable pour la confrontation honnête et satisfaisante de ses résultats théoriques avec l'expérience. A l'exemple d'Euler, pour les lames vibrantes, elle avait donné des intégrales particulières de l'équation fondamentale trouvée, sous forme de séries d'exponentielles, de sinus et de cosinus. Chacune de ces intégrales correspond à une forme particulière de la plaque qui présente à l'état de vibration régulière, une certaine configuration et un certain nombre de lignes nodales. Le son que la plaque fait entendre, dépend en général du nombre de ces lignes et l'intégrale établit un rapport entre ce nombre et le son correspondant.

Dans l'importante deuxième partie de son mémoire, S. Germain avait calculé d'après ce rapport le ton relatif à chaque forme, puis comparé le ton calculé à celui que donne l'expérience pour une figure semblable. Cette comparaison faite avec scrupules portait sur un grand nombre d'expériences de M. Chladni et sur bien d'autres propres à Sophie Germain elle-même.

L'entrée en scène du modèle moléculaire : le mémoire de Poisson de 1814.

Au moment où l'amateur Sophie Germain décroche une mention honorable, un professionnel du milieu scientifique s'empare du sujet : Poisson. Revenons quelque peu sur la situation de Poisson car la comparaison de celle-ci avec celle de Sophie Germain est fort significative. Ils vont d'ailleurs s'opposer sur le sujet des surfaces élastiques et être dans une situation de rivalité.

Siméon-Denis Poisson né en 1781, avait été envoyé à l'école centrale de Fontainebleau par son père, un ancien soldat ayant acquis une charge administrative et assez au courant des filières de l'instruction publique. Le jeune Poisson y montre de grandes facultés d'assimilation et de grandes aptitudes en mathématiques. On l'oriente vers le concours de Polytechnique et il y est reçu premier en 1798.

A l'Ecole Polytechnique, Lagrange trouve en lui un auditeur toujours en éveil, Laplace le distingue particulièrement. S'il révèle une

grande maladresse manuelle, - il est par exemple incapable de réaliser des épures et de faire de la géométrie descriptive -, c'est un esprit très abstrait et un brillant calculateur . Aussitôt achevé son temps d'élève, il est désigné comme répétiteur à l'Ecole Polytechnique et connaîtra ensuite grâce à l'appui de Laplace une carrière très facile.

Professeur suppléant à l'X en 1802, puis titulaire en 1806 en remplacement de Fourier , il est nommé au Bureau des Longitudes en 1808, et professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Paris en 1809. Enfin il fréquente assidûment la fameuse Société d'Arcueil animée par Laplace et Berthollet en y jouant plutôt le rôle de conseiller mathématique.

Bien qu'il soit déjà au centre de la vie de la communauté scientifique et cumule les postes d'enseignement , on peut dire qu'en 1809 Poisson est encore au début de sa carrière de savant . Il a assez peu publié et n'est pas encore membre de l'Académie . On a pu dire que la protection personnelle de Laplace pour la carrière de son jeune protégé avait pu être à la source du choix du sujet des surfaces élastiques , Poisson devant décrocher le concours et aussi le siège d'académicien .

Mais en 1812, Poisson avait été élu à l'Institut dans la section de Physique, en remplacement de Malus. C'est peut-être en partie pour cette raison qu'il n'avait pas présenté de mémoire au concours de 1811. Il fit partie du jury du concours suivant.

Poisson lut devant la 1^e classe de l'Institut, le 1^e Août 1814, un *"Mémoire sur les Surfaces Elastiques"* . Il y déclare d'emblée :

*"Mon but a été de parvenir **sans aucune hypothèse**, aux équations d'équilibre des surfaces élastiques dont tous les points sont sollicités par des forces données"* . Il fait bien sûr référence au mémoire anonyme ayant obtenu la mention honorable l'année précédente et fondé sur l'hypothèse que la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales.

En vrai scientifique professionnel, Poisson commence son mémoire par un rappel historique de tous les travaux antérieurs du XVIII^e siècle (Jacques Bernoulli 1705, Euler, Daniel Bernoulli, Jacques II Bernoulli 1788, Lagrange, un mémoire de Biot de 1803, Sophie Germain).

Selon lui tous ces essais infructueux "*plient en deux sens différents*":

- soit comme Euler dans le cas des cloches on se borne à considérer isolément les vibrations de chacun des anneaux circulaires dont une cloche est composée, ce qui réduit la question à celle de simples lignes élastiques,
- soit comme Jacques II Bernoulli en 1788 pour les plaques rectangulaires, on considère la plaque comme composée de deux systèmes de lames parallèles aux côtés du rectangle et qui vibrent comme s'ils étaient collés l'un à l'autre et sans se gêner mutuellement. (c'est aussi le cas d' Euler pour les tambours).

Dans les deux cas, dit Poisson, l'accord avec l'expérience est assez médiocre. Poisson veut rompre avec ces deux types de méthodes qui s'appuient sur la *décomposition géométrique* de la surface dont on veut étudier les vibrations. Il se refuse à exprimer la réaction de la surface par les réactions partielles des courbes dont elle est composée. Ainsi en 1814 Poisson récuse principalement la **tradition géométrique** de la mécanique eulérienne.

Sophie Germain, elle, a tenté de poursuivre cette tradition là, en la fécondant par les méthodes de la *Mécanique Analytique*. Mais il lui manquait la maîtrise de tous les instruments conceptuels.

Disciple de Laplace, proche du groupe de scientifiques de la Société d'Arcueil, Poisson participe de cette mentalité moléculaire qui cherche à étudier de manière nouvelle les phénomènes physiques sur le modèle de la physique newtonienne, c'est à dire par un jeu de forces intermoléculaires, attractives ou répulsives. On sait que Laplace avait tenté de rendre compte des phénomènes de capillarité et de retrouver la loi de Snell, déjà connue, suivant ce modèle. Poisson s'engage dans le même chemin pour l'étude de l'élasticité. Il écrit :

" Cette qualité de la matière peut être attribuée, à une **force répulsive** qui s'exerce entre les molécules des corps, et dont l'action ne s'étend qu'à des distances insensibles ; la fonction qui en représente la loi doit donc devenir nulle ou insensible, aussitôt que la variable qui représente les distances a cessé d'être extrêmement petite ; or on sait que de semblables fonctions disparaissent en général dans le calcul et ne

laissent dans les résultats définitifs que des intégrales totales ou des constantes arbitraires, qui sont les données de l'observation. C'est ce qui arrive en effet dans la théorie des réfractions, et mieux encore dans la théorie de l'action capillaire, l'une des plus belles applications de l'analyse à la physique qui soit due aux géomètres. Il en est de même dans la question présente et c'est ce qui a permis d'exprimer les forces dues à l'élasticité de la surface en quantités dépendantes uniquement de sa figure, tels que ses rayons de courbure et leurs différences partielles".

Poisson va déduire l'équation relative à la plaque de la considération de l'équilibre d'une **seule** molécule d'une surface élastique. Selon lui, la déformation de la surface, que ce soit par son extension ou sa courbure, change les distances entre les molécules et ceci engendre la force d'élasticité qui tend à ramener la surface à sa configuration plane originale.

Il écrit que la force d'élasticité entre deux molécules m et m' à la distance r vaut $e^2 f(r)$ où e est l'épaisseur de la surface élastique, puis fait la résultante de toutes les forces agissant sur une même molécule m , en sommant sur les éléments de la sphère d'activité de la molécule m . Pour satisfaire à des conditions d'intégrabilité, il doit supposer l'épaisseur constante, puis négligeable.

La démonstration mathématique est très embrouillée et il est presque impossible de relier les fondements et les développements mathématiques avec les caractères physiques du phénomène. On peut observer déjà ici, ce qui s'avèrera être une caractéristique constante du style de Poisson en physique mathématique. Et bien que le paradigme mécanico-moléculaire apparaisse pour nous une explication physique causale contraignante, Poisson le présente comme une **absence d'hypothèse** et développe ensuite sa technique mathématique, indépendamment de toute signification physique.

Finalement il aboutit à une équation assez effrayante, non linéaire (fausse, précisons le) :

$$n^2 e^2 \left[\frac{1+q^2 d^2 P}{k^2 dx^2} - \frac{2pq}{k} \frac{d^2 P}{dx dy} + \frac{1+p^2 d^2 P}{k} \frac{d^2 P}{dy^2} - p P \frac{dP}{dx} - q P \frac{dP}{dy} + k \frac{P}{2} (P^2 - 4Q) \right] = Z - pX - qY - kP\Pi$$

$$\text{où } P = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right), \quad Q = \frac{1}{r r'}$$

On peut dire avec Bucciarelli et Dworsky [1980, p 74] que c'est un miracle que cette équation conduise par des simplifications adéquates de linéarisation à l'équation du mouvement d'une plaque vibrante, trouvée par Lagrange et redonnée par S. Germain dans son 2ème mémoire de 1813. En fait si Poisson refusait l'hypothèse de Sophie Germain, il acceptait cette équation qui avait beaucoup gagné en crédibilité, et voulait y aboutir. Sinon, il y a peu de raisons de penser qu'il y serait arrivé directement par sa méthode.

Dans la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique* Poisson indique qu'une autre hypothèse - par exemple que la force élastique soit proportionnelle à la différence des courbures principales - déterminerait la même équation. En fait Poisson note que l'application de la méthode variationnelle de Lagrange à n'importe quelle expression de la forme :

$$[(1/r) + (1/r')]^2 + C [(1/r).(1/r')]$$

où C est une constante arbitraire, donne l'équation de la plaque. C'est pourquoi, et d'une certaine façon à juste titre, Poisson accorde peu d'importance à l'hypothèse de sa rivale.

Un aspect intéressant de l'approche variationnelle du problème de la courbure des plaques est que si l'on suppose, comme le fit Sophie Germain, que la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales, on obtient (comme Lagrange l'a fait) l'équation correct du mouvement des points intérieurs, mais certaines des équations déterminant le comportement des bords de la plaque sont erronées. C'est Kirchhoff qui devait résoudre à partir de 1850 ces difficultés.

L'approche de Poisson lui permet d'obtenir une équation qui comprend la courbure à partir d'un modèle qui exclut celle-ci, puisque le modèle utilisé en 1814 ne tient pas compte de la redistribution des molécules à travers l'épaisseur de la surface et décrit une plaque sans épaisseur sur laquelle seraient répandus des points matériels se repoussant mutuellement. En 1828, dans une controverse de priorité l'opposant à Poisson, Navier reprochera suffisamment à son rival ces incohérences : comment des points matériels sur une surface sans épaisseur peuvent-ils

former un corps solide élastique ? Comment des formules contenant l'épaisseur peuvent-elles s'appliquer à une surface sans épaisseur ? et comment une telle surface peut-elle résister à la flexion ?.

La méthode de Poisson satisfaisait la plupart de ses contemporains qui travaillaient dans le cadre du paradigme laplacien. Seul Lagrange aurait pu l'interroger, mais il était mort en Avril 1813. Biot donnera un écho très favorable à Poisson dans le *Journal des Savants*.

Après la lecture du mémoire de Poisson et le fait que l'équation des plaques vibrantes fut rendue publique, le Prix offert pour la troisième fois au Concours aurait sans doute pu être retiré. Mais il n'en fut rien et Sophie Germain se remit au travail.

3) L'hypothèse de Sophie Germain se démontre-t-elle ?:

Le troisième mémoire de 1815

Dans le préambule au troisième mémoire Sophie Germain écrit : *"J'ai vivement regretté de ne pas connaître le mémoire de M. Poisson, j'ai passé à en attendre la publication un temps qui m'eût été précieux"*. Ce regret confirme, ô combien, cette marginalisation vis à vis de la communauté scientifique dont a souffert Sophie Germain.

On comprend plus aisément qu'elle ait peu varié ses centres d'intérêt et ses méthodes d'approches des questions.

Sophie Germain poursuit : *"J'aurais même entièrement renoncé aux recherches que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de la classe, si je n'avais appris [...] que l'équation obtenue dans une hypothèse différente de celle que j'avais proposée, résulterait également de cette dernière hypothèse. En effet, je voyais chaque jour de nouvelles raisons de regarder mon hypothèse comme incontestable ; et pourtant le respect dû à M. Poisson m'ôtait le courage de soumettre au calcul un principe que je ne prévoyais pas alors d'être d'accord avec l'équation publiée par cet habile géomètre"*.

Ainsi Sophie Germain a acquis une confiance croissante en son hypothèse, et elle va retrouver l'équation générale de Poisson, suivant son approche à elle. La situation est cette fois renversée : alors que Poisson s'était arrangé en 1814 pour retrouver l'équation donnée par Sophie Germain en 1813 du fait qu'elle bénéficiait de l'autorité de Lagrange et

d'une bonne conformité à l'expérience, c'est au tour de Sophie Germain cette fois de se "débrouiller" pour retrouver l'équation non linéaire (et erronée) que Poisson a donnée dans son mémoire de 1814, celui-ci étant devenu un académicien réputé, jouissant d'un prestige scientifique certain.

Dans ce troisième essai, Sophie Germain cherche à étendre sa méthode pour inclure les vibrations des surfaces initialement courbées. C'était une direction de recherche légitime mais son hypothèse de base s'avère inadéquate quand on la généralise à de telles surfaces comme devaient le montrer les travaux ultérieurs en élasticité au XIX^e siècle. Aujourd'hui une méthode pour déduire l'équation générale des surfaces vibrantes avec des conditions aux limites, requiert impérativement la notion d'invariant d'une surface courbe.

La méthode mathématique de Sophie Germain est donc encore largement défectueuse, comme l'était d'ailleurs la déduction erronée de Poisson. Mais avec ce troisième mémoire, le travail de Sophie Germain devient progressivement un des points de résistance et de lutte contre le paradigme laplacien et la mentalité moléculaire.

En effet Sophie Germain interprète toutes les réserves qui sont faites à l'égard de son travail comme une critique exclusive de son "hypothèse", alors que cela n'était pas forcément le cas (sauf pour Poisson). Elle y répond donc en présentant une défense acharnée de la légitimité de cette hypothèse.

Pour cela elle s'appuie sur deux éléments :

a) un postulat méthodologique qui lui semble *a priori* évident, et dont elle veut déduire, par une suite de propositions s'enchaînant logiquement, son "hypothèse" fondamentale qui aurait alors un statut de **théorème**.

Le postulat posé à la base du raisonnement de Sophie Germain est le suivant : l'effet est proportionnel à la cause qui le produit. C'est l'argument tant décrié par d'Alembert dans sa discussion avec Euler sur les principes fondateurs de la Mécanique.

Ici la situation est à trois termes : une cause extérieure produit une déformation d'une surface et celle-ci est elle même la cause des forces d'élasticité. La relation de proportionnalité qui intéresse notre auteur est

celle entre la déformation de la surface, et les forces d'élasticité.

b) La mathématisation de la notion de forme d'une surface, ou bien encore la notion de **déformation**, celle-ci étant définie localement comme une différence entre deux formes.

Dans le texte du mémoire, la forme est symboliquement notée par une lettre :

"... La différence qui sert de mesure aux forces d'élasticité est donc exprimée par la différence entre la figure initiale ou naturelle [notée I] d'un corps élastique et sa figure élastique, c'est à dire celle qu'une force extérieure l'a forcé de prendre [notée E]... "

Ce symbole littéral pour la *forme* ne devient mathématiquement opératoire, dans le cas d'une tige, que par le biais de la notion de courbure. En effet une tige déformée est représentée par une courbe de l'espace qui admet en chaque point un rayon de courbure qui est le rayon du cercle osculateur à la courbe en ce point. L'inverse de ce rayon *mesure* la déformation, par rapport à la forme rectiligne, de la courbe. On l'appelle simplement courbure.

Mais une surface élastique déformée présente une multitude de courbes possibles en chaque point, qui sont les sections de la surface, suivant tous les plans passant par ce point. Sophie Germain postule qu'en considérant la somme de toutes les courbures relatives à toutes les courbes produites par les différentes sections de la surface, on obtiendra une expression qui mathématisera la *forme* de la surface en un point.

Elle propose donc implicitement une procédure intégrale pour définir la courbure de la surface. Y concourent deux raisonnements inductifs issus de deux intuitions distinctes:

- l'une est mathématique : une surface est la somme de ses lignes, au sens du calcul des indivisibles, puis du calcul intégral.

- l'autre est plus proprement physique. Quand on étudie un solide élastique d'épaisseur petite par rapport à ses autres dimensions, Sophie Germain écrira, en 1828, qu'il "*est permis de considérer ce solide comme partagé en un nombre infini de couches infiniment minces, qu'affecteraient toutes durant le mouvement des figures semblables entre*

elles et également semblables aux figures que les diverses couches réellement séparées prendraient si, toutes choses égales d'ailleurs, elles étaient ébranlées isolément..".

L'approche est donc voisine de celles d'Euler ou de Jacques II Bernoulli selon lesquelles on décompose une surface géométrique en somme de lignes indivisibles, décomposition qui a un sens physique puisque les mouvements de la surface résultent de la composition ou de la superposition des mouvements des lignes considérées isolément.

Le style de Fourier en physique mathématique relève également de ce point de vue : la décomposition géométrique des corps y est en relation directe avec la juxtaposition des mouvements simples de la chaleur, et toutes deux sont légitimées par le caractère **linéaire** du phénomène et donc des équations différentielles qui l'expriment . C'est cette méthode physico-géométrique et plus généralement ce style qui sont jugés très suspects par Poisson et les adeptes du modèle mécanico- moléculaire.

Dans son mémoire, Sophie Germain établit que cette somme de toutes les courbures se réduit à deux termes qui sont les **courbures principales**, c'est à dire les courbures maximum et minimum parmi toutes les courbures relatives aux sections passant par la normale au point donné.

Examinons comment Sophie Germain somme toutes les courbures , relatives à toutes les sections planes passant par un point .

Euler pensait déjà qu'on pouvait mettre à l'écart les sections obliques et que la somme des sections normales conduirait à connaître la *" juste mesure de la courbure de la surface au point donné "*. Pour démontrer ce point, Sophie Germain rappelle que la courbure due aux sections obliques renferme le cosinus de l'inclinaison ; donc en prenant pour chacune des positions du plan normal la somme de toutes les sections inclinées, chaque valeur du cosinus interviendra avec des signes opposés, (c'est à dire que dans une intégration de 0 à π par rapport à l'angle d'inclinaison, le résultat est nul) .

On ne s'occupera plus dès lors que des sections normales, c'est-à-dire les sections passant par la normale à la surface au point considéré .

Si f et g sont ici les rayons de plus grande et de moindre courbure ($\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{g}$ sont dites les courbures principales), et si r et r' sont les rayons qui appartiennent aux plans faisant l'un l'angle φ , l'autre l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ avec celui de plus grande courbure, Sophie Germain rappelle que l'on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{f} \sin^2 \varphi + \frac{1}{g} \cos^2 \varphi \\ \frac{1}{r'} &= \frac{1}{f} \cos^2 \varphi + \frac{1}{g} \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

En fait, Euler dans ses *Recherches sur la courbure des Surfaces* [1760] avait établi les formules :

$$r = \frac{2fg}{f+g - (f-g) \cos 2\varphi}$$

et

$$r' = \frac{2fg}{f+g - (f-g) \cos 2(\varphi + \pi/2)}$$

ce qui prouve bien que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$

Ainsi quelle que soit la position de deux plans normaux perpendiculaires entre eux, la somme des courbures des courbes contenues dans ces plans est constante. C'est cette propriété déjà connue qui a pu suggérer à Sophie Germain, l'idée de son hypothèse.

La section finale du mémoire décrit les expériences qu'elle a faites avec les surfaces courbées, à l'image de celles de Chladni avec les surfaces planes. Rencontrant beaucoup de difficultés elle décrit très honnêtement les limites de ses réalisations et ses succès partiels.

Finalement Sophie Germain obtint le Prix de l'Académie pour ce 3ème mémoire mais elle n'alla même pas le retirer. De plus elle ne reçut qu'une réponse laconique et formellement courtoise de Poisson qui éludait toute discussion sérieuse sur les questions de fond et feignait de l'ignorer publiquement. Contrairement à Fourier dont les deux mémoires

de 1807 et 1810 avaient été lus attentivement par Lagrange, Laplace, Poisson et précisément critiqués soit pour l'absence d'hypothèse physique sur la nature de la chaleur, soit pour des développements mathématiques qui semblaient contestables, Sophie Germain n'eut jamais de véritable interlocuteur intellectuel et scientifique dans le domaine de l'élasticité.

IV LES PUBLICATIONS . LA MATURITE

En 1816, Sophie Germain se trouve dans une nouvelle position . Elle vient de passer 6 ans , concentrée sur ce problème du grand prix. D'un côté cela lui a donné un sens de son standing professionnel , une confiance en elle , une autorité. De l'autre, le coeur de la communauté scientifique ne lui témoigne pas le respect qui lui semble dû et ne daigne même pas s'engager dans une réelle discussion scientifique avec elle . Quelques années plus tôt , elle se voyait en novice inférieure dans la compagnie des grands ; maintenant elle n'a plus sérieuse admiration pour son rival principal.

Deux éléments viennent conforter sa propre estime :

- sa rencontre avec Fourier qui deviendra secrétaire perpétuel de l'académie en 1822. Cette amitié et la position de Fourier lui donnent l'impression de participer réellement aux activités de la communauté scientifique parisienne . Elle est invitée à assister aux séances de l'Académie, alors que jusque là seules les épouses des académiciens le pouvaient . Notons que Fourier avait aussi souffert dans sa carrière d'une rivalité avec Poisson et qu'une certaine complicité devait régner entre eux à ce propos.

- le retour à un travail sérieux en théorie des nombres . Elle collabore assez étroitement avec Legendre , pratiquement sur un pied d'égalité , à la mise au point de démonstrations et de contributions clairement significatives et qui portent aujourd'hui encore son nom .

En 1821, elle publie à compte d'auteur le mémoire qui avait remporté le Grand Prix en 1816 sous le titre "*Recherche sur la théorie des surfaces élastiques* ", désirant sans doute prendre date pour la postérité, et alors qu'un nouveau champ est prêt de s'ouvrir en théorie de l'élasticité

et de renouveler les points de vue.

Elle veut aussi en appeler à la communauté scientifique pour arbitrer ce conflit entre la mentalité moléculaire des partisans du modèle laplacien et ceux qui, comme elle, "*considèrent que l'objet des mathématiques n'est pas la recherche des causes qu'on peut assigner aux phénomènes naturels*", et cherchent à décrire mathématiquement des phénomènes généraux "*sans satisfaire au besoin d'explication qui a été dans tous les temps, une source féconde d'erreurs ...* "

L'avertissement qu'elle ajoute au mémoire pour la publication revêt, dans sa retenue, des accents émouvants :

" Deux hypothèses essentiellement différentes ont été proposées. L'une d'elles a pour appui un nom justement célèbre ; c'est une forte raison de se défier de celle qui n'appartient : aussi ai-je fait tous mes efforts pour y renoncer.

Je sens que j'ai besoin de m'étayer d'un jugement étranger. Il ne me reste que ce moyen de dissiper le doute qui me poursuit au milieu des recherches que j'ai entreprises. En exposant mon sentiment, j'y joins mes raisons, afin que le public éclairé les pèse, et m'apprenne à en mieux juger.

Si je prends quelquefois le ton affirmatif, c'est uniquement pour m'affranchir de l'expression fatigante du doute. Il suffit d'avertir une fois le lecteur que, bien loin de prétendre fixer son opinion, je sollicite de sa part l'examen critique de la mienne. On me pardonnera, sans doute, de ne dissimuler ensuite aucun des avantages que je crois reconnaître dans mon hypothèse "

Au cours de la fin des années 1820, de nouvelles théories en élasticité des solides tridimensionnels apparaissent et les travaux de Sophie Germain semblent de peu de poids dans cette nouvelle étape. Pourtant elle intervient à nouveau en 1826 et 1828 au cours de la controverse opposant Navier et Poisson, pour rappeler sa démarche et ses travaux.

le domaine "mixte" de la géométrie physique

Dans ses "*Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques* " (1826) elle essaie de donner une

version plus lucide de son analyse antérieure, en introduisant des hypothèses simplificatrices.

A propos de la notion de surface élastique, elle écrit : "*Elle est en quelque sorte **mixte** entre celle de la surface géométrique et celle du solide. En effet d'une part la surface géométrique n'ayant aucune existence réelle se refuse à toute idée du mouvement, et de l'autre, les molécules qui composent l'épaisseur d'un solide ne peuvent être confondues avec celles qui appartiennent à une des faces du même solide, qu'en vertu de conditions particulières ...*".

Et elle poursuit : "*Cela posé, nous pouvons donc dire qu'un solide doué d'élasticité et dont l'épaisseur est fort petite par rapport à ses autres dimensions, reçoit le nom de **surface élastique** lorsqu'il est assujetti à cette condition que, abstraction faite du temps, chacune des couches dans lesquelles on peut concevoir son épaisseur divisée, se comporte, durant le mouvement de ce solide, de la même manière que s. elle était isolée*".

Ainsi Sophie Germain en vient donc à prendre pour **définition** des surfaces élastiques, l'hypothèse qui lui avait servi de modèle, quinze ans plus tôt! Sa théorie va alors évidemment s'appliquer à de telles surfaces , puisque par définition, ce sont les surfaces *ad-hoc* . Elle procède ici en pure mathématicienne et la justification de l'hypothèse ne se pose plus; la confusion ici est d'ordre épistémologique. Aujourd'hui nous savons que son hypothèse est valide dans des conditions assez restrictives: plaques planes de faible épaisseur, petites déformations, loin des bords ...

Elle rédige au cours des événements de Juillet 1830 à Paris , quelques mois avant sa mort un "*Mémoire sur la courbure des surfaces* [Germain 1831]. Par le sujet même de son dernier travail , Sophie Germain perçoit et désigne ce qui sera l'étape indispensable à franchir pour progresser dans l'étude des vibrations des surfaces élastiques : élaborer une théorie géométrique des surfaces qui contienne le concept d'**invariant** pour des classes de surfaces .

Le travail de Sophie Germain que nous ne détaillons pas ici [30] a pour but de définir une " théorie dynamique de la courbure " et d'exhiber des instruments indépendants , en un certain sens , de la forme concrète

des surfaces , et adaptés au domaine considéré.

Dans ce mémoire qui s'inscrit dans ce domaine "*mixte*" , intermédiaire entre la mécanique et la géométrie, Sophie Germain donne :

a) d'une part une **interprétation géométrique** de l'expression de la force élastique d'une plaque, en la mesurant par le rayon d'une sphère, égal à la courbure moyenne de la plaque déformée, en ce point.

b) d'autre part un **contenu physique** à cette somme des courbures principales, en la désignant comme une quantité physique mesurable :

" Je dis quantité de courbure, car de quelque manière que la courbure soit répartie autour du point donné de la surface, elle fera équilibre à la même quantité dynamique. Au reste je ne dissimule pas que cette manière d'envisager la courbure est entièrement nouvelle. Les géomètres décideront si elle doit être adoptée".

L'interpénétration des notions mathématiques et physiques se fait plus étroite mais sans doute l'est-elle trop, pour être véritablement féconde. Les surfaces auxiliaires que Sophie Germain met en place ("sphère-moyenne", "surface des distances") sont très directement liées à la représentation mécanique : devant matérialiser concrètement l'action des forces élastiques , elles n'ont aucune autonomie par rapport aux idées initiales qu'elle avait en ce domaine et seront finalement de peu d'utilité . De plus , manque aussi la détermination analytique de nombreux éléments d'une surface .

La théorie mathématique de Gauss, puissante, autonome et profonde conduit, elle, à étudier une surface d'un point de vue **intrinsèque**, c'est-à-dire en se plaçant sur la surface elle-même , et en faisant abstraction de ses rapports à l'espace environnant .

C'est en maîtrisant cette théorie , qui a pu paraître n'avoir aucun lien au premier abord avec les surfaces élastiques , que les élasticiens de la deuxième moitié du XIXème siècle progresseront à nouveau.

les professions de foi "positivistes"

Face aux adeptes du modèle moléculaire , Poisson et même Navier, le discours de Sophie Germain dans ces derniers textes se durcit

nettement . Elle écrit dans l' *Examen des Principes* (1828) :

" Qu'il me soit permis de rappeler d'abord que l'objet des mathématiques n'est pas la recherche des causes que l'on peut assigner aux phénomènes naturels. Cette science perdrait et son caractère et son crédit, si, renonçant à l'appui que lui offrent les faits généraux bien constatés, elle cherchait dans la région des conjectures les moyens de satisfaire au besoin d'explication qui a été, dans tous les temps, une source féconde d'erreurs. Dans la question des forces d'élasticité, le fait général, spécial et caractéristique est la tendance que les corps doués de telles forces ont à se rétablir dans la forme qu'une cause extérieure peut leur avoir fait perdre. Cette tendance exige que toutes les molécules du corps élastique tendent aussi à reprendre la place qu'elles occupaient avant l'action d'une cause extérieure qui les aurait déplacées.

Tel est le fait, le seul fait incontestable de l'élasticité ; et si, pour se faire une idée de la manière dont ce fait se réalise, on veut remonter plus haut, on devra craindre d'avoir introduit dans la question des considérations qui lui soient ou inutiles ou même entièrement étrangères."

La référence ici à la notion de causalité pour en assumer le rejet est très ambiguë et peut s'expliquer par le discours radical et opposé de Poisson . S'agit-il d'une cause ultime , expressément physique , - (les molécules qui s'attirent des newtoniens ou bien les petites boules qui s'entrechoquent des cinétistes)-, cause que les mathématiques ne pourraient jamais atteindre tandis qu'elles se contenteraient alors de rendre compte dans leur *langage* des faits généraux et des phénomènes ? On comprend qu'avec de telles déclarations Sophie Germain devint , à son insu , une figure hagiographique dans le panthéon des positivistes, successeurs d'Auguste Comte au XIXème siècle .

Mais en fait assimiler le débat entre partisans et adversaires du modèle laplacien , à une controverse entre adeptes ou non de la "*recherche des causes*" est une traduction en grande partie fallacieuse de ces oppositions car projetant des débats philosophiques bien plus tardifs.

V. LES DERNIERES ANNEES

Dans ses dernières années Sophie Germain se tourna vers des

questions culturelles générales , elle s'intéressait au développement des sciences dans plusieurs domaines , fréquentait des cercles intellectuels. Elle initia par exemple le mathématicien italien Libri , de 24 ans moins âgé qu'elle, à la communauté scientifique parisienne.

Elle rédigea un essai philosophique resté inachevé et qui fut publié de façon posthume en 1832, "*Considérations Générales sur les Sciences et les Lettres* ". Bien qu'incontestablement personnel, cet essai s'inscrit dans les courants d'idées et les milieux sociaux qui l'entourent , et il nous renseigne à leur égard: l'influence des Encyclopédistes et surtout de Condorcet est très sensible, Auguste Comte y était peut-être présent, Hegel y fut sans doute reçu lors de son voyage à Paris en 1827; une des tâches assignées au texte est la réfutation de certaines idées Kantiennes superficiellement comprises.

Le texte est divisé en deux parties :

1 - "*Comment Sciences et Lettres sont dominées par un sentiment qui leur est commun* ". L'idée la plus originale de l'Essai est celle de l'identité des procédés intellectuels dans les deux domaines et même dans toutes les activités humaines . Cette identité est possible à cause du fait que l'homme recherche toujours un ordre , des proportions , une simplicité qui sont le caractère du vrai, et qui font partie d'une nécessité intellectuelle, inhérente aux lois qui régissent sa pensée.

Le maître-mot pour décrire cela est l'analogie. L'analogie existe, l'esprit humain la reconnaît , elle permet d'ordonner, de trouver les lois de l'univers . Sophie Germain développe deux exemples empruntés à la science et à la poésie, poussant le parallèle jusqu'à la notion de *style*. Elle note que la "*langue des calculs* " a aussi son style propre et que tous les auteurs ne l'écrivent pas de la même façon (l'expression vient du titre de l'ouvrage posthume de Condillac et était peu courante).

2 - Sophie Germain frappée de l'aperçu si neuf que Condorcet avait donné dans son *Esquisse sur les Progrès de l'Esprit Humain* cherche aussi à préciser les considérations de la 1ère partie , aux différentes époques de la culture. Elle a le sentiment d'un état métaphysique qui a précédé l'état scientifique et ceci rappelle évidemment la loi des 3 états d'Auguste Comte , même si elle n'est qu'ébauchée. Celui-ci a écrit d'elle : "*son excellent discours posthume indique en Sophie Germain une philosophie*

très élevée, à la fois sage et énergique , dont bien peu d'esprits supérieurs ont aujourd'hui un sentiment aussi net et aussi profond . J'attachera toujours le plus grand prix à la conformité générale que j'ai aperçue dans cet écrit avec ma propre manière de concevoir l'ensemble du développement intellectuel de l'humanité."

Enfin pour elle " *la distinction entre les faits contingents et les faits nécessaires est quant au fond , celle qui se trouve entre les faits dont on ignore et ceux dont on connaît la nature.*" et son déterminisme qui s'exprime avec les mêmes mots que celui de Laplace est bien la croyance scientifique dominante d'une époque.

Que Sophie Germain manquât de vrai génie, c'est incontestable, et elle était la première à en être persuadée . Mais elle possédait du talent , des dons réels , beaucoup de volonté, d'opiniâtreté, une passion exclusive et désintéressée pour les mathématiques et la science . Combien d'hommes ont-ils laissé un nom dans la science avec bien moins que cela ?

Outre ses résultats incontestables en théorie des nombres , sa contribution à l'étude des phénomènes élastiques doit être retenue. Malgré des défaillances au regard des mathématiques de son temps , son explication des figures de Chladni a conduit à l'équation correcte du comportement des plaques élastiques et a stimulé ses contemporains . Son approche d'un corps élastique comme un continuum dans lequel se distribuent des forces et des déformations nous est bien plus familière que la méthode totalement caduque de Poisson.

Etre femme , autodidacte de surcroît, ne facilite pas les choses encore de nos jours, dans la voie que Sophie Germain avait choisie . On peut imaginer ce que cela devait représenter dans ces premières décennies du XIXème siècle.

Bibliographie

- L.L.Bucciarelli et N.Dworski : *Sophie Germain, An Essay in the History of the Theory of Elasticity* . D.Reidel Publishing Compagny. Dordrecht. 1980.

Nous tenons à souligner notre dette à l'égard de cet ouvrage .

- *Oeuvres Philosophiques* de Sophie Germain , précédées d'une *Etude sur sa Vie et son Oeuvre* par H.Stupuy. Paris . 1872. De nombreuses lettres s'y trouvent reproduites.

= Sophie Germain : *Recherches sur les Surfaces Elastiques* . Paris. 1821. Impr. Vve Courcier.

- : *Remarques sur la nature , les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques , et Equation Générale de ces Surfaces*. Paris . 1826. Impr. Huzard Courcier.

- : " Examen des Principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques" *Annalas de Chimie et de Physique*. T 38., p 123- 131. 1828. Ce dernier texte est écrit en réponse implicite au mémoire de Poisson d'avril 1828, paru dans les mêmes *Annales*, T 37, p337.

- Amy Dahan Dalmedico : "Etude des Méthodes et des "Styles " de Mathématisation: La Science de l'Elasticité." à paraître dans l'ouvrage dirigé par R.Rashed *Recherches sur les Sciences à l'Epoque de la Révolution*. Paris. Lib.Blanchard. 1988.

- : "Mécanique et Théorie des Surfaces : les Travaux de Sophie Germain" à paraître in *Historia Mathematica* .1988.

-