PLANETARIUM ET

FRACTIONS CONTINUES

Lecture d'un texte de Huygens dans une classe de 3e.

Marie Françoise JOZEAU
Maryvonne HALLEZ

L'atelier a consisté à raconter le travail fait à propos du texte au sein du groupe M.A.T.H. de l'I.R.E.M. de Paris VII et l'expérience de lecture dudit texte dans une classe de 3e.

Texte : **"Descriptio automati planetarii"**
Œuvres Complètes de Christiaan Huygens
T 21. p : 626 - 628 - 630
1728 3e ed.
(1e ed. 1703 posthume)

Nous avons présenté l'atelier en trois parties :

I CLIMAT DE L'EPOQUE

Les vieilles idées sur la terre centre du monde disparaissent. Les lunettes de plus en plus perfectionnées donnent un formidable essor à "l'astronomie d'observation". Galilée a publié son "Dialogo" en 1632. Les représentations des systèmes du monde de Ptolémée, Tycho Brahé et Copernic du tome 2 de l'Histoire Générale des Sciences de Taton sont fort éclairantes. (fig. 1-2-3.)

La description des orbes célestes de Ptolémée est abandonnée mais depuis peu. Tycho Brahé, observateur hors pair et passionné, invente le modèle compromis surprenant : la terre est au centre ; la lune et le soleil tournent autour d'elle, le reste des planètes tourne autour du soleil. Une lecture de la bible interdisait la théorie de Copernic.[1]

Le système de Copernic sera majoritairement accepté. "L'astronomie copernicienne n'apporte pas seulement un nouvel arrangement plus économique des "cercles", mais une nouvelle image du monde"[2]

Kepler (1571-1630) pensa en première hypothèse que la terre décrivait autour du soleil un cercle "excentré" ce qui était compatible avec les observations. Ses recherches sur Mars lui firent ensuite opter pour une orbite elliptique aplatie proche du cercle. Sa loi des aires infirmait l'uniformité du mouvement : le rayon vecteur qui joint une planète au soleil balaie des aires égales en des temps égaux. Kepler publia son hypothèse en 1609 ; mais la démonstration aux yeux de la communauté scientifique ne fût faite qu'en 1680 par Newton avec sa théorie de la gravitation.

1 *Constitution du modèle planétaire de Philolaos à Gassendi - I.R.E.M. de Picardie 1984.*
2 *A. Koyre - Etudes d'histoire de la pensée scientifique Paris. Gallimard 1973 p. 12.*

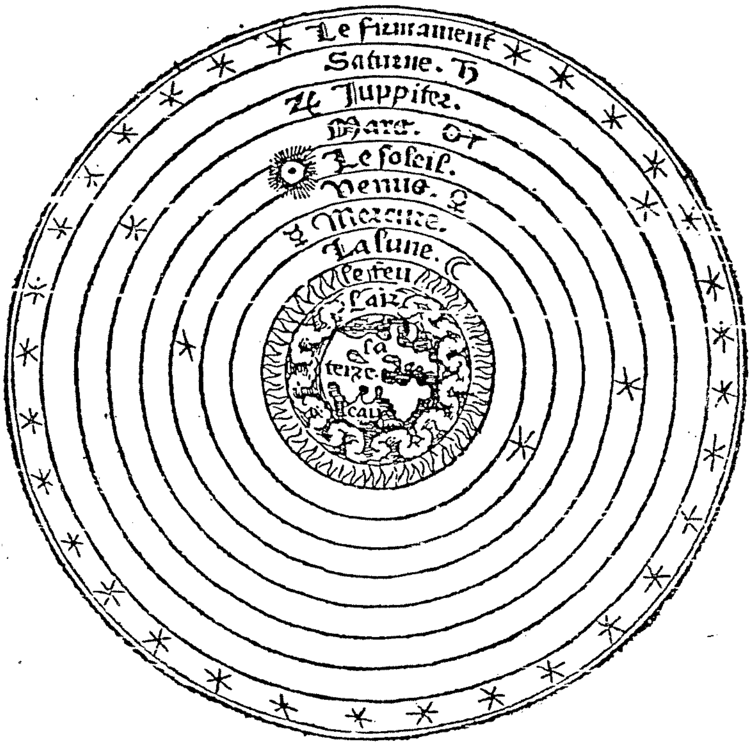


FIG. 3. — L'Univers médiéval : description des « orbes célestes » d'après Ptolémée (O. FINE, *Théorique de la huictième sphère et sept planètes*, 1523)

Fig. 1

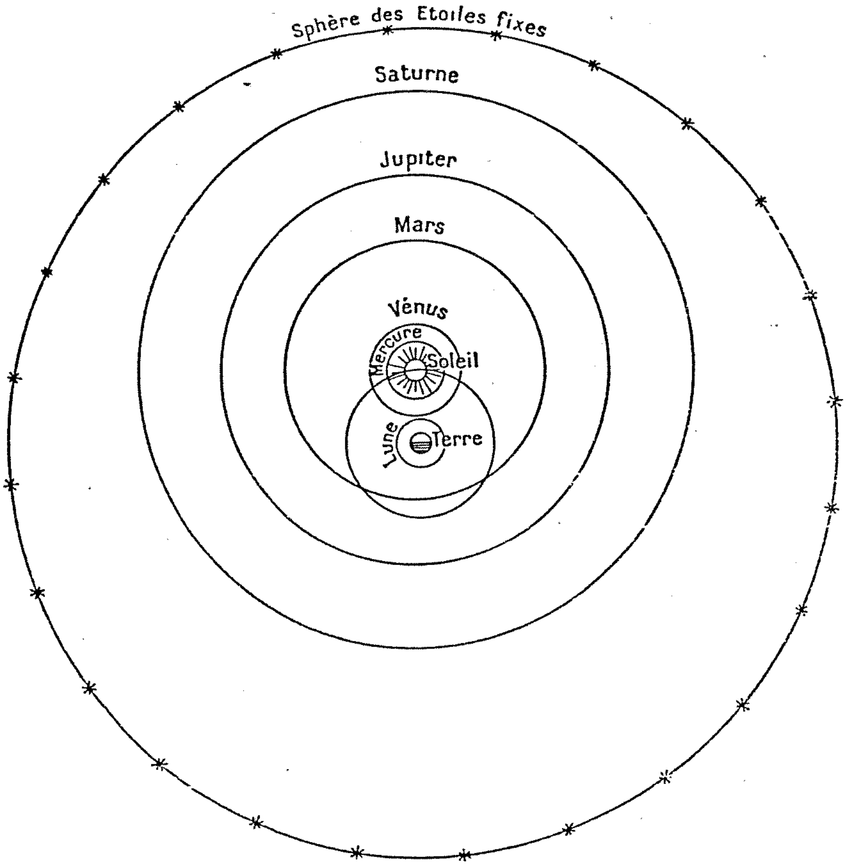


FIG. 5. — L'Univers de Tycho Brahé (d'après O. VON GUERICKE, *Experimenta nova*, 1672)

Fig. 2

Histoire générale des Sciences R. TATON

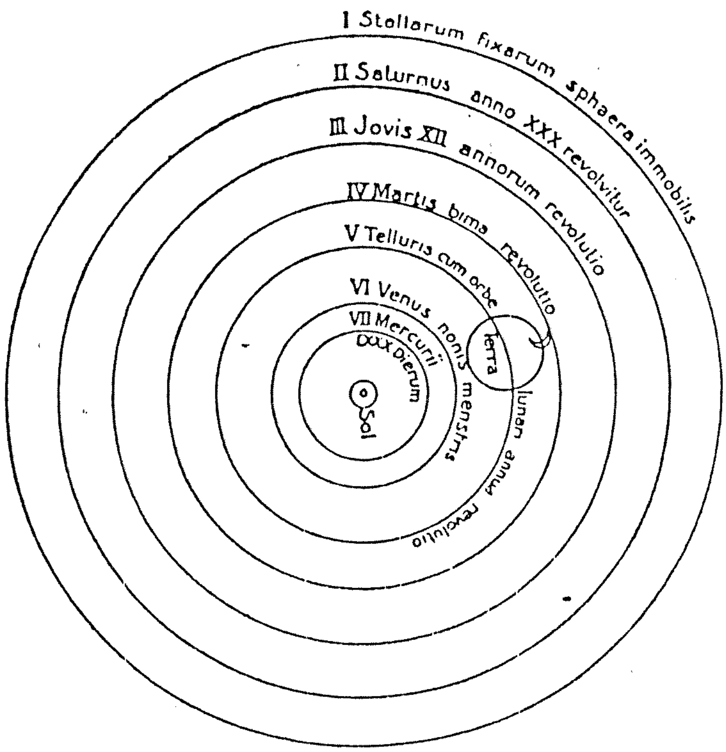


Fig. 3

Système de COPERNIC

La science devient à la mode après le retentissement des travaux de Descartes, Pascal, Galilée, Kepler ... Et, comme il est dit à propos de la portée du canon dans les Actes du Colloque de Montpellier : "Dès la fin du XVIe siècle, et au début du XVIIe siècle, une nouvelle "race" de savants est née, qui acceptent de s'intéresser aux nombreux problèmes techniques". [1] Christiaan Huygens, comme nous allons le voir, est un bon représentant de cette nouvelle "race".

Comment Colbert eût-il résisté à la tentation de mettre la main sur ce nouveau domaine ? La haute société du temps de Louis XIV n'interposait point de barrière entre les sciences et les lettres et s'exaltait sur les découvertes de Huygens, de Rœmer ou de Cassini après avoir discuté sur Tartuffe et sur Spinoza. Colbert constitua l'Académie des Sciences définitivement en 1666. Ses premiers membres comptèrent entre autres Huygens, Roberval, Picard, Claude Perrault, Rœmer, Mariotte ...

Olaf Rœmer, jeune paysan de 27 ans, né en 1644 est enlevé de Copenhague par l'abbé Picard qui le fait nommer professeur d'astronomie du dauphin, futur Louis XV ; il le fait aussi élire à l'Académie des Sciences et loger à l'Observatoire. Sitôt arrivé à Paris, Olaf Rœmer se signale par une activité débordante "se distrayant de ses travaux astronomiques en construisant des planétaires". [2] La grande découverte de Rœmer fut la vitesse du rayon lumineux qu'il évalua à 308000km/sec. Les machines planétaires de Rœmer furent expliquées au roi par Cassini le 5 décembre 1681. Ces détails sont nécessaires pour comprendre les lettres de Huygens à propos de son propre planétaire.

II HUYGENS ET SON SEJOUR à PARIS

Un élève fit le résumé suivant de la vie de Huygens : "Christiaan Huygens est un savant hollandais né le 14 avril 1629 et mort le 8 juillet 1695 à la Haye ; il est le fils de Constantin Huygens et de Suzanne von Baerle, originaire du Brabant du Nord. La famille entière eut un grand rôle dans la vie politique du XVIe et du XVIIe siècle. Chritiaan fit les mêmes études que son grand-père du même nom à l'Université. Il possèdait comme écrivain le secret d'être à la fois concis et très clair". Huygens apparaît comme un mathématicien et un physicien de premier ordre en même temps qu'un organisateur de la recherche scientifique. Par l'entremise de Colbert, la France offrit honneurs, pensions et titres de 1666 à 1681 au savant hollandais nommé membre de l'Académie Royale des Sciences. Il résida à Paris et travailla à l'Observatoire dès sa construction en 1672. Entre 1670 et 1680, il écrivit une description détaillée et précise de la construction d'un automate planétaire donnant une représentation des positions relatives et des mouvements respectifs des planètes. Cet écrit fut rendu public après sa mort et publié en 1703. L'automate fut réalisé en 1682 par Johanes van Ceulen à La Haye après que Huygens, malade, s'en fut retourner en son pays. Il est actuellement visible au Musée Bœrhave du Leyde.

1 *Actes du Colloque de Montpellier 1985 - Colloque Inter I.R.E.M. p. 78.*
2 *P. ROUSSEAU - Histoire de la science - Paris 1945 - Fayard p. 288.*

III ETUDE DU TEXTE. Experience avec des élèves de 3e

① Le texte

Lors d'une séance de travail du groupe M.A.T.H. à l'I.R.E.M. Paris VII, Jean-Luc Verley, entre autre pourvoyeur du groupe en textes historiques du groupe "textes historiques mathématiques", proposa un travail sur la "descriptio Planetarium" de Huygens. L'expérience relatée concerne un travail en classe de 3e. (Drôle de phrase !!)

② Les objectifs

Ils étaient de trois sortes.

2.a) Présenter un outil mathématique inconnu des élèves : la fraction continue, sa pratique, son utilité. Ce travail permettant en corollaires (?) de les familiariser avec les notions d'approximation et d'encadrement d'un réel et de réviser les théorèmes d'algèbre de compatibilité de l'égalité et de l'addition, de l'égalité et de la multiplication, la relation d'ordre, les proportions, le calcul dans l'ensemble des rationnels.

2.b) Montrer que la construction de machines est une des composantes de l'activité mathématique ce qui apparaît très clairement au 17e siècle et a quelque peu disparu au 20e siècle ! Ce texte illustre le va et vient entre pratique et théorie, précision des mesures et avancements de la science.

2.c) Montrer la vie d'une communauté scientifique où les échanges de lettres pouvaient être riches et féconds. Huygens s'intéressait aux mathématiques, à la physique, à la biologie, aux lettres, au dessin, à la musique.

③ L'expérience

Elle se déroula sur quatre séances.

3.a) Durant la première séance d'une heure, vingt minutes furent consacrées aux révisions d'arithmétique. Puis la classe fut divisée en cinq groupes. A l'un d'entre eux, un travail de documentation fut demandé pour gagner du temps. Les élèves de ce groupe furent prioritairement envoyés au tableau pour préparer le contrôle et rattraper le retard en maîtrise de calcul pris par rapport aux autres groupes.
Ce groupe eut à lire l'extrait suivant du texte et répondre aux questions qui le suivent.
Extrait du texte de Huygens "Descriptio" p. 326. L'omission de la valeur du rapport était voulue pour que les élèves fassent le calcul.

"Le mouvement annuel de Saturne – je me base, tant ici qu'ailleurs, sur les plus récentes Tables de Riccioli – est dit avoir la valeur 12° 13' 34" 18'".

Celui de la terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de 359° 45' 40" 31'''. Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport

Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit la révolution autour du Soleil."

Informations

12° 13' 34" 18''' se lit 12 degrés
13 minutes
34 secondes
18 tierces

60 tierces = 1 seconde

Questions

① Calculez le rapport dont il est question dans le texte

② Analysez ce texte et allez chercher au C.D.I. les informations qui vous manquent pour la compréhension de ce texte

③ Devinette : Qui peut avoir écrit ce texte ?
A quelle époque

Les cinq autres groupes reçurent cet autre extrait avec encore un encadré blanc pour leur réponse et devaient répondre aux questions qui le suivent :
“Pour trouver des nombres plus petits que
expriment approximativement le rapport

$$\frac{77708431}{2640858...}$$

je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit avec le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi, je trouve que la première division donne

$$\boxed{}$$

c'est-à-dire un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1.

Questions

① Donnez un exemple de :
un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1
donnez ensuite l'écriture rationnelle du nombre, plus la fraction, choisi.

② Donnez un exemple de :
un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 (autrement dit dont le dénominateur est de nouveau un nombre plus une fraction à numérateur 1).

③ Ecrivez l'égalité fondamentale de la division euclidienne de 77708431 par 2640858.

④ Sans effectuer d'opération, divisez les deux membres de cette égalité (du ③)) par 2640858.

⑤ Donnez l'égalité fondamentale de la division de 2640858 par le reste de la 1ère division r_1.

⑥ Sans effectuer d'opération , divisez les deux membres de l'égalité du ⑤ par le reste de la 1ère division r_1 .

⑦ On appelle r_2 le reste de la division effectuée en ⑤ . Donnez le quotient entier de r_1 par r_2.

⑧ On pose $a = 77708431$
$b = 2640858$

Exprimez :

① $\frac{a}{b}$ en fonction de r_1

② $\frac{b}{r_1}$ en fonction de r_2

③ $\frac{r_1}{b}$ en fonction de r_2

donnez la valeur entière de $\frac{r_1}{r_2}$.

⑨ Relisez le texte et essayez de remplir le rectangle blanc.

3.b) La deuxième séance au cours suivant comporta le compte-rendu du premier groupe, la présentation du travail d'un autre groupe volontaire pour l'exposer et la fin des exercices.

3.c) Durant la troisième séance de vingt minutes, la semaine suivante, nous lûmes le texte suivant qui englobait les deux premiers extraits déjà connus des élèves puis une lettre du 27 août 1682 adressée à Colbert par Huygens.

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière suivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète sous l'écliptique [29]) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre sont consignés dans les tables astronomiques, en réduisant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou soixantièmes parties de secondes. Comme les nombres ainsi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits simultanément dans leurs orbites par la planète considérée et par la terre, il s'ensuit que les périodes de l'une et de l'autre sont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc aussi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, savoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée sur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt son orbite entière, puisque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correspond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la question se réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne soient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fournisse un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la chose plus claire par un exemple. Supposons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et est elle-même montée sur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de Riccioli — est dit avoir la valeur $12°13'34''18'''$ [30]). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de $359°45'40''31'''$ [31]). Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431 [32]). Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement possible, ce même rapport au nombre des dents de sa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve que la première division donne

$$29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \text{ etc. } [33])$$

c. à. d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur est composé de la même manière; et ainsi de suite. Poursuivant ce calcul aussi longtemps que possible, on parvient enfin par la division à un reste 1.

Or, lorsqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la série, p.e. ici la fraction $\frac{1}{5}$ [33]) et celles qui la suivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, sera voisin de celui du plus petit nombre donné au plus grand; et la différence sera si faible qu'il serait impossible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction est aisé; en effet, les dernières fractions, par lesquelles nous commençons, savoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; passant à celle qui précède immédiatement et réduisant, $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant ensuite avec la fraction le nombre entier et réduisant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conséquent le rapport 7 : 206 est voisin de 2640858 : 77708431. C'est pour quoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à sa roue motrice.

Descriptio Planetarium

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière ſuivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète ſous l'écliptique [29]) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre ſont conſignés dans les tables aſtronomiques, en réduiſant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou ſoixantièmes parties de ſecondes. Comme les nombres ainſi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits ſimultanément dans leurs orbites par la planète conſidérée et par la terre, il s'enſuit que les périodes de l'une et de l'autre ſont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc auſſi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, ſavoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée ſur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt ſon orbite entière, puiſque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correſpond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la queſtion ſe réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne ſoient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fourniſſe un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la choſe plus claire par un exemple. Suppoſons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et eſt elle-même montée ſur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me baſe tant ici qu'ailleurs ſur les plus récentes Tables de Riccioli — eſt dit avoir la valeur $12°13'34''18'''$ [30]). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, eſt de $359°45'40''31'''$ [31]). Réduiſant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431 [32]). Par conſéquent, comme le dernier nombre eſt au premier, ainſi eſt la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit ſa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement poſſible, ce même rapport au nombre des dents de ſa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je diviſe le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reſte de la première diviſion et enſuite ce reſte par le nouveau reſte. Continuant ainſi je trouve que la première diviſion donne

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}}}}$$ [33])

c. à. d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur poſsède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur eſt compoſé de la même manière; et ainſi de ſuite. Pourſuivant ce calcul auſſi longtemps que poſſible, on parvient enfin par la diviſion à un reſte 1.

Or, lorſqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la ſérie, p.e. ici la fraction $\frac{1}{5}$ [33]) et celles qui la ſuivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, ſera voiſin de celui du plus petit nombre donné au plus grand; et la différence ſera ſi faible qu'il ſerait impoſſible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction eſt aiſé; en effet, les dernières fractions, par leſquelles nous commençons, ſavoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; paſſant à celle qui précède immédiatement et réduiſant, $\dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant enſuite avec la fraction le nombre entier et réduiſant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conſéquent le rapport 7 : 206 eſt voiſin de 2640858 : 77708431. C'eſt pourquoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à ſa roue motrice.

N° 2273.

Christiaan Huygens à J. B. Colbert.

27 août 1682.

Appendice au No. 2272.

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens [1]).

Defcription de la Machine Planetaire Automate.

La boete octagone qui contient la machine eft large et haute de 2 pieds profonde de 6 pouces. La plaque dorée ou l'on voit le fyfteme planetaire eft couverte d'une glace enchaffee dans une bordure de cuivre dorè qui s'ouvre a charniere.

Les chemins ou orbites des Planetes font percées tout au tour, et les planetes paroiffent au deffus de la plaque, chacune eftant reprefentée par une petite demie boule d'argent placée et enchaffée au centre d'un petit rond dorè plat qui reprefente le ciel ou vortex particulier de la planete et qui la rend plus aifée a remarquer, outre que ces mefmes ronds fervent dans Saturne Jupiter et la Terre a porter leur compagnons ou lunes, defquelles noftre lune tourne regulierement autour de la terre, et montre par fa pofition les nouvelles et pleines lunes et les autres phafes.

Le nombre de l'année, et le jour du mois paroiffent a travers 2 ouvertures qui font entre les orbites de Saturne et de Jupiter vers le bas.

L'heure [2]) et les minutes fe voient dans l'ouverture en demi cercle qui eft entre les orbites de Jupiter et de Mars, ou le petit rond qui porte le nombre de l'heure, marche de gauche a droite et marque en paffant les minutes gravées a la circonference. Et quand cette heure fe cache, il en paroit une autre a l'oppofite et ainfi toutes fucceffivement.

Une horloge enfermée dans la machine, et que l'on monte tous les 8 jours, fait aller les heures ies jours les annees et toutes les planetes, fort precifement dans le temps de leur periodes, tant pour le moyen mouvement que pour l'inegalitè qui demande qu'elles aillent plus lentement a mefure qu'elles fe trouvent plus eloignees du foleil, en quoy j'ay reprefentè l'hypothefe de Kepler.

Quand on veut voir en un moment les mouvements des planetes qui fe font pendant plufieurs annees, ou que l'on fouhaite de fcavoir leur pofition a quelque jour donnè d'année paffée ou future, on applique la manivelle du coftè droit, et on la tourne d'un mouvement fort aifè, jufqu'a ce que l'an et le jour donnè paroiffent au milieu des deux ouvertures fufdites. alors toutes les planetes font dans leur

[1]) Dans le livre F des Adversaria, p. 98.

pofition veritable pour le temps donnè. Et pour les remettre au jour prefent on n'a qu'a tourner la manivelle du fens contraire, jufqu'a ce que l'année et le jour ou l'on eft paroiffent comme auparavant au milieu des mefmes ouvertures. L'on peut fcavoir par ce moyen a quel jours toutes les conjonctions oppofitions et divers afpects des planetes doivent arriver et quand elles devienent vifibles ou fe cachent pres du foleil. Auparavant que de tourner la manivelle l'on lache une vis en dedans de la machine, par ou l'horloge ne luy communique plus fon mouvement aux planetes, mais les heures pourtant vont toufjours leur train et quand on a oftè la manivelle on ferre derechef cette vis a fin que tout reprenne fon mouvement ordinaire.

Afin de voir quand on veut le dedans de la machine on a fufpendu toute la boete a un chaffis de fer qui tourne fur deux pivots. Il eft cachè pour la plufpart derriere la boete. Par ce moyen on fait venir devant le coftè de derriere qui touchoit le mur ou la tapifferie, et alors en abatant le couvercle on voit toute l'invention de la machine et l'horloge qui donne le mouvement. La principale pièce qui paroift eft un grand axe couchè de travers le long de la placque de derriere dont il egale la largeur. cet axe porte les pignons qui engrainent dans les roues de chaque planete et dans celles des jours et des annees lefquelles roues font toutes enfermees entre les 2 plaques de devant et de derrière dont la diftance eft d'un pouce. Et la plaque de derrière eft [ ] [2]) droit de chaque [ ] [2]) à fin qu'ils puiffent toucher leur roues.

Avantages de ma machine par deffus celle de Mr. Romer [3]).

Que la miene reprefente toutes les orbites dans leur veritable proportion au lieu qu'il a falu a Mr. Romer faire celles de Mercure Venus la Terre et Mars
1. beaucoup plus grandes qu'il ne faut a proportion de Jupiter et Saturne. D'ou
2. s'en fuit que fa machine ne reprefente pas la veritable Idée du fyfteme du
3. monde ni ne montre point les lieux apparents de Saturne et de Jupiter, ni les conjonctions des 3 planetes ☿ ♀ ♂ ni de la lune avec Jupiter et Saturne.

4. Que mes periodes de toutes les planetes font beaucoup plus juftes que dans la machine de M. Romer, parce que j'ay une meilleure methode [4]) de trouver les nombres des dents des roues.

4. Que mes planetes courrent au deffus de la plaque au lieu que les fienes font

[2]) Mots illisibles.

[3]) Ce qui suit est écrit au recto de la feuille dont le verso contient la description précédente. Il est donc incertain, et même douteux, que cette pièce ait fait partie de la description envoyée à Colbert. Consultez, d'ailleurs, la Lettre N°. 2255.

[4]) Celle des fractions continues. A cette occasion Chr. Huygens fut conduit à la découverte des théorèmes fondamentaux bien connus qui les concernent. On les trouve exposés pour la première fois dans la description de son planétaire, citée dans la note 5 de la Lettre N°. 2255.

derriere et ne paroiſſent qu'a travers les cercles vuidez qui chacune en 4 endroits doivent laiſſer des morceaux pour tenir la plaque enſemble, derriere leſquels morceaux les corps des planetes s'eclipſent. Outre cela il y a encore
5. ces deux avantages, l'un que Jupiter et Saturne portent avec eux leur ſatellites.
6. l'autre qu'en mettant quand je veux une terre un peu plus grande, à la place de celle que l'on y voit ordinairement accompagnée de la lune, je repreſente par là les diverſes ſaiſons de l'année, et lè lever du ſoleil et des planetes au deſſus de noſtre horizon, et leur coucher. De meſme qu'en mettant un plus grand
7. Saturne je montre la cauſe de toutes les differentes apparences de l'anneau dont cette planete eſt entourée.

8. Que ma machine a ſon propre mouvement par le moyen de l'horloge que j'y ay enfermee qui montre les Heures et les minutes. au lieu que l'autre ne va que lors qu'on la tourne avec la main. Et ſon mouvement eſtant malaiſè il n'y auroit preſque point moyen de la faire aller par une horologe, de plus ce mouvement difficile fait que lors qu'on veut faire voir a l'œil le mouvement des planetes on ne peut pas appliquer une manivelle a l'arbre, mais il y faut neceſſairement une clef, ce qui produit un mouvement interrompu et par
9. repriſes; au lieu que ma machine tournant par le moyen d'une manivelle, fait voir un mouvement egal et continu dans toutes les planetes et qui va ſans peine.

10. Que celle de M. Romer ne peut eſtre ſuſpendue contre un mur comme la miene mais qu'elle doit eſtre ſur une table ou ſur un pied, en ſorte qu'on y puiſſe aller derriere pour la faire tourner avec la clef, et pour voir le jour de l'année.

11. Que l'on peut ouvrir la miene eſtant pendue contre un mur, de meſme que l'on ouvre une montre, pour faire voir le dedans et pour y toucher en cas de beſoin, ce qui n'eſt pas ainſi dans celle de M. Romer qui ne s'ouvre que par quelqu'un des coſtez.

12. Que le jour du mois ſe voit par devant ſur la plaque, au lieu que dans la machine de M. Romer ce jour eſt marquè ſur le coſtè de derriere.

13. Que dans la miene il y a un fil attachè a la Terre et un autre au ſoleil par le moyen deſquels on decouvre le lieu apparent des planetes dans le zodiaque, ce qui ne ſe peut faire dans la machine de Romer a cauſe des tenons.

---

[a]) Ce que cette machine a de particulier par deſſus celle de Mr. Romer.

3.d) Une semaine plus tard, la quatrième séance consista en une évaluation utilisant un autre extrait de la même description du planétaire. Des réutilisations de l'objet "fraction continue" furent faites durant cette semaine en interrogations orales de courte durée. Ci-dessous, texte du contrôle-évaluation de trente minutes.
Rappel de la méthode, énoncée par Huygens en ces termes : "Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste ..."

I Utilisez cette méthode pour justifier le résultat trouvé par Huygens dans le paragraphe suivant après avoir justifié la conversion en minutes des périodes.

> C'eſt auſſi à peu près de la même manière qu'ont été trouvées les dents des pignons qui meuvent Mercure: prenant 365 jours, 5 heures, 49′ 15″46‴ pour la période de la terre ſous l'écliptique [40]) et 87 jours, 23 heures, 14′24″ pour celle de Mercure ſous elle [41]), ou plutôt, pour la facilité du calcul, reſpectivement 365 jours, 5 heures, 50′ et 87 jours, 23 heures, 15′ [41]), on trouvera pour le rapport des révolutions de Mercure à celles de la Terre 105190 : 25335 ou 21038 : 5067, par la diviſion deſquels nombres, exécutée ſuivant la méthode ſuſdite, il vient

$$\frac{21038}{5067} \Big|\; 4 + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7} \text{ etc.}$$

II Quelle fraction obtient-on si l'on stoppe les divisions faites par Huygens au trait noir dans le paragraphe suivant ? Quelle conclusion peut-on en déduire quant au nombre de roues.

> Pour établir les nombres des dents des rouages qui mènent la Lune [42]), nous prenons ici auſſi pour le même mouvement annuel 365 jours, 5 heures, 50′ et pour celui de la Lune 29 jours, 12 heures, 44′ 3″ ou plutôt 45′ pour la facilité du calcul, d'où l'on trouvera pour le rapport des révolutions de la Lune à celles de la Terre 105190 : 8505 ou 21038 : 1701; en diviſant comme auparavant il en réſulte

$$\frac{21038}{1701} \Big|\; 12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + 1$$

III Observations sur l'expérience

a) Le premier groupe chercha la définition de la tierce, fit la conversion en tierces sans erreurs, rappporta les dates de Riccioli (1598-1611), sa professeion (astronome et géographe) et sa nationalité (italien). Quant à la devinette sur l'auteur du texte, ils conjecturèrent d'abord Descartes et écrivirent : "mais après réflexion c'est impossible car celui-ci est mort 21 ans avant Riccioli alors que l'auteur parle des "plus récentes tables de Riccioli" ; celui-ci n'établit des tables qu'à la fin de sa vie. Nous supposons donc que Pascal est l'auteur de ce texte : c'est le savant qui correspond le mieux.

b) Dans les autres groupes l'expression de Huygens pour ce que nous nommons fraction continue suscita beaucoup de commentaires. Un seul groupe donna un exemple conforme aux souhaits de Huygens.

c) La calculette utilisée par les élèves donne pour le quotient :

$\frac{77708431}{2640858}$ le nombre 29,425448. Devant leurs difficultés pour trouver le reste de la division euclidienne, je leur conseillais de taper $29 \times 2640858 - 77708431$ qui leur donnaient l'opposé du reste.

d) La division des deux membres de l'égalité $77708431 = 29 \times 2640858 + 1123549$ par 2640858 donna de la part de presque tous les élèves :

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + 1123549$$

L'oubli du dénominateur pour le dernier terme me permit de leur rappeler l'importance de la notion de distributivité.

e) Le calcul de l'écriture rationnelle de

$29 + \frac{1}{2}$, $29 + \frac{1}{1+2}$ leur sembla un jeu amusant

f) Les élèves avaient déjà lu des textes anciens, la lecture des textes de Huygens les valorisent quant à cette maîtrise, elle me permet d'insister sur le fait que la parcellisation actuelle des connaissances n'a pas toujours régné.

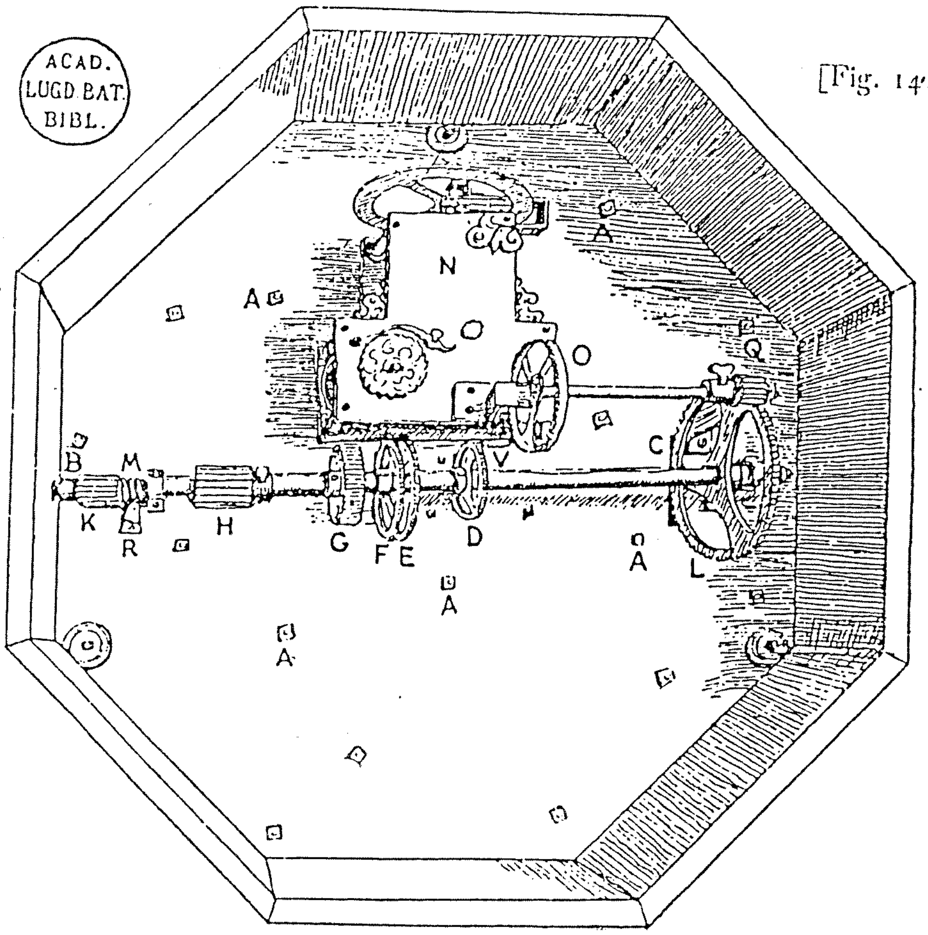
D'autres expériences sur ce texte ont eu lieu et auront lieu. Un collège de l'enseignement technique stagiaire du PAF "Approche des mathématiques par des textes historiques", que le groupe M.A.T.H. anime, propose une réalisation moderne d'un planétaire avec ses élèves utilisant les calculs de Huygens ; cette construction est presque achevée : il eut l'astuce de remplacer les roues dentées par de multiples disques de caoutchouc. Un travail sur l'apport théorique de Huygens à propos des "fractions continues" est entrepris avec une étude du livre VII des Eléments d'Euclide que cite Huygens à ce propos.

Et voici ce que Huygens dessina pour les besoins du technicien.

CB est l'axe de fer long de 2 pieds

D, E, F, G, H : roues dentées qui mettent en mouvement
Mercure, Vénus, la Terrre, Mars, Jupiter.

K,O : Saturne.



[Fig. 144].

BIBLIOGRAPHIE

P. ROUSSEAU Histoire de la Science - Paris - Fayard 1945

R. TATON Histoire Générale des Sciences - Paris PUF 1958

C. HUYGENS Œuvres Complètes T 21 Amsterdam 1728 par J.Van's Gravesand

A. KOYRE Etudes d'histoire de la pensée scientifique Paris- Gallimard 1973

J. ITARD Essais d'histoire des mathématiques. Paris- Blanchard 1984.

J. ITARD Arithmétique et théorie des nombres - Que Sais-je

U. FRANKFOURT et A. FRENK Christiaan Huygens - trad. Française - Edition Mai 1976 par I. Sokolov

VALIRON Mathématiques

Le temps en question 1979. Institut Néerlandais, 12 rue de Lille Paris VII

Endeavour Janvier 1959. Revue Bilingue - article le Planétarium par H.C. King

Actes du Colloque Montpellier - I.R.E.M.

A. KOESTLER Les Somnambules - Presse Pocket.