

HUYGENS - DE WITT

Un modèle mathématique de calcul de la

valeur des événements incertains

N. MEUSNIER

A Strasbourg , dans le cadre d'un atelier, j'ai communiqué aux personnes présentes le traité de De Witt de Juillet 1671 et sa correspondance avec HUDDE concernant les rentes viagères ; il est impossible ici de les reproduire in-extenso, mais je les tiens à la disposition de tout lecteur qui désirerait les consulter. Faute de place, je ne reprends pas ici la présentation du contexte socio-historique, de même que je n'analyse pas la "règle générale" concernant les rentes viagères sur plusieurs têtes ; je m'en tiens donc à ce qui est nécessaire à l'interprétation de la démarche de De Witt et à l'analyse de l'articulation entre les modèles théoriques et les données empiriques, selon le schéma suivant :

- A - Chronologie et contenu des travaux de HUDDE, HUYGENS et DE WITT sur les rentes viagères pendant l'année 1671.
- B - Contenu du traité de DE WITT présenté aux Etats de Hollande le 30 juillet 1671.
- C - Problèmes d'interprétation
- D - Annexe. (Calcul de la valeur d'une rente amortissable)
- E - Bibliographie.

P . S . Des contraintes, impératives et justifiées, formulées par les éditeurs, me conduisent à ne publier ci- après que les paragraphes C, D et E.
A et B sont à la disposition de tout lecteur qui me le demanderait !

C PROBLEMES D'INTERPRÉTATION

I LA CORRESPONDANCE HUDDE - DE WITT

- 1) Dans la lettre du 24 Août, DeWitt écrit que les calculs effectués n'ont jamais donné une valeur inférieure à 18 fl. ce qui est manifestement en désaccord avec les données précédentes ; il doit s'agir d'une erreur typographique, et il faudrait 16 fl., ce qui est en accord avec ce qu'il écrit dans son mémoire : le calcul "ne conduit jamais à une valeur actuelle inférieure à seize florins" (p. 31)

- 2) Sur quelles données DeWitt travaille-t-il ?

Le 18 Août Hudde écrit à Huygens que DeWitt a effectué des calculs à partir de son registre. DeWitt nous le confirme dans sa lettre du 24 Août.

DeWitt dispose donc du tableau de mortalité dressé par Hudde, et que celui-ci lui a probablement communiqué en juillet, lorsqu'il est entré en contact avec lui au sujet de son mémoire. Le 22 mai, d'après la lettre de Hudde à Huygens, Hudde ne semble pas avoir encore des contacts très étroits à ce sujet avec De Witt.

Hudde nous apprend dans cette même lettre du 18 Août que De Witt utilise également les registres de La Haye et d'autres, postérieurs aux siens. Très probablement s'agit-il des listes "contenant les cas de décès des années 1600, 1601 ... jusqu'en 1610 "mentionnées dans la lettre du 2 novembre. De Witt insiste à plusieurs reprises sur le grand nombre "d'expériences" qu'elles contiennent (2 novembre), "mes expériences qui portent sur un grand nombre de têtes" (20 octobre), "la communication que j'ai fait tirer, avec le plus grand soin, des Registres de vos Nobles et Grandes Puissances, des données se rapportant à quelques milliers de têtes, choisies autrefois pour y faire reposer des rentes viagères..." (appendice du mémoire, p. 30) De Witt, dispose donc pour travailler sur le mémoire du 3 juillet de ces données des registres de La Haye sur 11 années, et à coup sûr au mois d'Août, en plus de celles là, des 1495 du tableau de Hudde pour les registres d'Amsterdam sur 5 années.

- 3) Quelles tables de mortalité ?

Les tableaux dont nous venons de parler, ne sont pas des "tables de mortalités" telle que peut l'être, par exemple, celle de Graunt. Dans sa lettre du 22 mai, Hudde laisse entendre qu'il aurait trouvé "un tout autre ordre" que Graunt, et donc qu'il aurait déduit une table de mortalité des données qui étaient en sa possession. Si cette table a existé, ce qui est possible, nous n'en avons aucune trace.

Par ailleurs, dans sa lettre du 20 octobre, De Witt fait allusion à une supposition de Hudde : "Je vous fais observer que vous supposez que 50 ans après l'âge de 6 ans, c'est-à-dire à l'âge de 56 ans, sur 30 personnes, qui restent alors sur 80, il en meurt 5 dans les 5 années suivantes..." ; un peu plus loin, il écrit : ... "ce principe que les chances de mort de la personne sur la tête de qui la rente est supposée achetée d'abord auraient été les mêmes dans chacune des 80 années. Ce principe s'applique d'une façon absolue, c'est vrai, aux hypothèses de votre susdite règle, si l'on considère la personne en soi et sans aucun rapport avec nulle autre personne ..."

On peut conclure de ces deux passages que Hudde avait proposé une table de mortalité théorique, où sur 80 personnes de l'âge de 6 ans, il en mourait une tous les ans, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus, la dernière mourant donc à 85 ans. On peut supposer, un peu plus hypothétiquement, que sa table portait sur 100 nouveaux-nés, dont 20 mouraient avant 6 ans.

Soit sur 100 il en reste au bout de	6 ans : 80		64
	16 ans : 70		40
	26 ans : 60		25
	36 ans : 50		16
	46 ans : 40		10
	56 ans : 30		6
	66 ans : 20		3
	76 ans : 10		1
	86 ans : 0		0

Cette table est effectivement profondément différente de celle de Graunt dont les données se trouvent dans la colonne de droite.

Quant à De Witt, il utilise de fait dans son mémoire, une table de mortalité théorique, pour les personnes dont l'âge varie entre 3 ans (ou 4) et 80 ans (ou 81).

Elle est donnée par les différentes chances de mourir à ces différents âges, et ces chances ne sont par toutes égales à 1 comme chez Hudde, mais à 1 entre 3 et 53 ans, 2/3 entre 53 et 63 ans, 1/2 entre 63 et 73 ans et 1/3 entre 73 et 80 ans. Ce qui permet de reconstituer une table de mortalité telle que :

sur 384 personnes de 3 ans, il en reste à l'âge de	13 ans : 324
	23 ans : 264
	33 ans : 204
	43 ans : 144
	53 ans : 84
	63 ans : 44
	73 ans : 14
	80 ans : 0

Par ailleurs, dans sa lettre du 20 octobre De Witt corrige, à partir de l'observation des données dont il dispose, cette table théorique, pour les âges allant de 50 à 75 ans, puis de manière toute théorique et sans avoir encore eu le temps d'espérer un contrôle sur des observations, pour des âges allant de 75 à 80 ans. Les données sont les suivantes :

De 50 à 55 il meurt	1/6
55 à 60	1/5
60 à 65	1/4
65 à 70	1/3
70 à 75	1/2
75 à 80	3/5
80 à 85	2/3
85 à 90	7/9
90 à 100	1

Ce qui veut bien dire qu'un même nombre de personnes meurent par intervalle de 5 ans - et aussi, nous dit DE WITT, par an - jusqu'à 75 ans ce qui prolonge son schéma théorique du mémoire jusqu'à cet âge là [en effet, s'il reste n personnes à 50 ans,

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} n = \frac{1}{6} n \quad \text{il en meurt } 1/6n \text{ par période de 5 ans jusqu'à 75 ans].$$

Ce qui permet de reconstituer la table de mortalité théorique suivante :

De 135 personnes de 75 ans il en reste à l'âge de 80 ans :	54
de 85 ans :	18
de 90 ans :	4
100 ans :	0

et pour tous les autres intervalles de 5 ans et 75 ans, il en meurt 135, ce qui revient à considérer un total initial de 2025 personnes dont il en meurt 27 chaque année entre 5 ans et 75 ans, à peu près 16 entre 75 et 80 ans, à peu près 7 entre 80 et 85 ans, à peu près 3 entre 85 et 90 ans.

4) CONCLUSIONS

• Sur Hudde :

- La table de mortalité extraite du tableau de Hudde conduirait plutôt, en “négligeant” les variations dans la tranche 16-76, à une suite :

5 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 5

- Le calcul de la rente viagère, en supposant une mortalité constante, donne une valeur de 17,2171771 fl ou 17 fl 4 s 17/1000 qui est remarquablement proche des valeurs trouvées par Hudde à partir du tableau (18 Août) :

pour une personne de 6 ans : 17 fl 4 s 3 d

pour les 796 personnes

des 10 premières années : 17 fl 1 s 11 d [en fait 17 fl 6s 31/2d]

- Aussi, lorsque De Witt lui écrit qu'il est d'avis que sa “méthode qui est autre que la sienne est bonne et concluante”, - cité par Hudde dans sa lettre à Huygens du 18 Août, et que “vous supposez que 50 ans après l'âge de 6 ans ... sur 30 personnes qui restent alors sur 80, il en meurt 5 dans les 5 années suivantes” - la lettre du 20 octobre - je pense que l'on peut faire l'hypothèse que la méthode dont il s'agit consiste à utiliser une table de mortalité théorique, à mortalité constante entre 6 et 86 ans, comme “modèle” de calcul de la rente viagère.
- La critique de la “table de mortalité” de Graunt (22 mai) est tout à fait justifiée (voir le tableau p. 25)
- Hudde est très probablement conscient que ses données ne lui permettront pas de dresser effectivement une table de mortalité - variations importantes d'un regroupement à l'autre - mais qu'elles lui permettent de constater la divergence flagrante avec celle de Graunt et de proposer, en l'état, un schéma de mortalité - le plus simple qui soit - permettant d'établir un modèle de calcul des rentes viagères, qui, testé sur les valeurs empiriques obtenues à partir des 10 premières années des tables paraît fiable.
- Pourquoi Hudde et De Witt cherchent-ils alors à établir et à utiliser une table de mortalité

théorique, quand les données qu'ils possèdent leur suffisent pour estimer la valeur des rentes viagères sur une tête ? Je pense qu'en l'absence de données suffisantes cette table théorique est indispensable pour calculer les valeurs des rentes viagères sur plusieurs têtes, de même qu'elle est nécessaire à l'argumentation de style "géométrique" qu'adopte De Witt dans son mémoire. (Voir l'appendice du mémoire et ci-après CII).

● Sur De Witt

- La table théorique du mémoire (voir CII) est corrigée et affinée à partir des observations que permettent les tables d'Amsterdam et de la Haye. Soit :
- le prolongement jusqu'à 75 ans du principe de constance de la mortalité - qui est donc commun à De Witt et Hudde jusqu'à cet âge - ; les dernières années comptant pour si peu dans l'estimation de la valeur des rentes viagères, on comprend pourquoi De Witt peut considérer que la méthode de Hudde est "concluante".
- L'établissement d'une base de référence permettra la construction de la table de mortalité : un taux de mortalité de 1/5 entre 55 et 60 ans, appuyé sur les observations (voir tableau p.25).
- la proposition "provisoire" des taux de mortalité entre 75 et 100 ans : $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$ et 1, dont l'origine paraît mystérieuse - d'autant plus que les tables de La Haye sont perdues -, mais à propos desquelles il n'est pas inutile de remarquer la proximité avec les données empiriques extraites du tableau de Hudde pour les 15 premières rubriques : $\frac{43}{75}$, $\frac{23}{32}$, $\frac{7}{9}$ et 1.

- Tableaux de mortalité extraits du tableau dressé par HUDDE. -

	1	2	3	4	5	T ₁₋₅	T ₆₋₁₀	T ₁₁₋₁₅	T ₁₆₋₂₀	T ₂₁₋₂₅	T ₂₆₋₃₀	T ₃₁₋₃₅	T ₃₆₋₄₀	T ₄₁₋₄₅	T ₄₆₋₅₀	T ₅₁₋₅₅
1-6	1	1	1	1	1	5	393	7	796	1041	1064	1065	994	914	822	735
6-11	2	2	3	8	3	13	382	29	768	1064	1065	1065	994	914	822	735
11-16	1	5	2	10	12	31	359	36	724	1064	1065	1065	994	914	822	735
16-21	4	6	9	16	12	41	335	65	659	1064	1065	1065	994	914	822	735
21-26	5	2	5	7	13	32	292	75	524	1064	1065	1065	994	914	822	735
26-31	5	5	9	6	3	26	264	56	524	1064	1065	1065	994	914	822	735
31-36	6	5	6	3	6	26	232	43	425	1064	1065	1065	994	914	822	735
36-41	1	2	12	11	32	32	216	63	422	1064	1065	1065	994	914	822	735
41-46	5	8	12	8	33	173	193	56	366	1064	1065	1065	994	914	822	735
46-51	4	2	3	4	17	156	162	48	318	1064	1065	1065	994	914	822	735
51-56	3	4	7	6	22	134	144	40	278	1064	1065	1065	994	914	822	735
56-61	4	5	7	5	26	166	167	65	213	1064	1065	1065	994	914	822	735
61-66	5	5	7	6	23	25	81	49	164	1064	1065	1065	994	914	822	735
66-71	8	5	4	3	31	52	49	32	161	1064	1065	1065	994	914	822	735
71-76	2	3	6	3	30	22	32	17	54	1064	1065	1065	994	914	822	735
76-81	3	3	2	1	13	9	13	19	22	1064	1065	1065	994	914	822	735
81-86	1	2	1	1	6	3	4	9	7	1064	1065	1065	994	914	822	735
86-91	1	1	1	1	3	0	1	3	1	1064	1065	1065	994	914	822	735
91-96					0	0	0	1	0	1064	1065	1065	994	914	822	735
96-101					0	0	0	0	0	1064	1065	1065	994	914	822	735

61 64 93 89 96

56 77 87 64 69

55 52 54 56 52

158

143

54

32

32

16

19

	T	T _c
1-6	7	1428
6-11	89	1459
11-16	41	1418
16-21	83	1335
21-26	163	1232
26-31	117	1115
31-36	86	1029
36-41	98	931
41-46	112	819
46-51	103	716
51-56	122	594
56-61	120	464
61-66	123	341
66-71	131	210
71-76	97	113
76-81	69	44
81-86	33	11
86-91	8	3
91-96	2	1
96-101	1	0

II Le traité de De Witt

Le texte de De Witt du 30 juillet 1671 présente un certain nombre de difficultés dans l'interprétation que nous pouvons en faire, dont la plus intéressante est la contradiction apparente entre la 3ème présupposition et l'utilisation qui en est faite dans le calcul effectif de la valeur de la rente viagère (p. 21 du texte de De Witt).

- Dans la 3ème présupposition, De Witt parle de “l'apparence de mourir” d'un homme de 53 ans à 63 ans, comparée à celle d'un homme de 3 ans à 53 ans, que je note: a_{53-63} et a_{3-53} ;

$$\text{il pose : } a_{53-63} \leq \frac{3}{2} (a_{3-53})$$

$$\text{de même : } a_{63-73} \leq 2(a_{3-53})$$

$$\text{et : } a_{73-80} \leq 3(a_{3-53})$$

- La 2ème présupposition nous aide à interpréter ce que De Witt tente de désigner par cette apparence de mourir : c'est l'apparence de mourir dans le semestre qui suit l'âge actuel de la personne considérée, cette apparence étant constante entre 3 et 53 ans, 53 et 63 ans, 63 et 73 ans, 73 et 80 ans (2ème présupposition et 3ème proposition, et 3ème présupposition).
- A nos yeux, en 1987, ces apparences de mourir peuvent être qualifiées de “conditionnelles” : a_{53-63} , c'est l'apparence de mourir pour un homme ayant entre 53 et 63 ans, au cours d'une demi-année comprise dans cette dizaine d'années. Il est bien sûr évident que cette “condition” n'est pas claire, pour ne pas dire “incohérente”. Si l'on s'en tient au texte de la 3ème présupposition, il faudrait interpréter a_{53-63} comme l'apparence de mourir dans une demi-année quelconque comprise entre 53 et 63 ans, pour un homme de 53 ans. Qu'en est-il alors pour un homme de 58 ans ? Il semble que pour De Witt ce soit justement la même.

L'interprétation la plus cohérente paraît donc être la suivante :

a_{53-63} désigne l'apparence de mourir pour un homme de n ans - n étant compris entre 53 et 63 - dans l'une des demi-années comprises entre n et 63 ans.
(Je la note a_n , $53 \leq n < 63$).

- Maintenant, dans la démonstration qui suit la 3ème proposition (p. 21), De Witt qui calcule la valeur d'une rente viagère “reposant sur une tête encore jeune” - en fait une personne de 3 ans vivant 77 années - introduit les “expectatives ou chances” d'obtenir le versement de la rente entre 0 fois et 153 fois, ce qui correspond aux “expectatives ou chances” de mourir l'une des demi-années située entre la 1ère et la 153ème demi-année, donc entre 3 ans et 80 ans.

"En vertu de la teneur de la 3ème présupposition" De Witt pose que les 100 premières chances sont égales - "les choses auxquelles elles se rapportent offrent même facilité d'arriver" - et égales à 1 : je note $c_i = 1$ pour $0 \leq i \leq 99$ et :

$$\begin{aligned} c_j &\geq \frac{2}{3} c_i = \frac{2}{3} \quad \text{pour } 100 \leq j \leq 119 \\ c_k &\geq \frac{1}{2} c_i = \frac{1}{2} \quad \text{pour } 120 \leq k \leq 139 \\ c_l &\geq \frac{1}{3} c_i = \frac{1}{3} \quad \text{pour } 140 \leq l \leq 159 \end{aligned}$$

- Parmi les quelques auteurs qui ont étudié le texte de De Witt, certains comme Hacking ne relèvent pas les problèmes que soulèvent cette double série de coefficients, les autres comme Hendricks, Eneström, Sheynin, considèrent que De Witt a tout simplement modifié ces coefficients entre la 3ème présupposition et la 3ème proposition, s'étant aperçu du caractère irréaliste des premiers après avoir étudié les tables de données empiriques dont il disposait.
- Mon opinion est tout à fait différente ; pour moi, De Witt prétend pouvoir déduire la 2ème série de coefficients - les chances de mourir telle demi-année, ou de toucher telle somme - de la première - les apparences de mourir pour un homme d'un certain âge - et cela, en vertu des principes de la théorie de Huygens qu'il expose dans la première présupposition. Je remarque également, contrairement aux autres commentateurs que les coefficients proposés par De Witt ne sont pas 1, 3/2, 2, 3 pour la première série et 1, 2/3, 1/2, 1/3 pour la seconde, mais en posant $a_3 - 53 = 1$:

$$\begin{aligned} a_{53-63} &\leq \frac{3}{2} \quad / \quad a_{63-73} \leq 2 \quad / \quad a_{73-80} \leq 3 \\ &\quad \text{et } c_i = 1 \\ c_j &\geq \frac{2}{3} \quad / \quad c_k \geq \frac{1}{2} \quad / \quad c_l \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

le calcul effectué avec $c_j = 2/3$, $c_k = 1/2$, $c_l = 1/3$ donnant de ce fait une valeur minimum de la rente viagère, ce qui correspond tout à fait aux nécessités de l'augmentation de De Witt.

- Si l'on peut envisager l'hypothèse que De Witt ait subrepticement remplacé les coefficients 1, 3/2, 2, 3 par les coefficients 1, 2/3, 1/2, 1/3 il me paraît plus délicat de justifier ainsi le passage d'un système de majorants à un système de minorants !
- Comment expliquer par ailleurs qu'il revienne sur les anciens coefficients dans le point S de son argumentation !
- Par contre, un autre passage de la 3ème présupposition qui n'a jamais été relevé, sauf par J.B. Easton me paraît décisif :

De Witt prend l'exemple d'un homme de 40 ans et d'un homme de 58 ans qui conviennent qu'en cas où celui de 58 ans mourait dans un délai de 6 mois, l'autre toucherait sur ses biens 2000 florins quand celui de 58 ans toucherait 3000 florins dans les mêmes circonstances, sous entendu car l'apparence de mourir de celui de 58 ans est égale à $3/2$ de l'apparence de mourir de celui de 40 ans :

ainsi

$$a_{40} = a_{3-53}$$

$$a_{53-63} = a_{58} \leq 3/2 a_{3-53} = 3/2 a_{40}$$

Ici De Witt raisonne avec $a_{58} = 3/2 a_{40}$; le contrat est équitable car nous avons : $3000 a_{40} - 2000 a_{58} = 0$: ce qui vaut 3000 à la mort dans les 6 mois d'un homme de 40 ans vaut 2000 à la mort dans les 6 mois d'un homme de 58 ans et les valeurs sont dans le rapport inverse du rapport des apparences de mourir ; si le rapport des apparences est plus petit que $3/2$, le rapport des valeurs sera donc plus grand que $2/3$.

Je fais l'hypothèse que De Witt tient le même raisonnement pour calculer le prix actuel d'une rente : ce qui vaut A à la mort d'une personne de 40 ans vaut B à la mort d'une personne de 58 ans : $V_{40} = V_{58}$, si les personnes ont une même apparence de mourir.

Mais comme les apparences de mourir sont dans un rapport de $3/2$, les valeurs doivent être "corrigées" dans le rapport inverse de $2/3$ et les "chances" des 2 valeurs doivent être dans un rapport de $2/3$. (Même raisonnement avec les inégalités, le but de De Witt étant d'obtenir une minoration de la valeur de la rente viagère). Je propose de dire que De Witt calcule ainsi des "CHANCES ACTUALISEES", de même qu'il calcule la valeur actuelle d'une rente amortissable de n années.

Les chances de mourir à tel âge pour un enfant de 3 ans, sont les "chances actualisées" à 3 ans, de mourir à cet âge, et le moyen d'actualisation c'est le contrat équitable que nous venons de mentionner. On peut facilement concevoir qu'il ne soit pas "réaliste" dans le cadre de l'argumentation du mémoire de Juillet 1671 d'énoncer d'emblée que les différentes chances de mort pour un enfant en bas-âge sont les chances qu'il utilise dans le calcul de la rente viagère. Comment les justifier, sinon celles de 50 premières années qui sont égales, du moins les suivantes qui vont en diminuant, quand un raisonnement "rapide" tend à ne retenir qu'un seul fait : qu'il est certainement plus facile de mourir à 80 ans qu'à 10 ans ... !, plus précisément, qu'avec les années "l'apparence de mourir" ne peut que rester constante ou augmenter. Aussi De Witt utilise-t-il dans son mémoire cette notion subjective d'apparence de mourir qu'il quantifie en posant a priori dans les 2èmes et 3èmes présuppositions les rapports de proportionnalité entre ces apparences aux différents âges. Les chances de mort "actualisées" sont alors calculées implicitement - "en vertu de la teneur de la troisième présupposition" ! - d'après les principes que je viens d'explicitier. En définissant à partir de 53 ans des chances inférieures à 1, et donc une valeur de la rente viagère inférieure à 17 fl 4s 17/1000 (voir CI_4), cette théorie est en accord avec les résultats calculés à partir des tables empiriques utilisées par De Witt, sous réserve de donner un résultat qui ne soit pas inférieur à 16 florins ; (ce qui a pu le guider dans le choix des valeurs énoncées dans la 3ème présupposition).

Tout ceci est cohérent, du point de vue de De Witt, et les apparences de mourir doivent être prises pour ce qu'elles sont et non pour des chances de mort "conditionnelles", comme celles qu'il utilise dans sa lettre de 20 octobre. Même si alors il ne reprend pas le point de vue des "apparences de mourir", je pense qu'il n'y a à ses yeux aucune contradiction entre ces méthodes ; mais je n'ai pas la place ici d'étayer cette opinion !

D ANNEXE

• Rente amortissable

De Witt entend ici par rente amortissable, une rente avec remboursement du capital - la rente étant elle-même l'intérêt proprement dit du capital emprunté - versée annuellement pendant un nombre d'années fixé à l'avance.

• Rente viagère

C'est une rente qui s'éteint à la mort de la personne en faveur de laquelle elle est constituée.

• Valeur d'une rente viagère rapportée à celle d'une rente amortissable

Prenons l'exemple le plus simple : celui d'une rente viagère qui a été touchée une fois ; le problème est donc de savoir à quel prix son "bénéficiaire" aurait dû l'acheter pour ne pas être lésé, si l'on prend pour étalon une rente amortissable, par exemple à 4%, - c'est-à-dire qui rapporte 1 pour 25 : "au denier 25", ou 1 denier pour 25 - versée pendant une année. Soit v la valeur d'un versement de la rente viagère, c_1 le capital de la rente amortissable, t le taux de la rente ici 4% ; nous avons donc à résoudre le problème suivant :

$$c_1 + c_1 t = v \text{ soit } c_1 = \frac{v}{1+t}$$

Si la rente viagère a été touchée 2 fois, v au bout d'un an, puis encore v au bout de 2 ans, dans ce cas le capital c_2 de la rente amortissable est tel que, cette rente étant amortie en 2 ans, ou 2 versements de v :

$$(c_2 + c_2 t - v) + (c_2 + c_2 t - v)t = v$$

$$\text{soit } (c_2(1+t) - c_1(1+t))(1+t) = v$$

$$\text{d'où } c_2 - c_1 = \frac{v}{(1+t)^2}$$

$$\text{et } c_2 = v \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right]$$

On voit de là que c_n , le capital d'une rente amortissable de n années est égal à :

$$c_n = v \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \dots + \frac{1}{(1+t)^n} \right]$$

$$\text{Soit } c_n = \frac{v}{1+t} \left[1 + \frac{1}{1+t} + \dots + \frac{1}{(1+t)^{n-1}} \right] = \frac{v}{1+t} \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+t)^n}}{1 - \frac{1}{1+t}} \right]$$

$$\boxed{\text{d'où } c_n = \frac{v}{t} \left[1 - \frac{1}{(1+t)^n} \right]}$$

On voit que si n tend vers l'infini, c'est-à-dire si la rente amortissable devient une rente perpétuelle, alors :

$$\boxed{c_n \rightarrow c = \frac{v}{t}}$$

C'est donc la valeur maximale d'une rente viagère.

- Ainsi, pour une rente annuelle de 1, la valeur de la rente viagère “à la limite”, c'est-à-dire le capital de la rente perpétuelle équivalente avec $t = 0,04$ est donc : $c = 25$.
- Si la rente viagère a été touchée pendant 10 ans, on a : $c_{10} = 8,111$.
- De même on aurait $c_{20} = 13,590$ / $c_{30} = 17,292$ / $c_{40} = 19,793$ etc...

Ce qui signifie dans les termes de De Witt que le prix d'une rente viagère de 1 denier touché pendant 30 ans vaut 17,292 deniers, ou qu'elle est “au denier 17,292”

- Ce sont les résultats de ces calculs que De Witt expose dans le corollaire de sa troisième proposition, à cette différence près que la rente étant versée tous les six mois, le taux t' est tel que pour un capital c :

$$\begin{aligned}
c(1+t')^2 &= c(1+t) \\
\text{d'où } t' &= \sqrt{1+t} - 1 \\
\text{soit pour } t &= 0,04, t' = 0,0198 \\
\text{et ainsi pour } v &= 10\,000\,000 \text{ sous} \\
c_1 &= 9805807 \\
c_2 &= 9805807 + 9615385 = 19421192 \\
\text{etc..... jusqu'à} \\
c_{200} &= 494.952\,836
\end{aligned}$$

On peut remarquer que le fait de payer la rente de 20 000 000 de sous annuels en deux versements semestriels a pour effet d'augmenter la valeur de la rente viagère ...

Ainsi, pour 20 000 000 versés au bout d'un an, c_1 serait égal à 19 230 769, alors qu'il est ici de 19 421 192 ; et si l'on considère la rente perpétuelle qui lui correspond sa valeur égale à :

$$c = \frac{10\,000\,000}{\sqrt{1,04} - 1} = 50\,495\,0980 \quad \text{au lieu de}$$

$$c' = \frac{20\,000\,000}{1,04} = 50\,000\,0000$$

L'augmentation n'est pas négligeable, puisqu'elle est d'environ 1%.

BIBLIOGRAPHIE

Les textes

- DE WITT WAERDE VAN LYF-RENTEN (1671) : reproduit dans "Die Werke von Jacob Bernoulli". Birkhäuser. Bâle 1975 [tome 3 p. 328-350].
Traduction française de P.I.J. De Chateaux : "Le rapport de Johan de Witt sur le calcul des rentes viagères". Martinus Nijhoff La Haye 1937.
- DE WITT-HUDE Correspondance dans :
Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas - Amsterdam 1898.

Etudes

- F. LEBRUN Le XVIIème siècle - A. Cotin Paris 1967.
- K. HASS "Hude, Jan" dans le Dictionary of Scientific Biography
Scribner's Sons - New York 1972 T. VI.
- J.B. EASTON "De Witt, Jan De" dans le D.S.B. 1976 T. XIV.
- J.VAN BRAKEL Some remarks on the prehistory of the concept of statistical
probability. Archiv for History of Exact Sciences. Vol 16 n° 2 -
1976 - 119 - 136.
- I. HACKING Emergence of Probability - Cambridge 1975.
- O.B. SHEYNIN Early history of the theory of probability A.H.E.S. Vol 17 n° 3
1972 - 201-259.