

Georg CANTOR et son époque

Cet atelier s'est déroulé selon les objectifs que les animateurs avaient fixés :

- présenter certains travaux du réseau "CANTOR" constitué lors de l'Université d'Eté de Toulouse (juillet 1986),
- réfléchir aux liens de dépendance entre mathématique et philosophie dans l'élaboration des concepts cantorien.

A ces deux objectifs correspondent deux comptes rendus. En ce qui concerne le premier, nous ne donnons ici qu'une introduction à plusieurs documents qui seront publiés ultérieurement.

Le réseau "CANTOR" regroupe une vingtaine de participants : tous n'ont pu se déplacer mais d'autres l'ont rejoint. L'étude et la traduction des textes cantorien nous paraissent très importantes. En effet, par l'examen des différents aspects biographiques, philosophiques ou mathématiques, nous sommes amenés à conduire une approche interdisciplinaire du vaste mouvement qui s'est déclenché dans la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle dans les Universités allemandes et qui a abouti à ce qu'il est convenu d'appeler le fondement des mathématiques modernes.

1. Quelques éléments biographiques sur la jeunesse de Georg CANTOR

Georg Ferdinand CANTOR naquit le 3 mars 1845 à Saint Petersburg. L'histoire de sa famille a donné lieu à diverses interprétations servant à accréditer les thèses plus ou moins fantaisistes de leurs auteurs. Mais il écrit à Paul TANNERY le 6 janvier 1896 :

"Feu mon père, Georg Woldemar CANTOR, décédé en Allemagne en 1863, vint enfant avec sa mère à Saint Petersburg et y fut aussitôt baptisé comme luthérien. Mais il est né à Copenhague (je ne sais pas exactement quelle année, environ entre 1810 et 1815) de parents israélites, qui appartenaient à une communauté juive portugaise de là-bas et qui donc avaient très probablement une origine hispano-portugaise. Ma mère, Marie CANTOR, née BOHM, qui vit maintenant depuis 1863 à Berlin, est une authentique Pétersbourgeoise et appartient à une famille catholique romaine, originaire d'Autriche.*

(*) Les traductions des textes allemands ont été effectuées par Jean Pierre FRIEDELMEYER.

Le père de CANTOR était un riche commerçant. Bien qu'ayant fait faillite en 1838, il eut "trop de ressources intérieures et de détermination" pour s'avouer vaincu et il sut mettre à profit ses talents d'agent de change à la Bourse de Saint-Petersbourg. Pour des raisons de santé, il partit pour l'Allemagne en 1854 - le jeune CANTOR n'avait que neuf ans ! À l'occasion de la confirmation de son fils, il lui écrit une lettre que Georg ne devait jamais oublier et dans laquelle il insistait plus particulièrement sur la nécessité "d'une foi victorieuse, inébranlable" et "l'acquisition et la domination du maximum de connaissances et de techniques fondamentales les plus diverses" tout en espérant que son fils soit "si Dieu le veut, une étoile de première grandeur au firmament de la science". Trois points que nous retrouvons tout au long de la correspondance échangée entre le père et le fils.

Du côté maternel, la famille BOHM était une grande famille musicienne. Georg CANTOR se décrira lui-même comme tourné vers les arts et à l'occasion formulera des regrets de ne pas avoir poursuivi cette voie.

2. Les études de CANTOR

A son arrivée en Allemagne, le jeune CANTOR suit les cours de l'école de Wiesbaden puis ceux de la Realschule et enfin de la Höhere Gewerbschule (école supérieure de commerce) de Darmstadt, jusqu'en août 1862. C'est au printemps de cette année qu'il "se sent entraîné corps et âme par une voie inconnue et secrète vers l'étude des mathématiques". Durant le semestre d'hiver 1862-1863, il suit les cours de l'Ecole Polytechnique de Zürich, mais la mort de son père -le 6 juin 1863- l'amène à quitter cette ville pour rejoindre Berlin.

L'Ecole Polytechnique de Zürich

L'Ecole Polytechnique de Zürich fut ouverte en 1855 et Joseph RAABE (1801-1859) en fut le premier professeur de mathématiques. Lorsque ce dernier tomba malade, en 1858, Richard DEDEKIND (1831-1916) "pédagogue exceptionnel" et auteur "d'excellents travaux scientifiques" fut préféré à Bernhard RIEMANN (1826-1866) "trop absorbé dans ses pensées" pour lui succéder.

CANTOR n'a pas le temps de rencontrer ce brillant professeur car le 23 octobre 1861, DEDEKIND est nommé dans sa ville natale, Brunswick. Au mois d'août 1862, Edwin CHRISTOFFEL (1829-1900) lui succèdera.

Pour notre étude, nous retiendrons ici seulement deux faits. Le premier concerne DEDEKIND. Lorsque, le 20 mars 1872, il rédige sa préface à "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Continuité et nombres irrationnels), il n'oublie pas le rôle de l'enseignement qu'il a donné à Zurich :

"Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, au Polytechnikum fédéral de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique".

Sentant la nécessité d'élaborer une théorie des nombres réels, DEDEKIND répètera ce cours durant les semestres d'hiver zurichois puis à Brunswick. Quant à CANTOR, nous ne sommes pas renseignés sur l'enseignement qu'il y suivit. Mais nous pouvons noter l'encouragement constant que lui apporte son père pour mener à bien sa vie d'un "futur savant". Toutefois, si cette voie est "promesse de réussite", il n'en demeure pas moins que le chemin pour y parvenir n'est pas facile. Le jeune CANTOR s'épuise au travail. Le 21 janvier 1863, son père est très inquiet de son humeur mélancolique et il regrette de ne pouvoir être auprès de lui : "en moins d'une demi-heure, il lui chasserait toutes ses idées noires et il égayerait son état d'esprit de telle sorte qu'il n'y aurait aucune rechute avant au moins trois ans". Est-ce là une allusion à des accès d'angoisse antérieurs et la préfiguration ou les premiers symptômes de la maladie qui frappera plus tard CANTOR ?

L'Université de Berlin

De 1863 à 1866, CANTOR suit pendant huit semestres, à Berlin, les cours de "ARNDT, DOVE, KRONECKER, KUMMER, TRENDELENBURG, et WEIERSTRASS".

Sous la direction de Ernst KUMMER (1810-1893) et Leopold KRONECKER (1823-1891), il rédige sa thèse relative à la théorie des nombres. Mais le jeune CANTOR reste très profondément marqué par l'enseignement de Karl WEIERSTRASS (1815-1897). Ce dernier est l'étoile montante de l'Université berlinoise et il ne tardera pas à s'opposer à KRONECKER : les travaux de CANTOR amplifieront cette polémique. Même si les cours de WEIERSTRASS sont difficiles à suivre", à cause de leur densité et de leur niveau élevé" - l'effectif tombait de 117 à 7 ! - CANTOR suit aussi les séminaires. Ainsi il peut prendre connais-

sance des premiers exposés où WEIERSTRASS développe sa théorie des nombres irrationnels dont la trame ensembliste est un des éléments très importants.

L'Université de Göttingen

Durant le semestre d'été 1866, CANTOR suit à Göttingen, les cours de "LOTZE, MINNIGERODE, SCHERING et WEBER".

S'il ne semble pas que cet enseignement ait eu une grande influence sur la carrière de CANTOR, nous devons souligner que l'Université de Göttingen était très réputée à cette époque et que l'enseignement de ses maîtres marqua profondément DEDEKIND. Sous la direction du prince des mathématiciens, Carl Friedrich GAUSS (1777-1855), il soutint sa thèse où il annonçait son goût profond pour la justification de l'introduction de nouveaux concepts en mathématiques. Outre GAUSS, DEDEKIND sera aussi profondément marqué par Gustav Peter Lejeune DIRICHLET (1805-1859). Ce dernier invitera son ancien élève Bernhard RIEMANN (1826-1866) à relever le "défi" posé par WEIERSTRASS. Ainsi, en schématisant, DEDEKIND se situera dans un champ algébrique par opposition au champ analytique cantorien. Les conceptions des deux mathématiciens sont très bien exprimées aussi dans leurs thèses. Pour CANTOR

"dans le domaine des mathématiques, la manière de poser les questions est plus importante que celle de leur résolution".

Quant à DEDEKIND, il affirme :

"Ce qui distingue les mathématiques des autres sciences c'est que les élargissements des définitions ne laissent aucune place à l'arbitraire, mais résultent, avec une nécessité impérieuse, des définitions restreintes antérieures, à condition d'appliquer, à cette occasion, le principe de considérer comme universellement valables les lois qui résultent des définitions initiales et qui sont caractéristiques des concepts définis".

Nous retrouverons cette opposition lors de la construction des nombres réels. CANTOR préférera les suites dites de CAUCHY aux coupures introduites par DEDEKIND. C'est seulement en 1872 que ces deux brillants mathématiciens se rencontreront "par hasard" à Gersau sur le lac des Quatre-Cantons. Ceci donnera lieu à une collaboration étroite d'où naîtra la théorie naïve des ensembles.

L'influence de BOLZANO

Les idées mathématiques de Bernard BOLZANO (1781-1848) étaient sans doute trop avancées pour l'époque et leur diffusion trop restreinte pour que celles-ci aient pu atteindre les autres mathématiciens. Même si Augustin Louis CAUCHY (1789-1857) et BOLZANO se sont rencontrés à Prague, nous pouvons affirmer avec Hourya SINACEUR :

"Les oeuvres de BOLZANO et de CAUCHY [...] ne se rencontrent pas avant les années 1870, avec les travaux de WEIERSTRASS, CANTOR [...] BOLZANO n'explique pas CAUCHY, mais il peut certainement être considéré comme un précurseur de WEIERSTRASS, même si c'est en fait, sous l'impulsion imprimée par CAUCHY et à partir de l'héritage qu'il a laissé que WEIERSTRASS a développé sa propre manière de faire des mathématiques".

Dès 1870, Karl Hermann SCHWARZ (1843-1921) -compagnon d'étude berlinois de CANTOR peut proposer à ce dernier l'opuscule de BOLZANO relatif à la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires et lui écrire :

"Je suis d'accord, comme toi, avec l'opinion soutenue par Monsieur WEIERSTRASS dans ses leçons que, sans les conclusions qui ont été développées par Monsieur W. à partir des principes de BOLZANO, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches."

A son tour, mais le 7 octobre 1882, CANTOR fera connaître à DEDEKIND les "Paradoxes de l'infini" de BOLZANO. Nous savons qu'après cette lecture, DEDEKIND pourra "démontrer" l'existence des systèmes infinis dans son fameux ouvrage "Que sont et que signifient les nombres" (Was sind und was sollen die Zahlen). Autrement dit, BOLZANO a eu une influence certaine à la fois sur CANTOR et DEDEKIND.

3. La nomination à Halle

Après ses études, CANTOR commence à enseigner dans une école de jeunes filles à Berlin, puis il passe les formalités prussiennes du Staatsprüfung et il rejoint le prestigieux séminaire SCHELLBACH pour les enseignants de mathématiques. En 1869, il quitte Berlin pour accepter le poste de privatdozent -laissé vacant par SCHWARZ nommé à Zurich- à l'Université de Halle. Il y effectuera toute sa carrière jusqu'à sa mort, survenue le 6 janvier 1918.

L'Université de Halle a été fondée en 1694 par Frédéric III de Brandebourg. Mais elle n'a pas la renommée des Universités de Berlin ou de Göttingen et, toute sa vie, CANTOR souffrira de ne pas avoir pu obtenir un poste plus prestigieux : le syndrome de la capitale n'est pas seulement français ! Toutefois, étant peu éloigné de Berlin -environ cent cinquante kilomètres- CANTOR pouvait effectuer de fréquents voyages dans cette ville.

Ceci était aussi le cas de Heinrich Eduard HEINE (1821-1881), professeur à Halle depuis 1848, qui avait sa famille et sa belle famille à Berlin. HEINE était aussi un farouche partisan de l'école weierstrassienne. Dans son fameux article "Die Elemente der Functionenlehre" (les éléments de la théorie des fonctions) publié en 1872, il affirme que nous trouvons là "pour l'essentiel ce qui provient de communications orales avec d'autres chercheurs et, en particulier avec Monsieur WEIERSTRASS". Au rang des autres chercheurs figurent SCHWARZ et CANTOR.

L'introduction d'une construction rigoureuse des nombres réels n'avait pas échappé à WEIERSTRASS et par suite à HEINE. CANTOR lui-même sera amené à publier une construction semblable à celle exposée par HEINE dans un de ses articles. Le terreau mathématique en était, pour ces deux auteurs, l'étude de l'unicité du développement d'une fonction donnée à l'aide des séries trigonométriques.

Nous touchons là le contexte mathématique proprement dit. Au cours de l'atelier, nous avons examiné la démonstration cantorienne de la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels. Nous en donnons un résumé en annexe.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie touchant à ces aspects est très nombreuse. Nous citons seulement:

CAVAILLES, J ; Philosophie mathématique Hermann Paris 1962

DAUBEN, J,W ; Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the infinite
Harvard. Cambridge 1979.

DUGAC, P ; Richard Dedekind et les fondements des mathématiques Vrin Paris
1976

SINACEUR, H ; Cauchy et Bolzano. Revue d'histoire des sciences 26 (1973)
97-112.

Michel GUILLEMOT

ANNEXE

Lettre de CANTOR à DEDEKIND

in CAVAILLES Philosophie mathématique Hermann 1962 pp. 189-191.

Halle, le 7 décembre 1873

Ces derniers jours, j'ai eu le temps d'étudier, d'une façon un peu plus suivie, ma conjoncture dont je vous avais parlé ; c'est seulement aujourd'hui que j'en ai terminé, me semble-t-il, avec cette affaire ; si je devais pourtant me tromper, je ne trouverais certainement pas de juge plus indulgent que vous. Je prends donc la liberté de soumettre à votre jugement ce que j'ai couché sur le papier, dans toute l'imperfection de ce premier jet.

Supposons que l'on puisse ranger tous les nombres positifs $\omega < 1$ en une suite :

(I) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$

Après ω_1 soit ω_2 le premier terme plus grand, après celui-ci soit ω_3 le premier terme plus grand, et ainsi de suite. Posons : $\omega_1 = \omega_1^1, \omega_2 = \omega_1^2, \omega_3 = \omega_1^3$, etc..., et extrayons de (I) la suite infinie ^(*) :

$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$

Dans la suite restante, soit ω_2^1 le premier terme, ω_2^2 le pre-

(*) Le terme allemand que nous traduisons par « suite » est « *Reihe* », sauf mention expresse du contraire (actuellement, on dit « *Reihe* » pour « *série* », et « *Folge* » pour « suite »).

mier terme suivant ω_2^1 qui soit plus grand, etc.... et extrayons la 2^e suite :

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

En continuant ainsi, on reconnaît que la suite (I) peut être décomposée en une infinité de suites :

$$(1) \quad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

$$(2) \quad \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

$$(3) \quad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots, \omega_3^n, \dots$$

mais dans chacune d'elles les termes vont en croissant de gauche à droite ; on a :

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Choisissons maintenant un intervalle $(p \dots q)$ de telle sorte qu'aucun élément de la suite (1) ne s'y trouve contenu ; on peut, par exemple, prendre $(p \dots q)$ à l'intérieur de l'intervalle $(\omega_1^1 \dots \omega_1^2)$; il se peut alors que tous les termes de la deuxième suite, ou de la troisième, se trouvent à l'extérieur de $(p \dots q)$; mais il faut qu'il y ait une première suite, disons la $k^{\text{ième}}$, dont tous les termes ne se trouvent pas à l'extérieur de $(p \dots q)$; (car sinon, les nombres qui se trouvent à l'intérieur de $(p \dots q)$ ne seraient pas contenus dans (I), contrairement à l'hypothèse) ; on peut alors déterminer, à l'intérieur de $(p \dots q)$, un intervalle $(p' \dots q')$ tel que les termes de la $k^{\text{ième}}$ suite soient tous à l'extérieur de celui-ci ; $(p' \dots q')$ se comporte évidemment de la même manière relativement aux suites précédentes ; mais, parmi les suivantes, on arrivera à une $k'^{\text{ième}}$ suite dont les termes ne sont pas tous à l'extérieur de $(p' \dots q')$, et l'on choisit alors, à l'intérieur de $(p' \dots q')$, un troisième intervalle $(p'' \dots q'')$ tel que tous les éléments de la $k'^{\text{ième}}$ suite soient à l'extérieur de cet intervalle.

On voit ainsi qu'il est possible de former une suite infinie d'intervalles :

$$(p \dots q), (p' \dots q'), (p'' \dots q''), \dots$$

dont chacun contient les suivants ; ces intervalles relativement à nos suites (1), (2), (3), ..., se comportent comme suit :

Les termes de la 1^{re}, de la 2^e, ..., de la $k - 1^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de $(p \dots q)$.

Les termes de la $k^{\text{ième}}$, ..., de la $k' - 1^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de $(p' \dots q')$.

Les termes de la $k'^{\text{ième}}$, ..., de la $k'' - 1^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de $(p'' \dots q'')$.

Mais il y a toujours *au moins* un nombre, que j'appellerai η qui se trouve à l'intérieur de tous ces intervalles ; on voit immédiatement que ce nombre η , qui est évidemment $\begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$, ne peut appartenir à aucune de nos suites (1), (2), ..., (n), ... Ainsi, en partant de l'hypothèse que tous les nombres $\begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$ sont contenus dans (I), on arriverait à ce résultat opposé qu'un nombre déterminé $\begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$ n'appartient *pas* à (I) : par conséquent, cette hypothèse est incorrecte.

Je crois donc être finalement arrivé à la raison pour laquelle l'ensemble appelé (x) dans mes précédentes lettres *ne peut pas* être mis en correspondance univoque avec celui désigné par (n) .

RESUME DE LA DEMONSTRATION

L'ensemble des nombres réels considéré

On considère l'intervalle $]0,1[$ qui, comme l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, n'a pas de plus grand élément.

Le raisonnement par l'absurde

On suppose $]0,1[$ dénombrable, c'est à dire que tous éléments de $]0,1[$ peuvent être rangés en les termes distincts d'une suite (ω_n)

L'extraction d'une première suite

La suite extraite (ω_1^n) est définie comme suit : son premier terme ω_1^1 , est aussi le premier terme de la suite de départ (ω_n) et pour tout entier n , le "successeur" ω_1^{n+1} de ω_1^n est le premier terme, dans l'ordre des indices, strictement supérieur à ω_1^n : $\omega_1^{n+1} = \omega_{\min \{p \in \mathbb{N}^* : \omega_p > \omega_1^n\}}$

La décomposition de la suite donnée

A partir des termes restants on définit de même une deuxième suite extraite (ω_2^n) strictement croissante et plus généralement on peut décomposer la suite initiale en les suites extraites (ω_k^n) strictement croissantes de sorte que tout élément de $]0,1[$ est un terme d'une et d'une seule de ces suites extraites.

La suite des intervalles emboîtés

L'intervalle fermé $[p_1, q_1]$ est intérieur à l'intervalle constitué par les deux premiers termes de la première suite et il ne contient aucun terme de cette suite.

A partir de l'intervalle $[p_n, q_n]$, on définit un intervalle $[p_{n+1}, q_{n+1}]$ inclus dans $[p_n, q_n]$, et ne contenant aucun terme des $(n+1)$ premières suites extraites.

L'axiome des intervalles fermés (segments) emboîtés ou axiome de CANTOR DEDEKIND

Toute intersection de segments emboîtés non vides de nombres réels est non vide.

La contradiction :

Tout élément appartenant à tous les intervalles $[p_n, q_n]$ vérifie

- il est un élément de $]0,1[$ donc un terme de (ω_n) donc un terme d'une suite extraite
- il n'est le terme d'aucune suite extraite (ω_k^n) par construction de $([p_n, q_n])$