L'AFFAIRE LAMBERT

Michel SERFATI
Lycée Raspail. Paris.

C'était un temps naïf où Mulhouse était suisse : mille sept cent soixante et un. L'Académie Royale des Sciences de Berlin publie un texte adressé par John Heinrich Lambert, de Mulhouse, et qui s'intitule : "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques." (*)

Le texte s'ouvre sur cette forte maxime : "démontrer que le diamètre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'est là une chose dont les géomètres ne seront point surpris." : bref, pi est irrationnel, et c'est donc ici l'affaire de Lambert.

Le présent article se propose d'étudier ce mémoire dans son détail, en le replaçant d'abord dans le mouvement de l'histoire des idées en Mathématiques (irrationnels et transcendants), et à la fois aussi dans la production scientifique complexe de son auteur.

(*) John Heinrich Lambert. Oeuvres Complètes. Tome II p. 112 à 159 (et pages 265 à 322 dans le texte original des mémoires de l'Académie des Sciences).

IRRATIONNELS, TRANSCENDANTS

La découverte par le pythagoricien de service que la "longueur de la diagonale n'est pas au côté ce qu'un nombre est à un nombre", a été cause, après un moment de stupeur hystérique (1), d'une crise grave (signant une rupture de l'harmonie du monde) et fondatrice, ce "drame en cinq actes" qu'évoque Scholz (2).

Le second point d'articulation dans l'histoire des idées est celui où on commence de cesser d'écrire les mathématiques comme on les parle, l'avènement du symbolique donc, étape véritablement essentielle, séparatrice du sujet et de l'objet (mathématique).

Dès lors que je n'écris plus : "la raison double de la cause", mais quelque chose comme :

$$x^2$$

il est "légitime" d'écrire aussi et comme en se jouant :

$$-\ 3x^2 + 7x^5 - x^4$$

-----

(1) Le scoliaste anonyme qui rapporte la chose déclare que, selon la légende, la personne qui l'aurait dévoilée aurait péri dans un naufrage. Selon Proclus, Euclide aurait commenté la nouvelle en ces termes : "les auteurs de la légende ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché, que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir...".

(2) "Pourquoi les grecs n'ont-ils pas inventé les irrationnels" (1928 ; revue : KANT Studien). Ce texte est finement analysé par M. FICHANT ("Sur l'histoire des sciences" p. 117/119. Maspero Editeur).

des sommes, produits de monômes, bref un concept (celui de polynôme) en place d'un lot d'exemples spécifiés. C'est une chose qui n'est pas allée de soi, et qu'a permis ici l'écriture, en vertu de sa forme, comme aurait dit Hilbert.

MILLE SEPT CENT QUARANTE HUIT

Il est plus tard maintenant, l'heure de "l'esprit des Lois", de l'Encyclopédie, mille sept cent quarante huit, donc, où Leonhard Euler rédige la préface à l'"Introduction à l'analyse des infinis". (*)

Euler expose qu'il est des fonctions composées avec "les opérations ordinaires de l'algèbre, et les zéros des dites fonctions sont des quantités rationnelles ou algébriques... Et les autres, qui sont obtenues par les mêmes opérations faites une infinité de fois ou bien d'<u>autres</u> opérations sont appelées transcendantes... Telles sont les séries dont la somme est liée au cercle ou à l'hyperbole."

Bref, il y a d'un côté les polynômes (et les fractions rationnelles) et leurs racines, de l'autre les non-polynômes. Le clivage en ce point là n'allait pas de soi. Cette formulation est d'ailleurs très intuitive et imprécise : faut-il entendre polynômes à coefficients entiers ? Faut-il appeler transcendants ce qui n'est racine d'aucun polynôme ?

(*) [1] Leonhard EULER. Introduction à l'analyse des infinis. Edition française de 1835.

Penser l'algébricité, c'était pouvoir penser la transcendance, production usuelle d'un concept par différenciations successives. Les transcendants sont définis négativement (non algébriques) avec tout ce que ceci suscite de difficultés méthodologiques à venir : c'est donc en cernant le mieux les propriétés des algébriques qu'on fabriquera d'abord des transcendants (Liouville).

Pour Euler, le modèle familier du non-algébrique est la série entière ("les mêmes opérations une infinité de fois") bien qu'il se réserve prudemment l'immense et vague champ des "autres opérations".

Voici en termes modernes ce que ça donne : on dit qu'un réel α est algébrique s'il est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, donc avec $P \in \mathbb{Z}(x)$:

$$P(\alpha) = 0 = \sum_{0 \leqslant s \leqslant d} q_s \alpha^s \qquad \text{et } q_j \in \mathbb{Z}$$

Il est équivalent de supposer les coefficients rationnels (multipliant par un dénominateur convenable) ; il est équivalent de supposer les coefficients premiers entre eux (en prenant le p.g.c.d.) ; il est équivalent de supposer P irréductible (par division euclidienne sur $\mathbb{Z}(x)$), de sorte qu'en décidant que le coefficient du monôme dominant est positif, il existe exactement un P_0 de degré minimum tel que

$$P_0(\alpha) = 0$$

P_0 est appelé le polynôme minimal de α et son degré d est le degré d'algébricité de α : on dit que α est d-algébrique.

Ainsi, tout rationnel est 1-algébrique ; $\sqrt{2}$ est 2-algébrique (ou irrationnel quadratique), $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ est 4-algébrique, puisqu'on montre que son polynôme minimal est x^4-16x^2+16. Est dit transcendant tout réel qui n'est pas algébrique.

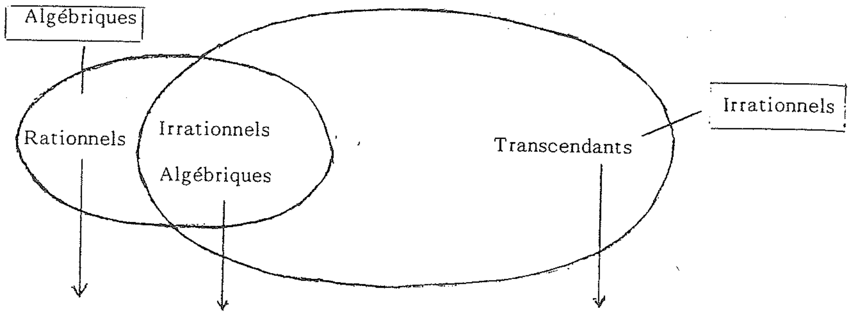
Comparé à l'énoncé "intuitif" d'Euler, ce qui précède n'est compréhensible que pour celui qui sait de quoi il s'agit, traduction moderne aussi nécessaire qu'opaque.

TRANSCENDANTS

La question de savoir s'il existe d'autres nombres que les algébriques (intuitivement vécus comme étranges, étrangers, nombres formés "au hasard" (Lambert)) ne se pose en droit mathématique pur qu'après avoir circonscrit un lieu où les chercher, le corps des réels donc, dont le bulletin de naissance (signé de Cantor et Dedekind) ne date pourtant que de 1872.

Mais comme on sait, ce n'est pas ainsi que les mathématiciens procèdent : l'existence précède ici l'essence, ou encore : ce n'est que dans l'après coup que les mathématiques sont une science déductive.

On a donc le décor suivant :



$(5, \frac{2}{3}, \frac{1037}{2521} \ldots)$ $(\sqrt{7}, \sqrt{31-\sqrt{11}}, \ldots)$ $(e, \pi, \text{Log } 2, \ldots)$

La question de l'étendue des nombres transcendants se posera par la suite sous le double aspect de la cardinalité (et ils sont très nombreux : de complémentaire dénombrable, ils ont donc la puissance du continu) et de la topologie (et ça fait aussi beaucoup : les transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$; même les nombres de Liouville le sont)

FRACTIONS CONTINUES

"Une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier et une fraction formée de la même manière que les précédentes, et ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini".

Superbe paraphrase d'Euler qui tâche, faute d'une métaphore appropriée, de définir en mots quotidiens une fraction continue (*).

Au début étaient les Grecs qui voulaient savoir si deux nombres avaient une mesure commune, quelque chose à quoi les rapporter conjointement ; alors on prend le plus petit, on voit "combien de fois il rentre dans le plus grand", et on retranche pour obtenir un reste, puis on recommence...).

Prenons $\alpha = \frac{48}{5}$. Je lui fais subir le traitement suivant :

$$48 = 5.9 + 3 \qquad \text{ou bien } \frac{48}{5} = 9 + \frac{3}{5} \qquad (1)$$

$$5 = 3.1 + 2 \qquad \text{ou bien } \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} \qquad (2)$$

de sorte que : $\frac{48}{5} = 9 + \cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}$

puis : $3 = 2.1 + 1$, donc :

$$\frac{48}{5} = 9 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}$$

De la sorte, j'associe à $\frac{48}{5}$ la suite $\phi(\frac{48}{5}) = (9,1,1,2)$ Suite presque nulle d'entiers (c'est-à-dire nulle à partir d'un certain rang). Les a_i sont les quotients partiels. Aucun n'est nul, sauf peut-être le premier.

(*) [1] chapitre 18, p. 277.

La donnée de la suite (9,1,1,2) permet de reconstituer α par la suite de rationnels

$$s_1 = a_1 = 9 \; ; \; s_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = 10 \; ; \; s_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{19}{2}$$

et $s_4 = \frac{48}{5} = \alpha$.

chaque s_k est un rationnel $(\frac{p_k}{q_k})$, appelé réduite de rang k.

On prouve :

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_k \; q_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_k \; q_{k+1}}$$

ce qui montre à la fois que p_k et q_k sont premiers entre eux et que la suite des différences entre deux fractions consécutives est de signe alterné.

Chaque quotient a_k est une certaine partie entière, comme le montrent (1) et (2). On appelle aussi quotients incomplets les parties décimales (qui sont donc des troncatures)

$$s'_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} = \frac{3}{5} \qquad s'_2 = \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}} = \frac{2}{3}$$

On montre aussi que numérateur et dénominateur de chaque réduite se fabriquent suivant la même loi de récurrence

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1} \quad \text{et} \quad q_{k+1} = q_{k+1}q_k + q_{k-1}$$

("chaque numérateur est la somme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre et de l'avant dernier numérateur

simple. Et la même loi s'observe pour les dénominateurs"(*)).

Et si maintenant α est une "proportion" quelconque ($\alpha = \frac{m}{n}$) on peut encore essayer d'appliquer la procédé précédent.

Soit $a_1 = [\alpha]$ (partie entière de α)

donc $\alpha = a_1 + s'_1$ et la partie décimale : $s'_1 \in [0,1[$.

si $s'_1 = 0$, on s'arrête. Sinon, $\frac{1}{s'_1} > 1$ et soit $a_2 = [\frac{1}{s'_1}]$

de sorte que : $\frac{1}{s'_1} = a_2 + s'_2$ et $\alpha = a_1 + \frac{1}{a'_2 + s'_2}$

chaque $a_i \in \mathbb{N}^*$. De deux choses l'une et l'une seulement : ou bien il existe k tel que $s'_k = 0$, α est alors un rationnel et c'est l'algorithme précédent.

Ou bien $s'_k \neq 0$, pour tout k ; α est irrationnel ; je lui associe la suite $\phi(\alpha) = (a_0, a_1, \dots a_n, \dots)$ suite d'entiers dont aucun n'est nul sauf peut-être le premier.

Cette suite permet de reconstituer l'irrationnel α puisqu'en prenant :

$$s_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{+ \cfrac{1}{a_n}}} \quad ,$$

On exhibe une suite de rationnels qui converge vers α en l'encadrant. Et qui converge vite.

Si S désigne l'ensemble des suites d'entiers, l'application

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S \qquad \alpha \longrightarrow \phi(\alpha)$$

(*) Euler : Chap. 18 de l'Introduction.

est, moyennant certaines précautions, une bijection de $\mathbb{R}$ sur $S_1 = \phi(\mathbb{R})$: la mise en acte de la bijection réciproque s'appelle selon le cas l'algorithme d'Euclide (cas d'une suite presque nulle) ou bien l'algorithme de fraction continue

$$\alpha \in Q \longrightarrow \phi(\alpha) \text{ presque nulle}$$
$$\alpha \notin Q \longrightarrow \phi(\alpha) \text{ suite infinie}$$

$\phi(\alpha)$ appelée antiphaîrèse de α est une sorte d'éclatement de α, de décomposition spectrale en entiers d'un réel, par un procédé naturel.

Par exemple avec $\alpha = \sqrt{2}$

on a $a_0=1$ et $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}-1)$

Donc $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$ et $\phi(\sqrt{2}) = (1,2,2,2,\ldots)$

L'irrationnel est donc ici organiquement lié à l'infini, par la panne du procédé euclidien : il n'y a pas de commune mesure entre m et n.

La théorie antiphaîretique était sans doute connue des Grecs (probablement de Théétète), qui ne voulaient d'ailleurs manipuler que des entiers et Krasner (*) soulève ici une question pertinente qui pourrait s'énoncer "pourquoi les Grecs n'ont pas inventé les nombres réels ?" (à partir de l'antiphaîrèse) et conclure pour une raison profonde que

------

(*) "La pluralité et l'infini dans la philosophie et la mathématique grecque". Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure. Séminaire du 31.01.79 Publication de l'IREM de Paris-Nord.

les Grecs ne pouvaient contourner, même s'ils l'ignoraient : la non continuité de l'application d'antiphaîerèse .

Cardinalement parlant, ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur S_1. Mais, topologiquement, ϕ n'est pas continue en tout α rationnel : pour que ceci prenne sens, il faut avoir muni l'ensemble S d'une distance du type $d(a,b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}$ telle que deux suites sont d'autant plus proches que le premier indice à partir duquel elles diffèrent est plus élevé.

Les fractions continues ont servi de boite à outil aux mathématiciens depuis le dix-septième cercle pour des raisons à la fois pratiques et théoriques :

- elles fournissent des suites effectives de réels qui convergent (rapidement) vers un réel donné, d'où l'idée de tester en premier lieu des propriétés d'approximation diophantienne sur les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ (c'est le cas de Liouville et de sa fabrication de nombres transcendants).

- elles permettent de tester l'irrationalité par un procédé simple.

Un bon moyen pour une suite de n'être pas presque nul est d'être périodique, comme $\phi(\sqrt{2})$. Voici d'autres exemples :

$\phi(\sqrt{7}) = (2,1,1,1,4,1,1,1,4,\ldots)$

$\phi(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (1,1,1,1,\longrightarrow \qquad)$ (nombre d'or).

Et on montre (*) que pour que $\phi(\alpha)$ soit périodique, il faut et il suffit que α soit irrationnel quadratique.

Ils se sont donc bien amusés, les mathématiciens des siècles derniers, à essayer de développer en fraction continue à peu près n'importe quoi (**), ou bien en sens inverse, à se donner une suite d'entiers et d'essayer de reconnaître le réel α.

Euler, à la fin de l'Introductio, s'occupe du nombre e, et "trouve"

$$\phi(e) = (2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots)$$
$$\phi\left(\frac{e-1}{2}\right) = (1,6,10,14,18,\ldots)$$

Pour cela il écrit : $\frac{e-1}{2}$ égale 0,8591409142295, développe ce décimal en fraction continue en prenant suffisamment de termes pour observer une régularité, et "démontre ainsi ce résultat", tout en assurant qu'il y a une preuve par le calcul infinitésimal.

(*) Ce résultat est dû à Lagrange. L'idée était déjà chez Euler ([1] p. 294). On trouvera une démonstration moderne du résultat de Lagrange par exemple dans "An introduction to the theory of numbers" (p. 144/145) HARDY et WRIGHT, Clarendon Press Oxford.

(**) Cf. par exemple la lettre 297 de Stieljes à Hermite (26/02/1891) où il propose de développer en fraction continue

$$n\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right]^2 \text{ ou bien } \left[\frac{\Gamma(x+\frac{1}{4})}{\Gamma(x+\frac{3}{4})}\right]^2$$ (Γ est la fonction eulerienne).

Il tâche d'en faire de même avec π, (page 303) ne trouve rien d'harmonieux (on a pour les premiers quotients partiels : 3,7,15,1,292,1,1). π est-il au nombre plus étranger que e ?).

LAMBERT

C'était donc le temps où Mulhouse était suisse, et il y avait là un compatriote d'Euler qui l'avait sans doute lu (bien que jamais ici il ne le cite), un homme curieux, qui fait penser par certains côtés à Cyrano de Bergerac, (le vrai, pas celui de Rostand), une sorte de touche à tout un peu mégalomane qui s'occupe de mouvement des planètes, de théorie des nombres, de photométrie, de philosophie, du cinquième postulat d'Euclide, etc...

Son éloge funèbre (*) est parfois éloquent par ce qu'on peut y lire de la perplexité de son biographe sur certains aspects de l'oeuvre ou la personne de Lambert, "sorte de Janus à double face... bloc de marbre uni dont le sculpteur n'a pas encore décidé s'il en fera un Dieu ou une cuvette" ([2] page 1). Et cette sorte d'exécution sommaire : "Mr Lambert était étranger dans les trois règnes de la nature".

Lambert avait cet orgueil immense de tout connaître par lui-même, et quand il rencontra à Postdam le roi de Prusse (**) qui lui demanda "que savez-vous, Lambert ?", "Tout !

(*) Eloge funèbre de Mr Lambert par Forney, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Berlin (Oeuvres de Lambert [2]).

(**) Entrevue de Mars 1764 ([2] p. 10).

Sire". "Et de qui le tenez-vous ?", "De moi-même".

Moyennant quoi, Lambert n'attendra plus trop longtemps une position scientifique stable qui lui permette de sortir des expédients : le roi ne lui tint en effet pas rigueur de cette suffisance affichée et l'agrégea (avec pension) à l'académie de Berlin.

Lambert était né dans une famille pauvre, et en porta toute sa vie la marque. Pour gagner sa vie, il commença par être précepteur d'enfants de la noblesse. Plus jeune encore, il passe pour avoir fait de petits dessins qu'il vendait à des camarades, et, avec cet argent avoir acheté des chandelles qui lui permettaient le soir de travailler. Ce trait misérabiliste qu'on trouve dans toute ses biographies décrit sans doute néanmoins assez bien la réalité de son enfance.

La philosophie de Lambert était si obscure qu'on l'a décrite en termes contradictoires par rapport à Kant : ou bien un précurseur, ou bien un étranger. Kant avait cependant projeté de dédier à Lambert la "Critique de la raison pure" entreprise qui fut empêchée par la mort prématurée de Lambert (*)

Il semble que ce soit plutôt à Leibniz qu'il doive une filiation dans une nouvelle tentative chez lui pour créer une philosophie d'architecture mathématique, un ars characteristica combinatoria, un "calcul conceptuel".

(*) [3] John Heinrich LAMBERT, D.S.B. tome 7, pages 595-600. Christoph J. SCRIBA, p. 597.

C'est à partir d'une intéressante question (très "dix huitième" et néanmoins très cartésienne), posée en 1761 par l'Académie des Sciences de Berlin que Lambert rédigea un de ses textes philosophiques (*). "Est-ce que les vérités métaphysiques sont du même ordre que les vérités mathématiques ? Et, dans le cas où elles ne le sont pas, quelle est la nature de cette forme de certitude, quel degré de croyance doit on leur apporter et est-ce suffisant pour entraîner la conviction ?"

MILLE SEPT CENT SOIXANTE ET UN

C'est le temps de la "Nouvelle Héloïse", et aussi de Voltaire à Ferney. C'est pourtant un texte d'une autre facture que reçoit l'Académie Royale des Sciences de Berlin, un "mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques" (**), un mémoire écrit en français (Lambert publie aussi en latin et en allemand), et qui ne sera lu que six ans plus tard.

Ce texte qui fait donc l'objet de la présente étude, s'ouvre donc sur cette maxime "que le rapport de la circonférence au rayon ne soit point ce qu'un nombre est à un nombre, c'est là une chose dont les géomètres ne seront point surpris" : il témoigne ainsi, après des siècles de recherches

-----

(*) Théologie und Moral richtiger zu beweisen (cité dans p. 597).

(**) Oeuvres de Lambert, pages 112/159 [2] de la "vraie valeur" de Π, de l'état de la question à cette époque sur l'irrationalité de ce rapport.

Ce rapport, il l'appelle encore nombre de Ludolph, du nom de ce mathématicien allemand qui fit graver sur sa tombe les 32 décimales de pi qu'il avait trouvées. Lambert tâche sans doute d'effacer Euler et son "pi" (pour periphaeria) qui commence à se répandre.

Que peut faire Lambert pour montrer cette irrationalité, ce qui n'est pas si simple après tout avec les moyens plutôt rudimentaires dont il dispose ?

Lambert commence son mémoire par un curieux argument de simplicité forcée : eh quoi ! dit-il, si Π était une quantité rationnelle, elle aurait donc un dénominateur, et s'agissant d'une quantité aussi essentielle ("une espèce d'unité"), ce ne pourrait être qu'un nombre très simple : "car s'il y fallait une fraction fort composée, pourquoi telle plutôt que telle autre ?" (p. 112).

Et encore : "Mais comme après la fraction $\frac{11}{14}$ trouvée par Archimède (*) qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de Métius $\frac{355}{452}$ qui n'est pas non plus exacte, et dont les nombres sont considérablement plus grands..." (p. 113). Bref, comme ce n'est pas une fraction simple, ce ne peut être une fraction.

(*) Il s'agit ici de $\frac{\Pi}{4}$

Il s'arrête, passe à la ligne, et soupire : "quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas davantage. Mais ces cas ne sont point ceux de la quadrature du cercle".

Tout Lambert est là dedans, dans une affirmation hardie, et le regret à peine voilé que son "intuition" précédente aurait pu suffire, et en même temps la dénégation de ce qui, de toutes façons n'est pas en jeu : la quadrature du cercle (qui n'est pas liée à l'irrationalité de Π, mais à sa transcendance, comme Lambert le dira lui-même très bien à la fin de ce même texte).

Ensuite Lambert pourfend les quadrateurs, qui vont quelquefois jusqu'à "révoquer en doute les vérités les plus fondamentales et les mieux établies de la géométrie". C'est pourtant à ces diables là que Lambert s'adresse :"Pourrait-on croire qu'ils se trouveraient satisfaits par ce que je viens de dire ?" (p. 113).

Lambert en dit long ici, sur son véritable désir : la quadrature du cercle, énigme désirable et millénaire, dont celui qui l'aura résolue sera à nul autre pareil. La quadrature du cercle est bien ici le moteur de l'irrationalité avant d'être celui de la transcendance.

Et pourtant, Lambert, le reconnaît en même temps, il n'y parvient pas, car Π est un nombre vraiment très étrange, étranger : "il faut encore voir jusqu'à quel point les quantités transcendantes sont transcendantes et reculées au-delà de toute commensurabilité". Aveu d'impuissance donc, pour n'avoir pu accéder en profondeur à la vraie nature de Π.

Lambert dit qu'il va montrer que si "l'arc est commensurable au rayon" ($V\in Q$), alors sa tangente ne l'est point ($tgV\notin Q$). Ou encore : $tgV\in Q \Longrightarrow V\notin Q$: bref V et tgV ne peuvent être toutes deux rationnelles: "Voilà de quoi être un peu plus surpris. Cet énoncé paraissait devoir admettre une infinité d'exceptions, et il n'en admet aucune" (*).

Or : $tg\frac{\Pi}{4} = 1$ et 1 est rationnel.

Donc $\frac{\Pi}{4}$ n'est pas rationnel, non plus que Π.

Plus loin, Lambert étendra son propos à la tangente hyperbolique, pour établir de même que si V est rationnel, alors $thV = \frac{e^V-e^{-V}}{e^V+e^{-V}}$ ne l'est pas, non plus que e^V, donc V et e^V ne sont pas tous deux rationnels ($V \neq 0$). Ceci est, à un étage en dessous, la trame du théorème d'Hermite-Lindemann (1887) : si V est algébrique, alors e^V est transcendant.

ANALYSE

Lambert expose (p. 114) qu'il s'inspire de l'algorithme d'Euclide (2e proposition du 7e livre d'Euclide), qui demeure l'idée essentielle, le pivot des démonstrations de rationalité ou d'irrationalité, mais dit-il, ce n'est pas aujourd'hui si simple, et il faudra l'adapter puisque "il convient de

-----

(*) Il fait donc état ici d'une intuition contraire chez lui, mais qu'il n'argumente pas.

remarquer que tandis qu'Euclide ne l'applique qu'à des nombres entiers et rationnels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités dont on ignore encore si elles seront rationnelles ou non".

Or, donc "soit le rayon r = 1, un arc de cercle proposé = V" on a les développements en série ("deux suites infinies fort connues")

$$\text{Sin } V = V - \frac{V^3}{2.3} + \frac{V^5}{2.3.4.5} - \frac{V^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

$$\text{Cos } V = 1 - \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} - \cdots$$

Le problème est qu'il n'y a pas de moyen simple d'avoir la partie entière du rapport. Lambert va donc s'en tenir à une méthode de "pseudo-division" euclidienne, avec des quotients qu'il se fixe, et qui seront les rapports des termes de plus bas degré, ici donc : $\frac{1}{V}$, si on divise cos V par sin V. On a donc :

$$\text{Cos } V = \frac{1}{V} \sin V + R_1(V) \qquad (1)$$

$\frac{1}{V}$ n'a aucune vocation a être la partie entière de $\frac{\text{Cos } V}{\text{Sin } V}$, mais avec ce choix $R_1(V)$ est lui-même la somme d'une série entière. On a, avec des notations modernes :

$$R_1(V) = \sum_{n\in \mathbb{N}} \frac{(-1)^h V^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{V} \sum_{n\in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n V^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R_1(V) = \sum_{n\in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n V^{2n}.(2n)}{(2n+1)!}$$ dont le terme de plus bas degré (n=1) vaut : $\frac{(-1)^1 V^2.2}{3!} = -\frac{V^2}{3}$

La relation (1) donne :

$$\frac{\cos V}{\sin V} = \frac{1}{V} + \frac{R_1(V)}{\sin V}$$

Donc $\operatorname{tg}V = \cfrac{1}{(\frac{1}{V})+\cfrac{R_1(V)}{\sin V}}$

on pseudo-divise : sin V par $R_1(V)$, et le quotient vaut ici

$\frac{V}{-V^2/3} = -\frac{3}{V}$. On a donc

Sur $V = -\frac{3}{V} R_1(V) + R_2(V)$

donc $\operatorname{tg}V = \cfrac{1}{(\frac{1}{V})+\cfrac{}{(-\frac{3}{V})+\cfrac{R_2(V)}{R_1(V)}}}$

de sorte qu'il est plausible que la suite des quotients partiels soit $q_n = (-1)^n \frac{(2n+1)}{V}$ (page 115).

Lambert remarque qu'il est équivalent de postuler la forme de $R_n(V)$ et de $R_{n-1}(V)$, puis de montrer que $R_{n+1}(V)$ a bien la forme annoncée, en utilisant la relation :

$$R_{n-1}(V) = [(-1)^n \frac{2n+1}{V}]\ R_n(V) + R_{n+1}(V)$$

Il s'assure aussi que les deux premiers "résidus" ont bien la forme annoncée.

Lambert fait ici une vraie démonstration par récurrence (p. 116 à 118), ne se contente pas d'une "espèce d'induction" (la reconnaissance sans preuve de la forme du terme général). Il est donc tout à fait rigoureux (ce que son préambule ne laissait guère prévoir), même s'il lui faut passer par nombre d'erreurs de calcul (*)généreusement corrigés (mais

-----

(*) Portant essentiellement sur les signes, et l'alternance des signes.

soulignées) dans l'édition actuelle.

A ce stade, il est donc plausible que l'on ait :

$$\operatorname{tg}V = \cfrac{1}{(\frac{1}{V})+\cfrac{1}{(-\frac{3}{V})+\cfrac{1}{(\frac{5}{V})+\dots}}} = \frac{1}{(\frac{1}{V})+}\,\frac{1}{(-\frac{3}{V})+}\,\frac{1}{(\frac{5}{V})+\dots} \qquad (*)$$

Mais ceci n'est pas assuré, compte tenu en particulier du caractère arbitraire des quotients.

SYNTHESE

Lambert ne se contente pas de trouver la fraction. Posant $W = \frac{1}{V}$, il considère donc la fraction continue

$$\cfrac{1}{W+\cfrac{1}{-3W+\cfrac{1}{5W-\dots}}}$$

et montre :

a) la convergence

b) la convergence vers tgV

c) la convergence vers un irrationnel (V étant lui-même rationnel).

Lambert note d'abord à regret (p. 121) que tout ça serait bien plus simple si "V est une partie aliquote du rayon" ($\frac{1}{V}$ est un entier : c'est l'algorithme usuel de fraction continues). "La tangente $\frac{A}{B}$ sera une quantité irration-

----

(*) Ce résultat est d'autant plus remarquable que le développement en série de tgV n'est pas de forme simple.

nelle toutes les fois que l'arc V sera une partie aliquote du rayon. Voilà à quoi se borne l'usage de la proposition d'Euclide. Il s'agit maintenant de l'étendre à tous les cas où V est commensurable au rayon".

CONVERGENCE

Lambert utilise deux arguments :

- le télescopage
- la vitesse de convergence

Il s'affaire d'abord pour savoir "de combien chacune des fractions est plus grande que celle qui la précède".

$$F_2(W)-F_1(W) = \frac{3W}{3W^2-1} - \frac{1}{W} = \frac{1}{W(3W^2-1)}$$

$$F_3(W)-F_2(W) = \frac{-1}{(3W^2-1)(-15W^3+6W)}$$

Il semble que le numérateur vaille 1 ou -1, c'est ce que Lambert vérifie par récurrence en étudiant la loi de formation des dénominateurs. "Mais faisons voir généralement que tous les numérateurs sont égaux à 1 (*) et que tous les dénominateurs sont le produit de ceux des deux fractions dont ces résidus marquent la différence" (p. 130).

La nature de la suite de terme général $F_n(W)$ est d'autre part la même que celle de la série de terme général $F_{n+1}(W)-F_n(W)$, puisqu'on a, par télescopage :

$$F_n = F_1+(F_2-F_1)+\ldots+(F_n-F_{n-1})$$

(*) Lambert change de signe le dénominateur le cas échéant.

Il examine les premières fractions

$$F_1(W) = \frac{1}{W} \qquad F_2(W) = \frac{1}{W-\frac{1}{3W}} = \frac{3W}{3W^2-1}$$

$$F_3(W) = \frac{1}{W+\frac{1}{-3W+\frac{1}{5W}}} = \frac{-15W^2+1}{-15W^3+6W}$$

Suite de fractions rationnelles donc ; Lambert est donc ici "naturellement" conduit à examiner l'approximation d'une fonction (V ⟶ tgV) par des fractions rationnelles, et ceci donne un nouvel éclairage fonctionnel aux fractions continues (qui avait été seulement entrevu par Euler) : il y a là le cheminement d'une idée.

On a donc : $F_n(W)-F_{n-1}(W) = \frac{1}{|Q_{n-1}(W).Q_n(W))|}$ (1)

Reste à examiner un peu comment ça se passe au dénominateur. Pour cela Lambert écrit (p. 124) les premières valeurs des dénominateurs.

$$Q_1(W) = W$$
$$Q_2(W) = 3W^2-1$$
$$Q_3(W) = -15W^3+6W$$

et essaie de trouver la forme générale. Il y faut un bon oeil, (car la loi de formation n'est pas évidente), mais il n'en manque pas, car il postule (et <u>démontre</u> par récurrence) la forme suivante (*) :

(*) Au signe près, à nouveau.

$$Q_n(W) = 1,3,5\ldots(2n-1)W^n - \frac{W^{n-2}}{2}(2n-2)(1.3.5\ldots(2n-3))$$
$$+ \frac{W^{n-4}}{2.3.4}(2n-4)(2n-6)(1.3.5\ldots(2n-5))$$
$$- \frac{W^{n-6}}{2.3.4.5.6}(2n-6)(2n-8)(2n-10)(1.3.5\ldots(2n-7))$$
$$+ \ldots \text{ (il s'agit de polynômes)}$$

et donc, en mettant en facteur le monôme dominant (p. 129) :

$$Q_n(W) = 1.3.5\ldots(2n-1)W^n[1-\frac{W^{-2}}{2}\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{W^{-4}}{2.3.4}\frac{(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)}-\ldots]$$

"Posons $n = \infty$", dit-il sans aucun souci ici de convergence. Le crochet "donne" (avec $W = \frac{1}{V}$) :

$$1 - \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} - \ldots$$

qui est le cosinus de V. (p. 129)

on a donc à l'infini : $Q_n(W) \sim 1.3.5\ldots(2n-1)W^n\cos V$ (*)

et $\left|\frac{1}{Q_{n-1}(W)Q_n(W)}\right|$ décroît donc vers zéro très vite (à cause des factorielles : 1.3.5...(2n-1)), et la série est donc "plus convergente que ne l'est toute progression géométrique décroissante".

D'autre part, le numérateur $P_n(W)$ a une structure analogue ; avec la mise en facteur du même terme $(1.3.5..(2n-1)W^n)$, on voit qu'il tend vers :

$$W^{-1} - \frac{1}{2.3}W^{-3} + \frac{1}{2.3.4.5}W^{-5} - \ldots$$

c'est-à-dire : sin V. Ainsi, on a la convergence simple :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(W) = \text{tg}V.$$

(*) Lambert ne parle pas d'équivalent mais écrit : "quoique le 2.4.6 etc. terme soit soustractif, cela n'empêche pas que la somme des termes ne croisse plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante" (p. 130).

ce qui établit donc les deux premiers points de la partie synthèse de son résultat.

Lebesgue a étudié le théorème de Lambert dans "Leçons sur les constructions géométriques" (*), et il souligne que numérateur et dénominateur convergent uniformément (vers sin V et cos V respectivement) sur tout segment contenu dans l'ensemble de définition de tangente ([4] page 106) ; Lambert, dit-il, ne s'est évidemment pas soucié de convergence uniforme. L'analyse de Lebesgue est cependant peu satisfaisante par ailleurs car il n'a repris qu'une partie seulement du texte original de Lambert ; pour la partie "irrationnelle", décrite plus loin, il utilise la variante de Legendre (voir plus loin) qui est en effet bien plus simple, mais aussi tout à fait opaque. Les calculs de Lambert dans cette partie sont d'autre part rebutants : ceci est le prix de sa méthode et de son obstination à tout interpréter en termes de division euclidienne, qui est son idée maîtresse. Ce point de vue disparaît apparemment complètement dans le texte de Legendre.

Lebesgue, d'ailleurs, donne des résultats généraux ([4] pages 95/102) dans le cas des fractions continues du type étudié par Lambert qui ne sont plus "arithmétiques", mais "généralisées". (Un résultat de Lebesgue est que, moyennant certaines hypothèses, on a $|Q_n(W)|>2|Q_{n-1}(W)|$ ([4] p. 99).

(*) [4] Paris Gauthier Villars 1950. Il s'agit d'un livre posthume remarquable rassemblant des leçons faites au Collège de France (pages 102 à 109).

Ce qui entraîne aussitôt une majoration géométrique de :

$$\frac{1}{|Q_n(n)\,Q_{n-1}(W)|} < \frac{1}{2^{n-3}Q_1^{\,2}(W)}$$

Or, le résultat de Lambert est plus fort :

$$\frac{1}{|Q_n(W)Q_{n-1}(W)|}$$

négligeable devant $\frac{1}{k^n}$, pour tout k.

En fait, donc, tgV est très bien approchée par les rationnels, Liouville, s'il avait bien lu Lambert, aurait sans doute pu appliquer au scénario précédent son propre théorème :

(*) Tout algébrique est mal entouré par les rationnels.

Si un nombre est bien entouré par les rationnels, il est donc transcendant.

C'est ici le cas de tgV qui est donc transcendant si V est rationnel ; or ceci est un résultat de 1887 (théorème d'Hermite-Lindermann).

Sans doute peut-on dire ici de Lambert ce que Lebesgue(**) disait d'Hermite et Lindemann :"ils ont moins bien compris que nous ce qu'ils ont fait", une phrase que Freud aurait pu signer.

(*) Liouville : "Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques" (C.R.A.S. 13&20 Mai 1844).

(**) Sur les démonstrations dites élémentaires de e et de π (p. 266) "L'enseignement mathématique" Genève Juin 1932.

CONVERGENCE VERS UN IRRATIONNEL

C'est le point le plus délicat. Au milieu de la forêt de ses calculs, je tâcherai ici de rester fidèle à Lambert dans l'esprit de sa méthode mais non dans son détail.

Supposons, dit-il, que $V = \frac{\phi}{\omega}$ soit rationnel ainsi que $tgV = \frac{M}{P}$ (ω,ϕ,M,P entiers). On peut supposer M et P premiers entre eux.

On mesure de deux manières différentes la distance entre la limite (la "vraie valeur") et la $n^{\text{ième}}$ fraction.

- d'abord, par <u>nécessité</u> de sa propre construction :

$$\lim_n F_n(W) = tgV$$

Donc $|F_n(W)-tgV| <$ Reste de rang n de $|F_{n+1}-F_n|$

$$|F_n(W)-tgV| < \frac{1}{Q_n^{\,2}} + \frac{1}{Q_{n+1}^{\,2}} + \cdots \leqslant \frac{\lambda}{Q_n^{\,2}}$$

(car $|Q_{n+1}| > 2|Q_n|$ par exemple à partir d'un certain ran[g]

- ensuite et par <u>structure</u>, pour tout rationnel $\frac{M}{P}$, on

$$|F_n(W)-\tfrac{M}{P}| = |\frac{P_n(W)}{Q_n(W)} - \frac{M}{P}| = \frac{|P.P_n(W)-M.Q_n(W)|}{P|Q_n(W)|}$$

Donc :

$$|F_n(\tfrac{\omega}{\phi})-\tfrac{M}{P}| = \frac{|P\,P_n(\frac{\omega}{\phi})-M\,Q_n(\frac{\omega}{\phi})|}{P|Q_n(\frac{\omega}{\phi})|}$$

P_n et Q_n sont à coefficients entiers : le numérateur est de la forme $\frac{1}{\phi^n}.\,S_n$, où S_n est un entier.

Donc $$|\frac{S_n}{\phi^n P.Q_n(\frac{\omega}{\phi})}| \leqslant \frac{\lambda}{Q_n^{\,2}(\frac{\omega}{\phi})}$$

De là on conclut que $|S_n| \leqslant \mu \dfrac{\phi^n}{|Q_n(\frac{\omega}{\phi})|}$

comme $\frac{1}{Q_n}$ décroît plus vite que toute progression géométrique il en résulte que S_n devient plus petit "que toute quantité assignable, ce qui veut dire qu'il n'y en a point", et ceci "emporte la conséquence que $\frac{M}{P}$ est une quantité incommensurable à l'unité ou irrationnelle." ([2] ; p. 138).

En effet, S_n est un entier, qui tend vers zéro, il est donc nul à partir d'un certain rang. Ceci implique que $\frac{M}{P} = F_n(\frac{\omega}{\phi})$ pour tout $n > N_0$, ce qui est exclu, car les fractions sont deux à deux distinctes, comme on le voit par la différence $F_{n+1}-F_n$.

L'argument de Lambert, équivalent à celui-ci est d'une mise en forme bien plus compliquée, car il réinterprète en termes de pseudo-divisions euclidiennes la différence :

$$\frac{M}{P} - F_n(W)$$

L'argument majeur est donc ici : il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels non nuls. On note que l'argument de Legendre (cf. dernier paragraphe) dans cette même partie de sa variante est celui de la descente infinie de Fermat : il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels; ce fait simple et essentiel était donc ici interprété : comme pour les fractions continues arithmétiques la suite des réduites associées à tgV est donc constante (à partir d'un certain rang), si et seulement si tgV est rationnel. S'il ne l'est pas, il est encadré au sens strict par les réduites (rationnelles) de rang pair et impair.

Revenons à Lambert : il conclut comme annoncé $\mathrm{tg}\frac{\Pi}{4} = 1$; Donc $\frac{\Pi}{4}$ n'est pas rationnel, non plus que Π. "les tangentes rationnelles et les arcs rationnels ne sont pas distribués par toute la circonférence du cercle, de façon comme s'ils étaient jetés au hasard, mais il faut qu'il s'y trouve un certain ordre et que cet ordre les empêche de se rencontrer jamais" ([2] p. 138).

Lambert se lance ensuite dans une longue étude et un parallèle entre les nombres premiers et ce qu'il appelle les "tangentes premières" (*) que je ne développerai pas ici. Cela l'autorise à établir le résultat amusant que dans une table trigonométrique rédigée en degrés, tg45° est le seul rationnel à figurer ([2], p. 143).

EXTENSION AUX EXPONENTIELLES

Lambert observe ([2], p. 145) d'abord que

$$\frac{e^V - e^{-V}}{2} = V + \frac{V^3}{2.3} + \frac{V^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

$$\frac{e^V + e^{-V}}{2} = 1 + \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} + \ldots$$

Tous les signes sont ici positifs. Mais le cas est essentiellement le même que le précédent ; on en déduit donc pareillement :

$$\frac{e^V - e^{-V}}{e^V + e^{-V}} = \frac{1}{(1/V)} + \frac{1}{(3/V)} + \frac{1}{(5/V)} + \ldots \qquad (1)$$

(*) Nommons "tangente première toute tangente rationnelle q… soit celle d'un arc dont aucune partie aliquote n'ait tangente rationnelle" ([2] p. 140). En termes modernes : le rationnel r est une tangente première si $(\forall_n \geqslant 2)$ $\mathrm{tg}[\frac{1}{n}$ Arc tg r$]$ n'est pas rationnel.

Ceci est aussi égal à $\frac{e^{2V}-1}{e^{2V}+1} = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ $(2V = x)$

Soit : $\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = \frac{1}{(2/x) + \frac{1}{(6/x) + \frac{1}{(10/x) + \ldots}}}$

En écrivant $\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = 1 - \frac{2}{e^{x}-1}$; prenant $x = 1$, ([2] ; p. 146)

on trouve d'abord $\frac{e-1}{2} = (\frac{1}{1}) + (\frac{1}{6}) + (\frac{1}{10}) + (\frac{1}{14}) + \ldots$

C'est ce que Euler avait établi empiriquement.

D'autre part, et comme les conditions sont les mêmes que précédemment, la condition (1) montre que V et $\frac{e^{2V}-1}{e^{2V}+1}$ ne sont jamais rationnelles en même temps.

Il en est donc de même de x et e^{x} qui ne sont pas rationnels ensemble.

Conclusion : "c'est ce qui nous fait voir à quel point l'irrationalité du nombre e est transcendante en ce qu'aucune de ses dignités (*) ni aucune de ses racines n'est rationnelle." ([2], p. 153).

De même, "tout nombre rationnel a un logarithme hyperbolique irrationnel."

EXORDE

Et Lambert conclut d'abord sur la classification des nombres plus finement que ne l'a fait Euler : "il ne suffit pas d'avoir trouvé que ces quantités transcendantes

-----

(*) Les puissances.

sont irrationnelles, c'est-à-dire incommensurables à l'unité. Car cette propriété ne leur est pas unique... Car, outre qu'il y a des quantités irrationnelles qu'on pourra former au hasard, (*) et qui par là ne sont guère du ressort de l'analyse, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme algébriques ; telles sont les quantités irrationnelles radicales, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et toutes les racines irrationnelles des équations algébriques, comme par exemple celles des équations

$$0 = x^3 - 5x + 1$$

Je les nommerai les unes et les autres quantités irrationnelles radicales, et voici le théorème que je crois pouvoir être démontré :

Je dis donc qu'aucune quantité transcendante circulaire et logarithmique ne saurait être exprimée par quelque quantité irrationnelle radicale qui se rapporte à la même unité, et dans lequel il n'entre aucune quantité transcendante." ([2], p. 158).

C'est conjecturer que e et Π ne sont pas racines d'une équation à coefficients entiers ni d'aucune équation à coefficients algébriques.

Lambert appuie sa conjecture sur la vague considération que la différence entre x^2 et e^{x} c'est celle de la variabilité soit de l'exposant, soit de l'argument.

(*) C'est moi qui souligne : ceci vaut donc pour Π, selon Lambert.

Et Lambert d'expliquer que si ce théorème est démontré, alors la quadrature du cercle est impossible: "Car tout ce qu'on peut construire géométriquement revient aux quantités rationnelles et radicales ; et il s'en faut même de beaucoup que ces dernières puissent être indifféremment construites." ([2], p. 159) : ceci est la trame d'une démonstration à venir, le théorème de Wantzel de 1837, (*) pierre angulaire sur le chemin de la quadrature ; Wantzel montre en effet que les seuls points constructibles à n pas, à la règle et au compas, à partir d'un ensemble de points à coordonnées rationnelles ont des coordonnées solutions d'une équation algébrique de degré 2^n (réciproque fausse).

La perspicacité de Lambert est ici étonnante, car il décrit exactement les résultats à venir (mais pas dans le bon ordre) : le théorème de Wantzel sur la constructibilité (1837), la transcendance de π (1882 : Lindermann) et donc l'impossibilité de la quadrature.

LE CITOYEN LEGENDRE

C'est un des derniers textes du 18e siècle que les "Eléments de Géométrie" de Legendre publiés en 1795 (et donc probablement rédigés dans le bruit et la fureur). C'est un

-----

(*) "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre afec la règle et le compas" Journal de Mathématiques pures et appliquées (1) 2, 1837, 366-372.

texte très "géométrique" en effet, avec des problèmes de constructibilité comme "inscrire dans un cercle donné un décagone régulier.(*) A la fin du volume, on trouve cependant deux notes assez calculatoires dont la note IV : "où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et à son quarré sont des nombres irrationnels." ([5], p. 289).

Legendre n'explique rien, part d'un développement en série hypergéométrique tiré d'on ne sait où (et il ne se préoccupe pas non plus de convergence), cherche une équation fonctionnelle qu'elle vérifie, ce qui lui permet d'écrire un développement en fraction continue généralisée (où il ne s'intéresse pas davantage à la convergence). Pour une valeu numérique donnée, il retrouve Lambert en ses développements de thx et tgx.

Il traite la question de l'irrationalité de la limite par le lemme suivant ([5], p. 291).

$$x = (\frac{m_1}{n_1}) + (\frac{m_2}{n_2}) + \dots \quad (\frac{m_k}{n_k}) + \dots$$

et si $|\frac{m_k}{n_k}| < 1$ à partir d'un certain rang, alors x est irrationnel : la démonstration, très simple, à partir de l méthode de descente infinie de Fermat (Legendre omet cependant l'étude d'une exception), masque néanmoins ce qu'il en est des fractions continues pour Lambert.

(*) [5] Legendre, Eléments de géométrie. Je citerai l'édi de 1842 (Firmin Didot, Paris).

Comme on a

$$tgx = (\frac{1}{1/x}) + (\frac{1}{-3/x}) + (\frac{1}{5/x}) + \ \ldots$$

on écrit la forme équivalente :

$$tgx = (\frac{x}{1}) + (\frac{-x^2}{3}) + (\frac{x^2}{5}) + \ \ldots$$

et $|\frac{x^2}{2n+1}| < 1$, à partir d'un certain rang.

C'est cette variante de Legendre que Lebesgue utilise pour commenter le théorème de Lambert.

Pour terminer, Legendre observe ([5], p. 296)

$$tg\Pi = o = \cfrac{\Pi}{1+\cfrac{(-\Pi^2)}{3+\cfrac{(-\Pi^2)}{5+H}}} \quad ; \text{ donc } 3 + \frac{(-\Pi^2)}{5+H} = 0$$

et $$3 = \cfrac{\Pi^2}{5+\cfrac{(-\Pi^2)}{7+(\ \ )}}$$

Par le même argument : 3 est rationnel, donc Π^2 est irrationnel.

ANNEXES