L'INTERET INTERNATIONAL

D'UN PROBLEME

PROPOSE PAR VIVIANI

Clara Silvia Roero

Université de Turin, Italie

Les études des figures géométriques courbes, comme le cercle, les lunules, la spirale d'Archimède dans le plan, la sphère, le cylindre, les conoîdes et les sphéroîdes dans l'espace ont intéressé un grand nombre de savants au cours des siècles. Dès l'antiquité un des problèmes les plus discutés ou débattus était celui de la quadrature du cercle. A ce sujet nous pouvons citer les tentatives, dès le Vème siècle avant Jésus Christ, de Antiphon, Bryson et Hippocrate de Chio. On attribue à ce dernier la quadrature de plusieurs lunules (1). Archimède (287 -212 avant J.C) a consacré de nombreux écrits aux figures curvilignes. Dans la Mesure du cercle il démontre que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} ,$$

valeur de π qui restera en vigueur jusqu'à la Renaissance. Dans Les spirales il démontre que l'aire décrite par le premier tour de la spirale est le tiers de l'aire du premier cercle. Dans l'espace, Archimède a étudié les propriétés de la sphère, du cylindre, des conoîdes et des sphéroîdes. Plus important est le résultat sur le volume de la sphère et du cylindre circonscrit, qu'il présente dans "De la sphère et du cylindre" où, entr'autres, il exprima le voeu que sa tombe portât la représentation géométrique correspondante, voeu que combla le général Marcellus (2).

Les résultats obtenus par les mathématiciens grecs sur l'aire des lunules, des spirales et des segments de parabole et sur les volumes des paraboloîdes, des cônes, des sphères et des cylindres au moyen de la comparaison le plus souvent avec l'aire ou le volume de figures élémentaires rectilignes et leur expression à l'aide de rapports simples d'entiers, ont conduit les successeurs à penser aussi que le problème de la quadrature du

---

(1) V.Caveing 1982, T.II,pp.586-723 .

(2) V.J.Dhombres, Archimède, dans Noël 1985, pp.53-66 .

cercle pouvait se résoudre élémentairement. Ce n'est toutefois qu'en 1882 que F.Lindemann (1852-1939) en montra l'impossibilité. Mais ceci dépasse le cadre de notre exposé. Nous voulons seulement rappeler que les études d'Archimède ont été poursuivies et commentées et que l'intérêt pour ces problèmes s'est aussi poursuivi durant la Renaissance avec la traduction et l'étude des oeuvres mathematiques grecques. En particulier, en Italie encore au XVII ème siècle et au début du XVIIIème certains mathématiciens préfèrent continuer l'étude des écrits grecs plutôt que d'envisager de nouvelles méthodes de démonstration. Vincenzo Viviani (1622-1703) est un des représentants les plus importants de cette tendance. Toutefois il ne se limita pas aux études des classiques existants et il essaya de reconstruire les oeuvres perdues (3). Viviani a travaillé toute sa vie dans cette direction et il a négligé les travaux importants d'autres mathématiciens comme Descartes, Fermat et Leibniz. Un des problèmes qu'il a étudié plus particulièrement dès le début de ses recherches, est celui de trouver une portion de surface sphérique quarrable, c'est à dire égale à la surface d'un carré donné (4). C'est justement le problème qu'il a lancé beaucoup plus tard comme défi aux savants étrangers en 1692 : à notre avis, ceci est dû au fait que Viviani avait trouvé une solution à ce problème mais qu'il n'avait pas pu en donner une démonstration selon les canons de la mathématique grecque. S'appuyant sur la solution du problème de la chaînette donnée par Leibniz, lors de son voyage en Italie en 1689-1690, solution que Galilée

---

(3) Citons De maximis et minimis géometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei, adhuc desideratum . 1659 (Divination géométrique sur les maxima et minima dans le cinquième livre des Coniques d'Apollonius de Perge jusqu'a présent recherché ;) De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros iniuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae. 1702 (Deuxième divination géométrique sur les lieux solides dans les cinq livres perdus de Aristee le vieux).

(4) "Car on entend par le mot Quadrature, la manière de faire un quarré égal à une figure proposée. Ainsi la Quadrature de la parabole est la manière de faire un quarré égal à une Parabole terminée" (Ozanam 1691).

avait en vain cherchée André Robinet ajoute une autre interprétation intéressante (5) : Viviani, qui s'enorgueillissait d'être le dernier disciple de Galilée voulait relever le gant et il proposa donc ce défi.

Le 4 Avril 1692, à Florence, par ordre du Grand-duc Cosimo III, un problème de mathématique imprimé en un certain nombre d'exemplaires ayant pour titre Aenigma Geometricum de miro opificio Testudinis Quadrabilis Hemisphaericae c'est à dire Enigme géométrique de la merveilleuse construction de la voûte hémisphèrique quarrable proposé par un dénommé D.Pio Lisci Pusillo Géométra. L'énigme est par la suite envoyée à tous les mathématiciens d'Europe et publiée également dans les revues les plus prestigieuses du XVIIème siècle, c'est à dire dans les Acta Eruditorum (Fig 1.), et dans les Philosophical Transactions (6).

L'auteur de l'énigme était, comme nous avons déjà dit, Vincenzo Viviani, qui voulait cacher son nom derrière un anagramme afin de souligner la circonstance qu'il était le dernier des élèves de Galilée. Car D.Pio Lisci Pusillo Géometra signifie Postremo Galilei Discipulo. Nous vous rappelons briévement qu'aujourd'hui ce problème s'appelle "la fenêtre de Viviani" bien que ceci ne recouvre pas la réalité historique. En effet sous cette locution nous comprenons la recherche de l'aire de la partie de la sphère tracée sur la figure obtenue au moyen de l'intersection de la sphère et d'un cylindre de rayon moitié.

---

(5) V.Robinet 1986 et Leibniz 1692 a.

(6) Acta Eruditorum, Mensis Junii MDCXCII, pp 274-275 ; Philosophical Transactions vol.XVII , N.196, 1692/3 pp.585-586. Voir la traduction de l'énigme dans le Compte rendu de l'Atelier "La fenêtre de Viviani" de D. Lanier. in Commission Inter I.R.E.M. Histoire et Epistemologie des mathématiques. Bulletin de liaison n°4 pages 61-65. I.R.E.M. de Toulouse 1986

ÆNIGMA GEOMETRICVM DE MIRO OPIFI-
cio Teſtudinis Quadrabilis Hemiſpharicæ

A D. PIO LISCI POSILLO GEOMETRA
propoſitum die 4 April. A. 1692.

Cujus divinatio a ſecretis artibus illuſtrium Analyſtarum vigentis ævi expectatur, quod, in Geometriæ pura Hiſtoriæ tantummodo verſatus, ad tam recondita videatur invalidus.

INter venerabilia eruditæ olim Græciæ Monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum auguſtiſſimum ichnographia circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod, Teſtudine intus perfecte hemiſphærica, operitur: Sed in hac feneſtrarum quatuor æquales areæ (circum ac ſupra baſim hemiſphæræ ipſius diſpoſitarum) tali configuratione, amplitudine, tantaque induſtria, ac ingenii acumine ſunt extructæ, ut his detractis ſuperſtes curva Teſtudinis ſuperficies, pretioſo opere muſivo ornata, Tetragoniſmi vere geometrici ſit capax.

Quæritur modo, quæ ſit, qua methodo quave arte pars iſta hemiſphæricæ ſuperficiei curvæ quadrabilis, tenſæ ad inſtar carbaſi, vel turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cui demum plano geometrice quadrabili ſit æqualis?

Præſentis ænigmatis enodatio (quod ſpectat ad hujus admirabilis Fornicis tum Conſtructionem expeditiſſimam, tum Quadraturam) *Sereniſſimo FERDINANDO Magno Principi Etruriæ*, ſcientiarum & nobiliorum artium *Cultori ac Patrono Generoſiſſimo*, ab eodem Ænigmatiſta oblata jam eſt; qui quidem ſimul non dubitat, quin hoc ipſum ænigma a ſingulis literario in orbe degentibus hodie præclariſſimis Analyſtis ſit ſtatim divinandum, proprias quadrationes impertiendo ſingularis Teſtudinis hujus tetragoniſmicæ ab hemiſphæra diſſectæ, & ipſorum peracutas indagines, multiplicesque induſtrias ad hoc unum, idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometricam jacere audent, ſilere diſcant; vel potius maxima cum voce exclament,

Ob unica verorum ſciſcitabilium Scientia a Divina in hominum *mente* infuſa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, æterna iſta, quæ ſemper & unicuique ſunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum ſcire perquirat.

Fig. 1 <u>Acta Eruditorum</u>, Mensis Junii MDCXCII p. 274.

Mais Viviani proposait de disposer opportunément quatre fenêtres égales autour de la base circulaire d'un dôme hémisphérique de telle sorte qu'en les enlevant, la surface restante soit quarrable (7).

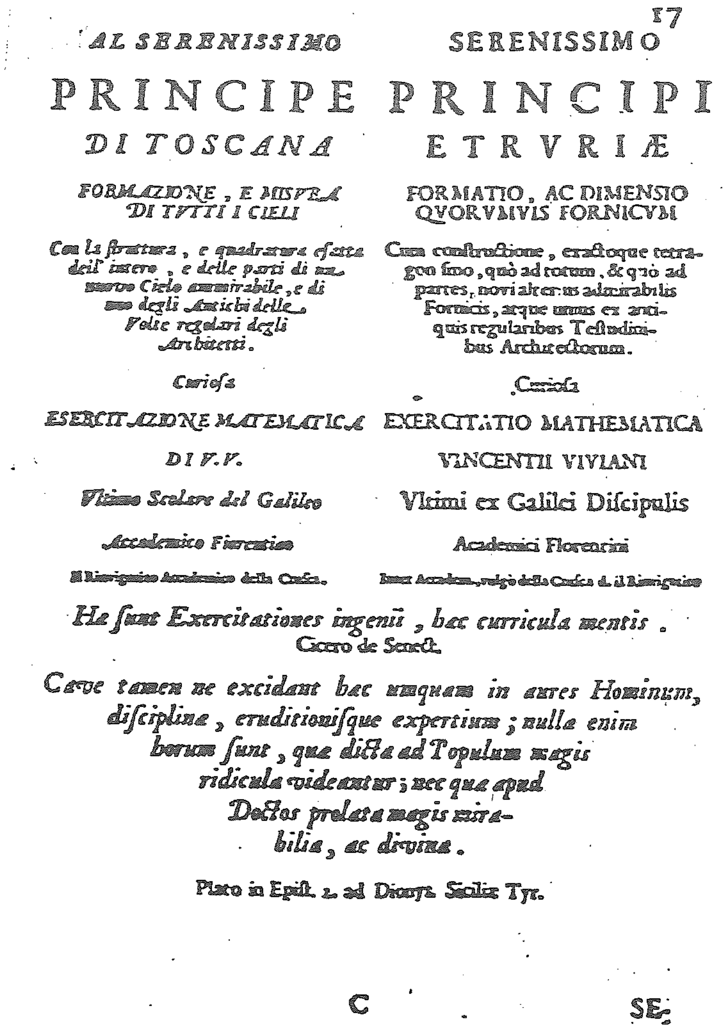
Dans le premier problème de son ouvrage <u>Formazione e misura di tutti i cieli</u> (<u>Formation et mesure de toutes les voutes</u>, Fig 2), publié en mai de la même année, il donne une nouvelle forme à son énigme : "Trouver un hémisphère et découper de sa surface non quarrable une portion égale au carré du segment donné AB". (8)

Viviani donne ici, sans démonstration, une construction pratique à l'aide d'un tour et d'une perceuse. Nous allons voir que cette solution, qui ne sera connue à l'étranger que vers la fin de 1692, se rapproche de celle de Jacob Bernoulli, <u>Aenigmatis Florentini solutiones varie infinitae</u> : (<u>Une infinité de solutions diverses de l'énigme florentine</u>)

---

(7) Ce qui n'est pas pour nous surprendre, "La fenêtre de Viviani" ayant aire $2(\pi - 2)\, r^2$, alors que le domaine envisagé par Viviani a pour aire $4\, r^2$, c'est à dire un multiple entier du carré de rayon de la sphère.

(8) " Trovar una mezza sfera, ed assegnar sulla superficie curva di essa non quadrabile una porzione, che sia uguale al quadrato della data retta AB " (Viviani 1692, p.3).



17

AL SERENISSIMO | SERENISSIMO
PRINCIPE | PRINCIPI
DI TOSCANA | ETRVRIÆ

FORMAZIONE, E MISVRA DI TVTTI I CIELI

Con la struttura, e quadratura esatta dell'intero, e delle parti di un nuovo Cielo ammirabile, e di uno degli Antichi delle Volte regolari degli Architetti.

Curiosa

ESERCITAZIONE MATEMATICA

DI V. V.

Vltimo Scolare del Galileo

Accademico Fiorentino

Il Ramingo Accademico della Crusca.

FORMATIO, AC DIMENSIO QVORVMVIS FORNICVM

Cum constructione, exactoque tetragonismo, quò ad totum, & quò ad partes, novi alterius admirabilis Fornicis, atque unius ex antiquis regularibus Testudinibus Architectorum.

Curiosa

EXERCITATIO MATHEMATICA

VINCENTII VIVIANI

Vltimi ex Galilei Discipulis

Academici Florentini

Inter Academ., vulgò della Crusca d. il Ramingo

Hæ sunt Exercitationes ingenii, hæc curricula mentis.
Cicero de Senect.

Cave tamen ne excidant hæc umquam in aures Hominum, disciplinæ, eruditionisque expertium; nulla enim horum sunt, quæ dicta ad Populum magis ridicula videantur; nec quæ apud Doctos prolata magis mirabilia, ac divina.

Plato in Epist. 2. ad Dionys. Siciliæ Tyr.

C SE

Fig.2 G.Grandi, Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum, p.17.
Texte et traduction latine du livre de Viviani.

Viviani considère une sphère dont un diamètre horizontal est AB et le centre E, représentée dans Fig. 3 par l'un de ses plus grands cercles ACBD qu'il suppose sur un plan vertical. Par une perceuse dont le diamètre de la mèche est égal au rayon EA de la sphère, Viviani imagine la percer perpendiculairement au plan du cercle ACBD en F et G, milieux des rayons EA, EB.

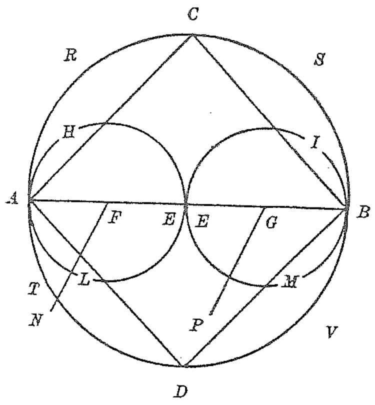


Fig 3.

"Quand vous aurez fait ceci -précise Viviani- Je prétends que vous aurez rapidement et bien résolu le problème sur chacun de ces deux hémisphères ACB supérieur et ABD inférieur." (9)

---

(9) "Cio fatto dico che avete e presto e bene sciolto il problema su ciascuna di queste mezze palle ACB superiore e ABD inferiore." (Viviani 1692, pp 4-5).

Le dôme quarrable est donc réalisé par Viviani en perçant une sphère moyennant deux cylindres égaux, dont le diamètre est égal au rayon de la sphère. Ces cylindres ont une et une seule génératrice en commun, passant par le centre E de la sphère. Si l'on considère le plan diamétral de la sphère, passant par les axes des deux cylindres, qui est évidemment horizontal, la partie de surface sphérique située au dessus de ce plan et extérieure aux deux cylindres, est le dôme cherché, ayant une aire égale au carré du diamètre de la sphère. Par sa forme et sa propriété, cette portion de surface sphérique fut également appelée Voile Quarrable Florentine (Vela Quadrabile Fiorentina).

N'étant pas entièrement satisfait par la construction proposée sur une sphère en bois façonnée au tour, Viviani donne également, à la fin de son exposition, une deuxième régle pratique pour l'exécution du dôme.

Il part cette fois-ci de deux parallélépipèdes égaux en bois (Fig 4) , ayant hauteur et profondeur doubles de la largeur, qu'il perce dans les centres E et G. Il rabote les faces BR et PS jusqu'à ce que les points F et H apparaissent. Ensuite il colle les deux plans BR et PS, en réalisant ainsi un nouveau parallélépipède, qu'il façonne au tour, jusqu'à ce qu'il devienne une sphère de diamétre LN, percée cependant à l'intérieur de ladite façon.

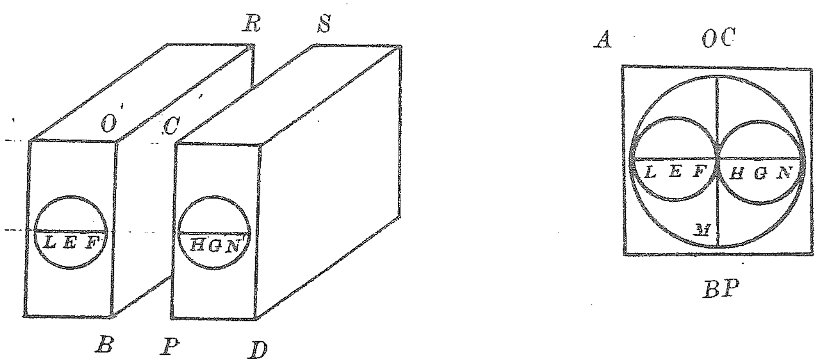


Fig 4

Il obtient par là deux modèles de la Voile Quarrable Florentine. C'est ainsi que Viviani tient sa parole, qu'il avait donné le 4 avril 1692, lorsqu'il avait écrit : "La solution de la présente énigme (...) a déjà été offerte au sérénissime Ferdinand Grand-duc de Toscane."(10).

Dans l'introduction de ce petit traité Formazione e misura di tutti i Cieli qui, comme nous l'avons déjà dit, ne sera connu à l'étranger que vers la fin de 1692, l'auteur déclare entre autres avec orgueil qu'il a été le premier à penser et découvrir une surface de ce genre sur la sphère.

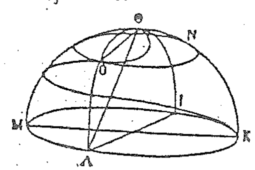
En réalité comme le moine camaldolien Guido Grandi (1671-1742) le remarquera plus tard, le premier qui indiqua une portion quarrable de surface sphérique fut Pappus (III-IV siècle après J.Ch.) dans sa Collection Mathématique (Ver Eecke 1933 , livre IV, prop. 30, pp. 201-206).

Son hélice (11) qui s'étale sur une surface hémisphérique, en partant du pôle pour rejoindre la circonférence de base, après avoir dessiné un tour complet autour de l'axe de l'hémisphère, divise, avec l'arc du plus grand cercle qui en unit les extrèmes, la dite surface en deux parties, dont l'une a une aire équivalente au carré du diamètre de la sphère.

---

(10) "Presentis aenigmatis enodatio (...) Serenissimo Ferdinando Magno Principi Etruriae ... ab eodem Aenigmatista oblata jam est. "

(11) Pappus conçoit une hélice tracée sur une sphère de la manière suivante : "Soit, dans une sphère, le cercle le plus grand K Λ M décri autour du point Θ comme pôle ; décrivons, du point Θ , la quatrième partie Θ NK d'un cercle le plus grand, et que l'arc Θ NK, mu autour du point fixe Θ sur la surface et vers le partie Λ M, s'établisse de nouveau en place, tandis qu'un point mobile sur cet arc s'avance du point Θ au point K. Ce point décrit donc dans la surface une hélice Θ OIK..."
(Ver Eecke 1933 p.202 ; voir aussi D.Lanier, Compte rendu de l'Atelier "La fenêtre de Viviani" déjà cité.



En proposant son Aenigma le 4 avril 1692, V.Viviani avait notamment engagé des analystes de l'époque à résoudre son problème, tout en s'avouant incapable de comprendre leurs méthodes.

Les résolutions qui parviennent à Florence de toutes parts sont très nombreuses, ce que Viviani lui-même déclare dans ses lettres à différents amis. (12). Parmi les premiers et les plus connus mathématiciens répondant à sa question nous trouvons Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital, Wallis et David Gregory. Leurs résolutions singulièrement différentes entre elles paraissent également dans les revues scientifiques citées précédemment, à l'exception de la résolution du Marquis de L'Hôpital, dont nous n'avons par contre aucune trace. Toutefois, nous savons , par ses correspondances, (13), qu'elle a été envoyée à Florence. Mais les recherches que nous avons conduites dans les Archives et les diverses Bibliothèques de Florence n'ont pas permis de la retrouver. Il est très probable que cette solution du Marquis de L'Hôpital ne fût pas différente de celle de Jacob Bernoulli. Dans une lettre de Johann Bernoulli à L'Hôpital du 22 Juillet 1694, il est écrit : *" Vous trouverez aussi dans cet extrait la solution de l'énigme florentine par Mr. Viviani, mais elle est à peu prez la même que celle que je vous avois donné à Paris." (14)*

L'examen des résolutions données est extrèmement intéressant, car il permet de confronter les méthodes et les moeurs des mathématiciens de la fin du XVII ème siècle, tout en révélant l'intérêt qui dominait encore pour les problèmes liés à la quadrature des surfaces circulaires et sphèriques, et, si l'on veut, à la fameuse question de la quadrature du cercle. (15)

---

(12) V.Tenca 1953 et Roero 1982.

(13) V.Gerhardt 1849, pp.218-224 et Huygens 1905, p.329, p.346 et 354.

(14)V.Spiess 1955, p.232.

(15) V.Tenca 1952.

Aussi ces résolutions prouvent-elles la remarquable imagination des mathématiciens s'appliquant à une construction d'architecture.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) résout l'Aenigma le 27 mai 1692, le jour même où il la reçoit, et en envoie au Grand Duc de Toscane le 28 mai la résolution accompagnée d'une lettre ,où il déclare son admiration pour Galilée aussi bien que pour ses élèves. Quant au problème, Leibniz le définit "trés élégant et utile au progrès de la science". Il écrit *"Sa solution me donna l'occasion de trouver non seulement l'aire plane équivalente de portions de surfaces sphériques par d'innombrables moyens, mais également leur quadrabilité". (16)*

La résolution, avec démonstration, de Leibniz, parait également au mois de juin 1692 dans les Acta Eruditorium et est scrupuleusement analysée par Jacob Bernoulli, qui y découvre , entre autres, une faute banale de calcul qu'il signale à l'auteur. (17)

Leibniz commence par énumérer un certain nombre de découvertes concernant des portions de surface de la sphère depuis Archimède. Il rappelle le célèbre théorème d'Archimède qui prouve que la surface de la sphère est l'équivalent d'un cercle ayant le diamètre double de celui de la sphère (De la sphère et du cylindre, I prop 33, Mugler 1970 pp.76.78) ainsi que le théorème plus général qui donne la surface d'une calotte sphérique ou d'une portion de sphère renfermée entre deux parallèles. (De la sphère et du cylindre, I prop.42 et 43, Mugler 1970 pp. 95.97) Leibniz rappelle par la suite qu'on venait de trouver l'aire du triangle sphérique renfermé par trois grands cercles.

---

(16)Aenigma est perelegans,quod mitti curasti, et fructuosum ad augmenta scientiae ; nam solutio ejus occasionem mihi dedit, innumerabilibus modis superficiei sphaericaepartes non in plana tantum, sed et in quadrata redigendi,... " (Gerhardt 1858, P.270).

(17) Leibniz corrigera sa faute dans les Acta Eruditorum du Janvier 1693 (V.Leibniz 169b, Additio...) D'autres écrits de Leibniz sur ce problème sont conservés au Leibniz-Archiv de Hannovre (V.Fig.5).
Ces manuscrits seront publiés dans Roero 1986.

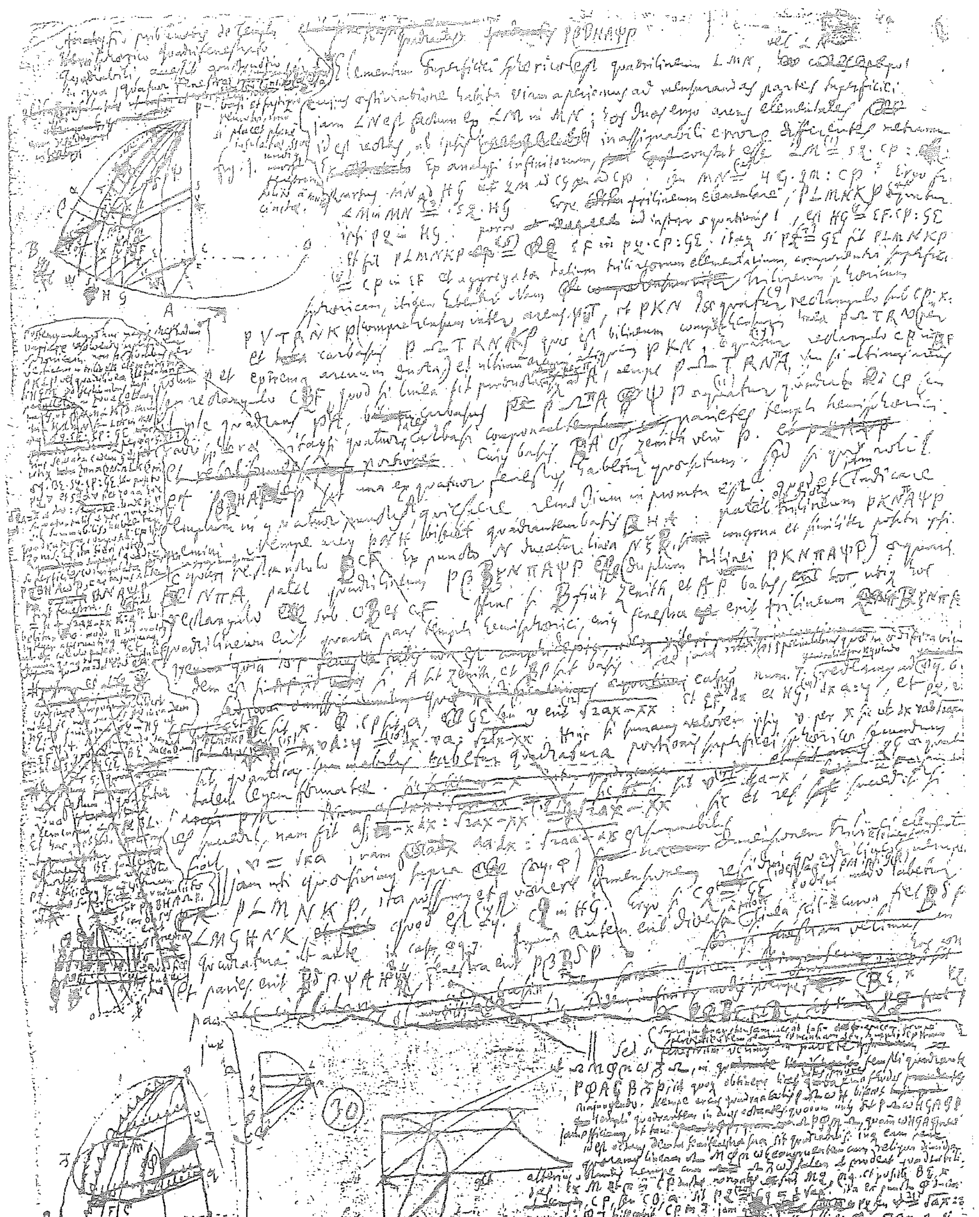
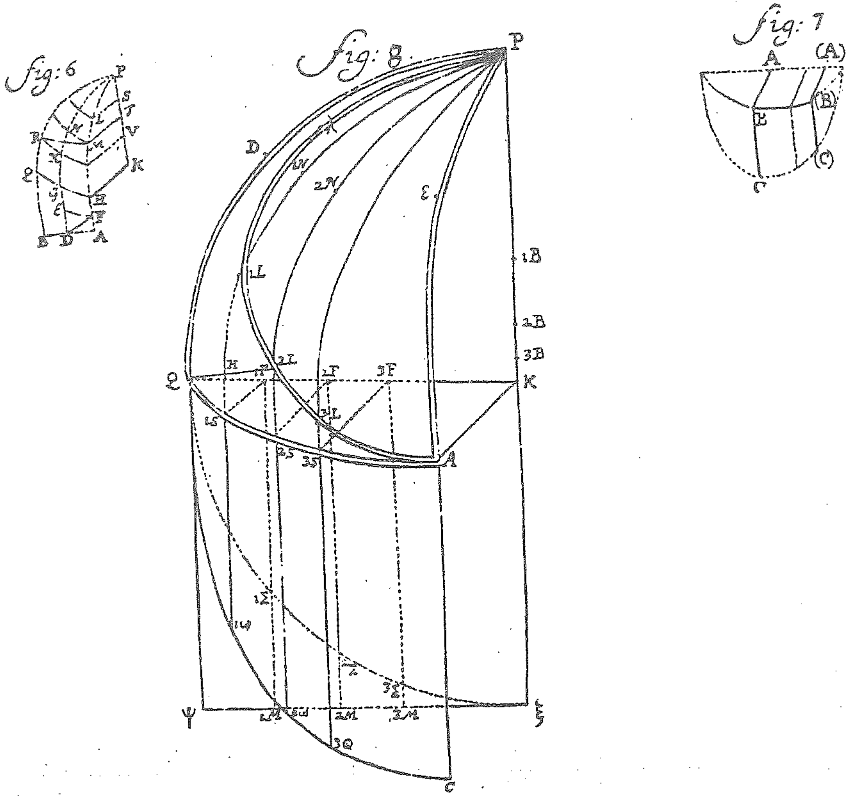


Fig.5 Manuscrit de Leibniz, Niedersachsische Landesbibliothek Hannover.

En partant de ce thèorème, le philisophe et mathématicien allemand généralise le résultat en trouvant également l'aire de triangles sphériques quelconques, c'est à dire renfermés par trois cercles quelconques. Toutes ces prémisses lui servent pour parvenir à la solution du problème florentin , qu'il interprète pratiquement sous cette forme : trouver des portions de surfaces sphériques quarrables .

TAB.V. ad A. 1692. pag. 276.



Leibniz considère d'abord les petites aires élémentaires renfermées (Fig 6) entre deux méridiens et deux parallèles en utilisant une généralisation du théorème d'Archimède, qui se trouve dans l'édition des oeuvres d'Archimède de Maurolicus(18), satisfaisant à la relation suivante :
aire élémentaire LN : aire élémentaire NR = (HG x ST) : (GQ x TV).
En indiquant les longueurs des segments et des arcs de la façon suivante :
HK = PK = r ; PL = a ; sinusversus PL = r(1-cos PL) = x ; sin PL = LS = y, QH = v et en pensant à considérer, par son calcul infinitésimal, les grandeurs
LM = da ; ST = dx ; GH = dv , il trouve que

$$NM = y \frac{dv}{r} \qquad \text{et } LM = da = r \frac{dx}{y}$$

d'où
aire élémentaire LN = LM x NM =dx dv.

De ces petites aires il passe ensuite aux triangles curvilignes, dont les cotés sont deux méridiens et un parallèle ;
triangle PHNP = PT x GH = sup. Cyl. GHAD = dx.dv = x. dv.

Il considère les triangles curvilignes formés par deux méridiens et une ligne quelconque sous-tendue (arc de cercle, non nécessairement de plus grand cercle) et en trouve l'aire équivalente sur la surface du cylindre circonscrit.

On construit ensuite un cercle et une surface cylindrique qui lui est perpendiculaire, constituée par tous les sinus du cercle, c'est-à-dire que pour chaque point B sur la surface AB est toujours perpendiculaire à BC et AB = BC. (v.Fig 7)

---

(18) V. Maurolico 1685, p.63

Il énonce donc le thèorème , déjà connu par d'autres (Roberval, Huygens), mais sans les citer , affirmant que :
surf. cyl. B (B) (C) C = A (A) x rayon du cercle.

De ces propositions préliminaires, Leibniz passe au problème en question et démontre la quadrabilité d'une partie de surface sphérique. Il prouve particulièrment que la voile ou lunule sphérique, comme il l'appelle, PALP, est équivalente au carré du rayon de la sphère, c'est à dire équivalente au carré $\psi QK \xi$ (v.Fig.8).
AKPQ est la quatrième partie d'un hémisphère.
PALP est la lunule sphérique formée par le quart de cercle PA et par la ligne ALP qui a été tirée sur la surface sphérique de façon que, si l'on conduit par P un méridien quelconque PLS, rencontrant l'équateur en S, on a FS = PB, c'est à dire le sinus de l'arc QS égal au "sinusversus" de l'arc PL. La surface cylindrique formée par les segments $S\omega$ est ensuite tracée perpendiculairement au quart de cercle KQA.

Par le théorème d'Archimède généralisé et par celui qu'on vient de rappeler, on a l'équivalence de la voile ou lunule PALP avec la portion de surface cylindrique ACQA, équivcalente au carré $\psi QK \xi$.

Leibniz démontre ce passage pour une portion de voile $P_1N_1L_2LP$ équivalente à la surface cylindrique ($_1S_1\omega_2\omega_2S$, les deux équivalentes, pour ce qui a été dit, au rectangle $_1F_2F_1M_2M$.)

Ensuite il intègre, c'est à dire il considère l'ensemble de la voile, l'ensemble de la surface cylindrique et le carré tout entier.

Suivent des considérations sur d'autres voiles ou lunules sphériques qui sont dans un rapport donné avec le carré du rayon de la sphère.

Leibniz passe finalement à la construction du dôme florentin qu'il voit simplement formé par quatre voiles égales, du type qui a été décrit et par quatre fenêtres égales qui se rejoignent toutes en P (Fig 9

La quatrième partie d'hémisphère AKPQ est donc tournée trois fois de 90° jusqu'à constituer l'hémisphère entier (Fig.9)

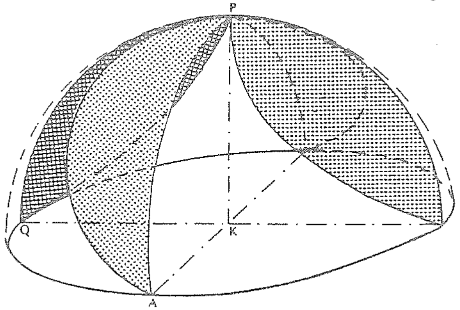


Fig. 9

Les quatre voiles ou lunules sphériques ont donc une surface égale à $4r^2$, ou au carré du diamètre de la sphère.

Si nous prenons maintenant A comme pôle et PQ comme portion d'équateur, on aura -c'est Leibniz qui le dit- un dôme avec les mêmes caractères de surface, mais avec une forme légèrement différente, alors que si l'on prend Q comme pôle et PA comme portion d'équateur, on aura un dôme avec un grand trou au sommet et quatre murs au-dessus de la base.

La solution proposée par le mathématicien et philosophe allemand n'est pas jusque là très satisfaisante si l'on demeure fidèle à l'énoncé de l'énigme florentine c'est à dire trouver le dôme d'un temple hémisphérique à quatre fenêtres égales tel que, en enlevant les fenêtres, ce qui reste de la surface soit quarrable. Car même si au point de vue mathématique le problème est parfaitement résolu, on ne peut pas dire qu'au point de vue de l'architecture la construction de Leibniz soit bien élégante.

Jacob Bernoulli, qui examina soigneusement la contribution de Leibniz, finit, peut être bien pour cette raison, par proposer une autre

résolution, publiée en août 1692, toujours dans les Acta Eruditorum. Jacob Bernoulli cependant ne donne pas la démonstration des résolutions proposées parce qu'il la considère peut-être trop évidente après l'article de Leibniz. Nous estimons que trés probablement Bernoulli aussi a employé le calcul infinitésimal pour la résolution de ce problème. En effet à la fin du 17ème siècle l'analyse infinitésimale est déjà trés développée et Jacob Bernoulli a plusieurs fois démontré qu'il sait s'en servir de façon magistrale.

Ceci est aussi confirmé par Christiaan Huygens (1629-1695), dont nous examinerons les écrits un peu plus loin et par l'auteur du compte-rendu de la brochure de Viviani Formazione e misura di tutti i cieli, dans les Acta Eruditorum. Cet auteur (19) affirme en effet : "*Celui qui proposa le problème florentin que Leibniz aussi bien que Bernoulli ont résolu par le calcul leibnizien dans nos Acta...*"

L'assez court exposé de Bernoulli se compose de cinq paragraphes dont le premier est déjà la résolution du problème. Il considère ici en effet la surface d'un quart d'un hémisphère ABCK (v. Fig 10) borné par les quarts de cercle ABK, ACK, BCK. Les deux pemiers (ABK, ACK) sont d'abord imaginés verticaux et le troisième (BCK) horizontal.

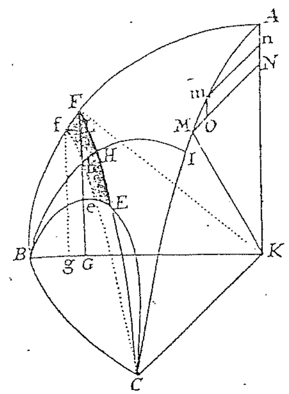


Fig 10

L'on prend un point quelconque F sur l'arc du plus grand cercle AB et l'on trace le plus grand cercle F et C. On détache de ce dernier un arc FE égal à BF."Le point E - affirme Bernoulli - se trouve sur le

---

(19) Acta Eruditorum 1694, pp.206-208.

contour demandé de la fenêtre BEC" (20)

Aussi, par cette construction, le mathématicien suisse fournit-il une régle pour trouver tous les points du contour de celle qui sera l'une des quatre fenêtres du dôme. Il continue tout de suite après, avec un parallèle intéressant. Si l'on pense au dôme comme à la surface de la terre, où C représente le pôle, BA l'équateur et BC le premier méridien, il suffira de prendre tous les points ayant longitude et latitude égales pour trouver le contour de la fenêtre cherchée.

Les quarts de cercles verticaux sont maintenant BCK et ACK, alors que ABK est horizontal.

Revenons maintenant à la disposition précédente où A est le pôle. La surface ABECA du quart de dôme qui reste en ayant enlevé l'aire BECDB de la fenêtre "sera l'équivalent du carré du rayon et l'ensemble du dôme du carré du diamètre de la sphère".

Dans les quatre paragraphes qui suivent Bernoulli construit des dômes, dont les surfaces sont dans un rapport donné avec le diamètre de la sphère, ou alors l'équivalent des figures quarrables données (par exemple des célèbres lunules d'Hippocrate).

Jacob Bernoulli revient encore sur ce problème en 1696, lorsqu'il répond à la proposition de son frère Johan d'essayer la solution de l'énigme florentine sur la surface de conoïdes ou de sphéroïdes.

Dans un article Jakobi Bernoulli Complanatio Superficierum Conoidicarum et Sphaeroidicarum (Aplanissement de surfaces conoïdales et sphéroïdales), publié dans les Acta Eruditorum en octobre 1696, Jacob donne la résolution du problème également sur ces solides. Il est ici particulièrement intéressant à notre avis de remarquer la fin de cet article, car Jacob Bernoulli revient à sa première solution de l'énigme de 1692 en prouvant qu'elle s'accorde à celle qui avait été donnée par V.Viviani dans son petit ouvrage.

---

(20) "...eritque punctum E in quaesito margine fenestrae BEC" (Bernoulli 1692, p.370).

Bernoulli déclare en effet (v. Fig 11) :*On tracera dans la base de l'hémisphère BCDE dont le centre est F, le diamètre BD, deux petits cercles BHF, FLD, où les rayons BF et FD sont pris comme diamètres. Chacun de ces deux cercles sera la base d'un cylindre droit quelconque, par lequel, comme par une perceuse, on imaginera de percer la sphère.*

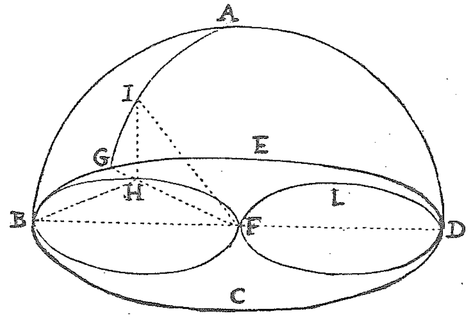


Fig 11

On prendra un point quelconque H sur la circonférence de l'un des deux petits cercles BHF, d'ou l'on tirera HI perpendiculaire au plan de la base BHF. Cette droite rencontrera la surface de la sphère en I qui sera donc l'un des points où les surfaces de la sphère et du cylindre se rencontrent. J'affirme que ce même fait se trouve également avec ma construction. Si l'on trace en effet les segments BH, HF, FI et l'on tire vers le bas le quart de plus grand cercle vertical AIG, il est évident que dans les triangles BHF et FHI, étant BF = FI, le côté HF en commun et les angles BHF et FHI droits, seront égaux aussi les côtés BH et HI. Seront donc aussi égaux les arcs BG et GI dont ces côtés représentent les sinus. Si l'on suppose donc que BCDE est l'équateur, A le pôle, BAD le premier méridien, AIG le méridien du lieu I, la longitude du point I sera égale à sa latitude. Et voilà ce que dit exactement notre construction du premier paragraphe". (21)

---

(21) Bernoulli 1696p . 481, Cramer 1744, p.744.

On pourra remarquer à ce propos qu'une démonstration de la concordance des résolutions de Jacob Bernoulli et de Viviani avait été donnée par Christiaan Huygens en 1692, même s'il ne publia jamais rien à ce propos.

Huygens, ainsi que plusieurs savants de son temps, s'intéressa au problème florentin et en fit des remarques dans ses lettres, surtout en écrivant au marquis de l'Hôpital.(22)

L'occasion lui avait été donnée par la réception du petit traité de Viviani Formazione e misura di tutti cieli en octobre 1692.

De cette époque (27 octobre) datent un certain nombre de ses pages manuscrites portant sur ce problème (23). Huygens y prouve justement la concordance entre la première résolution de Jacob Bernoulli et celle de Viviani et en donne la démonstration mathématique fondée sur l'équivalence, dans le quart d'hémisphère, entre la surface du dôme Florentin GFBCK et celle de l'onglet cylindrique KBH (V.Fig 12). Huygens s'amuse encore à découvrir des propriétés de la courbe qui renferme l'une des fenêtres.

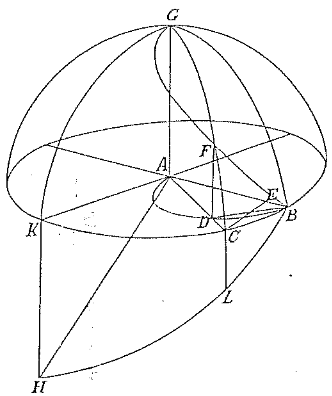


Fig 12

---

(22) Huygens 1905, p.329, p.346, et p.354 .

(23) Huygens 1905, pp. 336-338 .

L'énigme florentine est reçue avec intérêt non seulement en Allemagne, Suisse et Hollande, mais également en Angleterre.

John Wallis (1617-1703) n'en reçoit un exemplaire qu'à la fin août 1692 et se met tout de suite au travail, ignorant les résolutions précitées.

Sa démonstration est envoyée à Florence le 2 septembre 1692 et publiée dans les Philosophical Transactions.

Les considérations du mathématicien anglais sur la forme qui a été donnée à la rédaction de l'énigme sont assez curieuses et d'ailleurs intéressantes au point de vue historique. Wallis saisit immédiatement le lien existant entre ce problème de quadrature et celui de la Grèce ancienne concernant les lunules d'Hippocrate et avance même l'hypothèse de l'existence du temple, lorsqu'il dit : " *J'avais cru que l'on pensait à Sainte Sophie qui est à Constantinople*". (24)

La résolution avec démonstration donnée par Wallis utilise certains théorèmes d'Archimède sur la surface de la sphère et la construction de la première lunule quarrable comme elle nous a été léguée par Simplicius dans son commentaire à la Physique d'Aristote.

Le programme que Wallis veut ici développer est en effet déjà tracé dans les considérations préliminaires suivantes : " Archimède démontra que la surface courbe d'un hémisphère est équivalente à deux plus grands cercles de la même sphère (c'est-à-dire à quatre demi-cercles) et Hippocrate apprit à quarrer une certaine lunule. Si l'on enlève de chacune des quatre parties de cette voûte hémisphérique ce qui manque à la lunule par rapport à son demi-cercle, ce qui reste sera équivalent au carré inscrit

---

(24) ..."putaverim ego, S. Sophia (quod est Costantinopoli) Templum hic insinuatum" (Wallis 1693 p.588).

dans le plus grand cercle de la sphère". (25)

En réalité la résolution proposée par Wallis consiste tout simplement à découper (Fig 13. et 14) de la surface du quart d'hémisphère ADP

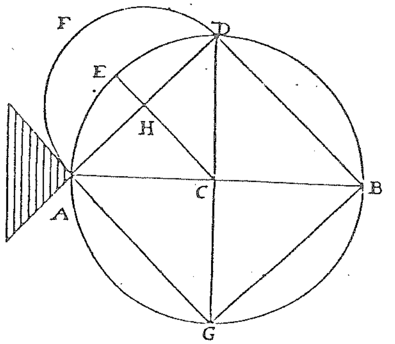


Fig 13

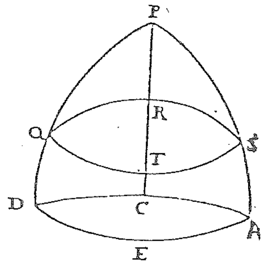


Fig 14

(équivalente du demi-cercle ABD) une portion équivalente du secteur AED additionnée du quart de cercle DBC. Ce qui reste, que Wallis considère au-dessus d'un plan parallèle à celui de la base, sera l'équivalent du triangle ADC Le dôme imaginé par Wallis est donc une calotte sphérique dont la surface est l'équivalent du carré inscrit dans le plus grand cercle. Les quatre fenêtres ne seront donc en ce cas que des portions de surface sphèrique adjacentes entre elles. Dans sa démonstration Wallis rappelle, entre autres, les résultats qu'il avait déjà obtenus dans ses traités <u>De Cycloide</u> et <u>De Motu</u>.

---

(25) "*Quippe cum* Archimedes *demonstravit*, Curvam Hemisphærii superficiem æqualem duobus Circulis ejusdem Spæræ maximis, (*id est* quatuor Semicirculis;) *Docuitque* Hippocrates *Chius* Lunulam quadrare *quandam: Si singulis Hemisphærici hujusce Fornicis quadrantibus, tantundem eximatur, quanto deficit à Semicirculo ea Lunula; Reliquum æquabitur Quadrato, quod Circulo Sphæræ maximo (cui hic insistit Fornix Hemisphæricus) inscribatur.*" (Wallis 1693, p. 587).

Pour terminer cette esquisse historique de la fameuse énigme florentine, nous signalons l'article de David Gregory (1627-1720), <u>Solutio Problematis Florentini de Testitudine Veliformi Quadrabili</u> (<u>Solution du problème florentin sur le dôme quarrable en forme de voile</u>), publié en 1694 dans les <u>Philosophical Transactions</u>. Le propos de l'auteur est de donner simplement une démonstration mathématique de la construction de Viviani, en s'appuyant sur la généralisation du théorème d'Archimède relatif aux surfaces de la sphère et du cylindre circonscrit et sur la méthode des indivisibles.

Cette méthode des indivisibles sera employée par un autre mathématicien dans le même but : G.Grandi. En 1699 il publie le livre <u>Geometrica Demonstratio Vivianeorum Problematum</u> (<u>Demonstration géométrique des problèmes de Viviani</u>) où il traite de l'énigme et d'autres problèmes du même genre en traduissant le texte de Viviani 1692. En particulier il définit la courbe qui délimite la fenêtre de Viviani en utilisant deux mouvements, comme Archimède l'avait fait pour sa spirale et Pappus pour l'hélice. Le point (Fig 15), qui part de I décrit de manière uniforme l'arc IC et en même temps le quart de cercle CEI est rabattu uniformément autour de l'axe EI sur le quart de cercle AEI.

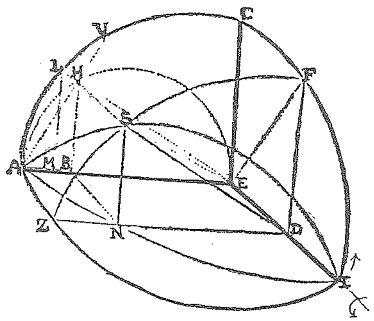


Fig 15

Grandi affirme à ce sujet qu'il aurait pu démontrer la quadrature de la portion ASIC de la voile florentine avec la méthode utilisée par Pappus dans la proposition 30 du livre IV de sa Collection Mathématique. Mais Grandi dit qu'il préfère se servir des autres moyens afin d'offrir au lecteur d'autres spéculations géométriques. Cette affirmation nous semble très importante parce que Grandi exprime ici, de cette manière, la signification fondamentale du problème de Viviani (d'un point de vue historique) : la comparaison des diverses techniques de démonstration relatives aux problèmes de quadrature (méthode d'exhaustion, méthode des indivisibles et calcul intégral de Leibniz). C'est aussi le point de vue de Viviani qui le 24 avril 1692, dans la dédicace au Grand Duc de Toscane de son opuscule Formazione e misura di tutti i cieli, écrit : " ... *en cela je ne voulais provoquer personne en duel, car celui-ci me semble toujours odieux, mais seulement voir la multiplicité des diverses voies employées pour parvenir à découvrir une même et belle Véritable Géométrie*" (26)

Sans aucun doute, au début, l'Enigme a été lancée comme défi de la part des mathématiciens italiens envers leurs collègues étrangers qui étaient beaucoup plus avancés dans ces recherches mathématiques.

L'examen des divers textes et lettres que nous avons conduit nous a en effet montré que pour Leibniz, Huygens, L'Hôpital, les Bernoulli entr'autres cette énigme se ramenait à un problème élémentaire et ne présentait pas de difficulté particulière.

---

(26) ..." io non pretesi di provocare in ciò, né di chiamar, come dir si suole, alcuno a duello ; il che mi fu sempre odiosissimo, ma sol di vedere la moltiplicità delle vie diverse, per le quali sarebbere tutti pervenuti a scoprire uno stesso, e così bel Vero Geometrico ..."(Viviani 1692 pp.VII.VIII).

Par contre, en Italie, l'effet de cette énigme fut très bénéfique. Guido Grandi et d'autres de ses contemporains, confondus par la simplicité et l'efficacité des nouvelles méthodes employées dans la résolution du problème de Viviani, commencèrent à s'intéresser aux mathématiques d'au delà les Alpes (comme ils appelaient cette autre mathématique) et à étudier les écrits de Leibniz et de ses élèves, les oeuvres de Descartes et celles de Newton. Le panorama de la mathématique italienne changeait ; délaissant souvent le domaine restreint de la géométrie classique, il dévoilait de vastes et nouveaux horizons.

Bibliographie

Bernoulli Jacob 1692, Aenigmatis Florentini solutionis varie infinitae, Acta Eruditorum ,pp.370-371 (aussi dans Cramer G. 1744, Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, T. I, Genevae,pp.512-515).

Bernoulli Jacob 1696, Complanatio superficierum conoidicarum et sphaeroidicarum, Acta Eruditorum, pp.479-481 (dans Cramer G.1744, T.II, Genevae, pp.739-744).

Caveing M. 1982, La constitution du type mathematique de l'idealité,Thèse Paris X, T.II, Université de Lille.

Favaro A. 1912-13, Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIX Vincenzio Viviani, Atti R. Ist. Ven. di Sci. Lett. Arti, T.LXXII,parte 2[a], pp.1-155.

Gerhardt C.I. 1849, Leibnizens mathematische Schriften, Band I, Halle.

Gerhardt C.I. 1858, Leibnizens mathematische Schriften, Band V, Halle.

Grandi G. 1699, Geometrica Demonstratio Vivianeorum Problematum,Firenze.

Gregory D. 1694, Solutio Problematis de Testitudine Veliformi Quadrabili, Philosophical Transactions, pp.25-29.

Huygens Christiaan 1905, Oeuvres complètes de..., T. X, La Haye.

Leibniz G. W.1692a, Solutio Problematis a Galileo primum propositi, de natura, et usu Lineae, in quam Catena, vel Funis extensionem non mutans) se proprio pondere curvat, Giornale de' letterati Modena, pp.128-132.

Leibniz G. W.1692b, Constructio testudinis quadrabilis hemisphaericae, Acta Eruditorum, pp.275-279; Additio ad solutionem problematis in Actis A. 1692, pag.274 propositi, Acta Eruditorum 1693, p.42 (aussi dans Gerhardt 1858, pp.270-278).

Maurolico F. 1685, Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica ..., Panormi.

Montucla J.F.1799, Histoire des Mathématiques, T.II, Paris.

Mugler C 1970-72, Archimède Oeuvres, T.I-IV, Paris.

Noël E. 1985, Le matin des mathématiciens: entretiens sur l'histoire des mathématiques, Paris.

Ozanam J. 1691, Dictionaire mathematique, Amsterdam.

Robinet A. 1986, Les rencontres de G.W.Leibniz avec V.Viviani (Florence, Decembre 1689) et leurs suites, à paraître dans Bollettino di Storia delle Scienze matematiche.

Roero C. S.1982, I matematici italiani e il celebre "Aenigma" di Vincenzo Viviani del 4 aprile 1692, Atti del Convegno "La storia delle matematiche in Italia, Cagliari 29.9.-1.10.1982, pp.367-375.

Roero C.S. 1986, I manoscritti inediti di Leibniz sull' "Aenigma" di Viviani, à paraître dans Bollettino di Storia delle Scienze matematiche.

Spiess O. 1955, Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Band I, Basel.

Tenca L. 1952, Osservazioni sulle lunule circolari regolari e sull'Enigma del Viviani, Bollettino U.M.I., s.3, VII, pp.328-334.

Tenca L. 1953, Sulla risoluzione dell'enigma di Vincenzio Viviani in lettere sue e di suoi contemporanei, Rend. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere vol.LXXXVI, serie III, XVII, pp.113-126.

Viviani V. 1692, Formazione e misura di tutti i cieli ..., Firenze.

Wallis J. 1693, A solution of the Florentine Problem touching the figure of a cupola, whose windows being cut out, the remainder is quadrabl Philosophical Transactions, pp.584-592 (aussi dans Wallis Ope T.II, Oxoniae, pp.479-482).