(28)

Oriental society.

Saliba, G. 1972. The Meaning of al-jabr wa'l-muqabla. Centaurus 17, 189-204.

Sayili, A. 1962. Logical Necessity in mixed equation by ʿAbd al-Hamid ibn Turk and the algebra of his time. Ankara.

Sesiano, J. 1977a. Les Méthodes d'analyse indéterminées. Centaurus, vol.21, n°2, pp.89-105.

------------. 1977b. Le traitement des équations indéterminées dans le *Badīʿfi l-Ḥisāb d'Abū Bakr al-Karajī*. Archive for History of Exact Sciences, vol.17 n°4, pp.297-379.

-----------. 1981. The Arabic Text of Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa.

Sezgin, F. 1974. Geschichte des Arabischen Schrifttums. Band V. Leiden, E.J. Brill.

Wiedemann, E. 1926-27. Uber eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al-Haitam. Sitzungsberichte der Physikalisch-medezinischen Societät zu Erlangen, 58-59, pp. 191-196.

Youschkevitch, A.P. 1976. Les Mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles). Vrin, Paris.

* * * * * * *

APERCU HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES

SUMERO BABYLONIENNES

Livia GIACARDI
Université de Turin.

Les études sur les mathématiques babyloniennes sont très nombreuses. Jorän Friberg a récemment édité un volume de plus de cent pages sur la bibliographie consacrée à ces mathématiques (1).

Outre l'aspect strictement mathématique, l'examen de textes babyloniens comporte d'autres problèmes, qui sont surtout d'ordre philologique, de datation, d'interprétation et d'emplacement dans le domaine plus vaste de la culture mésopotamienne. Pour avoir une vision complète, il faudrait donc aussi prendre en considération ces aspects culturels qui, bien qu'en marge des mathématiques, interfèrent sous certains aspects avec celle-ci et parfois la déterminent comme par exemple, l'art, l'astronomie, l'urbanisme et la technique.

Compte tenu du temps dont nous disposons, je me limiterai à traiter rapidement certains facteurs géographiques et historiques qui ont joué un rôle important quant au développement et aux caractéristiques des mathématiques babyloniennes. J'examinerai ensuite certains textes dont je ferai un commentaire et donnerai une interprétation.

Je chercherai, de plus, à mettre en évidence, à travers ces textes, les caractéristiques de la mathématique mésopotamienne en m'arrêtant plus particulièrement sur l'algèbre.

---

1 Voir (6)

J'espère, ainsi, donner aux personnes qui m'écoutent une connaissance de base sur ces mathématiques et fournir aussi des arguments didactiques et des suggestions pour une éventuelle application interdisciplinaire.

I. INTRODUCTION

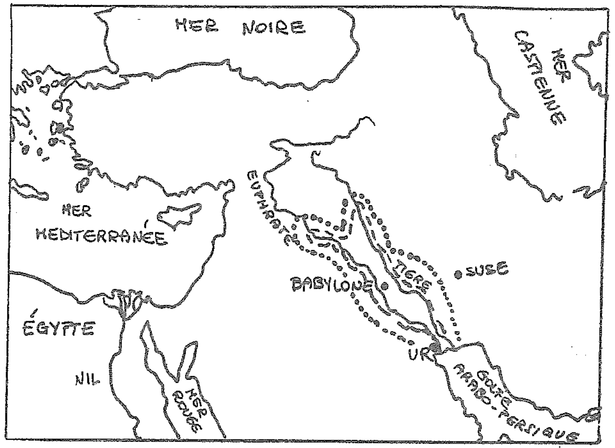
La fertilité du terrain fut l'un des principaux facteurs qui favorisèrent la naissance de communautés stables et, par conséquent, la formation d'une civilisation. Ce n'est pas un hasard si les plus grandes civilisations du passé se sont développées dans les vallées du Nil, du Tigre et de l'Euphrate ainsi que de l'Indus où le débordement naturel des fleuves déposait chaque année une nouvelle couche de terrain fertile.

Les caractéristiques du milieu ambiant de la plaine située entre le Tigre et l'Euphrate et appelée Mésopotamie (étymologiquement : pays entre les fleuves) (v. fig. 1) eurent certainement une forte influence dans la formation de la civilisation mésopotamienne.

Fig. 1

--- Sumer et Akkad

..... Extension du Premier Empire Babylonien



L'origine des Sumériens, qui furent parmi les premiers habitants de la Mésopotamie, est encore aujourd'hui un problème à résoudre. Ils s'étaient installés, depuis la moitié du IVème millénaire av. J.C., dans la partie méridionale de cette région appelée ensuite Babylonie, alors que dans la partie septentrionale, appelée plus tard Assyrie, il y avait des communautés probablement d'origine sémitique : les Akkadiens.

Les Sumériens donnèrent vie à une civilisation très évoluée et élaborée, qui fut accueillie réinterprétée et enrichie par les peuples qui se succédèrent au pouvoir dans cette région. Ce phénomène nous permet de déceler un processus historique plutôt homogène qui peut, dans l'ensemble, être indiqué comme civilisation mésopotamienne. Chacun des peuples qui se succédèrent au pouvoir en Mésopotamie tenta de réaliser un empire solide et unifié mais sans jamais obtenir un résultat définitif. Ce fait est dû à l'emplacement géographique de la région, ouverte dans toute direction et donc continuellement exposée aux invasions. La superposition des peuples et les contacts entre gens de différentes races favorisèrent le développement d'une civilisation plus vive que celle de l'Egypte, moins monolithique mais plus articulée et plus riche de curiosités scientifiques et d'intérêts techniques.

La puissance sumérienne survécut, malgré la parenthèse de la domination akkadienne (2400-2150 av. J.C.), jusqu'en 1850 environ, lorsque les invasions des peuples pour la plupart d'origine sémitique, en déterminèrent la crise et ensuite la ruine.

Durant le IVème millénaire, les Sumériens élaborèrent une écriture rudimentaire. Cette écriture fut peu à peu perfectionnée jusqu'à subir en 2500 av. J.C. un processus de simplification et d'abstration qui eut une certaine importance pour l'élaboration du système de numération sexagésimale en usage dans la mathématique suméro-babylonienne.

Vers 1700 av. J.C., Hammourabi, souverain de Babylone, parvint à étendre son contrôle sur toute la Mésopotamie et fonda ainsi le premier empire babylonien. Son règne fut caractérisé par un programme grandiose d'oeuvres publiques, par une administration correcte de la justice et, par conséquent, par un épanouissement culturel et scientifique remarquable. Des écoles pour l'éducation des fonctionnaires d'état furent fondées en annexe des temples : l'énorme importance donnée à la géométrie, à l'arithmétique et à l'algèbre, ainsi que les surprenants résultats obtenus, sont la conséquence directe des nouvelles exigences culturelles et sociales. Presque tous les textes mathématiques que nous examinerons appartiennent à l'Ancien Age Babylonien, c'est à dire à la période entre 1900 et 1660 av. J.C.

A cette époque, de plus, la nécessité de matières premières dont la Mésopotamie était dépourvue, pierres, bois, métaux et le perfectionnement des moyens de transports favorisèrent la création de voies de communication commerciale (v. Fig. 2) entre cette région et l'Iran actuel, l'Asie Mineure, la Syrie, l'Egypte et l'Inde. La circulation s'effectuait par mer, par fleuve ou sur les nombreux canaux existants. Les contacts commerciaux favorisèrent certainement des échanges culturels entre les différentes civilisations, échanges qui ont aussi une importance considérable pour l'Histoire des Mathématiques.

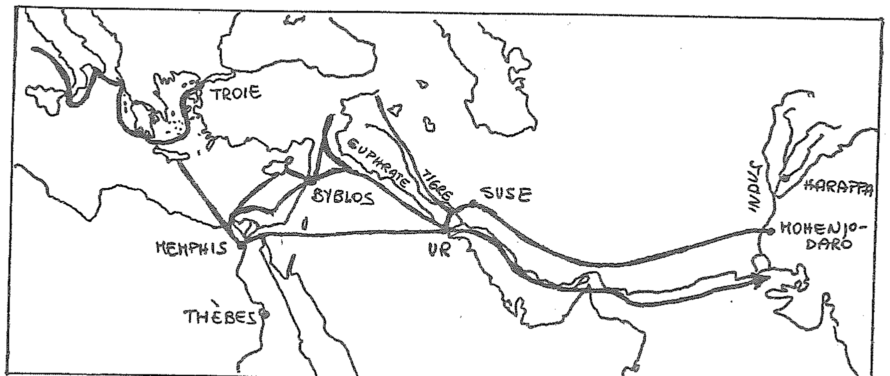


Fig. 2 : Voies de communication commerciale
(IVè - IIè millénaire av. J.C.)

Le déclin de l'empire babylonien commença après le règne d'Hammourabi soit à cause des luttes internes soit sous les pressions externes des Hittites d'abord et des Kassites ensuite. La fin du IIème millénaire voit le début de la domination des Assyriens. Ceux-ci fondèrent un empire très vaste qui durera jusqu'en 612 av. J.C.

II. SOURCES

Les tablettes avec les inscriptions cunéiformes sont la source la plus directe où nous pouvons puiser nos connaissances sur la civilisation mésopotanienne. G.F. Grotefend commença le déchiffrement de l'écriture cunéiforme au début du XIXème siècle et suggéra une clé de lecture qui fut perfectionnée par H.C. Rawlinson en 1847.

Les tablettes ayant un contenu mathématique sont environ au nombre de 300 : certaines remontent à la période sumérienne (3000-2100 av. J.C.), un groupe plus consistant appartient à la période qui va de l'époque d'Hammourabi jusqu'en 1500 av. J.C. et d'autres encore, plutôt à caractère astronomique, remontent à l'époque séleucide (environ 311 - 50 av. J.C.)

Les études de ces tablettes sont principalement dues à O. Neugebauer, F. Thureau-Dangin et E.M. Bruins.

Elles peuvent être essentiellement divisées en deux groupes : tables de calcul et textes de problèmes. Les premières avaient certainement une fonction pratique : ce sont en effet des tables de multiplication et de division à l'intérieur du système sexagésimal, des listes de mesures qui comprennent les passages d'une unité d' ordre inférieur à une unité d'ordre supérieur et vice-versa.

Les textes de problèmes sont des listes d'exercices de mathématiques avec ou sans solution. Il nous semble opportun de remarquer que les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, sans jamais généraliser : en effet, il n'y a aucune formule, aucun théorème, aucune démonstration. To utefois les Babyloniens connaissaient de nombreuses règles générales, comme nous pourrons le constater en examinant les textes.

III. CARACTERISTIQUES DES MATHEMATIQUES BABYLONIENNES

Les historiens ont souvent affirmé que les mathématiques suméro-babyloniennes sont essentiellement pratiques : cette affirmation n'est que partiellement exacte et mérite d'être précisée. Les mathématiques, auprès des peuples mésopotamiens, ne furent certainement pas conçues comme une activité spéculative et abstraite, avec des exigences de logique et de rigueur. Au contraire, elles furent un produit social, né des besoins d'une société en expansion continuelle. Les Babyloniens n'avaient pas d'idéal démonstratif analogue à celui des Grecs ; la raison de ce fait se trouve dans le contexte dans lequel se développa la science mathématique. A l'origine c'était un instrument de connaissance et de pouvoir. Elle est née et s'est développée dans les temples comme moyen indispensable pour l'administration de la ville (construction d'édifices et de canaux, perception d'impôts, division des héritages, calcul des intérêts, etc...), pour le compte du temps et pour régler les activités agricoles et commerciales (v. Fig. 3, 4, 5).

Centres urbains
Champs
Canaux

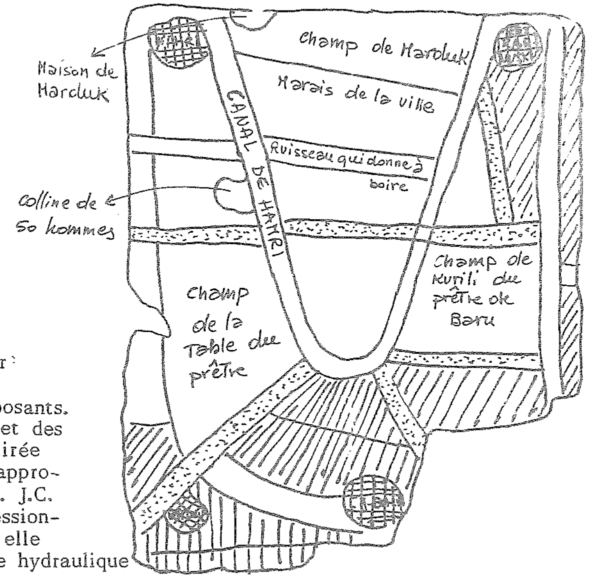


Fig. 3 : les travaux pour l'irrigation en Mésopotamie étaient imposants. Cette carte des champs et des canaux près de Nippur, tirée d'une tablette qui date approximativement de 1300 av. J.C. nous en donne une impressionnante démonstration car elle témoigne d'une technique hydraulique et agricole très évoluée.

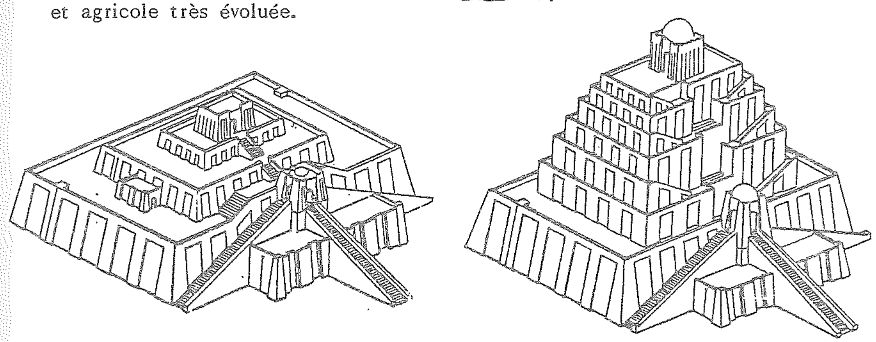
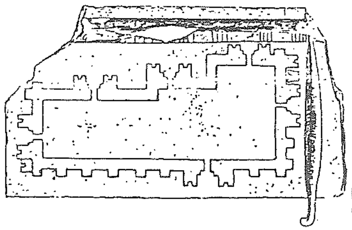
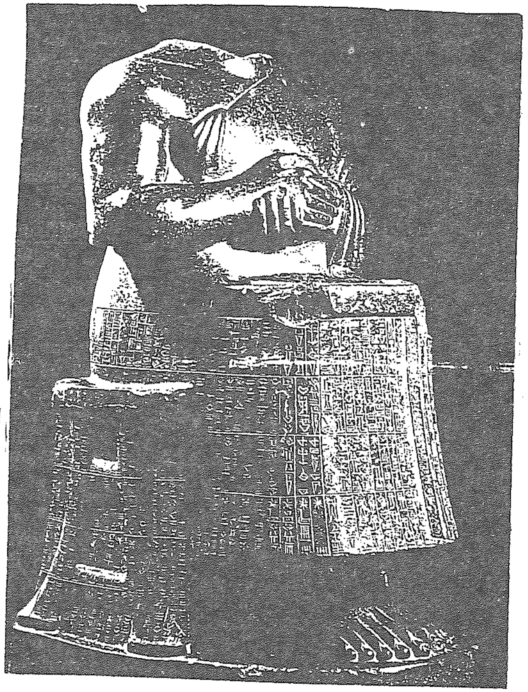


Fig. 4 : Ziggurat de la ville de Ur en deux époques successives. Les Ziggurats, les éléments peut-être les plus caractéristiques de l'architecture babylonienne, sont des tours à 3,4,5 étages ou plus, hautes de 50 à 90 m. Leur but était probablement de faciliter la descente du dieu parmi les hommes durant les cérémonies religieuses.

Fig. 5 a-b





Statue de Gudea qui se trouve au Musée du Louvre, connue comme l'Architecte au plan (2000 av. J.C.). Sur la statue est indiquée l'unité de mesure de l'époque, la coudée sumérienne (495.mm) et sur les genoux du roi se trouve la tablette reproduite sur la figure. Sur la tablette est grávée le plan d'une construction; sur les côtés sont sculptées en relief une baguette recourbée et une règle graduée. Vraisemblablement le dessin se réfère à une construction projetée par Gudea et il est probable que ce dessin soit aussi la représentation à l'échelle de cette construction. On peut consulter à ce propos [13] où il y a une reconstruction du projet du Gudea.

Un autre aspect, qui a joué un rôle non secondaire, est la numérologie.

Les textes mathématiques qui nous sont parvenus ont surtout un but pédagogique : ils servent à former les futurs fonctionnaires de l'état. Dans une telle sorte de transmission des connaissances, qui a des fins politiques de pouvoir, le secret et le ritualisme tendent à prévaloir sur la libre discussion. (V (9) , I, pp 274- 279)

En outre les Babyloniens ne faisaient pas de nette différence entre les trois branches des mathématiques : arithmétique, algèbre et géométrie, même si certains textes nous font penser le contraire comme par exemple la tablette BM 13901 que nous examinerons ensuite.

Malgré tout, il me semble opportun de donner les précisions suivantes :

- la présentation concrète des problèmes est due, le plus souvent, à la fonction didactique de ces textes ,

- le classement des problèmes selon le type de solution dénote une certaine conscience de la généralité,

- très souvent, des problèmes qui semblent, lors d'une première lecture, inspirés de situations pratiques , comprennent des données qui n'auraient aucune utilisation dans la vie réelle. Ce fait peut indiquer tout autant un aspect ludique qu'un intéret théorique.

A mon avis, et en examinant les textes nous pourrons le vérifier, de nombreux résultats des mathématiques babyloniennes ont une portée théorique, même s'il n'existe ni le symbolisme, ni la démonstration des théorèmes, ni la justification théorique des procédés de résolution utilisés.

IV. BREVES NOTICES SUR LE SYSTEME DE NUMERATION ET SUR L'ARITHMETIQUE BABYLONIENNE.

L'évolution du système de numérotation et de l'arithmétique babylonienne est étroitement liée à celle de l'écriture. A partir du IVe millénaire AV. J.C., les Sumériens inventèrent une forme rudimentaire d'écriture qui, à travers les siècles, se transforma de simple pictographie, perfectionnée ensuite par le phonétisme, en un système purement abstrait.

Durant l'époque paléosumérienne le système de numération était sexagésimal fondé sur un compromis entre les bases 10 et 6. Les symboles employés étaient les suivants :

geš	1	geš-u	600	(60 · 10)
u	10	sar	3600	(60^2)
geš(ta)	60	sar-u	36000	(60^2 · 10).

Ils étaient obtenus en imprimant dans l'argile une canne petite pour les unités et les dizaines ou grande pour les soixantaines, tenue obliquement ou verticalement.

Le système de numérotation était additif : un nombre très élevé de signes était donc nécéssaire pour représenter certains nombres ; il fallait, par exemple , utiliser 28 signes pour écrire 3599.

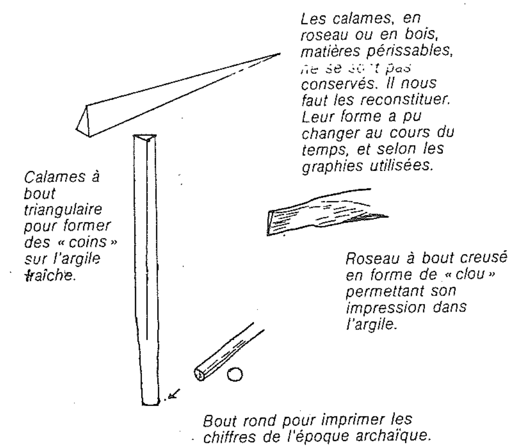
Nous reportons ci-dessous l'écriture du nombre 164.571, comme il apparaît sur une tablette de 2650 av. J.C. :

36.000+36.000+36.000+36.000	144.000
3600+3600 +3600+3600+3600	18.000
600+600+600+600+60+60	2 400
	120
10+10+10+10+10+1	50
	1
	164.571

Durant l'époque archaïque il y avait une différence essentielle entre la façon de tracer les signes de l'écriture sumérienne et celle de tracer les symboles numériques. dès le début les derniers étaient obtenus par impression, alors que les signes de l'écriture étaient incisés.

Vers 2700 on passa de l'écriture par incision sur l'argile à celle par impression au moyen d'une petite canne taillée de façon à présenter en section un triangle isocèle (Fig 6)

Fig.6 **Reconstitution de calames pour l'écriture cunéiforme**



Selon la façon dont elle était saisie on obtenait les signes ou , c'est à dire les caractères dits cunéiformes..

Evidemment, de cette façon, le dessin des objets perdit son instantanéité et apparut d'une manière géométrique et schématique.

Après l'apparition de l'écriture cunéiforme, les chiffres sumériens prirent un aspect différent, mais la structure mathématique du système ne fut pas modifiée, comme on peut le voir dans l'exemple suivant, tiré d'une tablette de 2000 av. J.C. :

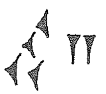
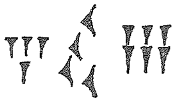
 = 60 + 20 + 8 = 88,

ou le symbole  indique 60,  indique 10, indique 1.

Le système de numération sexagésimale de position parut chez les mathématiciens et les astronomes babyloniens probablement au début du II millénaire av J.C. Ce système n'utilise que deux signes (et non 59 comme on pourrait s'y attendre) : le symbole unité  et le symbole  pour indiquer la dizaine.

Les nombres de 1 à 59 étaient écrits de façon additive ; pour les nombres à partir de 60 on employait le système de position.

Exemples:

42 :  , 286=4.60 + 46 :  ,

$4818 = 1.60^2+20.60+18$:  .

L'absence d'un symbole pour le zéro et pour la virgule donnait lieu à une certaine ambiguité ; par exemple,  peut indiquer une infinité de nombres : 2.60 + 2 , 2.60^2 + 2,.....

Pour ce qui concerne les opérations de calcul les Babyloniens n'effectuaient directement que les additions et les soustractions ; pour la multiplication et la division ils employaient des tables déjà rédigées. La division, en particulier était effectuée en multipliant le dividende par l'inverse du diviseur : des tables d'inverses, exprimés comme fractions sexagésimales , étaient donc rédigées.

Exemples :
1/2 → 0;30 , 1/3 → 0;20 , 1/5 → 0;12 , 1:24 → 0;2,30 (2)

Naturellement, ce système n'était pas parfait, en effet, sur les tables d'inverses, les espaces pour les fractions comme 1/7, 1/11, 1/13 etc. restaient vides (3). Il y avait également des Tables de racines carrées et de racine cubique.

Je voudrais citer maintenant quelques résultats intéressants obtenus par les Babyloniens dans le domaine de l'arithmétique.

La tablette connue sous le nom de Plimpton 322 (4), de la Plimpton Collection de la Columbia University, est un admirable témoignage de leur habilité de calculateurs. Cette tablette contient une liste bien ordonnée de mesures relatives à 15 triplets pythagoriciens, c'est à dire relatives au longueurs (rationnelles) des côtés a,b et de l'hypoténuse : c d'autant de triangles rectangles. Plus précisement la tablette Plimpton 322 présente des colonnes de nombres $\frac{b^2}{a^2}$, b et c tels que $a^2+b^2=c^2$

---

2 $1/24 = \frac{60 \cdot 1/24}{60} = \frac{5/2}{60} = \frac{2 + 1/2}{60} = \frac{2}{60} + \frac{1/2 \cdot 60}{60^2} = \frac{2}{60} + \frac{30}{60^2}$, donc en notation sexagésimale nous écrivons 1/24 comme 0;2,30 , ou nous marquons le ; pour séparer les puissances de 60 avec exposant positif ou n. de celles avec exposant négatif.

Exemple de division:

$3 : 8 = 3 \cdot 1/8 = 3 \cdot \frac{60 \cdot 1/8}{60} = 3 \cdot \frac{15/2}{60} = 3 \cdot \frac{7 + 1/2}{60} = 3 \cdot \left(\frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}\right)$,que,en notation sexagésimale, nous écrivons 0;22,30 .

3 Le système sexagésimal permet d' exprimer l' inverse de tout nombre régulier,c'est à dire, de tout nombre qui ne contient que les facteurs 2,3,5 avec une fraction sexagésimale finie. 1/7,1/11,1/13,... donnent lieu à fractions sexagésimales infinies périodiques; pour les Babyloniens 7,11,13 .... n'ont pas d'inverse . Par exemple 1/7 → 0;8,34,17,8,34,17,8,.....

4 Cette tablette fut découverte et publiée par O.Neugebauer et A.Sachs (v. (18. pp. 38-41) et remonte à 1900-1600 av.J.C.

où a et b sont choisis de telle sorte que leur rapport $\frac{b}{a}$ soit décroissant de la première à la quinzième ligne. Le scribe ne donne pas d'explications. Un approfondissement des problèmes que cette tablette nous pose serait trop long et, en outre, les hypothèses des historiens concernant le procédé utilisé par le scribe pour obtenir les 15 triplets sont très nombreuses (5).

Les Babyloniens furent aussi très habiles à obtenir les approximations de certains nombres. Nous citons, à titre d'exemple, la tablette YBC 7289 (6) de la Yale Babylonian Collection de la Yale University, sur laquelle est représenté un carré avec ses deux diagonales tracées (fig 7)

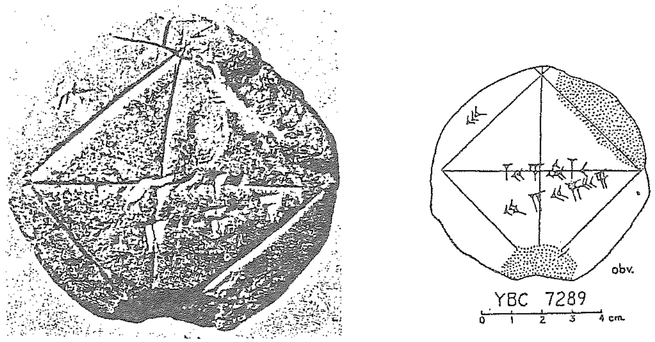


Fig 7 a,b

---

(5) Pour indications bibliographiques voir (6)

(6) v. (18), pp... 42, 43 ; cette tablette remonte à 1900-1600 av. J.C.

Les données reproduites sur la figure amènenent à une approximation très bonne de $\sqrt{2}$, c'est à dire 1; 24, 51, 10, qui, en notation décimale correspond à 1,414213 au lieu du nôtre 1,414214.....

Dans ce cas aussi le procédé qui a amené le scribe à une telle approximation n'est pas indiqué. Ceci est significatif, comme nous l'avons déjà dit plus haut, du fait que le mathématicien babylonien était plus intéressé par les résultats que par les moyens pour les obtenir ou pour les justifier. Naturellement ceci conduit ceux qui s'intéressent aux mathématiquess babyloniennes à avancer des hypothèses pour comprendre les procédes mentaux qui ont amené aux résultats connus dans les tablettes d'argile.

Dans le cas de l'approximation de $\sqrt{2}$ cité ci-dessus, la méthode suivie par les Babyloniens pourrait être la suivante : partant de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$ qu'ils connaissaient, pour b petit par rapport à a, nous pouvons écrire

(1) $(a+b)^2 - a^2 \sim 2ab$.

Posons alors

$a+b = \sqrt{2}$

et considérons une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$, soit $a_1 = 1$.

De (1) on déduit :

$(r_1 =)\ 2-1 \sim 2b$ ou $b \sim 1/2$.

Donc nous pouvons considérer une seconde approximation, par excès, de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$a_2 = 1 + 1/2 = 3/2 = 1;30$.

De (1) on a :

$(r_2 =)\ 2 - 9/4 \sim 3b$ ou $b \sim -1/12$.

Une troisième valeur approchée de $\sqrt{2}$, par excès, sera

$a_3 = 3/2 - 1/12 = 17/12 = 1;25$,

valeur que l'on trouve dans d'autres tablettes. Procédant comme ci-dessus on obtiendra une quatrième valeur approchée de $\sqrt{2}$, par défaut,

$$a_4 = 577/408 = 1;24,51,10,\ldots\ldots,$$

qui correspond à la valeur lue sur la tablette. La formule générale d'approximation peut s'exprimer ainsi :

$$a_{n+1} = a_n \pm \frac{r_n}{2a_n}$$

Il est intéressant de faire à ce sujet la remarque suivante. Le scribe s'arrêtera à la valeur a_4 peut-être parce qu'elle est la première à ne pas avoir d'expression sexagésimale finie : en effet 408 contient le facteur 17 , qui n'est pas diviseur de la base 60 (voir note 3)

Les Babyloniens étaient aussi à même de calculer la somme de progressions aussi bien arithmétiques que géométriques et plus encore ; en effet sur la tablette <u>AO 6484</u> on peut trouver <u>la recette</u> pour calculer la somme des carrés de 1 à 10. Le texte est le suivant :

Carrés depuis 1 fois 1:1 jusqu'au 10 : 1,40. Comme quoi est le nombre ? Tu multiplieras 1 par 0,20 (ou un tiers) : 0;20. Tu multiplieras 10 par 0,40 ou deux tiers : 6;40. 6;40 et 0;20 : 7. Tu multiplieras 7 par 55 : 6,25. Le nombre est 6,25 (7) .

Le problème n'est donc pas résolu en calculant les carrés successifs et en les additionnant ensuite, mais avec le schéma de calcul suivant :

$$(1.\ 1/3 + 10.2/3).55 = 385\ (= 6.60 + 25)$$

qui correspond à : $(1/3 + 2n/3)\ .\ n\ (n+1)/2$ pour $n = 10$

et donc à notre formule :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n\ (n+1)\ (2n+1).$$

---

(7) V. (21), p.76 ; cette tablette se trouve au Louvre et remonte à l'époque Séleucide. Pour avoir une notation uniforme nous avons introduit le point virgule dans l'écriture des nombres .

De nombreux historiens ont avancé des hypothèses à propos du procédé par lequel les Babyloniens ont obtenu ce résultat. Nous aimerions citer celle de S.J. Lurje (8) parce qu'elle est beaucoup plus simple que les autres et peut-être plus conforme à la mentalité babylonienne. Cette hypothèse de reconstruction du raisonnement du scribe est la suivante : compter, en les associant de façon adéquate, les cubes qui forment une construction dans l'espace (on dirait presque un batiment semblable aux Ziggurats typiques de l'architecture babylonienne) formée par un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont n,n, n+1 avec l'adjonction d'un escalier de $1+2+3+4\ldots\ldots+n = \frac{1}{2}\, n\ (n+1)$ cubes (v.Fig 8c)
Lurje prend en considération un escalier comme celui de la figure 8a, dont n=5. La plus haute marche de l'escalier est constituée par un petit cube unitaire, la deuxième marche par 4 petits cubes unitaires, la troisième par 9, la quatrième par I6 et pour finir, la cinquième par 25.

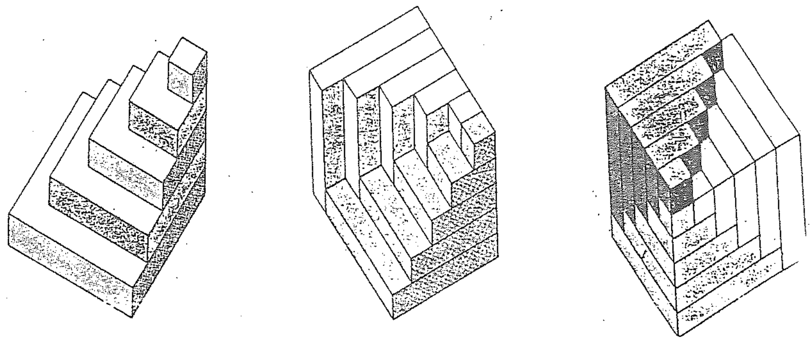


Fig. 8a, b, c

Par conséquent, le nombre total des petits cubes qui forment l'escalier est égal à la somme des carrés des nombres de 1 à 5. En associant trois constructions comme celle qui est décrite, il obtient un parallélépipède rectangle de dimensions n,n,n+1, avec l'adjonction d'un escalier qui, comme on peut voir sur la figure, est la moitié du'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 1,n,n+1. De l'observation d'ensemble de ce solide nous pouvons tirer la formule suivante :

---

(8) V. (12) , pp 72

$$3 \sum_{i=1}^{n} i^2 = n.n. (n+1) + \frac{1}{2} n (n+1),$$

dont suit, avec de très simples passages connus par les Babyloniens, le schéma de calcul qu'ils ont utilisé sur la tablette en question.

Les résultats, que nous venons d'examiner, sont certainement remarquables et intéressants, mais le domaine dans lequel la contribution des Babyloniens fut la plus originale et la plus féconde est celui du calcul algébrique.

5 LE CALCUL ALGEBRIQUE

Le symbolisme algébrique, comme nous l'entendons, est totalement absent dans les textes cunéiformes qui nous sont parvenus. Les inconnues du problème sont indiquées par des termes tirés de la géométrie tels longueur (uš) , largeur (sag), aire (a-šà), volume (sahar). Ces termes sont, cependant, utilisés de façon tout à fait abstraite ; en effet les Babyloniens additionnaient sans aucun scrupule aires et longueurs ou aires et volumes, ils ne se souciaient donc pas du sens géométrique. Il ne faut pas se laisser détourner par la terminologie géométrique des problèmes parce que les procédés mentaux des Babyloniens étaient essentiellement algébriques et la géométrie n'avait qu'un rôle auxiliaire.

Les tablettes qui nous sont parvenues démontrent que les Babyloniens étaient à même de résoudre des problèmes qui, formulés de façon moderne, correspondent aux différentes sortes d'équations qui suivent :

- équations du premier degré,
- équations du second degré,
- certaines équations du troisième degré,
- équations de degré supérieur, mais qui peuvent être ramenées à celles du second ou du troisième degré.

Les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, on ne généralise jamais : Les Babyloniens connaissaient plusieurs règles générales d'algèbre, mais il n'y a aucune formule, aucun théorème, simplement des recettes de calcul.

Ils appliquaient aussi ce qu'on appelle les identités remarquables :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A partir de quelques exemples, voyons de plus près les techniques utilisées.

En paticulier nous allons examiner la tablette BM 13901 (9) sur laquelle se trouvent 24 problèmes qui peuvent être classifiés, selon notre terminologie en trois groupes :

- étude de la méthode de résolution d'une équation du second degré à une inconnue (problèmes 1-7).

- étude de la méthode de résolution des systèmes de deux équations,où la valeur de la somme des carrés des deux inconnues figure dans la première et la somme (ou la différence ou un certain rapport ou le produit) des inconnues figure dans la seconde (problèmes 8-14)

- exercices d'application de ces méthodes à des cas intéressants ayant un nombre quelconque d'inconnues (problèmes 15-24) (10)

---

9 La tablette BM 13901 se trouve au British Museum, elle fut transcrite, traduite en français et commentée en 1936 par F.Thureau-Dangin (v(21) pp. 1-10 En 1937, O.Neugebauer en fit aussi une transcription, une traduction en allemand et un commentaire (v.(17) ,t.III pp .1-14) . Les deux auteurs s'cordent à dater cette tablette du début du II^e millenaire av.J.C. environ.

10 Nous préférons cette classification adopté par M.Caveing (v.(5) , t.I pp .91-95) plutôt que celle de O.Neugebauer ou autres, car elle ne se fonde pas sur des critères de classement qui dérivent de la façon actuelle de raisonner, mais est cohérente avec la mentalité babylonienne.

Les deux premiers groupes nous fournissent un enseignement de base qui comprend deux méthodes fondamentales de résolution : celle de la complétion du carré, dans le cas d'une seule équation, et celle de la demi-somme et la demi-différence des inconnues, dans le cas d'un système de deux équations.

Analyse du Problème, BM 13901 (11)

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 0;45
Tu poseras 1, l'unité.
Tu fractionneras en deux 1 : 0;30
Tu croiseras 0;30 et 0;30 : 0;15
Tu ajouteras 0;15 à 0;45 : 1
Tu soustrairas 0;30, que tu as croisé, de 1 : 0,30, le côté du carré.

L'équation du problème, formulé de façon moderne est :

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \quad (= 0;45)$$

Il s'agit donc de résoudre une équation du type :

$$ax^2 + bx = c, \quad a,b,c > 0.$$

La méthode utilisée sur la tablette est celle de la complétion du carré, qui, étant dans ce cas a=b=1, amène à :

$$x^2 + x + (1/2)^2 = c + (1/2)^2 \; .$$

Le scribe alors ne doit plus qu'extraire une racine carrée pour obtenir $x + 1/2$ et effectuer une soustraction pour obtenir x. Les instructions du texte amènent à :

$$x = \sqrt{(0.30)^2 + 0;45} - 0;30 = 0;30$$

ce qui équivaut donc à l'application de la formule :

$$x = \sqrt{(1/2)^2 + c} - 1/2,$$

qui est notre formule pour la racine positive de l'équation

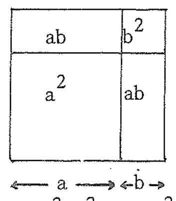
---

(11)
V. (21) , p.1 ; nous avons introduit, pour uniformité de notation, le point virgule dans la traduction de Thureau -Dangin.

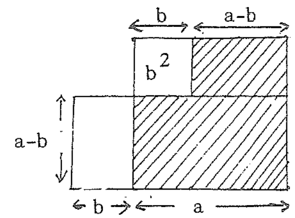
A partir de ce texte, nous pouvons déduire que les Babyloniens devaient connaître l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. D'une manière analogue la résolution d'équation du type $x^2 - x = c$, au moyen de la complétion du carré (Problème 2, BM 13901, par exemple), suppose la connaissance de l'autre identité : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nous ne savons pas comment ils ont pu obtenir ces identités. D'après L.B. van der Waerden (12), leur intuition fut facilitée par l'observation de diagrammes semblables à ceux qui se trouvent dans le second livre des Eléments d'Euclide (v.Fig 9)

Fig.9



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$

Toutes les équations quadratiques abordées dans ce texte, sont du type suivant :

$$ax^2 \pm bx = c \quad , \; a,b,c > 0$$

et sont résolues avec un algorithme qui équivaut à l'application de notre formule :

$$x = \frac{\mp\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}}{a}$$

Les Babyloniens ignoraient les nombres négatifs et ne tenaient donc en considération que la racine positive de l'équation. Mais il y a des problèmes, contenus dans d'autres tablettes, qui amènent à la résolution d'une équation quadratique du type : $x^2 + c = bx$ $(c,b > 0)$, qui a deux racines positives, qui sont explicitées.

---

(12) V. (23) p 72

Le Problème III du texte IX des Tablettes de Suse (13) , par exemple, demande la solution de l'équation :

$$x^2 + 2{,}6 = 32;30\ x$$

En notation décimale elle correspond à : $x^2 - 65/2x + 126 = 0$, qui a pour solutions $x_1 = 28$ et $x_2 = 18/4 = 4 + 1/2$. Le scribe résout cette équation par des passages équivalents à l'application de la formule suivante :

$$x = \frac{32;30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{32;30}{2}\right)^2 - 2{,}6}\ ,$$

c'est à dire, $x = 16;15 \pm 11;45$. Il écrit textuellement :

Additionne 11;45 à 16;15 tu trouves 28.
En second lieu soustrais-les : 16.45 - 11.45) - ; tu trouves 4;30 (14)

Analyse du problème 9, BM 13901 (15)

Traduction du texte	Transcription en langage mathématique moderne
1. J'ai additionné la surface de mes deux carrés : 21,40. Le côté de l'un excède le côté de l'autre de 10.	$\begin{cases} x^2+y^2 = 1300\ (=21,40) \\ x-y = 10 \end{cases}$
2. Tu fractionneras en deux 21,40 : tu inscriras 10,50.	$\frac{x^2+y^2}{2} = 650\ (=10,50)$
3. Tu fractionneras en deux 10. :5.	$\frac{x-y}{2} = 5$, $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 25$
4. Tu croiseras 5 et 5 : 25	
5. Tu soustrairas de 10,50 : 10,25.	$\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 625\ (=10,25)$
6. C'est le carré de 25.	$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = 25\ \left(= \frac{x+y}{2}\right)$
7. Tu inscriras 25 deux fois	
8. Tu ajouteras 5, que tu as croisé au premier 25 : 30, le côté du (premier) carré.	$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 30\ (=x)$
9. Tu soustrairas 5 du second 25 : 20 le côté du second carré.	$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 20\ (=y)$

(13) Les Tablettes de Suse datent de la fin de la Première Dynastie Babylonienne c'est à dire aux environs de 1500 av. J.C. E.M.Bruins et M.Rutten les ont étudièes et les ont traduites (v.(4)).
(14) v. (4). Nous avons substitué, pour avoir une notation uniforme, le point du texte par le point virgule.
(15) V.(21) p4

Pour résoudre le problème, le scribe utilise l'identité :

$$\frac{x^2+y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

que l' on obtient de : $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Puisque le problème lui fournit les valeurs de x^2+y^2 et de x-y, en extrayant la racine, au point 6. il trouve $\frac{x+y}{2} = 25$. Une fois connues les valeurs de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues, on peut en déduire ces dernières (voir points 8. et 9.).Ce n'est pas la méthode de résolution arabe, qui détermine la valeur d'une inconnue par une équation et la substitue dans l'autre. Celle qui est utilisée par le scribe est une méthode dans laquelle la demi-somme et la demi-différence des racines jouent le rôle d'inconnues auxiliaires et permettent d'obtenir simultanément les deux racines.

Une autre caractéristique de l'algèbre babylonienne est la réduction en utilisant des moyens adéquats, d'un problème quadratique au problème suivant : trouver deux nombres dont on connaît la somme (ou la différence) et le produit, ce qui équivaut à resoudre le système suivant :

$$\begin{cases} xy = P \\ x+y = S \end{cases}$$

Par exemple, dans le Problème I du Prisme AO 8862 (16) ,qui peut être formalisé comme suit :

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ xy + (x-y) = 3{,}3. \end{cases}$$

Le scribe procède de la façon suivante : il additionne les deux équations : $x(y+2) = 3{,}30$, il opère comme s'il faisait la substitution $y+2=y'$ et obtient le système :

$$\begin{cases} xy' = 3{,}30 \\ x + y' = 29 \end{cases} ;$$

il procède ensuite à la résolution par la méthode de la demi-somme et de la demi-différence des racines. Le schéma de résolution peut être traduit par la formule suivante :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{x + y'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+y'}{2}\right)^2 - xy'},$$

16 Le Prisme AO 8862 se trouve au Musée du Louvre, il date de l' époque d' Hammourabi (environ 1700 av J.C.) et contient 8 problèmes. Il fut étudié par O.Neugebauer (1937) (v. (17),I pp.108-123 et par F.Thureau-Dangin (1938) (v. (21),pp 64-71 . Pour le problème I voir (17),I pp.108-109.

qui utilise l'identité $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab$; on a donc sous le radical $\left(\frac{x-y'}{2}\right)^2$, c'est à dire le carré de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues.

La présence de nombreux exemples de ce genre nous conduit à penser que, pour résoudre les problèmes quadratiques plus complexes, les Babyloniens ramenaient ces derniers à cette forme, qui nous venons de le voir, était pour ainsi dire, une forme normale (17).

Schéma récapitulatif des méthodes résolutives des problèmes du second degré des tablettes babyloniennes

1. $x + y = a$, $xy = b$ (1, AO 8862)	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$	Le scribe utilise l'identité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$
2. $x - y = a$, $xy = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \pm \frac{a}{2}$	
3. $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$	$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\,(x^2+y^2)$ *c'est à dire* $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$
4. $x - y = a$, $x^2 + y^2 = b$ (9,BM 13901)	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \pm \frac{a}{2}$	
5. $x + y = a$, $x^2 - y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \frac{b}{2a}$	$(x+y)\ (x-y) = x^2 - y^2$
6. $x - y = a$, $x^2 - y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{b}{2a} \pm \frac{a}{2}$	
7. $x^2 + ax = b$ (1, BM 13901)	$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$	Complétion du carré
8. $x^2 - ax = b$	$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$	
9. $x^2 + b = ax$ (III, IX, Suse)	$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.	

6. CONCLUSION

C'est, sans aucun doute, à l'algèbre que les Babyloniens apportèrent leur contribution la plus considérable et la plus originale. Et, suite aux exemples que nous avons examinés, nous pouvons affirmer comme O. Neugebauer que :

"Nier à l'algèbre babylonienne l'emploi d'une formule générale serait essentiellement faux ! Les séries de problèmes étroitement liés et les règles générales qui accompagnent la solution numérique constituent, en fait, un instrument qui est très proche d'une opération purement algébrique (18)

---

(17) V.16 p.40
(18) V.16 , Traduction par l'auteur pp 42.43

Par rapport aux composantes algébrique et numérique de la mathématique babylonienne, le rôle de la géométrie n'est pas très important . Les Babyloniens savaient calculer l'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle. Ils connaissaient, au moins du point de vue arithmétique, le théorème de Pythagore (voir § 4). Ils connaissaient aussi le triangle équilatéral, l'hexagone, les polygones réguliers et savaient qu'on peut les inscrire dans un cercle. Quant au rapport entre la circonférence et le diamètre, ce qu'aujourd'hui nous appelons π , ils utilisaient en général, pour des usages pratiques, la valeur approximative 3, mais ils connaissaient aussi une approximation meilleure, c'est à dire 3;7,30 qui correspond, en notation décimale, à 3,125 (19). Les Babyloniens savaient aussi calculer correctement le volume de certains solides, des autres ils ne connaissaient que des formules approximatives. Par contre, la géométrie comme science démonstrative ainsi que les notions abstraites, sont totalement absentes du moins dans l'état actuel des données que nous possédons.

Il y a encore sûrement beaucoup de tablettes à découvrir et il y en a de nombreuses dans les Musées d'Europe qui n'ont pas encore été étudiées. D'après nos connaissances actuelles nous pouvons, en suivant M. Caveing, décrire les caractères généraux des mathématiques babyloniennes comme suit:

La distinction que nous faisons depuis les Grecs n'est pas faite à Babylone. Même les distinctions que nous venons de voir vont un peu au-delà des textes. Dans les textes, le scribe fait flèche de tout bois. Il combine des nombres, des procédures algébriques et des données géométriques ; il combine des propriétés qu'il connaît ; il ne les explicite pas. Il donne la marche à suivre à son élève sur des exemples ; la répétition des exemples doit inscrire dans l'esprit de l'élève la marche à suivre. On a des codes, on n'a pas une théorie. Ce qu'on peut dire, c'est que, dans l'usage des codes, il y a un élément de gratuité qui apparaît à certains moments, un élément qu'on pourrait appeler ludique, ou l'on se complique la tâche un peu pour le plaisir, et peut-être aussi pour le plaisir qu'il y a à discuter entre initiés de choses qu'on est seuls à comprendre (20).

---

(19) V.(4) p 33.
(20) V.(1) p 17.

LISTE DES FIGURES

BIBLIOGRAPHIE

1 Auteurs Divers ,Le matin des mathématiciens ,Editions Belin,Paris 1985

2 Auteurs Divers ,Naissance de l'écriture,cunéiformes et hiéroglyphes, Editions de la Réunion des musées nationaux, Paris 1982

3 BENEVOLO L.,Storia della città , Laterza,Bari 1975

4 BRUINS E.M.,RUTTEN M.,Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, Tome XXXIV, Textes mathématiques de Suse, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris 1961

5 CAVEING M.,La constitution du type mathèmatique de l' idéalité dans la pensée Grecque, Atelier National de reproduction des Thèses,I,II,III,Université de Lille III 1982

6 FRIBERG J., A survey of publications on Sumero-Akkadian mathematics,metrology and related matters (1854-1982), Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, Sweden 1982

7 GIACARDI L.,Alle origini dell' algebra.Dalle 'ricette' di calcolo (Egiziani,Babilonesi) al rigore dell' 'algebra geometrica' (Greci),en Atti degl: contri di Matematica,Provveditorato agli Studi di Grosseto,Grosseto 1985

8 GIACARDI L. ROERO C.S.,La matematica delle civiltà arcaiche.Egitto ,Mesopc mia,Grecia, Stampatori ,Torino 1978.

9 GUILLEMOT M. PLANE H.,L'algèbre au fil des ages,Tolosae IREM 1984

10 IFRAH G.,Histoire universelle des chiffres,Editions Seghers,Paris 1981

11 IFRAH G.,Les chiffres,ou l' histoire d'une grande invention,Robert Laffont, Paris 1985

12 LURJE S.J.,Archimedes,'Neues Österreich,Zeitungs-und Verlagsgesellschaft m.b.H. ,Wien 1948

13 MANZONI M.,Il capolavoro di Gudea,Appendice A.I en T.Viola,S.Manzoni,M. Navale,Problemi geometrici applicati alle tecniche costruttive e rappresentative, con particolare riguardo al Tunnel di Samo (Ipotesi di trian- lazione topografica nel VI sec. a.C.), Quaderno n° 80.3, Università di Torino 1980

14 MOSCATI S.,Antichi imperi d'Oriente, Newton Compton, Roma 1978

15 NEUGEBAUER O.,Vorlesungen über Geschichte der antik. en Mathematischen Wi: senschaften, I Band, Vorgriechische Mathematik,Verlag von Julius Springer, Berlin 1934

16 NEUGEBAUER O.,The exact sciences in antiquity, Princeton University Pre Princeton 1952

17 NEUGEBAUER O.,Mathematische Keilschrift-Texte, I,II,III,Reprint, Springer Verlag, Berlin 1973

18 NEUGEBAUER O.,SACHS A.,Mathematical Cuneiform Texts,Publ. American Oriental Society, New Haven 1945

19 OPPENHEIM A. L.,Man and nature in mesopotamian civilization in Dictionary of Scientific Biography (Vol XV. suppl.1.) Charles Scribner's sons, New York 1980.

20 PARROT A., Sumer, Librairie Gallimard, Paris 1960 ,Trad. it , I Sumeri , Feltrinelli, Milano 1961

21 THUREAU-DANGIN F.,Textes mathématiques babyloniens,E.J.Brill,Leiden 1938.

22 VOGEL K.,Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier,Hermann Schroedel Verlag KG,Hannover 1959.

23 WAERDEN VAN DER L.B.,Science Awakening, P. Noordhoff, Groningen 1954

24 WAERDEN VAN DER L. B.,Geometry and Algebra in Ancient Civilizations,Springer Verlag , Berlin 1983

DIDACTIQUE ET EPISTEMOLOGIE

SUR L'APPROPRIATION DES CONCEPTS DE SUITE ET LE LIMITE DE SUITE

C. HAUCHART

Université de Louvain