# QUELQUES ASPECTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE (IXe - XVe s.)

Ahmed DJEBBAR
Université de Paris-Sud Orsay

(1)

# QUELQUES ASPECTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE (IX$^{e}$ - XV$^{e}$ s.)

A. DJEBBAR
Université de Paris-Sud, Orsay.

## I. INTRODUCTION.

Parmi toutes les disciplines mathématiques qui ont fait l'objet d'enseignement et de recherches dans le cadre de la civilisation arabo-islamique, entre le IX$^{e}$ et le XV$^{e}$ siècle, l'algèbre est celle qui a bénéficié du plus grand nombre d'études de la part des historiens des sciences.

Ces études, parfois très documentées et très minutieuses, ont porté tour à tour sur les origines de l'algèbre arabe[1], sur ses débuts, sur son contenu et sa terminologie, sur les différents aspects de son développement, en relation avec d'autres disciplines mathématiques ou avec son environnement, et enfin sur sa transmission à l'Europe médiévale, soit directement, soit par l'intermédiaire des traductions hébraïques et latines.

Grâce aux résultats de ces recherches (dont certaines sont très récentes), nous allons tenter de faire le point sur ce qui est connu aujourd'hui du contenu de l'algèbre arabe, de ses grandes orientations et des obstacles auxquels elle s'est heurtés au cours de son développement.

Certains points précis de l'histoire de cette algèbre, comme ceux qui sont relatifs à ses origines et à ses débuts, continuent de susciter des interrogations et des débats et font encore l'objet de recherche. Dans cet exposé, nous nous contenterons de résumer les différentes hypothèses émises à leur sujet, en nous attardant beaucoup plus sur les aspects plus tangibles de cette algèbre (avec leurs éléments de continuité et d'innovation), tels que nous les révèle le discours algébrique lui-même à travers les ouvrages de recherche et les manuels d'enseignement qui ont été produits, au centre, à l'est et à l'ouest de l'empire musulman, entre le IXe et le XVe siècle.

## II. LES DEBUTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE.

### II.1. Le traité d'al-Khwārizmī.

Il est admis par tous les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec, à la fois, un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application), a été la publication du petit traité de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850), intitulé <u>al-Mukhtaṣar fī Ḥisāb al-Jabr wa l-Muqābala</u> (L'abrégé du calcul ‹par les procédés› du Jabr et de la Muqabala[2]) qui a été rédigé avant 833 et dédié au khalife al-Ma'mūn (813-833) qui s'était rendu célèbre par son mécénat en faveur des sciences et de la philosophie.

Il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin, et pour mieux suivre l'évolution ultérieure de l'algèbre, de présenter brièvement le contenu de ce livre tel qu'il nous a été transmis à travers les copies arabes manuscrites qui nous sont parvenues.[3]

Le livre d'al-Khwārizmī est divisé en deux grandes parties, précédées d'une introduction consacrée à la traditionnelle doxologie, à la dédicace et à un exposé très clair de la nature et des buts de l'ouvrage. Voici d'ailleurs en quels termes l'auteur y présente son contenu :
*[C'est un abrégé] "englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux, relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects"* [Dhombres,...,Guillemot 1987, p.96].

La première partie évoquée rapidement dans l'introduction par l'expression *"opérations du calcul "* et qui est, en fait, la partie la plus importante, au regard de l'histoire de l'algèbre, se subdivise elle-même en plusieurs chapitres :

Dans le premier, al-Khwārizmī, après avoir rappelé brièvement la définition du système décimal, définit les





objets de l'algèbre : les nombres (entiers et rationnel positifs), l'inconnue (*Jidhr* = racine) et son carré (*Māl* = bien), et il donne les six équations canoniques selon l'ordre suivant et en les accompagnant d'exemples :

I. $ax = b\sqrt{x}$ ; II. $ax = c$ ; III. $b\sqrt{x} = c$

IV. $ax + b\sqrt{x} = c$ ; V. $ax + c = b\sqrt{x}$ ; VI. $b\sqrt{x} + c = ax$

avec a, b, c des entiers, des rationnels et parfois même des irrationnels quadratiques, tous strictement positifs[4].

Dans le second chapitre, il fournit, pour chacun des six types précédents son algorithme de résolution. Chaque étape de cet algorithme est exprimée une première fois, d'une manière générale, puis explicitée à l'aide des coefficients numériques de l'équation qui illustre le type étudié. Ces équations à coefficients numériques déterminés deviendront elles-mêmes canoniques et, pendant des siècles, serviront d modèles dans l'enseignement de l'algèbre.[5]
Puis, il expose leurs algorithmes de résolution et l justifications (géométriques) de l'existence de leu solutions (positives).

Dans le troisième chapitre, al-Khwārizmī explique procédé "d'algébrisation" d'un problème donné afin de ramener à l'une des équations canoniques précédentes.

Dans le quatrième, il expose l'extension des opératic arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre d'alors que sont les nombres (entiers, rationnels ou irrationnels quadratiques positifs), les monômes binômes et les trinômes, en tentant, parfois sans succès, justifier géométriquement certaines de ces opérati arithmétiques.[6] Il y formule également ce qui correspond plus tard à la règle des signes, mais sans en donner une justification[7].

Le cinquième et dernier chapitre de cette première partie est constitué d'une quarantaine de probl d'applications, groupés en trois thèmes (problèmes dizaines, des biens et des hommes), et résolus à l'aide de outils des chapitres précédents.[8]

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et répartition des héritages (selon la législation islamique), à l'aide des outils de l'algèbre exposés dans la première partie.

Compte tenu de ce que nous savons aujourd'hui du contenu des procédés algébriques babyloniens, grecs et indiens, nous pouvons constater, à la seule lecture de cette table des matières du livre d'al-Khwārizmī, que, pour la première fois, nous trouvons rassemblés dans un même ouvrage, un ensemble d'éléments (définitions, opérations, algorithmes, démonstrations) qui étaient soit éparpillés et sans lien entre eux, soit non formulés explicitement et indépendamment des problèmes d'application.
De plus, tous ces éléments sont assemblés selon une logique qui vise à distinguer clairement ce chapitre des autres chapitres de la "Science du calcul".

L'importance du saut qualitatif que représente le contenu de ce livre et surtout ses formulations et son agencement, n'ont pas échappé aux contemporains d'al-Khwārizmī et à leurs successeurs et n'ont pas manqué de susciter deux questions au moins : celle de sa priorité et celle de son originalité.

### II.2. La question de la priorité du traité d'al-Khwārizmī.

Dès le X$^{e}$ siècle, cette question semble avoir fait l'objet d'un débat au sein même de la communauté mathématique de l'époque : dans son livre intitulé *al-Fihrist* (Le Catalogue), le bio-bibliographe bagdadien Ibn al-Nadīm (m. 990) nous apprend en effet que deux autres mathématiciens contemporains d'al-Khwārizmī ont publié des ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre et portant tous les deux le titre de *Kitāb al-Jabr* [Ibn an-Nadīm 1971, pp.334,339]. Il s'agit de Sanad Ibn ᶜAli et d'Ibn Turk. Le petit fils de ce dernier, connu sous le nom d'Abū Barza (m. 910) et qui était également mathématicien, aurait affirmé que, dans ce domaine, la priorité revenait à son grand-père. Mais, c'est l'opinion d'autres algébristes, comme Abū Kāmil, qui a finalement prévalu puisqu'à partir du X$^{e}$ siècle, la priorité d'al-Khwārizmī était semble-t-il admise par la communauté scientifique, à la fois en Orient et en Occident, comme le confirme Ibn Khaldūn au XIV$^{e}$ siècle [Ibn Khaldūn 1967, p.899].(9)

Quant à nous, il nous est difficile de trancher car l'ouvrage de Sanad Ibn ᶜAli est encore perdu et, de celui d'Ibn Turk, il ne nous est parvenu qu'un seul chapitre [Sayili 1962]. Cela dit, l'existence même de cette polémique,



ajoutée au caratère très élaboré de la première partie du livre d'al-Khwārizmī, comme du chapitre existant de celui d'Ibn Turk, nous autorisent à penser que les premiers traités d'algèbre produits au sein de la tradition mathématique arabe sont vraisemblablement le résultat de synthèses précédées et préparées par une activité algébrique et arithmétique antérieure au IX$^{e}$ siècle mais dont les historiens et les bio-bibliographes arabes n'ont pas retenu les étapes de maturation. Il est alors possible que la synthèse d'al-Khwārizmī ait été préférée à celles de ses contemporains pour des qualités et des nouveautés qu'elle était la seule à renfermer, comme il est possible que d'autres considérations, non scientifiques celles-là, aient prévalu à un moment ou à autre(10).

### II.3. La question des origines du livre d'al-Khwārizmī.

Les hypothèses précédentes qui ne diminuent en rien l'importance du livre d'al-Khwārizmī et n'entament pas son originalité, permettent d'aborder tout naturellement la question des différentes traditions algébriques pré-islamiques et de leurs rôles éventuels dans l'avènement de la nouvelle discipline.

Il faut tout d'abord signaler que, lorsqu'il s'agit de géométrie, d'arithmétique ou d'astronomie, les bio-bibliographes arabes n'hésitent pas à nous fournir des détails sur les ouvrages fondamentaux, essentiellement grecs et indiens, qui ont nourri les premières recherches de la tradition arabo-islamique. Pour l'algèbre c'est, a contraire, le silence total. Les chercheurs sont donc réduits à interroger les textes algébriques eux-mêmes en comparant leurs contenus (terminologie, définitions, algorithmes, démonstrations) au contenu des documents algébriques babyloniens, grecs et indiens qui nous sont accessibles aujourd'hui. Ce travail qui a commencé il y a quelques décennies et qui se poursuit encore a débouché sur un certain nombre d'hypothèses que nous allons tenter de rappeler brièvement :

La première est favorable à une origine grecque. Elle a été avancée et défendue au XIX$^{e}$, en particulier par L. Rodet (1878). Mais elle s'est avérée très fragile, après la découverte des tablettes mathématiques babyloniennes. En effet, les deux seuls ouvrages grecs qui étaient susceptibles d'inspirer les premiers algébristes arabes sont <u>Les Eléments</u> d'Euclide (III$^{e}$ s.) (plus particulièrement certaines

(6)

propositions des Livres II et VI) et *Les Arithmétiques* de Diophante (IVe s.). Or, le second ouvrage qui contient en particulier l'algorithme de résolution d'une équation du second degré, ne sera traduit en arabe qu'à la fin du IXe siècle ou au début du Xe, c'est à dire plus d'un demi-siècle après la rédaction du livre d'al-Khwārizmī.

Quant aux *Eléments* d'Euclide, dont une des traductions arabes au moins, celle d'al-Ḥajjāj (m. 833), a précédé la parution des premiers livres d'algèbre, la nature et la formulation de ses propositions sont géométriques et l'on ne peut y lire des problèmes algébriques qu'après avoir été sensibilisé au contenu de l'algèbre "réthorique". Il faut d'ailleurs remarquer qu'aucun mathématicien connu du IXe siècle n'a pensé algébriser les propositions des *Eléments* qui étaient susceptibles de l'être, comme le feront certains d'entre eux, par exemple pour le fameux lemme de la proposition 4 du Livre II de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède.

Restent les procédés de démonstration de l'existence des solutions des trois dernières équations d'al-Khwārizmī : quand on les compare à ceux qui interviennent dans certaines propositions du Livre VI des *Eléments*, on relève des différences notables, non seulement dans la forme mais également dans la démarche. cela peut s'expliquer par une volonté délibérée de proposer à ses futurs lecteurs, non spécialisés en géométrie euclidienne, des démonstrations "directes sans intervention des propositions 5 et 6 du Livre II des *Eléments* (comme le fera, quelques années plus tard, Thābit Ibn Qurra (m. 901)). N'oublions pas en effet que le livre d'al-Khwārizmī était, dans l'esprit de son auteur, un abrégé destiné aux utilisateurs, et non un ouvrage théorique pour des étudiants en mathématique rompus aux subtilités de la géométrie des *Eléments*.

A cela, il faudrait ajouter le silence d'al-Khwārizmī à propos des sources grecques en général, alors que, dans son traité d'algèbre, il n'hésite pas à se référer aux sources indiennes [Anbouba 1978, pp.67] et que son manuel d'arithmétique était intitulé "*Le livre de l'agrégation et de la désagrégation à l'aide du calcul indien* [Youschkevitch 1976, pp.16].(11)

Ce dernier élément rendrait plus vraisemblable une éventuelle influence indienne, surtout lorsqu'on sait que dès la fin du VIIIe siècle une mission de l'Inde, envoyée à la cour du calife abbasside al-Manṣūr (754-775), avait mis à la disposition des savants de Bagdad un *Siddhanta*, ouvrage astronomique renfermant habituellement un chapitre sur les



(7)

procédés de calcul (arithmétiques et algébriques) nécessaires à la résolution de problèmes astronomiques. Il n'est pas exclu d'ailleurs que l'ouvrage offert (et qui sera traduit en arabe) soit le célèbre *Brahmasphutasiddhanta* de Brahmagupta (VIIe s.) dont le chapitre XVIII expose, entre autre, les algorithmes algébriques de résolution des équations quadratiques [Colebrooke 1817, pp.325-372].

Mais cette influence indienne, si elle se confirmait un jour (grâce en particulier à une analyse comparative des textes des deux traditions) n'exclurait pas une seconde influence que ni les mathématiciens ni les bio-bibliographes arabes n'ont évoquée explicitement et qui pourrait être pourtant la plus importante. Il s'agit de la tradition algébrique babylonienne dont les découvertes archéologiques du début du XXe siècle et les analyses qui les ont suivies ont révélé l'importance.

Comme il est raisonnable d'admettre que des survivances de cette tradition se sont perpétuées dans certaines communautés d'initiés, comme les arpenteurs ou les spécialistes des héritages, il n'est pas absurde de penser que durant la période de maturation qui a préparé l'avènement des savants du début du IXe siècle, l'une des activités des premiers enseignants de mathématiques a été précisément consacrée à la collecte de ces procédés algébriques à leur assimilation et à leur enseignement, aux côtés des autres techniques de la science du calcul.

On peut même admettre que les matériaux empruntés à la tradition mathématique babylonienne par al-Khwārizmī et par ses contemporains ne se sont pas limités aux algorithmes algébriques mais qu'ils ont compris également des constructions géométriques dont certaines vont intervenir d'une manière ou d'une autre, dans les justifications de l'existence des solutions des équations quadratiques [Høyr. 1986, pp.445-484].

## III. LA TRADITION D'AL-KHWĀRIZMĪ.

Le caractère très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IXe siècle, ne nous permet pas de dater les contributions nouvelles qui s'inscrivent dans ce que l'on pourrait appeler la tradition d'al-Khwārizmī (pour la distinguer des traditions algébriques postérieures). Nous nous contenterons donc d'évoquer les travaux connus, mais plus tardifs, dans lesquels ils se manifestent à nous pour la première fois.

(8)

Il faut tout d'abord noter la publication, au cours de la seconde moitié du IX$^{e}$ siècle et du début du X$^{e}$, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre et dont certains portent le titre de <u>Commentaire du livre d'algèbre d'al-Khwārizmī</u>.[12] Malheureusement, aucun de ces traités n'a encore été retrouvé. Mais, à la lumière des écrits ultérieurs, il n'est pas interdit de penser que leur contenu intégrait les progrès internes à l'algèbre et les améliorations suscitées par des recherches extérieures à cette discipline, comme ceux qui étaient réalisés par les astronomes en géométrie et en trigonométrie et que nous évoquerons plus loin.

A côté de ces commentaires, on remarque la production de deux types d'écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'algèbre et la géométrie grecque, reflétant par la même occasion les progrès enregistrés dans l'assimilation du corpus euclidien. C'est ainsi que Thābit Ibn Qurra (m. 901) rédige un opuscule intitulé <u>La justification des problèmes de l'algèbre par les preuves géométriques</u> dans lequel il utilise les propositions 5 et 6 du Livre II des <u>Eléments</u>, pour justifier l'existence des solutions des trois équations quadratiques canoniques [Ms. Istanbul Aya Sofya 2457/3$^{e}$, ff.39a-41a].

Avec al-Ahwazi (X$^{e}$ s.), c'est plutôt la démarche inverse puisque c'est l'algèbre qui est utilisée dans son commentaire du Livre X de ces mêmes <u>Eléments</u> pour expliciter la racine carrée de certaines grandeurs irrationnelles [Ms. Tunis 16167, ff.61b-65a].

A l'extérieur du domaine de l'algèbre, les innovations suscitées par elles voient également le jour à partir du IX$^{e}$ siècle :

1. Lecture "algébrisée" de certaines propositions du Livre II des <u>Eléments</u> d'Euclide et "arithmétisation" des propositions du Livre X qui définissent certaines grandeurs incommensurables (les "rationnels en puissance", les "médiales", les "binômes", les "apotomes" ainsi que leurs racines carrées) et qui deviendront chez le mathématicien al-Māhānī et chez ses successeurs, une sous-classe de nombres (celle des irrationnels quadratiques et biquadratiques). Ces nouveaux nombres, qui généralisaient les irrationnels quadratiques empruntés aux indiens et aux survivances mathématiques babyloniennes, étaient eux mêmes enrichis par une classe de nombres d'un genre différent (selon le point de vue euclidien), puisqu'ils ne s'obtiennent pas par les techniques géométriques des <u>Eléments</u> ; il s'agit des nombres de la forme :



(9)

$$n^{1/2^p}, \quad m^{1/2^k} . n^{1/2^p}$$

et de leurs combinaisons par addition et soustraction [Ms. Paris 2457, ff.180b-181b].

2. Mise en équation de certains problèmes de géométrie et de trigonométrie : c'est ainsi que le même al-Māhānī, en voulant démontrer le célèbre lemme du problème d'Archimède de la division d'une sphère en deux parties dont le rapport des volumes est donné (Proposition 4 du Livre II du traité <u>de la Sphère et du cylindre</u>), aboutira à une équation du 3$^{e}$ degré qu'il ne parviendra pas à résoudre et qu'il finira par considérer comme impossible [ Rashed et Djebbar 1981]. Cela ouvrira la voie à un ensemble de recherches géométriques qui aboutiront à l'étude de certaines équations de degré supérieur ou égal à trois (et toujours à coefficients positifs).

Plus tard, des mathématiciens-astronomes, comme al-Bīrūnī (m. 1048) ou son contemporain Abu l-Jūd, préoccupés par la détermination exacte puis approchée de la trisection d'un angle et de la longueur des côtés de certains polygone non constructibles (comme l'heptagone et l'ennéagone) aboutiront eux-aussi à des équations du 3$^{e}$ degré [Youshkevitch 1976, pp.93-94].

## IV.- LA TRADITION D'ABŪ KĀMIL

Cette tradition des IX$^{e}$-X$^{e}$ siècles englobe un ensemble de mathématiciens dont les contributions vont concerner deux domaines déjà présents dans le <u>Mukhtaṣar</u> d'al-Khwārizmī : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées.

On voit ainsi apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui sont irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abū Kāmil dans son important traité <u>al-Kāmil fi l-Jabr wa l-Muqābala</u> (Le <livre> complet sur le Jabr et la Muqaba[la]) [Levey 1966], [Sezgin 1986].
Cela a été rendu possible par les travaux de la période antérieure, relatifs au livre X des Eléments, et qui seront enrichis et systématisés au X$^{e}$ et au XI$^{e}$ siècle. C'est ainsi que le mathématicien al-Baghdādī (XI$^{e}$ s.) consacre toute une épître à l'exposé de nombreuses règles permettant de simplifier les opérations arithmétiques (en particulier la

division) appliquées aux irrationnels qui sont combinaisons de racines carrées et de racines quatrièmes [Matvievskaïa 1972].

Cette orientation sera poursuivie au XI$^{e}$ siècle par al-Karajī [Anbouba 1964] et au XII$^{e}$ siècle par as-Samaw'al [Ahmad et Rashed 1972] qui justifieront l'extension de certaines opérations arithmétiques aux irrationnels, octroyant ainsi, de fait, un statut de nombre aux grandeurs issues du Livre X des <u>Eléments</u> d'Euclide, ainsi qu'aux autres irrationnels.

Les progrès enregistrés dans ce domaine, et qui ne doivent pas, selon nous, être dissociés des progrès de l'algèbre elle-même, ont ainsi permis une extension importante de la notion de nombre et ont probablement favorisé la réflexion et les recherches qui seront menées jusqu'aux XII$^{e}$ siècle autour de ce qui sera appelé plus tard les nombres réels.

Le second sujet étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de cette école et qui s'avèrera d'une grande fécondité est celui de l'extension de la notion de monôme et de polynôme et son application à l'étude des équations. Si l'on en croit Sinān Ibn al-Fatḥ (X$^{e}$ s.), plusieurs mathématiciens, avant lui, avaient été amenés à considérer des monômes de degré supérieur à 2 et à les nommer, mais il dit être le premier à en avoir rédigé un exposé systématique et à s'en servir pour étendre le domaine des équations résolubles par radicaux.

Son étude, qui nous est heureusement parvenue, contient en effet pour la première fois, à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes, les noms affectés à chaque degré et la généralisation des six équations canoniques de degré inférieur ou égal à 2n+p, obtenues à partir des six équations d'al-Khwarizmi en y remplaÇant les monômes 1, $x$, $x^2$, respectivement par $x^p$, $x^{n+p}$ et $x^{2n+p}$ [Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4e, ff.95a-104a].

## V.- LA TRADITION D'AL-KARAJĪ :

### V.1- La théorie des polynômes.

Nous n'avons aucun élément d'information sur l'impact immédiat qu'a pu avoir cette extension des monômes et des équations et il faudra attendre la fin du X$^{e}$ siècle ou le début du XI$^{e}$ pour en mesurer l'aboutissement en quelque sorte





à travers les travaux d'al-Karajī (m. 1029). C'est en effet dans ses livres que l'on trouve un exposé des premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec la règle de multiplication et de division des monômes et des inverses de monômes, basée sur l'utilisation explicite de la notion de puissance (en arabe : Uss) et des opérations d'addition et de soustraction de ces puissances associées, respectivement, aux produits et aux rapports de monômes.

On y trouve également une justification partielle de l'extension des quatre opérations arithmétiques aux polynômes de degré quelconque. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'al-Karajī expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme [Anbouba 1964].

Cette étude d'al-Karajī sera poursuivie par as-Samaw'al (m. 1175) qui justifiera la division d'un polynôme par un autre polynôme composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés et qui ajoutera aux quatre opérations arithmétiques classiques un algorithme d'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait.

Toutes ces études vont être facilitées par l'introduction du symbolisme des tableaux qui permettra aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs, comme le montre l'exemple suivant, emprunté au <u>Kitāb al-Bāhir fi l-Jabr</u> (le livre magnifique en algèbre) d'as-Samaw'al : il s'agit de diviser :

$$6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 - 200x^2 + 20x$$

par :

$$2x^5 + 8x^4 - 20x^2$$

L'auteur dispose ainsi les coefficients :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| choses | carrés | cubes | carré-carré | carré-cubes | cube-cube | carré-carré-cube | carré-cube-cube |
| 20 | moins 200 | 92 | 38 | moins 80 | 6 | 28 | 6 |
| | | | | moins 20 | 0 | 8 | 6 |

Puis, il effectue la division en mettant les quotients partiels correspondants à leurs monômes respectifs, dans les cases laissées vides [Ahmad et Rashed 1972, Edition pp. 48-50].

### V.2. Les systèmes d'équations.

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwārizmī, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations [al-Khwārizmī 1968, pp.74, 104], il ne semble pas que le livre soit à l'origine de ce chapitre de l'algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux relatifs aux oiseaux, suggèrerait plutôt une origine chinoise ou indienne.(13) Mais, les sources arabes concernant la période des traductions (VIII$^e$-IX$^e$ siècles) sont sur ce point silencieuses et les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations n'ont pas encore été retrouvés. Ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du X$^e$ ou du XI$^e$ siècle, ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure.

Il y a tout d'abord le livre d'algèbre d'Abū Kāmil qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre [Ms. Istanbul, Kara Mustafa Paša 379, ff.95a-101a].

Le second livre d'Abū Kāmil, intitulé <u>aṭ-Ṭarā'if fi l Ḥisāb</u> (Les <choses> rares en calcul), est tout entier consacré aux systèmes d'équations : six problèmes seulement y





sont traités, mais dans une perspective qui dépasse le simple exposé des algorithmes de résolution puisqu'il s'agit, pour l'auteur, de montrer l'existence des systèmes impossibles, de ceux ayant une et une seule solution et, enfin, de ceux qui peuvent avoir plusieurs solutions. Il illustre ce dernier cas par quatre systèmes aboutissant respectivement à 6, 98, 304 et 2676 solutions [Ms. Paris, B.N. 4946, ff.3b-15a].

Après lui, al-Karajī reprendra, dans son ouvrage d'algèbre <u>al-Fakhrī</u>, des problèmes du même type sans toutefois les regrouper dans un chapitre autonome. Il s'agira de problèmes dits "des hommes", "des biens", etc., qui aboutissent à des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 4 [Ms. Paris, B.N. 2459, ff.42b-72b].

Il faut enfin signaler un petit traité encore inédit du mathématicien et physicien Ibn al-Haytham (m. 1039), consacré exclusivement aux systèmes d'équations à n inconnues, n quelconque, qui sont du type :

$$n_i x_i = m_j x_j, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham tranche avec celle de ses prédécesseurs, à la fois au niveau de l'exposé des différents problèmes et au niveau de leur résolution qui est présentée selon une démarche générale accompagnée de justifications mathématiques. L'auteur précise d'ailleurs qu'il est le premier à avoir donné ces justifications [Wiedemann 1926-27].

nous ne savons pas si ce chapitre a fait l'objet de recherches originales, en pays d'Islam, après le XI$^e$ siècle. Cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à l'étude d'Ibn al-Haytham, puiqu'ils ne font que reprendre tel ou tel type de problèmes déjà traités aux X$^e$-XI$^e$ siècles. Mais, cette observation n'est pas décisive, compte tenu du caractère très lacunaire de nos connaissances actuelles relatives aux sources orientales et surtout andalouses.

### V.3. L'analyse indéterminée.

Contrairement au chapitre précédent sur les systèmes d'équations, celui de l'analyse indéterminée semble devoir beaucoup à la tradition grecque. C'est du moins ce que laisse supposer le contenu des problèmes qui nous sont parvenus et dont les auteurs sont encore Abū Kāmil et al-Karajī.(14)

Le premier expose et résoud, dans son livre d'algèbre

(14)

al-Kāmil, 38 équations ou systèmes d'équations du premier ou du second degré et dont le second membre est toujours un carré [Sesiano 1977a, pp.91-93]. La forme de ces problèmes fait penser naturellement au contenu des Arithmétiques de Diophante. Mais, cette filiation est contrariée par deux éléments importants : le premier est mathématique et concerne l'utilisation par Abū Kāmil de méthodes inexistantes dans les dix livres connus des Arithmétiques, comme celles qui permettent de résoudre les systèmes de la forme :

$$x^2 + ax + b = \square_1$$

$$x^2 + ax + b + c\sqrt{x^2 + ax + b} = \square_2 \quad ; \ a, b, c, \text{ donnés.}$$

ou de la forme :

$$x^2 + a_1x + b_1 = \square_1$$

$$x^2 + a_2x + b_2 = \square_2$$

dont le traitement suppose d'ailleurs une grande maîtrise des outils algébriques [Sesiano 1977a, pp.99-102].

On pourrait évidemment penser que ces méthodes ont été empruntées aux trois livres encore perdus de l'ouvrage de Diophante, mais le second élément rend cette dernière hypothèse très improbable : on sait en effet que seuls les livres IV à VII des Arithmétiques ont bénéficié d'une traduction en arabe et que cette traduction a été réalisée par Qusta Ibn Luqa (m. 910), entre la fin du IX$^e$ siècle et le début du X$^e$ [Sesiano 1975]. Abū Kāmil était un contemporain de notre traducteur mais n'a pas eu, semble-t-il, connaissance de sa traduction. Il a probablement repris, comme à son habitude, des problèmes anciens en leur ajoutant de nouveaux problèmes et peut-être de nouveaux procédés de résolution. Cette hypothèse est renforcée par les allusions de l'auteur à une tradition vivante dans ce domaine, et par conséquent antérieure à la traduction des arithmétiques, ainsi qu'à l'existence de deux termes pour désigner les problèmes de ce chapitre (problèmes "indéterminés" pour certains mathématiciens et "à plusieurs solutions" pour d'autres).

Cela dit, et quelle que soit la source d'Abū Kāmil et de ses prédécesseurs ou contemporains, on constate que ces problèmes seront appréhendés comme des problèmes d'algèbre et constitueront le troisième chapitre de cette discipline, aux côtés des équations quadratiques et des polynômes.



(15)

Mais, il est indiscutable que c'est la traduction des livres de Diophante, retrouvés à la fin du IX$^e$ siècle, qui vont accélérer le développement de ce chapitre. Des mathématiciens prestigieux comme Abu l-Wafā (m. 998) vont d'abord étudier puis commenter les problèmes de Diophante, créant ainsi les conditions d'une double orientation dans ce domaine :

La première, qui ne concerne pas notre sujet, est arithmétique et porte sur l'étude des triplets pythagoriciens, des nombres congruents et de la "conjecture de Fermat" [Anbouba 1979, pp. 134-178], [Rashed 1984, pp.195-225].

La seconde, algébrique, est illustrée par les travaux de la tradition d'al-Karajī. Deux ouvrages de ce dernier s'inscrivent d'ailleurs dans cette tradition diophantienne réactivée. Il s'agit du Fakhrī dont la plus grande partie est consacrée à des problèmes indéterminée, et surtout du Badī$^c$ fi l-Ḥisāb (le <livre> merveilleux sur le calcul) [Anbouba 1964] qui comprend une classification des problèmes traités, un exposé des méthodes de résolution et des commentaires sur le champs d'application de chacune de ces méthodes. Le Badī$^c$ apparaît ainsi comme le premier ouvrage renfermant une étude systématique de ce chapitre de l'algèbre [Sesiano 1977b].

## VI. LA TRADITION D'AL-KHAYYĀM.

Parallèlement aux recherches entreprises par les mathématiciens des deux traditions d'Abū Kamil et d'al-Karajī, on observe la naissance et la consolidation d'une orientation nouvelle en algèbre, celle de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois. On peut dater cette naissance par l'échec d'al-Māhānī dans sa tentative de résoudre par radicaux l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2 \ ; \quad c > 0,$$

qui découle de la "traduction" algébrique de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède De la Sphère et du Cylindre que nous avons déjà évoquée, à propos des débuts de l'algèbre. Cet échec va stimuler les recherches qui aboutiront à la résolution d'un certain nombre d'équations du 3$^e$ ou du 4$^e$ degré (à coefficients positifs). C'est ainsi que, d'une manière indépendante, al-Khāzin (X$^e$ s.) et Ibn al-Haytham (m. 1039) établiront l'existence de la solution positive de l'équation d'al-Māhānī à l'aide de l'intersection de deux coniques. A peu près à la même époque, le mathématicien al-Kūhī posera et résoudra un nouveau problème géométrique qui aboutit à une équation du troisième degré : il s'agit de trouver une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée [Youschkévitch 1976, pp. 90-94].

Parallèlement, il semble que certains mathématiciens aient poursuivi leurs recherches en vue de résoudre, par radicaux, les équations cubiques. Al-Khayyām est de ceux-là. Il le dit lui-même, reconnaît l'échec de ses tentatives et laisse entendre que c'est bien cette raison qui l'a amené à systématiser les démarches de ses prédecesseurs et à élaborer une théorie géométrique des équations cubiques : dans son ouvrage intitulé <u>Maqāla fī l-Jabr wa l-Muqabala</u> (Traité sur le Jabr et la Muqabala), al-Khayyām donne une classification des 25 équations (à coefficients tous positifs) de degré inférieur ou égal à trois, en distinguant celles dont l'existence des solutions (positives) ne reposent que sur des propositions des <u>Eléments</u> d'Euclide (c'est à dire celles dont les solutions sont constructibles) et celles dont les solutions (positives), lorsqu'elles existent s'obtiennent par intersection de deux coniques (en fait paraboles, hyperbole ou cercle) [Rashed et Djebbar 1981].

Les équations de la seconde classe ont été, à notre avis, étudiées à l'aide de l'analyse et de la synthèse, même si l'auteur n'expose que la moitié de son travail qui correspond à la synthèse. En effet, voici comment il procède avec une des équations cubiques (la 14<sup>e</sup> dans sa classification) :

$$x^3 + c = bx \qquad (K_{14})$$

Al-Khayyām exhibe les deux coniques suivantes (qui sont exprimées ici analytiquement mais qu'al-Khayyām définit à l'aide de la terminologie des coniques d'Apollonius, sans d'ailleurs préciser la manière de les déterminer)(12) :

$$(P) = \{ (x,y),\ x^2 = b^{1/2}y \}$$

$$(H) = \{ (x,y),\ y^2 = x(x - \frac{c}{b}) \}$$

Puis, il associe une intersection des deux courbes à la solution positive de l'équation $(K_{14})$ :





$(H) \cap (P) = \emptyset \implies (K_{14})$ n'a pas de solution (positive).
$(H) \cap (P) = \{ M(x_0, y_0) \} \implies x_0$ est solution de $(K_{14})$.

Pour montrer cette dernière assertion, il procède ainsi :

$$(x_0, y_0) \in (P) \implies \frac{x_0}{y_0} = \frac{b^{1/2}}{x_0}$$

$$(x_0, y_0) \in (H) \implies \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{(x_0 - c/b)}$$

Donc :

$$\frac{b^{1/2}}{x_0}^{2} = \frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0}{(x_0 - c/b)}$$

D'où le résultat :

$$x_0^3 + bx_0 = c$$

Ce travail d'al-Khayyām ne va pas épuiser le sujet puisque, quelques décennies plus tard, le mathématicien Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī va reprendre l'étude des 25 équations de degré inférieur ou égal à trois, mais selon une perspective qui, tout en s'inscrivant dans le projet d'al-Khayyām le complète et le dépasse à la fois. On constate en effet des modifications importantes dans la classification des équations et dans la justification de l'existence des solutions positives.

Tout en conservant la distinction entre équations quadratiques et équations cubiques, aṭ-Ṭūsī ordonne ces dernières en tenant compte du nombre de leurs solutions et non des degrés de leurs monômes.

Pour établir l'existence des solutions, il commence par rechercher la condition que doivent vérifier, dans ce cas, les coefficients de l'équation. Pour ce faire, il utilise la notion de maximum d'un polynôme et, pour déterminer ce maximum, il introduit une équation auxiliaire qui correspond exactement à celle que l'on obtiendrait aujourd'hui en dérivant un polynôme du 3<sup>e</sup> degré associé à une équation cubique et en annulant cette dérivée. voici d'ailleurs un aperÇu de sa méthode à travers l'étude de l'équation $(K_{14})$ d'al-Khayyām (qui est la 22<sup>e</sup> dans la classification d'aṭ-Ṭūsī) :

$$x^3 + c = bx \implies c = bx - x^3$$

aṭ-Ṭūsī considère le polynôme :

$$P(x) = bx - x^3$$

associé à $(K_{14})$ et $x_0 = \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2}$, la solution (positive) de l'équation :

$$3x^2 = b$$

et il montre que : $P(x_0) = \sup_{x>0} P(x)$, d'où :

$c > P(x_0) \Longrightarrow$ pas de solution (positive).
$c = P(x_0) \Longrightarrow$ 1 solution qui est $x_0$.
$c < P(x_0) \Longrightarrow$ 2 solutions (positives)

Comme : $P(x_0) = \left(\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)^{1/2}$, on voit qu'aṭ-Ṭūsī aboutit à la condition d'existence des solutions positives .

$$c^2 \leqslant \frac{4}{27} b^3 .$$

L'auteur conclut son étude en déterminant les solutions, non pas par intersection de deux coniques comme l'avait fait al-Khayyām, mais en établissant une relation entre ces solutions et celles d'une équation cubique déjà étudiée :
En effet, si $y_1$ est solution de l'équation :

$$x^3 + c' = a'x^2,$$

avec :

$$c' = P(x_0) - c \quad \text{et} \quad a' = 3x_0,$$

alors, $x_1 = x_0 - y_1$ est solution de l'équation $(K_{14})$ [Rashed 1984, pp. 147-193].

Nous n'avons pas encore trouvé de documents qui puissent nous renseigner sur d'autres contributions dans ce domaine durant la période séparant al-Khayyām d'aṭ-Ṭūsī. Tout ce que nous savons, c'est que la recherche des solutions par radicaux pour les équations cubiques se poursuivront parallèlement aux études de type géométrique et aux résolutions approchées que nous évoquerons plus loin.
Mais si l'on exclut la résolution d'équations



particulières que l'on a pu ramener, par changement d'inconnue à l'extraction d'une racine cubique, il semble qu'aucune tentative n'ait abouti. En tout cas, après le XIII[e] siècle, on continuait encore à chercher des procédés de résolution algébriques pour des équations cubiques.

Il faut enfin signaler, dans le cadre de cette tradition "d'algèbre géométrique", représentée par les travaux d'al-Khayyām et d'aṭ-Ṭūsī, une orientation nouvelle inaugurée par Ibn al-Haytham (m. 1039) au Caire et par Ibn Sayyid (XI[e] s.) à Valence. Les travaux de ces deux mathématiciens n'ont pas encore été retrouvés, mais les rares témoignages qui nous en sont parvenus confirment leur importance :

C'est al-Khayyām lui-même qui dit, dans son livre d'algèbre, avoir lu une longue et difficile étude d'Ibn al-Haytham sur la résolution géométrique d'une équation du 5[e] degré. Il est possible qu'à cette occasion Ibn al-Haytham ait utilisé des courbes de degré supérieur ou égal à trois qui n'avaient pas été étudiées auparavant [Rashed et Djebbar 1981, p. 66].

A peu près à la même époque, le mathématicien andalou Ibn Sayyid, partant probablement du problème de la multisection d'un angle, avait étudié un procédé de génération de courbes de degré supérieur ou égal à trois qui était basé sur l'utilisation de courbes gauches engendrées par intersection de différents cônes de degré supérieur ou égal à 2. La projection orthogonale de ces courbes gauches sur des plans perpendiculaires au plan de base fournissait les courbes planes qui étaient utilisées pour résoudre le problème de la multisection de l'angle.

Le résumé des travaux d'Ibn Sayyid qui vient d'être fait nous a été rapporté par un de ses élèves Ibn Bajja qui n'a malheureusement pas éprouvé le besoin de développer ses informations, promettant seulement de consacrer un livre aux travaux de son maître et aux compléments qu'il leur aurait lui-même apportés. Mais, il semble que la mort prématurée d'Ibn Bajja (qui sera victime d'un assassinat politique) ne permettra pas la réalisation de cet important projet [Djebbar 1984].

## VII LA RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS.

C'est vraisemblablement l'échec des tentatives de résolution algébrique de certaines équations polynômiales ou trigonométriques rencontrés par les géomètres et par les astronomes qui ont contraint des mathématiciens à recourir à des procédés d'approximation anciens puis, qui les ont amené à améliorer ces procédés ou a en élaborer de nouveaux. Toujours est-il que l'utilisation de l'approximation dans la résolution des équations est attestée dès la première moitié du IX$^{e}$ siècle par un écrit de Habash al-Hasib qui calcule une valeur approchée de l'équation trigonométrique suivante :

$$x = k\sin(x)$$

à l'aide de la suite récurrente :

$$x_n = k\sin(x_{n-1}).$$

Nous n'avons pas d'information sur ce qui a pu se faire dans ce domaine au X$^{e}$ siècle. Mais, on sait qu'au début du XI$^{e}$ siècle, al-Bīrūnī (m. 1050) et son contemporain Abu l-Jūd calculeront des valeurs approchées des solutions positives des équations [Youschkevitch 1976, pp. 93, 162] :

$$x^3 + 1 = x \quad \text{et} \quad x^3 = x + 1$$

Mais, il faudra attendre le traité de Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī pour trouver l'exposé d'un procédé général permettant d'approcher une solution positive d'une équation polynômiale de degré n quelconque. Ce procédé s'apparente à la méthode de Ruffini-Horner [Rashed 1984, pp. 147-193].

## VIII L'ALGEBRE APRES LE XII$^{e}$ SIECLE.

Malgré de grands progrès enregistrés ces deux dernières décennies, les recherches sur les mathématiques arabes ne sont pas assez avancées pour permettre de cerner avec précision les aspects essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII$^{e}$ siècle.

Pour ce qui est du centre et de l'est de l'empire musulman, quelques éléments épars nous renseignent sur certaines recherches qui n'ont pas abouti et sur des incursions timides dans des domaines nouveaux. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Khawwām (qui a été l'élève de Sharaf ad-Din aṭ-Ṭūsī et qui a, semble-t-il enseigné à Bagdad au XIII$^{e}$ siècle) conclut son livre <u>al-Bahā'iya, fi l-Fawā'id al-Ḥisābiya</u> par l'énoncé de 36 problèmes que ses prédecesseurs et lui-même ont tenté vainement de résoudre. Certains de ces problèmes appartiennent en fait à la théorie des nombres : c'est le cas de ce qu'il est convenu d'appeler la conjecture





de Fermat :

$$x^n + y^n = z^n \quad , \quad n = 3 \text{ ou } 4.$$

D'autres, plus nombreux, sont des équations du 3$^{e}$ et du 4$^{e}$ degrés ou des systèmes d'équations non linéaires [Abdeljaouad et Hadfi 1986].

Quelques décennies plus tard, le mathématicien et physicien al-Fārisī, élève d'Ibn al-Khawwām, n'apportera aucun élément nouveau dans son commentaire du livre de son professeur : le contenu du long chapitre qu'il consacre à l'algèbre est même en deÇa de ce qui avait été produit un siècle auparavant [Mawaldi 1985].

Il faudra attendre le XIV$^{e}$ siècle pour constater que de nouvelles tentatives sont faites en algèbre : al-Kāshī entreprend semble-t-il l'étude des équations de degré supérieur ou égal à 4, sans que l'on sache s'il a abouti à des résultats tangibles [al-Kāshī 1967, pp. 198-199]. De son côté Ibn al-Hā'im s'attaque à nouveau à la résolution algébrique d'une équation cubique, mais en donne une solution fausse [Djebbar 1981, p. 37]. Il faut enfin signaler la résolution par Ibn al-Majdī d'un problème de combinatoire concernant l'algèbre puisqu'il s'agit de dénombrer les équations polynômiales à n monômes additifs:
Dans son livre <u>Ḥāwi l-Lubāb</u>, Ibn al-Majdī donne et justifie une relation de récurrence permettant de déterminer le nombre d'équations à n monômes, lorsque l'on connaît le nombre des équations à (n-1) monômes [Djebbar 1981, pp. 107-111].

En ce qui concerne l'Occident musulman, les recherches récentes permettent, au vu des manuscrits connus et analysés, de faire un bilan provisoire de la contribution, en algèbre, des mathématiciens de l'Espagne musulmane et du Maghreb, bilan que nous avons longuement exposé dans une étude indépendante que le lecteur pourra consulter [Djebbar 1986].

* * * * * * *

(22)

## NOTES

(1)- Par "algèbre arabe", nous désignons dans cette étude tous les écrits algébriques produits par des mathématiciens arabes et non-arabes, mais écrits en langue arabe.

(2)- Le sens de chacun de ces deux mots a évolué au sein de la tradition algébrique elle-même [Saliba 1972, pp. 189-204]. Mais, pour al-Khwārizmī, le passage de :

$$x^2 + 3 = 5 - 10x$$

à :

$$x^2 + 3 + 10x = 5$$

se fait par le *Jabr* ( = *restauration* de l'équation dans le but de n'avoir que des monômes "ajoutés").
Quant au passage de :

$$x^2 + 3 + 10x = 5$$

à :

$$x^2 + 10x = 2$$

il se fait par la *Muqābala* ( = *comparaison* des termes de même espèce se trouvant dans chacun des deux membres, pour pouvoir "simplifier" et aboutir à l'une des six équations canoniques).

(3)- Une édition critique de ce traité, basée sur le seul manuscrit connu à l'époque (ms. Oxford Hunt 214/1, ff. 1a-34a) a été publiée par A.M. Musharrafa et M. Mursi Ahmad (Le Caire 1939, rééditée en 1968) [al-Khwarizmi 1968]. Mais il n'a bénéficié, depuis le XIX$^{e}$ siècle, que de trois traductions : anglaise (par F. Rosen, Londres 1831), russe (par B. Rosenfeld, Tachkent 1964) et persane (par Hidiw Gam, Téhéran 1971). Une nouvelle édition critique (utilisant quatre autres manuscrits récemment identifiés), accompagnée d'une traduction française est actuellement en préparation (par A. Djebbar, N. El Hajjar, K. Jaouiche et N. Mahammed).

(4)- al-Khwārizmī dit exactement : " *j'ai trouvé que les*



(23)

*nombres dont on a besoin dans le calcul par le Jabr et la Muqābala, sont de trois sortes qui sont les racines, les māl-s et le nombre seul, qui n'est rapporté ni à la racine ni au māl. La racine est tout ce qui est multiplié par lui-même, comme un, les nombres ‹entiers› qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures. Le māl est tout ce qui résulte de la racine multipliée par elle-même. Le nombre seul est tout ce qui, parmi les nombres, est exprimable et qui n'est rapporté ni à une racine ni à un māl.* " [al-Khwārizmī 1968 pp. 17-18].

(5)- On a vu (note (4)) que pour al-Khwārizmī le *māl* (carré) est bien le produit de la racine par elle-même, mais la notion de degré n'apparaît pas dans son traité. Quant aux six équations, elles sont exprimées sous une forme réthorique. Par exemple, l'équation IV est formulée ainsi : " *Quant aux māl-s et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme lorsque tu dis : un māl et dix de ses racines égalent trente neuf dirham-s* " [al-Khwārizmī 1968, p. 18]. Elle s'exprimerait donc aujourd'hui ainsi :

$$x + 10\sqrt{x} = 39.$$

(6)- Il dit, à propos de l'expression :

$$(100+x^2-20x) + (50+10x-2x^2)$$

" *Il n'y a pas de figure ‹géométrique› qui lui convienne car elle est constituée de trois genres différents - des* māl-s *des racines et un nombre - qui ne sont pas égalés à quelque chose qui aurait permis qu'elle soit figurée. Nous avons abouti, pour elle, à une figure; mais, elle n'est pas satisfaisante. Quant à la validité réthorique de ‹l'expression›, elle est évidente* " [al-Khwārizmī 1968, p.34].

(7)- Il s'agit en fait chez al-Khwārizmī d'opérations sur les monômes "ajoutés" ou "retranchés", et non d'opérations sur les signes proprement dits.

(8)- Voici un exemple de chacun de ces trois thèmes [al-Khwārizmī 1968, pp. 42,47,51] :
Problème des dizaines : " *‹Si› tu divises dix en deux parties et ‹que› tu multiplies l'une des deux parties par*

(24)

*elle-même, ‹le résultat› est égal à quatre-vingt* -et-une-fois *l'autre partie* ".

Problème des biens : " *‹Etant donné› un bien, ‹si› tu lui ôtes son tiers et trois dirhams et que tu multiplies le reste par lui-même, tu retrouves le bien* ".

Problème des hommes : " *‹Si› tu partages un dirham entre des hommes, chacun reçoit une chose; puis, ‹si› tu leur ajoutes un homme et que tu partages entre eux un dirham, chacun reçoit alors ‹une part› inférieure à la première part d'un sixième de dirham* ".

(9)- Dans son livre d'algèbre intitulé al-Kāmil , Abū Kāmil évoque la priorité d'al-Khwārizmī en ces termes : " *Ayant beaucoup étudié les livres des savants ‹relatifs› au calcul et ayant recherché leurs propos et ce qu'il y a de plus précieux dans ce qu'ils ont écrit dans leurs livres, j'ai constaté que le livre de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, qui est connu sous ‹le titre›* du Jabr et de la Muqābala *est celui dont le fondement est le plus juste et dont la démonstration est la plus vraie; ce qui devait nous inciter, nous les spécialistes du calcul, à reconnaître sa science et sa prééminence, puisqu'il a précédé ‹les autres› pour la réalisation du livre* du Jabr et de la Muqābala*, qu'il en a été l'initiateur et qu'il a inventé les fondements qu'il contient*." (Ms. Istanbul Kara Mustafa 317, f. 2a).

Les allusions de ce passage se précisent dans un autre texte dont l'encyclopédiste du XVII[e] Hājjī Khalīfa cite quelques phrases : " *Abū Kamil dit, dans le Livre des donations par* le Jabr *et la Muqābala : ‹‹ J'ai établi, dans mon second ouvrage, la preuve de la prééminence et de la priorité de Muḥammad ibn Mūsā en algèbre et j'ai répondu au fougueux nommé Ibn Barza à propos de ce qu'il attribue à ᶜAbd al-Ḥamīd qu'il dit être son grand-père, en montrant son inexactitude et son peu de connaissance au sujet de ce qu'il attribue à son grand-père.››* ". [Hājjī Khalīfa 1941=1982, Vol.2, pp. 1407-1408].

(10)- On pourrait également évoquer d'autres facteurs, comme le régionalisme, l'idéologie ou le statut social des individus, qui étaient suceptibles de peser sur la diffusion de tel ou tel ouvrage scientifique. Mais, dans l'état actuel de nos connaissances de la cité islamique du IX[e] siècle et de sa communauté scientifique, ils ne permettent même pas d'avancer des conjectures raisonnables.



(25)

(11)- Le titre arabe étant Kitāb al- Jamᶜ wa l-Tafrīq bi Ḥisāb al-Hind, nous avons préféré traduire "Jamᶜ" par "agrégation" et "Tafriq" par "désagrégation" et non pas par "addition" et "soustraction", comme le fait Youschkevitch, car dans une certaine tradition arithmétique médiévale arabe ces deux concepts englobent respectivement l'addition et la multiplication (pour le premier), la soustraction et la division (pour le second).

(12)- Pour les traités d'algèbre, le bio-bibliographe Ibn an-Nadīm cite le Kitāb al-Jabr wa l-Muqābala) d'ad-Dināwārī (m. 895) et le Kitāb al-Arithmāṭīqī fi l-Aᶜdad wa l-Muqābala) d'as-Sarakhsi (m. 899) [Sezgin 1974, pp.262-263]. Quant aux commentaires du traité d'al-Khwārizmī, les premiers qui sont signalés sont de la première moitié du X[e] siècle. Il s'agit du commentaire de Sinān Ibn al-Fatḥ et de celui aṣ-Ṣaydanānī [Sezgin 1974, pp.301].

(13)- Voici un exemple de ce type de problèmes : on voudrait acheter, avec 100 dirhams, 100 volatiles de trois espèces différentes : étourneaux, poulets et canards. Sachant que le prix des étourneaux est de 1 dirham les 20, celui des poulets de 1 dirham l'unité et celui des canards de 5 dirhams l'unité, on demande combien peut-on acheter de volatiles de chaque espèce.

(14)- L'essentiel de ce paragraphe repose sur les deux études de J. Sésiano parues en 1977 et portant sur l'analyse indéterminée, respectivement chez Abū Kamil et chez al-Karajī [Sésiano 1977a, 1977b].

* * * * * * *

(26)

## R E F E R E N C E S


Abdeljaouad, M. et Hadfi, H. 1986. "Les Problèmes auxquels il n'est pas possible d'apporter une réponse" d'après le livre "al-Fawā'id al-Bahā'iya" d'Ibn al-Khawwām (643-724H/1245-1324). Communication au 1er colloque international d'Alger sur les mathématiques arabes. A paraître, en 1988, dans les actes du colloque.
Ahmad, S. et Rashed, R. 1972. Kitab al Bahir fi l-Jabr. Damas.
Anbouba, A. 1964. L'algèbre al-Badī' d'al-Karagī. Edition avec introduction et notes. Beyrouth, Publications de l'Université Libanaise.

-------, A. 1978. Acquisition de l'algèbre par les Arabes et premiers développements. AperÇu général. Journal for the History of Arabic Science. Alep. Vol.2, n°2.

-------, A. 1979. Un traité d'Abū Ja'far [al-Khāzin] sur les triangles rectangles numériques. Journal for the History of Arabic Science, Vol.3, n°1.

Busard, H.L.L. 1968. L'algèbre au moyen-âge : Le "Liber mensurationum" d'Abu Bekr. Journal des savants, Avril-Juin 1968, 65-125.

Colebrooke, H.T. 1817. Algebra with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London, John Murray.

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel, C. et Guillemot, M. 1987. Mathématiques au fil des âges. Gauthiers-Villars. Paris.

Djebbar, A. 1981. Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles. Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02.

----------. 1984. Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne musulmane : al-Mu'taman et Ibn Sayyid. Colloque International de Marseille-Luminy sur *"Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIIe siècle"*.




(27)


----------. 1986. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman. Premier colloque International d'Alger sur l'histoire des mathématiques arabes. 1-3 Décembre 1986. A paraître, en 1988, dans les actes du colloque.

Gandz, S. 1926. The Origin of the Term "Algebra". American Mathematical Monthly, 33, 437-440.

Hajji Khalifa, Mustafa 1941. Kashf aẓ-Ẓunūn 'an Asāmi al-Kutub wa l-Funūn. Istanbul, Maarif Matbaasi. Réédition 1982. 2 Vol. Beyrouth Dar al-Fikr.

Høyrup, J. 1986. Al-Khwārizmī, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum : on the origins of islamic Algebra. Ankara, Atatürk Kültür Merkezi.

Ibn an-Nadīm, Muḥammad 1971. al-Fihrist. Edition de Riḍā Tajaddud, Téhéran.

al-Khwārizmī, Muhammad 1968. Kitāb al-Jabr wa l-Muqābala. Edition de A.M. Musharrafa et M.M. Ahmad. Réédition 1968, Le Caire.

Levey, M. 1966. The Algebra of Abū Kāmil, Kitāb fi l-jabr wa l-muqābala, in a Commentary by Mordechai Finzi. Hebrew Text, translation and Commentary with Special Reference to the Arabic text. Madison, Milwaukee and London, University of Wisconsin Press.

Matvievskaïa, G.P. Matériaux pour l'étude du nombre au Proche Moyen-Orient au Moyen-Age. Dans : Histoire des sciences exactes au Proche et Moyen-Orient au Moyen Age. Tachkent.

Rashed, R. et Djebbar, A. 1981. L'oeuvre algébrique d'al-Khayyam. Alep, I.H.A.S. Université d'Alep.

Rashed, R. 1984. Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur les Mathématiques arabes. Paris. Les Belles Lettres.

Rodet, L. 1878. L'algèbre d'al-Khwārizmī et les méthodes indienne et grecque. Journal Asiatique 7e série 11 (1878), pp. 5-98.

Rosen, F. 1831. The Algebra of Muḥammad ben Mūsā. London, The

(28)

Oriental society.

Saliba, G. 1972. The Meaning of al-jabr wa'l-muqabla. Centaurus 17, 189-204.

Sayili, A. 1962. Logical Necessity in mixed equation by ᶜAbd al-Hamid ibn Turk and the algebra of his time. Ankara.

Sesiano, J. 1977a. Les Méthodes d'analyse indéterminées. Centaurus, vol.21, n°2, pp.89-105.

-----------. 1977b. Le traitement des équations indéterminées dans le *Badīᶜ fi l-Ḥisāb d'Abū Bakr al-Karajī*. Archive for History of Exact Sciences, vol.17 n°4, pp.297-379.

-----------. 1981. The Arabic Text of Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa.

Sezgin, F. 1974. Geschichte des Arabischen Schrifttums. Band V. Leiden, E.J. Brill.

Wiedemann, E. 1926-27. Uber eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al-Haitam. Sitzungsberichte der Physikalisch-medezinischen Societät zu Erlangen, 58-59, pp. 191-196.

Youschkevitch, A.P. 1976. Les Mathématiques arabes (VIIIᵉ-XVᵉ siècles). Vrin, Paris.

* * * * * * *

# APERCU HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES

# SUMERO BABYLONIENNES

Livia GIACARDI
Université de Turin.