Le De Motu est beaucoup plus modeste de proportions, beaucoup plus accessible aussi. Il y a grand avantage à lire d'abord l'une de ses versions avant de plonger dans les méandres et les raffinements des Principia. Une première orientation est indispensable, un repérage des résultats principaux , des enchaînements et des méthodes, permettant ensuite de suivre les Principia .

Les premières pages des Principia ont été très lues et activement discutées, notamment par les philosophes : lois du mouvement, scolie sur le temps et l'espace absolus. Les débats sur les fondements de la mécanique, sur la nature de l'espace et du temps, se sont nourris de ce préambule des Principia. Dans la perspective que nous adoptons ici, ces textes n'occupent plus une place aussi essentielle. le De Motu , dans ses toutes premières versions, ne contient encore ni les fameuses trois lois du mouvement, ni la mention du temps et de l'espace absolus. Il apporte avant tout le premier témoignage d'une traduction géométrique de la force centrale. C'est ce qui nous intéresse au premier chef : comment la force a pu recevoir une expression géométrique , et comment les mathématiques sont devenues aptes à traduire la dynamique.

Désormais la dynamique est intégrée au discours mathémathique. Les formes particulières pourront évoluer : Newton proposait l'étude de configurations géométriques naissantes ou ultimes, alors qu'après lui les Bernoulli ou Euler exprimeront les mêmes énoncés dans le langage nouveau du calcul différentiel. La science du mouvement se trouvera "exposée analytiquement" (selon le titre de la Mechanica d'Euler), mais son noyau essentiel restera identique à ce que Newton proposait dès 1684 dans les manuscrits De Motu.

LA RIGUEUR MATHEMATIQUE

EULER ET LE XVIIIe siècle

Jean DHOMBRES
IREM de Nantes

La rigueur mathématique
Euler et le XVIIIème siècle

Jean Dhombres

LA RIGUEUR MATHÉMATIQUE :

Euler et le XVIIIème siècle

Jean DHOMBRES

(Irem de Nantes)

1. L'enjeu de la rigueur.

La présente étude fut préparée en vue de l'Université d'été d'histoire des mathématiques, tenue dans la première moitié de Juillet 1986: il s'agissait de mieux cerner ce qu'on appelle la **rigueur**. A priori, le choix de l'exposé oral était de partir de textes originaux, et non de quelques extraits de textes, et de les commenter au fur et à mesure de leur déroulement, en les serrant au plus près de leur logique, avec juste quelques mises en situation historique sur le plan conceptuel. Par une sorte de démonstration a contrario, les textes retenus provenaient tous d'Euler, ou furent écrits dans son entourage intellectuel, précisément parce que cet auteur prolifique est souvent considéré par les historiens comme le prototype du mathématicien de grande qualité qui ne s'embarrasse pas des soucis de la rigueur mathématique. Morris Kline, dans **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972) exprime un sentiment largement partagé (p.466): "*It is fair to say that in the eighteenth- century works on infinite series the formal view dominated. On the whole, the mathematicians even resented any limitations, such as the need to think about convergence. Their work produced useful results, and they were satisfied with this pragmatic sanction*" On ajoute souvent, en guise d'explication, que le génie inventif

joint à son sens des choses mettait Euler de toutes façons dans le bon chemin.

Dès lors, sauf à minimiser à tort le rôle d'Euler, une telle explication poussée en ses recoins extrêmes n'envisage-t-elle pas la rigueur mathématique comme l'apanage de tâcherons peinant à vérifier laborieusement les idées éclatantes de certains génies? " *The spirit of Euler's methods should be clear. He is the great manipulator and pointed the way to thousands of results later established rigorously*"(op.cité, p.453). Autrement dit, la rigueur ainsi conçue serait une catégorie secondaire dans le domaine mathématique, au mieux une exigence réduite à l'ordre pédagogique destinée à faciliter tant l'apprentissage que la transmission des informations entre mathématiciens et utilisateurs à divers titres des mathématiques. Mais une telle attitude contredit toute la tradition par laquelle les mathématiques sont promues comme le domaine propre où se déploie la rigueur, tandis que bien des auteurs philosophiques s'essoufflent (ou nous essoufflent) à écrire "*more geometrico*". S' il n'est pas mauvais, éventuellement, de contredire une tradition, il convient au minimum de ne pas se contenter d'arguments rhétoriques a priori, et il est donc indispensable d'apporter des éléments de justification.

Mais au fond ce n'est pas cette polémique qui nous intéresse vraiment et il vaut mieux dire tout de suite que le lecteur ne trouvera pas dans ce qui va suivre une défense passionnée des méthodes éducatives en mathématiques suivant l'esprit de Bourbaki ou à l'opposé une écoute forcenée des démarches "intuitives", qu'elles soient qualifiées de géométriques ou autres. Non que ces problèmes éducatifs ne nous concernent pas, ne serait-ce que par la pratique journalière de l'enseignement des mathématiques , mais parce que nous avons choisi de faire acte d'historien . A partir des documents traduits du Latin et éventuellement de notre commentaire , nous entendons laisser au lecteur le soin de faire jouer son jugement et de prendre parti si besoin était. Mais notre propos d'historien des mathématiques n'est pas passif , même s' il faut entendre cette épithète dans son sens positif, puisque nous tentons ici de reconstituer les logiques internes du raisonnement eulérien . Précisément nous voulons mesurer la rigueur des démarches d'Euler, disons plutôt de certaines d'entre elles, à l'aune que lui-même se donna.

L'exposé oral nous évitait d'entrer dans des considérations méthodologiques sur la rigueur. Mais nous ne pouvons guère les éviter en couchant ici quelques remarques sur le papier , à la demande des organisateurs de l'Université d'été. Aussi retardons-nous encore un peu l'intervention d'Euler.

2. Rigueur et architecture des mathématiques.

Une critique de nature épistémologique viendrait tout de suite bloquer notre propos en exprimant que nous reconstruisons, ou pire que nous mettons de la rigueur a posteriori , là où il n'y aurait que l'effet d'entraînement de la pensée mathématique. Cette pensée serait comme portée vers la découverte par la logique impérieuse des objets de l'étude elle-même . Cavaillès indique que l'histoire des mathématiques obéit à un

cheminement quasi obligatoire car les objets à exhiber ont une telle existence propre que la mise à jour de leurs propriétés est contraignante. Cette remarque fine , et qu'il est impossible de tenir pour l'histoire de la physique ou de la chimie , a quelque chose d'obsédant. Particulièrement lorsque l'on veut parler de rigueur. En effet, comment qualifier une démonstration ou une théorie datée dans le passé , lorsqu'elle présente à nos yeux non pas une faute rédhibitoire mais l'oubli , la lacune , ou l'omission de conditions qu'il suffirait de rajouter pour rendre en rigueur la démonstration valide , du moins à nos yeux contemporains? Autrement dit, l'absence de telle ou telle étape du raisonnement d'Euler , ou même sa faible accentuation, ne relève-t-elle que du travail de mise au point des successeurs , ce que d'aucuns appellent après T.Kuhn, l'activité de "la science normale" , ou bien signe-t-elle par quelque prétérition , une conception de la rigueur à un moment donné de l'histoire?

Pour fixer les choses , nous partons ici de la conception selon laquelle les mathématiques obéissent profondément à des soucis d'architecture, c'est-à-dire que ce n'est pas tel ou tel objet qui est en jeu, malgré tout son intérêt, ni tel ou tel concept , mais bien l'organisation d'un jeu de relations entre des objets et des concepts. Ce complexe relationnel est organisé au point que, pour nous, la mesure de cette cohérence des objets et des concepts entre eux est précisément l'évaluation de la rigueur mathématique . Evidemment , on objectera qu'une théorie peut être très construite, voire un comble de rigueur au sens que nous venons de définir, et pourtant n'avoir que bien peu de valeur mathématique. Cela est vrai, et l' on a même parlé à ce propos de "structures molles" . Voilà qui nous contraint à préciser que le souci architectural dont nous souhaitons nous occuper est celui qui sait aussi prendre en compte les résultats du passé, du moins la partie d'entre eux relative à l'objet étudié, afin de les insérer dans la construction mise en place . C'est à propos de telles architectures que nous porterons la question de la rigueur, et notre mentor sera Euler. Toutes les mathématiques ne s'élaborent pas ainsi, mais nous aurions tort de croire que seuls les Modernes, à partir de Dedekind ou Hilbert repris par Bourbaki, aient eu une vision d'ensemble d'ordre architectural. Commençons par un exemple concret avec la démonstration de la formule du binôme de Newton.

3. La formule du binôme de Newton: l'approche différentielle controversée.

C'est dans la **Méthode des Fluxions** de Newton que l'on trouve pour la première fois la mention et l'utilisation de la formule du binôme qui fournit l'expression d'une puissance non entière de $(1+x)^{\alpha}$, à partir d'une série développée selon les puissances entières de la variable x,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots$$

Newton ne donne aucune démonstration de cette formule , mais s'en sert de façon fréquente dans le cours de son ouvrage, par exemple pour déduire la fluxion d'une puissance quelconque de x. Le livre , composé vers 1671 , parut en latin en 1736 (**Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum**), mais les principes en furent divulgués par Wallis dans sa deuxième édition latine de l'**Algebra**(1693). Une traduction française de

l'ouvrage de Newton fut donnée par Buffon en 1740. N. Bourbaki , dans ses **Eléments d'Histoire des Mathématiques** , décrit fort bien la situation de la formule dans la recherche mathématique de Newton (nouvelle édition, 1974, Hermann, p.234): " *C'est en tout cas l'interpolation effectuée par Wallis des entiers* $\binom{m+n}{n}$ *à des valeurs non entières de m (plus précisément aux valeurs de la forme* $n = p/2$*, avec p entier impair, qui sert de point de départ à Newton débutant, l'amenant , d'abord par l'étude du cas particulier* $(1-x^2)^{p/2}$*, à la série du binôme, puis de là à l'introduction de* x^a *(ainsi noté) pour tout a réel, et à la différentiation de* x^a *au moyen de la série du binôme; tout cela sans grand effort pour obtenir des démonstrations ni même des définitions rigoureuses; de plus , innovation remarquable, c'est de la connaissance de la dérivée de* x^a *qu'il déduit* $\int x^a dx$ *pour* $a \neq -1$*. Du reste, et bien qu'il ait été bientôt en possession de méthodes beaucoup plus générales de développement en série de puissances, telles la méthode dite du polygone de Newton (pour les fonctions algébriques) et celle des coefficients indéterminés, il revient maintes fois par la suite, avec une sorte de prédilection, à la série du binôme et à ses généralisations...* "

En 1755, Euler présente une démonstration de cette formule du binôme dans ses **Institutiones Calculi Differentialis**, parus à Saint-Pétersbourg , c'est-à-dire dans un livre qui entend établir le calcul différentiel, sa pratique et ses utilisations. Il conviendra de juger de la pertinence à ce propos de la phrase de N.Bourbaki (op.cité pp.245-246). *"Nous n'avons à nous occuper ici que des travaux qui ont contribué à* *mettre au point, approfondir et consolider les principes mêmes du calcul infinitésimal, en ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle.*

De ce point de vue, les grands traités du milieu du XVIII^{e} siècle n'offrent que peu de nouveautés. MacLaurin en Angleterre, Euler sur le continent, restent fidèles aux traditions dont chacun d'eux est l'héritier. Il est vrai que le premier s'efforce de clarifier quelque peu les conceptions newtoniennes tandis que le second, poussant le formalisme leibnizien à l'extrême, se contente, comme Leibniz et Taylor, de faire reposer le calcul différentiel sur un passage à la limite fort obscur à partir du calcul des différences, calcul dont il donne du reste un exposé fort soigné."

Nous donnons des extraits du traité d'Euler en traduction française: on pourra se rapporter, pour des notes complémentaires volontairement omises ici, à mon article: Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, *Sciences et techniques en perspective*, 1985/1986, vol. X, pp. 191-249. On trouvera aussi dans cet article les traductions, réalisées avec l'aide de mes collègues J.L.Gardies et R.Violette de la Faculté des Lettres de Nantes, de deux autres articles d'Euler relatifs à la formule du binôme de Newton. La première démonstration apparaît au chapitre IV de la deuxième partie(*De conversione functionum in series*), une partie où Euler décrit" *ce qui est utilisé du calcul* [différentiel] *en analyse des quantités finies et aussi en théorie des séries*" dans les **Institutions du calcul différentiel**. Cette démonstration part de la formule dite de Taylor et naturellement présuppose la connaissance de la dérivée des puissances.

CAPUT IV

DE CONVERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES

70. In capite superiori iam ex parte ostensus est usus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in investigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x, eius valor, quem induit posito $x=0$, erit cognitus; hicque si ponatur $=A$, erit, uti invenimus,

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2ddy}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{etc.}=A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A, etiamsi in singulis terminis nsit quantitas variabilis x, sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus; erit enim

$$y=A+\frac{xdy}{dx}-\frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2}+\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}-\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+\text{etc.},$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec investigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z, si loco x ubique scribatur $x+\omega$, ita ut z talis sit functio ipsius $x+\omega$, qualis y est ipsius x, atque ostendimus [§ 48] fore

$$z=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2ddy}{1\cdot 2dx^2}+\frac{\omega^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+\text{etc.}$$

Cum igitur huius seriei singuli termini per continuam ipsius y differentiationem ponendo dx constans inveniri simulque valor ipsius z per substitutionem $x+\omega$ in locum ipsius x actu exhiberi queat, hoc modo perpetuo obtinebitur series valori ipsius z aequalis, quae, si ω fuerit quantitas vehementer parva, maxime convergit atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipsius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum uberrimus erit usus.

"**70.** Au chapitre précédent, nous avons déjà en part... montré l'usage que des expressions générales ici trouvées pour des différences finies ont dans l'étude de séries qui fournissent une vale... pour toute fonction de x. En effet, si y est une fonction donnée de x, la valeur qu'elle revêt une fois posé x = 0 sera connue; si l'on pose cet... valeur = A, on aura, comme nous l'avons trouvé ,

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2ddy}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{etc.}=A.$$

Donc à partir de là, non seulement nous avons une série qui généralemen... se développe à l'infini, et dont la somme est égale à une quantité constante A, quand bien même ces termes pris isolément contiennent une quantité variable x, mais encore nous pourrons exprimer la fonction elle-même par une série; on aura en effet

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} - \frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \text{etc.},$$

ce dont nous avons déjà donné quelques exemples.

71. Mais pour élargir le champ de notre recherche, admettons que la fonction y se transforme en z, si à la place de x on écrit partout $x+\omega$, en sorte que z soit fonction de $x+\omega$ de la même manière que y l'est de x(4). Nous avons montré (§48) qu'on aura

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1\cdot 2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \text{etc.}$$

Donc, puisqu'on peut obtenir effectivement les différents termes de cette série par différentiations successives de y pour un même dx, et qu'on peut obtenir en même temps la valeur de z en substituant $x+\omega$ à la place de x, de cette manière on obtiendra toujours une série égale à la valeur de z. Si ω est une quantité extrêmement petite, cette série converge très rapidement et il suffira de prendre un nombre assez réduit de termes pour qu'elle fournisse une valeur de z très proche de sa vraie valeur. C'est pourquoi on fera un usage très fréquent de cette formule quand on aura besoin d'approximations.

72. Donc, pour procéder par ordre en montrant l'usage remarquable de cette formule, substituons d'abord à la place de y des fonctions algébriques de x. Et d'abord, soit $y = x^n$. On aura, si l'on met $x+\omega$ à la place de x, $z = (x+\omega)^n$. Donc, puisqu'on a

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1},\quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2},\quad \frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\quad \text{etc.},$$

on obtiendra par substitution de ces valeurs

$$(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\omega^3 + \text{etc.},$$

ce qui est la fameuse expression de Newton servant à convertir en série la puissance du binôme $(x+\omega)^n$. Le nombre des termes de cette série est toujours fini, si n est un nombre entier positif ″.

Ceci fait, qui paraît écrit pour les seules puissances entières, a valeur au-delà de ces puissances comme nous allons en avoir la confirmation. Euler déduit d'abord une formule voisine pour le cas de puissances entières négatives, n'utilisant que la démonstration précédente dans le cas des puissances entières. L'avantage de la nouvelle formule réside, comme Euler va le montrer, dans la rapidité de sa convergence en certains cas, ce qui montre combien Euler, même dans un exposé théorique, est soucieux des calculs effectifs. Mais, pour le moment il prétend que les deux formules donnent le même résultat dans le cas d'une puissance entière négative, ce qui revient à attribuer sans prévenir à la première formule une validité pour de telles puissances.

″ 73. A partir de là, nous pourrons aussi trouver la progression qui exprime la valeur de la puissance du binôme en passant au dénominateur chaque fois que l'exposant de la puissance est un nombre négatif. Posons en effet

$$\omega = \frac{-ux}{x+u};$$

On aura

$$z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

et par le fait même

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^n u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^n u^2}{1\cdot 2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^n u^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.}$$

En divisant partout par x^{2n} on aura

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1\cdot 2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.}$$

Si nous posons maintenant $-n = m$, ceci deviendra

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^m u}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^m u^2}{1\cdot 2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^m u^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.},$$

série qui, chaque fois que m est un nombre entier négatif, consiste en un nombre fini de termes. Cette série est donc égale à celle que nous avions d'abord trouvée, à la condition d'écrire u et m à la place de ω et n ; on aura en effet

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$ ″

Conscient qu'il est passé du cas entier positif au cas entier négatif sans preuve pour la formule à proprement du binôme, Euler éprouve le besoin , inutile en rigueur, de montrer que la nouvelle formule obtenue peut directement se déduire d'une formule qui lui servit à exhiber la formule de Taylor. Cette dernière formule, pour un lecteur moderne , revient à écrire la formule de Taylor développant f(0) = f(x - x) en fonction des puissances de -x , naturellement sans aucun souci explicite des problèmes de convergence.

"74. Cette même série peut aussi se déduire de l'expression donnée au début du §70. En effet, puisque une fois posé x = 0, y se transforme en A, soit

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{etc.} = A,$$

en posant y = $(x+a)^n$ on aura A = a^n et puisque

$$\frac{dy}{dx} = n(x+a)^{n-1}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)(x+a)^{n-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3} \text{ etc.}$$

on obtiendra

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2(x+a)^{n-2} - \text{etc.} = a^n;$$

la division par $a^n(x+a)^n$ donnera

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1\cdot 2(x+a)^2} - \text{etc.},$$

dont on déduit , en remplaçant respectivement x, a et n par u, x et -m, la série précédemment trouvée."

Une fois ces choses dites , Euler compare l'efficacité des deux formules, et le fait cette fois dans le cadre des puissances fractionnaires, alors qu'aucune des deux formules ne fut démontrée sous cette généralité.

"75. Si l'on met à la place de m des nombres fractionnaires , les deux séries se développent à l'infini. Cependant, si u est une quantité très petite par rapport à x, ces deux séries convergent fortement vers la vraie valeur. Si donc $m = \frac{\mu}{\nu}$, $x = a^\nu$, on obtiendra à partir de la série que nous avions d'abord trouvée

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{u}{a^\nu} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\cdot 2\nu}\cdot\frac{uu}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu}\cdot\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \text{etc.}\right).$$

Tandis que la série que nous avions trouvée ensuite donnera

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu\cdot 2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu(a^\nu+u)^3} + \text{etc.}\right).$$

Mais cette seconde série converge davantage que la première puisque ses termes décroissent même si on a $u > a^\nu$, auquel cas en revanche la première série diverge.

Si donc on a $\mu = 1,\ \nu = 2$, on aura

$$\sqrt{(a^2+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{2(a^2+u)} + \frac{1\cdot 3u^2}{2\cdot 4(a^2+u)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5u^3}{2\cdot 4\cdot 6(a^2+u)^3} + \text{etc.}\right).$$

De façon semblable, en mettant à la place de $\sqrt{\ }$ les nombres 3, 4, 5 etc., tout en gardant μ = 1, on aura

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{3(a^3+u)} + \frac{1\cdot 4u^2}{3\cdot 6(a^3+u)^2} + \frac{1\cdot 4\cdot 7u^3}{3\cdot 6\cdot 9(a^3+u)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{4(a^4+u)} + \frac{1\cdot 5u^2}{4\cdot 8(a^4+u)^2} + \frac{1\cdot 5\cdot 9u^3}{4\cdot 8\cdot 12(a^4+u)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{5(a^5+u)} + \frac{1\cdot 6u^2}{5\cdot 10(a^5+u)^2} + \frac{1\cdot 6\cdot 11u^3}{5\cdot 10\cdot 15(a^5+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

etc."

Résumons : la démonstration de la formule du binôme de Newton, moyennant la formule de Taylor , est obtenue pour toutes les puissances pour lesquelles la dérivation a été prouvée. Il est clair que tel est le cas des puissances entières positives. Une autre formule voisine est déduite , selon deux procédés distincts, pour le cas de toutes les puissances négatives. Euler se considère ensuite en droit d'examiner le cas de toutes les puissances fractionnaires du point de vue du calcul: lorsque la série converge, il ne fait aucun doute pour lui que la convergence donne le résultat attendu. Mais remarquons bien que la divergence est dûment signalée.

On pourrait prétendre qu' Euler n'aurait examiné dans la formule du binôme , du point de vue théorique , que le cas des puissances entières, et on pourrait argumenter que dans sa démonstration de la dérivation des fonctions puissances, seules de telles puissances entières interviennent. C'est au chapitre V de la première partie des **Institutions du calcul différentiel** que la différentielle $d.x^n = n\,x^{n-1}\,d.x$ est déduite . Comme Euler le fait en utilisant la formule du binôme de Newton sur $(x + d.x)^n$, en éliminant ensuite toutes les puissances de d.x supérieures à l'unité, et comme dans cette première partie de l'ouvrage didactique d'Euler la formule générale de Newton n'a pas encore été produite, si l'on veut qu'il n'y ait pas de cercle vicieux , il faudrait apparemment se restreindre au seul cas des puissances entières puisque la formule du binôme s'établit par des méthodes combinatoires directes dans ce cas là. Une telle interprétation qui " sauve le texte " se heurte quand même au fait que , bien vite , Euler donne sans sourciller une application de la dérivation d'une puissance fractionnaire (c'est au § 153 de la première partie) et qu'au § 154 , il fournit explicitement la dérivation d'une puissance fractionnaire quelconque sous la forme

$$d.x^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\mu}{\nu}\; x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\, d.x.$$

D'autant que la pétition de principe, si elle se réduisait à ce seul point , serait facilement réparable grâce au théorème de dérivation des fonctions de fonctions dont on sait qu'Euler fait un usage constant et le considère même comme le plus important du calcul. En effet , la dérivée d'une puissance fractionnaire se déduit de celle des puissance entières par la

simple écriture de passage aux puissances $(x^{\frac{\mu}{\nu}})^{\nu} = x^{\mu}$.

Mais nous ne pouvons nous en tirer à si bon compte, car dans la preuve figure en plus l'intervention de la démonstration de la formule de Taylor . Cette formule est évidemment indispensable selon la démarche suivie. Or , pour obtenir cette formule de Taylor, Euler fait usage déjà de la formule du binôme. <u>C'est bien là que réside le vice de la démonstration de 1755.</u>

Il y a incohérence dans l'ordre de l'exposé mathématique, et donc manque de rigueur au sens que nous avions défini en commençant, ce qui est fort gênant dans un Traité didactique.

Cette démonstration fautive est d'autant plus embarrassante que la formule de Newton joue un grand rôle dans l'analyse du XVIIIème siècle. La pétition de principe de la preuve différentielle était pourtant connue depuis longtemps , puisque Castillon l'avait déjà épinglée dans un mémoire à la Royal Society dès 1732.

Pour mieux comprendre l'embarras, il nous faut donc aborder la preuve de la formule de Taylor elle-même. Comment Euler procédait-il dans les **Institutions du calcul différentiel** au sujet de cette formule ? La démonstration est particulièrement instructive , car elle fait à proprement partie de ce que l'on pourrait convenir d'appeler la démarche typique de l' *analyse algébrique* .

4. Le cadre de l'analyse algébrique

Ce cadre est décrit dans l'**Introduction à l'analyse des infinis**, ouvrage qu'Euler fit paraître (en Latin) en 1748. Ce sont les fonctions qui sont l'objet d'étude par excellence de l'analyse et la définition retenue est analytique: une fonction est au fond un procédé de calcul, utilisant les techniques algebriques aussi bien que les moyens "transcendants" fournis par le calcul intégral. L'essentiel est qu'une méthode unique existe qui permette de travailler sur les différents types de fonctions , aussi bien les algébriques que les transcendantes. Cette méthode , qui conduit aux développements en série entière de toutes les fonctions classiques de l'analyse, fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, aussi bien que rationnelles, repose sur trois principes . L'un consiste en une algèbre de l'infini portant sur les écritures polynomiales. A titre d'exemple, un polynôme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, lorsque l'on prend la variable x infinie , est "égal" à x^n. Toute une algèbre est ainsi créée. Le deuxième principe consiste à traiter les séries entières comme des polynômes , c'est-à-dire permettre le remplacement des coefficients par un équivalent, au sens algébrique du premier principe, si ces coefficients dépendent à leur tour d'une variable qui deviendrait "infinie" . Cette procédure d'équivalence n'est malheureusement pas toujours simple , ne serait-ce que parce nous ne pouvons facilement trouver l'équivalent . pour la valeur infinie de la variable , d'une série infinie donnée. Le troisième et dernier principe est encore une utilisation de l'infini : on peut obtenir un nombre réel comme produit d'un infiniment grand par un infiniment petit.

Remarquons que ce principe évite de penser en terme d'approximation des nombres réels par les nombres rationnels.

Un bon exemple de mise en oeuvre de cette procédure est celui de l'obtention du développement de l'exponentielle. D'autant meilleur pour notre propos que c'est la formule du binôme de Newton qui sert. En effet , Euler part (nous simplifions volontairement un peu les notations et certaines constantes) de t, quantité infiniment petite, et écrit

$$e^t = 1 + \omega$$

ou ω est une quantité infiniment petite egalement, proportionnelle à t. Il élève à une puissance n, qui est aussitôt considérée comme une valeur infinie de sorte que sa liaison avec t donne un nombre fixé réel x. C'est à ce moment là que tout ce qui précède prend corps. En effet , $e^x = (1 + \omega)^n$. Le développement suivant la formule du binôme de cette puissance donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)\,\omega^k.$$

Le premier principe consiste a remplacer $f_k(n)$ par $n^k/k!$, le deuxieme est de considérer que cette équivalence passe sous le signe de la sommation et le dernier principe retrouve le lien entre ω et n qui est tel que $n\omega = x$, puisque nous avons choisi l'exponentielle à base neperienne , de sorte que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! \ .$$

La juxtaposition de ces trois principes est encore typiquement à l'oeuvre dans la démonstration de la formule de Taylor que donne Euler et que nous reprenons sous forme résumée pour gagner de la place (On pourra se reporter à l'original dans les **Institutions du calcul différentiel**, §44-50)

En désignant un accroissement dx (pour le moment non précisé, mais qui va bientôt être pris infiniment petit) de la variable x, Euler écrit la dépendance fonctionnelle relative à une fonction f selon

$$f(x + dx) = (1 + d)f(x).$$

Il itère cette dépendance n fois de sorte que

$$f(x + ndx) = (1 + d)^n f(x).$$

Intervient alors la formule du binôme pour agir sur l'écriture "opérationnelle" précédente, donnant le développement de $(1 + d)^n$.

$$(1 + d)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n) d^k$$

Mais cette formule ne sera pas employée dans le seul cas d'une valeur entière de n: au contraire, Euler va prendre pour n un infiniment grand, en liaison avec dx de sorte que le produit des deux donne un nombre réel fixé ω. Sous le signe de sommation Σ précédent, $f_k(n)$ est équivalent à $n^k/k!$ selon les règles de l'algèbre polynomiale des infiniment grands (premier principe). Le deuxième principe consiste à estimer que cette équivalence passe sous le signe Σ. Dès lors, Euler dispose de

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Cette fois, il reste à interpréter les quotients de $d^k f$ par dx^k comme des quotients différentiels, donc des quantités finies.. Finalement, la formule de Taylor est obtenue.

On a volontiers caractérisé la démarche décrite d'Euler en la qualifiant de formaliste. Ce faisant, une fois encore, l'historien critique joue habilement sur deux registres. D'une part, le registre qui fait référence à une évolution bien postérieure des mathématiques, celle des séries formelles en l'occurrence, d'autre part l'opposition entre une théorie déductive(formelle par essence) et le calcul numérique.

La première référence est tendancieuse et il suffirait de dire que c'est le préjugé polynomial qui est exercé, avec l'existence et l'unicité d'une écriture en série entière. Cela se constate d'autant mieux qu'Euler obtient à partir de l'écriture $e^x = (1+x/n)^n$ où n est un infiniment grand, la factorisation de $e^x - e^{-x} = (1+x/n)^n - (1-x/n)^n$ à partir de laquelle, en négligeant les termes en $1/n^2$, il obtient la factorisation

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2\pi^2).$$

Et la force polynomiale est telle qu'Euler déduit ainsi de la somme (infinie) des puissances n-emes des racines de ce "polynôme", la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2n} = a_n \pi^{2n}$, exprimant ensuite les a_n à partir de nombres de Bernoulli. Euler poursuit ainsi superbement le fondement de la théorie analytique des nombres.

La deuxième référence est nettement plus significative. Il y a divorce apparent entre le calcul explicite des valeurs à partir d'un développement en série et la manipulation des séries. Le calcul numérique est pourtant omniprésent chez Euler, avec un souci maniaque de la précision, par exemple dans le nombre de décimales traînées pour toutes les constantes inventoriées: nous l'avons noté avec la première démonstration de la formule du binôme dans les **Institutions du calcul différentiel**. Mais , simulta nément , le constat d'une divergence du numérique n'entraîne aucune remarque d'ordre théorique. Entendu en ce sens , il y a formalisme.

Il est tout à fait vrai que c'est la volonte "réaliste" d'un Lagrange dans sa **Résolution numérique des équations algébriques**, d'un Gauss dans son traitement de la série hypergéométrique , qui permettra à un Cauchy d'aboutir à la liaison entre le point de vue "analytique" de l'analyse algébrique et le calcul sur les nombres réels. Il en sortira une théorie de la convergence, laquelle devra laisser tomber dans sa constructi on certains pans intéressants de l'analyse algébrique (analyse asymptotique pourtant développée considérablement par Laplace dans son étude du comportement pour des grands indices du module des polynômes de Legendre , aussi bien dans le plan complexe que sur l'intervalle [-1, +1]), pans repris beaucoup plus tard. Là-aussi une rigueur est à l'oeuvre et si nous ne l'avons pas évoquée, c'est faute de place et surtout parce qu'elle nous paraissait mieux connue tant sur le plan des concepts que sur celui de son évolution historique. Nous reviendrons sur le système de l'analyse algébrique au chapitre sur la rigueur comme moteur de la construction architecturale mathématique.

Auparavant, il est sain de revenir aux textes pour donner les démonstrations d'Aepinus, d'Euler et de Cauchy.

5. Deux exemples de rigueur

La pétition de principe sur la démonstration différentielle de la formule du binôme suscita de nombreuses réactions, beaucoup plus qu'on ne s'y attendrait si on se contentait de reprendre le point de vue classique sur le formalisme des mathématiciens du siècle des Lumières. Ces réactions sont décrites dans la thèse à paraître de M.Pensivy (voir un des volumes de *Sciences et Techniques en perspective*, 1987). Nous retiendrons ici deux essais de mise en rigueur de la démonstration , parce que ces deux tentatives ont pour but de respecter l'architecture de l'analyse algébrique et donc de fournir une démonstration qui pourrait venir dès les premiers éléments.

La première tentative est dûe à Aepinus, un proche d'Euler pendant tout une période berlinoise et comme l'indique une courte mention à Rostock, l'origine de sa démonstration doit remonter aux années 1752, celles précisément qui virent la préparation des **Institutions du calcul différentiel** . L'essai latin parut en 1763 dans les *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (8, 1760/61, pp.169-180, introduction pp. 27-29). La deuxième tentative que nous examinerons est un travail tout à fait remarquable d'Euler, écrit en latin en 1774. Il s'agit de la **Démonstration du théorème de Newton sur le développement des puissances du binôme pour les cas où les exposants ne sont pas des entiers** , publiée dans les *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (19, (1774), 1775, pp.103-114).

Euler en 1774, presque vingt ans après sa première preuve , indique explicitement:

" *Sans doute jadis , j'avais enseigné une démonstration tirée de l'analyse des infinis. Mais parce que cette analyse s'appuie elle-même sur notre théorème, je reconnais maintenant qu'il faut la rejeter comme entachée d'une pétition de principe .*"

Aepinus est encore plus clair puisqu'il mentionne l'ordre d'exposition de l'Analyse:

" *Il n'est pas suffisant que les vérités mathématiques, dont la certitude est donnée couramment en exemple aux autres disciplines, soient exemptes de tout risque d'équivoque ; il est nécessaire également que toute objection concernant ces vérités , auxquelles adhèrent des esprits exercés à l'étude et dotés d'une intelligence suffisamment pénétrante, soit complètement réfutée et que soient rejetées en particulier les subtilités des Sophistes....Ces critiques concernent surtout le théorème de Newton , selon lequel on tient generalement pour établi que la puissance du binôme* $(x+y)^m$ *est donnée par le développement en série,*

$$x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}y + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^{m-3}y^3 + \text{etc}$$

bien que cette égalité ne soit pas démontrée, sauf dans le cas où l'exposant m est un nombre entier. Or , dans les autres cas où m est soit un nombre fractionnaire, soit un nombre irrationnel, soit un nombre transcendant, soit même un nombre imaginaire, on est loin de douter de sa vérité. Au contraire, une fois ce théorème accepté en son sens le plus large, on a établi sur cette base une Analyse universelle de l'infini .... Ce n'est donc pas sans raison que l'Auteur s'est fixé la tâche de construire une démonstration des principes qui fondent l'ensemble de cette Analyse, et ce par les seuls éléments de l'Algèbre commune.

5.1 Une démonstration d'Aepinus

Si Aepinus conserve encore quelque renom aujourd'hui, il ne le doit guère à ses travaux purement mathématiques - une dizaine de publications en tout - mais à un ouvrage de 1759, **Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi**. Il y tentait une première en offrant un exposé raisonné de phénomènes électriques, exposé basé mathématiquement sur les actions à distance. Son nom reste aussi associé à l'électrophore et au condensateur. Or le cas d'Aepinus nous offre une belle occasion inédite.

Mathématicien ripuaire, Aepinus est toutefois au fait de toutes les questions débattues, puisqu'il est membre ordinaire dans la classe de mathématiques et d'astronomie de l'Académie de Berlin dès 1755, alors qu'il vient juste d'atteindre la trentaine. Deux ans plus tard, en pleine guerre de Sept Ans, Aepinus gagne Saint-Petersbourg, lassé de la mentalité française de Berlin, et lit presque aussitôt à l'Académie de sa nouvelle ville un papier consacré à la formule du binôme de Newton. Il s'agit du **Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando**. C'est ce travail que nous voudrions analyser - il paraît seulement en 1763 - car s'il suit de près les **Institutiones calculi differentialis** qu'Euler faisait publier à Saint-Petersbourg en 1755, il n'en témoigne pas moins d'un souci particulier de rigueur. Une rigueur qu'on pourrait qualifier d'algébrique - notre propos est de peser cet aspect des choses - en tout cas une rigueur qui n'entend pas se laisser entrainer par la magie du calcul des infiniment petits

Cet esprit particulier de rigueur est d'autant plus interessant qu'on connait les liens unissant vers cette epoque Aepinus et Euler. Par son amitie avec le fils aine d'Euler, Johann Albrecht, lui-meme recemment admis comme membre de l'Academie de Berlin sur proposition de Maupertuis Franz Ulrich Aepinus, propulse par Euler a la meme Academie, faisait partie du groupe de jeunes espoirs et de talents moins jeunes, mais affirmes, qu'Euler reunissait familierement dans sa maison de Berlin. Les autres ont nom Louis Bertrand, qui publiera plus tard un gros manuel destine a expliquer intuitivement les mathematiques, Johann Gottlob Lehmann le mineralogiste, Johan Carl Wilcke le specialiste de l'electricite, le futur academicien Stepan Rumovskii, etc. Et faisant vraisemblement reference aux *Abendrede* de Luther lui-même, Aepinus n'hesitera pas a parler de *Tischgesellschaft* pour marquer la variete des sujets scientifiques evoques a la table d'Euler, et rendre l'enthousiasme des partenaires de ces conversations a batons rompus. La formule du binome fit vraisemblablement partie des propos echanges, ainsi que la rigueur necessaire pour en obtenir une demonstration convaincante.

Contentons-nous ici de quelques traits de la vie mathematique d'Aepinus, alors que l'essentiel de sa carriere scientifique se situe ailleurs. Il naquit a Rostock le 13 Decembre1724 et mourut a Dorpat actuellement Tartu en Estonie) le 10 Aout 1802. Son grand-père avait hellénisé son nom (Hoch). Enseignant les mathématiques à Rostock, Aepinus publia d'abord divers articles de mathématiques: sur les équations aux dérivées partielles, sur les logarithmes, sur l'intégration des fonctions trinômes, sur les

équations polynomiales, et sur les quantites négatives. Il annonça aussi une preuve nouvelle de la formule du binôme de Newton en 1752. Il avait été essentiellement forme en mathématiques par un professeur de l'Université de Iéna, G.E. Hamberger. C'est au contact de son eleve, le Suédois Wilcke, qu'Aepinus s'intéressa a l'électricité, domaine qui sera son centre d'activité privilégié apres son installation a Saint-Pétersbourg. Le livre d'Aepinus sur l'électricité, qui fut influent pendant longtemps, possède une armature mathematique nettement plus importante que celle en usage dans les manuels de physique du XVIIIeme siecle. Mais Aepinus ne reviendra qu'occasionnellement a des travaux mathématiques et le texte que nous allons étudier, qui fut publie a Saint-Pétersbourg en 1763, représente plutot la tardive mise au point de travaux effectués pendant son séjour a Berlin, notamment dans l'environnement d'Euler. Apres 1767, Aepinus ne se livra plus a des recherches scientifiques, etant de plus en plus implique à la Cour, d'abord comme précepteur du prince impérial, le futur tsar Paul, puis de plus en plus par des fonctions politiques ou diplomatiques. L'impératrice Catherine II, sensible a la reputation d'excellent professeur de notre héros, lui avait demandé , en 1783 , un projet de réforme du système éducatif, comme elle l'avait fait auprès de Diderot. Des deux projets, il ne fut guère tenu compte , il faut noter qu'Aepinus insistait sur les Normalschulen afin de former au préalable des enseignants.

Aepinus part donc , dans son article , de ce que nous ecririons aujoud'hui sous la forme :

(1) $\qquad (x+1)^m = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(m) x^{m-k}$

où la sommation s'étend de 0 a l'infini en k. Implicitement, il suppose l'unicité de ce développement, une unicité indispensable pour la bonne conduite de la démonstration.

La variable x, apparemment, est réelle tandis que m désigne une variable quelconque, eventuellement complexe. Il s'agit bien, pour chaque entier positif ou nul k, de déterminer ces coefficients $A_k(m)$ qui sont des fonctions de m. La détermination est obtenue au terme de l'établissement de relations fonctionnelles entre les différents coefficients $A_k(m)$, relations déduites de certaines identites particulieres satisfaites par $(x+1)^m$.

Ces identités sont les suivantes. D'une part, il y a la double ecriture :

(2) $\qquad ((2x+1)+1)^m = 2^m (x+1)^m$,

et d'autre part, il y a la relation des puissances

(3) $\qquad (x+1)^{r+s} = (x+1)^r (x+1)^s$.

Cette relation (3) grace a l'unicité du developpement (1), induit en effet une relation fonctionnelle pour le coefficient $A_1(m)$:

(4) $\qquad A_1(r+s) = A_1(r) + A_1(s)$,

une equation fonctionnelle valable pour toutes les valeurs complexes de r et de s. Au cours des § 9 et 16, Aepinus s'ingenie a montrer que cette equation (4), jointe a la condition $A_1(1) = 1$, implique :

(5) $\qquad A_1(r) = r$

Plus tot, lors des § 5 a 8, Aepinus tient seulement compte de (2) pour ecrire, grace encore a l'unicite de (1), un systeme infini d'equations fonctionnelles plus melangees que l'equation (4), et dont il deduit (par une recurrence explicitee seulement aux § 20 a 23) que

(6) $\qquad A_0(m) = 1$

et

(7) $\qquad A_k(m) = \frac{1}{k!} A_1(m) A_1(m-1) \ldots A_1(m-k+1)$.

La forme des coefficients du binome est donc trouvee, sous la plus grande generalite envisageable quant aux valeurs de l'exposant m. Il ne fait aucun doute que c'est la <u>methode fonctionnelle</u> qui oriente la preuve, c'est-à-dire la determination de fonctions a priori inconnues -ici les coefficients- au moyen d'equations portant sur ces fonctions, equations valables pour toutes les valeurs possibles des variables. Le programme est conforme a celui des deux **Traités** d'Euler deja mentionnes.

Le programme ne manque pas ni de coherence, ni d'ambition, mais sa realisation presente des difficultés serieuses, des entorses a la rigueur pourtant dûment recherchee et proclamee. Nous ne les examinerons pas toutes, nous contentant de quelques exemples significatifs. Auparavant, il importe de signaler qu'Aepinus mene rondement et completement une difficile recurrence combinatoire, pour deduire l'expression des coefficients $A_k(m)$ a partir de $A_1(m)$. On est très loin des soi-disant preuves inductives de telles recurrences dont on accuse trop souvent le XVIIIeme siecle mathematique. Mais nous n'avons pas la place de donner le texte d'Aepinus dans sa totalite, ni tous les commentaires. Aussi nous en venons aux "taches" de la demonstration.

La plus notable est dans la resolution de l'equation fonctionnelle satisfaite par le coefficient $A_1(m)$ de la serie (1), coefficient qu'Aepinus note avec originalite B^m pour indiquer la dependance fonctionnelle de B en m. Il a obtenu

(8) $$B^{r+s} = B^r + B^s .$$

Son vocabulaire est adapte, et renoue avec une tradition des debuts fonctionnels les plus porteurs. Aepinus parle de reponse B^s a la variable s et constate qu'une progression arithmetique de raison s est transformee par B en une progression, egalement arithmetique, dont la raison cette fois est B^s. Il retrouve naturellement ainsi l'accent des mathematiciens du XVIIeme siecle travaillant avec les logarithmes et les caracterisant : la fonction logarithme est celle qui permet de passer d'une progression geometrique a une progression arithmetique (voir Grégoire de Saint-Vincent et de Sarasa, mais aussi Napier ou Briggs). De ce premier resultat d'Aepinus, il faut sauter a la constance du rapport de B^s a s. C'est la que l'embrouille apparaît. Partant de la constance de B^{ns}/ns lorsque la seule variable entiere n varie, pour s fixée, Aepinus veut en déduire celle du rapport B^s/s par rapport a la variable s elle-meme. Cette faute d'homogénéité où l'on passe des entiers a tous les nombres réels, sera maintes fois répétée au

XVIIIeme siecle, au déboire de quelques mathématiciens, comme Legendre, qui mit trop d'ardeur à vouloir prouver l'axiome des parallèles d'Euclide a partir des équations fonctionnelles. L'erreur est crûment en évidence dans le present texte et l'intérêt réside dans la justification fournie. Celle-ci, on s'en doute bien, deniche quelque part de l'infiniment petit et de la continuite. Puisque le nombre s peut etre pris aussi petit qu'on le desire, ns parcourerait tous les nombres reels lorsque n varie selon les entiers relatifs. Aepinus dit explicitement:

En passant de facon continue, elle prendra toutes les valeurs reelles de m

Autrement dit, $\mathbb{Z}s$ coinciderait avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des reels lorsque s est un infiniment petit ! Ne sursautons pas trop ! Dans l'**Introductio in analysin infinitorum** d'Euler, le moteur veritable des infinis - et celui de l'analyse algebrique par consequent - consiste a ecrire tout reel x comme produit d'un infiniment petit par un infiniment grand. Aepinus a l'impression vraisemblablement de s'inscrire dans le cadre meme de l'analyse algebrique avec son identification des ensembles $\mathbb{Z}s$ et $\mathbb{R}$. Malheureusement, ce faisant, il passe du point de vue ponctuel d'Euler qui est l'ecriture d'un <u>seul</u> nombre réel x avec n et ω, a celui de tout nombre reel, mais a partir d'un <u>même</u> infiniment petit ω. En allant au-dela de la représentation d'Euler, Aepinus doit seulement avoir l'impression d'en tirer tous les fruits (§ 10 et 11).

Cette erreur d'Aepinus met, selon nous, en lumiere crue l'ambiguité de la méthode fonctionnelle d'Euler. Sans risques chez le maitre, la formule $x = \lim_{n \to \infty} n(x/n)$ qu'Euler note seulement $x = n\,\omega$, où n est un infiniment grand et ω un infiniment petit, en présente de grands chez les disciples car le calcul sur les limites n'est pas suffisamment précisé. L'algébrisation de ce calcul est encore sommaire, car trop liée au comportement algébrique des polynômes, lorsque par exemple on ne prend que le terme de plus haut degre si la variable devient infiniment grande.

On notera effectivement dans le cas present que le resultat qu'Aepinus cherche a obtenir a l'occasion des § 10 et 11 est facile, sinon evident, si l'on sait a priori que B^m est fonction polynomiale de m. En effet, le raisonnement par homogeneite est validable, si pour un nombre λ, on a $B^{ns} = \lambda ns$ pour tout entier relatif n, grâce au nombre fini de racines d'un polynôme tel que la fonction B, on déduit $B^{xs} = \lambda xs$ pour tout réel x, et donc, comme souhaité, que B^x est fonction linéaire de x. Mais en fait λ dépend de s. Toutefois, on constate aisément l'égalité $\lambda(ns) = \lambda(s)$, valable pour tout entier n. Si donc λ présente un comportement polynomial, ce qui se déduirait du même comportement supposé de B, la seule solution possible est bien la constance de λ, ce qui nous conduit au cas deja réglé. Un tel raisonnement d'homogénéite, portant sur une fonction analogue λ, fut effectivement exposé par Legendre dans sa **Géométrie** en 1794, mais de Foncenex l'utilisait bien avant.

Mais Aepinus ne presente pas explicitement l'argument polynomial argument que l'on verra nettement mieux evoque chez Euler. Il est surtout vrai qu'Aepinus fait intervenir, avec s, non pas une variable, mais un infiniment petit, et qu'il se trompe sur l'independance de cet

infiniment petit par rapport à x.

En tout cas, comme il a constaté que pour x = 1, B prend la valeur 1, il déduit $B^m = m$ pour toute valeur m. Notons bien que le raisonnement par identification avec un comportement polynomial n'a pas besoin d'utiliser le passage intermédiaire, d'ailleurs facile, par un quotient d'entiers (nombres rationnels). Aepinus ne suggère pas un tel passage et il n'est pas le seul auteur du XVIIIème siècle à sauter allègrement des entiers aux réels, sans l'intervention explicite des rationnels. Nous tenons que le passage possible par les rationnels pouvait apparaitre inutile à ceux des auteurs soucieux d'économie. Ce passage n'a de sens que si, comme Cauchy, l'on dispose à la fois d'une vue "topologique" des réels par densité des rationnels, et d'une régularite, comme la continuité, supposée sur la fonction inconnue B. Le procédé est bien plus simple si la "régularité" présupposee, voire inconsciente, relative à une fonction est un comportement polynomial. De $P(x)/Q(x) = 1$, égalité supposée vraie pour une infinité de valeurs de x, par exemple tous les entiers, lorsque P et Q sont des polynômes, on déduit aussitôt l'identité $P/Q = 1$. Voila un moteur de démonstration au XVIIIème siècle. Donnons maintenant les § 10 et 11 d'Aepinus.

Extrait du texte d'Aepinus traduit en français(§10,11 et 12)

10 - Donc, comme on a toujours $B^{r+s} = B^r + B^s$, on aura également $B^{r+s} - B^r = B^s$. C'est pourquoi, si m croît d'une quantité quelconque s, B^m augmentera également, d'une quantité toujours constante, quelle qu'ait été la valeur de m. $B^{r+s} - B^r$ désigne bien sûr un accroissement qui touche B quand on ajoute à r une quantité s. Mais comme cette différence vaut B^s, il apparait que cet accroissement ne depend que de s, et nullement de r. C'est pourquoi il doit rester le même, tant que s garde la même valeur, quelle que soit la variation de r.

A l'opposé, on en déduit facilement que, si m décroît d'une quantite s, B^m diminuera en conséquence d'une quantité constante également, et égale à B^s.

11 - C'est pourquoi, posant successivement :

$$m = \dots - 3s,\ - 2s,\ -s,\ 0,\ +s,\ +2s,\ +3s,\dots$$

B prendra les valeurs correspondantes

$$\dots -3B^s,\ -2B^s,\ -B^s,\ 0,\ +B^s,\ +2B^s,\ +3B^s,\dots .$$

Si donc m est pris dans une progression arithmétique de raison s, les réponses B seront aussi dans une progression de ce genre, de raison B^s. C'est pourquoi, quel que soit B, m et sa réponse auront un rapport constant.

Soit s un infiniment petit, et une progression ... $-3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s$ ... prolongée de part et d'autre à l'infini. En passant de façon continue, elle prendra toutes les valeurs réelles de m. On peut en déduire que si le nombre m a été pris comme réel quelconque, le rapport de B^m à m sera constant.

12 - C'est pourquoi on peut toujours remplacer B^m par λm, le nombre λ étant constant, ce qui pour une solution complète du problème, permet maintenant de réduire la recherche à la seule détermination de λ. Mais il suffit, puisque ce nombre est constant, de le déterminer dans un seul cas. Ce qui peut se faire facilement par le calcul suivant. Comme, dans le cas où m = 1, la série $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} \dots = x + B^1 + \frac{C}{x} + \dots$

doit donner x+1, on aura $B^1 = 1$. Pour cette raison, et puisque $B^m = \lambda m$ ce cas donnera $\lambda = 1$. L'égalité $B^m = m$ est donc un fait établi, pour n'importe quel nombre réel.

Il est tout à fait remarquable qu'Aepinus passe ensuite à la démonstration du cas des valeurs complexes de l'exposant m et ne déduise pas automatiquement $B^m = m$ pour m complexe , de la même relation établie dans le cas réel. Il précise quant au raisonnement qui servit pour le cas réel: " *Il n'est pas cependant possible de l'appliquer à des valeurs imaginaires comme on pourrait le supposer imprudemment* ". Ce souci n'est pas commun au XVIIIème siècle, loin de là , car on considérait généralement, en vertu d'une définition formelle et non causale des fonctions, qu'une identité sur les réels passait telle quelle aux nombres complexes. Ce passage prendra ultérieurement nom de permanence des formes, mais au XVIIIème siècle, il tient seulement à une définition possible des fonctions. Nous y reviendrons en décrivant un texte d'Euler sur les fonctions discontinues. Aepinus est donc en veine de rigueur et son propos annonce celui de Cauchy, plus de cinquante ans plus tard, une fois adoptée la définition causale d'une fonction :

" *Il est vrai que pour rester constamment fidèle à ces principes [de rigueur], je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce ... dans le chapitre IX que, si des constantes ou des variables comprises dans une fonction , après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la relation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse* .

La naïveté analytique

Un défaut de la démonstration d'Aepinus est d'ordre architectural. Aepinus part, pour un nombre m quelconque, de la série

(9) $(x + 1)^m = A x^m + B x^m + C x^{m-2} + D x^{m-3} + \dots$

Certes, il est le seul au XVIIIème siècle à ne pas écrire plutôt une série entière en $1/x$

(10) $(x + 1)^m = x^m(1 + 1/x)^m = x^m(A + B/x + C/x^2 + D/x^3 + \dots)$

Apparaît alors l'étonnant (au sens fort compte -tenu des habitudes de l'époque) besoin de justifier l'écriture (9), car Aepinus accepte l'objection selon laquelle rien ne prouve a priori l'existence d'un tel développement pour toute valeur de m. Il contourne toutefois la difficulté par un argument qui est intéresssant.

" *S'il était impossible en effet que $(x+1)^m$ soit développé en une série de cette forme, les calculs effectués pour chercher une solution conduiraient à une impossibilité*" (§3)

Ainsi toute l'affaire pour Aepinus se réduit donc seulement à montrer que le calcul effectif des coefficients A, B, ..., est possible ! Il introduit même l'idée, un peu biscornue, selon laquelle le critère de réussite serait de ne pas tomber au bout du comte sur un coefficient explicitement imaginaire. Cette remarque indique peut-être que x désigne une variable réelle dans (9), mais comme m est a priori complexe, on voit mal où serait la gêne dans l'obtention d'une valeur imaginaire. Le mot " imaginaire" est vraisemblablement pris ici dans le sens premier, non mathématisé, de quantité impossible qui invaliderait le calcul.

Mais l'essentiel est dans le credo "positiviste" : un calcul, s'il est possible de l'achever, permet à lui seul d'affirmer l'existence de l'objet sur lequel porte le calcul. L'unicité de l'objet calculé se déduirait de même de l'unicité du résultat calculé. Ce credo d'existence, et d'unicité, est porté par le programme de la méthode fonctionnelle. Cette méthode est entendue en effet comme une extension de la résolution des équations de l'algèbre ordinaire. On pose en fonction inconnue ce que l'on cherche ; on établit les équations que cette fonction satisfait. Leur possible résolution affirmerait l'existence de ce qui est cherché. On oublie malheureusement la vérification que ce qui vient d'être trouvé convient exactement au problème posé. Certes, on saisit que l'objection logique à cette démarche paraît inutile si, à chaque étape, on a pris soin de vérifier que l'on procède par équivalences logiques, allant d'équations en équations puis aux solutions, sans rien ajouter ou perdre. Outre que nous verrons que ces équivalences sont rien moins qu'assurées dans la pratique, il faut de toutes façons d'abord montrer la validité de la mise en équation initiale. On ne peut donc pas éviter le problème du sens à donner a priori à une expression comme (9) quand bien même un " calcul" permettrait de déterminer la valeur des coefficients A_k. Aepinus écarte la difficulté et superpose à son calcul l'hypothèse implicite de l'unicité du développement (9), unicité indispensable à sa démarche.

Il nous semble que la "foi" d'Aepinus en ce credo du calcul fonctionnel-roi est largement partagée en son siècle et qu'elle signe une catégorie de rigueur, à laquelle il serait vain de demander plus. Mais s'arrêter à ce constat serait manquer un aspect essentiel. De fait, la seule mesure que l'on puisse prendre d'un auteur à l'autre, au sujet de la rigueur du XVIII^{ème} siècle, est dans la hardiesse de la généralité avec laquelle ce principe "positiviste" est utilisé.

Aepinus a la naïveté de lui donner une extension générale, d'en faire le moteur de l'analyse, démarche où l'on pose au départ ce qui est cherché.

5.1 Une démonstration d'Aepinus

Si Aepinus conserve encore quelque renom aujourd'hui, il ne le doit guere à ses travaux purement mathématiques -une dizaine de publications en tout- mais a un ouvrage de 1759, **Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi**. Il y tentait une première en offrant un exposé raisonné de phénomènes électriques, exposé basé mathématiquement sur les actions à distance. Son nom reste aussi associé à l'électrophore et au condensateur. Or le cas d'Aepinus nous offre une belle occasion inédite.

Mathématicien ripuaire, Aepinus est toutefois au fait de toutes les questions débattues, puisqu'il est membre ordinaire dans la classe de mathématiques et d'astronomie de l'Académie de Berlin dès 1755, alors qu'il vient juste d'atteindre la trentaine. Deux ans plus tard, en pleine guerre de Sept Ans, Aepinus gagne Saint-Pétersbourg, lassé de la mentalité "française" de Berlin, et lit presque aussitôt à l'Académie de sa nouvelle ville un papier consacré à la formule du binôme de Newton. Il s'agit du **Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando**. C'est ce travail que nous voudrions analyser -il paraît seulement en 1763- car s'il suit de près les **Institutiones calculi differentialis** qu'Euler faisait publier à Saint-Pétersbourg en 1755, il n'en témoigne pas moins d'un souci particulier de rigueur. Une rigueur qu'on pourrait qualifier d'algébrique -notre propos est de peser cet aspect des choses- en tout cas une rigueur qui n'entend

"Il y a une voye aux Mathématiques pour enquérir et rechercher la vérité, laquelle est dite avoir esté premièrement trouvée par Platon, et par Théon appelée Analyse ; et d'icelles définie l'Assumption du requis comme concédé, par les conséquences au vray concédé" comme dit Viète dans l'**Introduction en l'art analytic** (traduit par Vaulézard). Aepinus est oublieux de la précautionneuse remarque de Pappus au livre VIII de la Collection Mathématique

"En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution".

Sur le plan épistémologique, il est essentiel de rappeler que la démarche analytique, justement prônée par Viète, ne fait jouer en pratique, par la mise en équation ; que le domaine qualifié plus tard d'"algèbre commune". Ce vocable désigne tout ce qui concerne la manipulation et la théorie des équations polynomiales. Or un tel domaine, plus ou moins bien maîtrisé car il fait nécessairement entrer les nombres complexes, est quand même nettement délimité. Et comme l'on ne doute pas que tout polynôme ait au moins une racine, au moins complexe, comme l'énonçait Girard dès 1629, les considérations d'existence pour une solution à un problème sont occultées par la seule démonstration d'un calcul effectivement possible.

Avec l'extension de la méthode fonctionnelle, qui de la détermination d'une inconnue par des équations polynomiales, passe à la caractérisation de fonctions par des équations fonctionnelles, le cadre algébrique éclate complètement. Et les précautions relatives à l'existence des objets posés devraient intervenir à nouveau. Aepinus n'y prend pas garde. Pas plus qu'il ne prend garde à l'hypothèse d'unicité du développement, qui est indispensable pour pouvoir écrire les équations fonctionnelles sur lesquelles reposent la solution du problème posé.

Comparons donc cette démonstration d'Aepinus à celle présentée par Euler en 1774 sur le même sujet du théorème du binôme de Newton. Nous expliquerons d'abord le contenu mathématique du travail d'Euler avant de fournir la traduction du texte complet. Nous ne donnerons un commentaire que sur un point particulier , et le ferons juste avant de décrire la méthode suivie par Cauchy pour ce même théorème du binôme de Newton.

La démonstration phare d'Euler

Cette démonstration est typiquement fonctionnelle et analytique . Euler part (avec d'autres notations) de la série entière cherchée

(11) $$F(n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} [n(n-1)...(n-k+1)/k!]\, x^k.$$

Il prouve- c'est là qu'il y a une difficulté en bonne rigueur- l'équation fonctionnelle satisfaite par F pour toutes les valeurs réelles m et n, et toutes les valeurs x

(12) $$F(n+m, x) = F(n,x)\, F(m,x).$$

Il constate par ailleurs que pour toutes les valeurs entières positives de n

(13) $$F(n,x) = (1+x)^n.$$

Par suite si a = p/q, où p et q sont des nombres entiers positifs, Euler déduit $F(p,x) = F(qp/q, x) = (F(p/q,x))^q$ tandis que $F(p,x) = (1+x)^p$. D'où

(14) $$F(p/q, x) = (1+x)^{p/q}$$

$F(a,x) = (1+x)^a$

Euler deduit le cas d'un exposant fractionnaire negatif , grace une fois de plus à l'équation fonctionelle satisfaite par F. Il conclut donc à la validité de la formule du binôme pour tous les exposants fractionnaires.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE DÉVELOPPEMENT DES PUISSANCES DU BINÔME POUR LES CAS OÙ LES EXPOSANTS NE SONT PAS DES ENTIERS

(Exposé n: 465 de l'index ENESTRÖMIEN : Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 19 (1774), 1775, p 103-111 Résumé, même référence , p 17-19)

RÉSUMÉ

Le théorème du binôme, qui donne le développement de la quantité $(a+b)^n$ constitue la base de toute l'Analyse sublime et, pour cette raison, a d'autant plus de prix que sa vérité est démontrée solidement pour toute valeur, quelle qu'elle soit, de l'exposant. Mais la manière dont le grand NEWTON a été conduit à ce théorème, l'a seulement rendu évident pour un exposant n entier. Par conséquent , la validité de ce même théorème reste douteuse pour un exposant fractionnaire, négatif ou même irrationnel . On trouve, en effet, des cas de ce genre, où une formule quelconque est vraie toutes les fois que l'exposant n est supposé être un entier positif, mais qui s'écarte beaucoup de la vérité, si on prend pour n un nombre fractionnaire .Fait dont l'illustre EULER a fourni, ici , un exemple notable. Examinant donc cet inconvénient, il avait jadis donné une démonstration de ce théorème tirée de l'Analyse infinitésimale . Mais il reconnaît maintenant que cette démonstration n'est pas totalement exempte du défaut de la pétition de principe, puisque que l'Analyse infinitésimale elle-même s'appuie sur le théorème du binôme . Et, quoique cette démonstration puisse être raffinée au plus haut point, même en partant de l'Analyse infinitésimale , de telle sorte que sa vérité soit postulée seulement pour le seul cas d'un exposant n entier, cependant on ne peut pas nier qu'une démonstration tirée des purs principes de l'Analyse des quantités finies ne doive être préférée . L'illustre membre de notre Académie AEPINUS a donné une démonstration de ce genre au tome VIII des Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg , démonstration à laquelle on ne peut presque rien reprocher, si ce n'est peut-être que , pour obtenir les valeurs des coefficients pour la série, à laquelle $(1+x)^n$ est supposé égale, on ne doive beaucoup faire appel à l'induction .

Quant à la démonstration ici proposée par l'illustre Euler, elle procède de telle manière qu'elle ne demande pas tant comment la quantité $(1+x)^n$ doit être développée, mais plutôt quelle peut bien être la valeur de la série

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.},$$

série que l'on sait être égale à $(1+x)^n$, dans le cas de l'entier n. Mais, en général, l'illustre auteur juge qu'il faut indiquer la valeur de cette série par le signe $[n]$. Supposons maintenant que deux signes de cette espèce $[m]$ et $[n]$ aient un produit qui soit représenté par la série

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.},$$

il est évident que les coefficients A, B, C, etc sont déterminés par les lettres m et n et il est patent que la manière par laquelle se fait la détermination ne dépend pas de la nature des lettres m et n et, par conséquent reste la même, que l'on suppose m et n entiers ou fractionnaires. Mais si m et n sont des entiers, on a de toute façon

$$[m][n] = (1+x)^{m+n} = [m+n],$$

et, en généralisant, de même

$$[m][n] = [m+n], \quad [m][n][p] = [m+n+p] \quad \text{et} \quad [n]^i = [in].$$

De là, on déduit que $[n] = [in]^{1/i}$, ce qui fait connaître la vérité du théorème pour le cas d'un nombre fractionnaire, en choisissant i de telle sorte que in donne un nombre entier. En effet

$$[in] = (1+x)^{in}$$

d'ou

$$[in]^{\frac{1}{i}} = (1+x)^n = [n].$$

Si n représente un nombre négatif, soit $n = -m$, alors à cause de

$$[m][n] = [m+n] = [m-m] = [0] = 1,$$

il vient

$$[n] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m} = (1+x)^n.$$

1. Le théorème que l'on habitude de représenter ainsi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.}$$

constitue la base de toute l'Analyse sublime dans la mesure où il est censé s'étendre de la manière la plus large et embrasser sous l'exposant n absolument tous les nombres possibles. C'est pourquoi sa vérité doit nécessairement être démontrée très solidement. Mais la manière dont on est parvenu à ce théorème, en multipliant habituellement la quantité

(a+b) un certain nombre de fois par elle-même, est telle que des nombres différents de nombres entiers positifs ne conviennent pas pour l'exposant n. En effet, les autres puissances ne peuvent provenir d'une multiplication répétée de la quantité (a+b), à l'exception de celles dont les exposants indiquent un nombre de facteurs qui ne peut pas du tout ne pas être un nombre entier. Cependant, dans le même temps, presque personne n'a douté que, si cette formule était vraie pour tous les entiers mis à la place de n, cette même formule devait aussi être vraie pour tous les nombres sans exception, soit fractionnaires, soit même irrationnels. Et, bien que cette conclusion s'applique dans ce cas, sa justesse provient d'autres raisons, puisque des cas peuvent se présenter où une formule quelconque est trouvée vraie chaque fois que l'exposant n est un entier positif, mais ne peut nullement être employée lorsqu'on attribue à l'exposant des valeurs fractionnaires.

2. Pour illustrer ceci d'un exemple, qu'on se donne la série suivante dont la valeur, chaque fois que l'exposant n est un entier positif, est toujours trouvée égale à l'exposant n, sans que, pour autant, on puisse licitement en conclure que cette égalité subsiste si l'on choisit d'autres nombres pour n.

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+ \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})}{1-a^4} + \text{etc.},$$

Cette même propriété est valable quand on prend $n = 0$. Alors, en effet, avec $a^n = 1$, le premier terme s'annule immediatement, en même temps que tous les suivants, puisque ils ont $1-a^n = 0$ en facteur. De telle sorte que dans ce cas notre série devient $= 0$, c'est à dire égale à l'exposant lui même $n = 0$. Mais si l'on prend $n = 1$, le premier terme devient

$$\frac{1-a}{1-a} = 1,$$

, tandis que le deuxième terme s'annule en même temps que les termes suivants grâce à $1-a^{n-1} = 0$, de telle sorte que dans ce cas la série devient = 1 . Considérons en outre le cas n = 2, pour lequel le premier terme devient

$$\frac{1-a^2}{1-a}=1+a,$$

alors que le deuxième terme donne

$$\frac{(1-a^2)(1-a)}{1-a^2}=1-a,$$

tandis que le troisième ainsi que les suivants s'annulent, à cause du facteur $1-a^{n-2}=0$. La somme de notre série sera donc = 2 , c'est à dire égale à n. Prenons encore n = 3 de sorte que le premier terme donnera

$$\frac{1-a^3}{1-a}=1+a+a^2,$$

et le second donnera

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)}{1-a^2}=1-a^3$$

et le troisième

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)(1-a)}{1-a^3}=1-a-aa+a^3,$$

Quant au quatrième terme et tous les suivants, ils s'annulent puisqu'il contiennent le facteur $1-a^{n-3}=0$. Donc notre série , dans le cas où n = 3, aboutit à 3 . De la même manière, on peut montrer que quel que soit le nombre entier mis à la place de n, notre série deviendra égale à ce même nombre. Mais n'importe qui comprendra facilement que , si l'on prenait n=1/2, cette série serait très différente de la valeur 1/2 .

3. Ainsi donc puisque l'on peut affirmer que la formule

$$n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\text{etc.}$$

est toujours vraie lorsque n est un entier positif, mais que cette égalité n'est pas valable pour les autres nombres, on pourra de même douter à bon droit que notre théorème

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3+\text{etc.}$$

soit conforme à la vérité de la manière la plus générale, même si nous sommes certains de son exactitude dans tous les cas où n est un entier positif . C'est pourquoi il est d'autant plus nécessaire de toute façon que cette vérité soit appuyée sur une démonstration rigoureuse . Sans doute jadis j'avais enseigné une démonstration tirée de l'analyse infinitésimale. Mais, parce que cette Analyse s'appuie elle-même sur notre théorème, je reconnais maintenant qu'il faut la rejeter comme entachée d'une pétition de principe . Notre illustre collègue AEPINUS a donné une démonstration vierge de ce défaut au tome VIII des Nouveaux Commentaires , où , prenant à la place de la formule $(x+1)^n$ la série générale

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc},$$

il a obtenu par une méthode fort ingénieuse les valeurs d'un certain nombre des coefficients A, B, C, etc . De leur concordance avec la série de NEWTON , sans doute aucun , il a pu conclure justement que tous les autres coefficients seraient aussi conforme à cette règle. Il faut bien voir que cette belle démonstration s'appuie beaucoup sur l'induction. D'autre part, il convient de noter que le second coefficient B n'est pas déterminé par cette méthode, mais le devient grâce à d'autres conditions qui sont fort absconses et obscures . C'est pourquoi je pense que ma démonstration sera d'autant mieux accueillie par les géomètres qu'elle n'est en rien tributaire de l'induction .

4. Avant tout, puisqu'on a

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

on aura aussi

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n,$$

et ainsi toute l'affaire repose sur le développement de cette puissance

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n,$$

Si l'on pose, d'autre part b/a=x , elle devient $(1+x)^n$ et nous savons que chaque fois que l'exposant n est un nombre entier positif, cette expression est égale à la série

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^4+\text{etc.}$$

Mais si n n'était pas un entier positif, regardons la valeur de cette série comme inconnue et, pour la remplacer servons-nous du signe [n] de telle sorte que nous ayons alors en général

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.}$$

Sur cette formule, nous n'en savons maintenant pas plus que ceci : lorsque n est un entier positif, on a

$$[n]=(1+x)^n.$$

Quant aux autres cas, quelles peuvent être les valeurs qui conviennent au signe [n] ? C'est ce que nous allons chercher et, finalement, il deviendra évident qu'en général, également, on aura $[n] = (1+x)^n$. Du même coup nous réaliserons complètement notre dessin.

5. Pour mener cette recherche, multiplions deux séries de ce genre, ou deux signes de ce genre [n] et [m], de façon à obtenir une série égale au produit [n].[m], série dont il est évident que la forme sera exprimée par

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.}$$

Pour voir clairement comment les coefficients A, B, C, etc sont déterminés par le couple de lettres m et n, commençons au moins la multiplication

$$[m]=1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2+\text{etc.},$$

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.},$$

$$\begin{aligned}[m]\cdot[n]=1&+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2+\text{etc.}\\&+\frac{n}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}\,x^2+\text{etc.}\\&+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.}\end{aligned}$$

Abb. 60
Altersbildnis Leonhard Eulers. Stich von S. G. Küt(t)ner nach dem Ölportrait von J. Darbes (1778).

Leonhard EULER 1707-1783
Beiträge zu Leben und Werk
Birkhäuser Verlag 1983 p. 488

$$[m] = (1+x)^m \quad \text{et} \quad [n] = (1+x)^n,$$

et par suite, le produit de ces formules donnera

$$[m]\cdot[n] = (1+x)^{m+n},$$

puissance qui se développe en cette série

$$1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}x^2 + \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

Si donc nous considérons maintenant les lettres m et n en général, il conviendra d'indiquer cette série par le signe suivant [m+n]. D'ou nous apprenons qu'existe toujours cette vérité essentielle

$$[m].[n]= [m+n],$$

quels que soient les nombres qu'on mette à la place de ces lettres.

8. Comme ce couple de formules [m] et [n] par multiplication de l'une par l'autre donne une formule simple de même nature, de même plusieurs formules de ce genre, multipliée mutuellement ,reviennent à une formule simple. Nous aurons précisément les réductions suivantes

$$[m]\cdot[n] = [m+n],$$
$$[m]\cdot[n]\cdot[p] = [m+n+p],$$
$$[m]\cdot[n]\cdot[p]\cdot[q] = [m+n+p+q]$$
$$\text{etc.}$$

De là, si tous ces nombres m, n, p, q, etc sont pris égaux entre eux - exactement égaux à n - nous obtiendrons les simplifications des puissances suivantes

$$[m]^2 = [2m], \quad [m]^3 = [3m], \quad [m]^4 = [4m] \quad \text{etc.}$$

D'ou il viendra en général lorsque a désigne un nombre entier quelconque

$$[m]^a = [am].$$

9. Posons à l'avance que la lettre i désigne un entier positif quelconque et prenons en premier 2m = i, pour avoir m = i/2. La première des

dernières formules donnera

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = [i],$$

mais comme i est un entier, on aura

$$[i]=(1+x)^i$$

(cf §4) et ainsi

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1+x)^i,$$

D'ou, en extrayant la racine carrée, il vient

$$\left[\frac{i}{2}\right] = (1+x)^{\frac{i}{2}}.$$

Nous sommes enfin arrivés maintenant à ce que le théorème de NEWTON soit également vrai dans les cas où l'exposant n est une fraction du type i/2.

10. De la même façon, si nous posons 3m = i, pour avoir m = i/3, la seconde des formules ci dessus devient

$$\left[\frac{i}{3}\right]^3 = [i] = (1+x)^i.$$

Si l'on en extrait la racine, on trouve

$$\left[\frac{i}{3}\right] = (1+x)^{\frac{i}{3}}.$$

Ainsi notre théorème est encore vrai lorsque l'exposant n est une fraction du type i/3. D'une façon générale, il sera donc évident que

$$\left[\frac{i}{a}\right] = (1+x)^{\frac{i}{a}}.$$

En sorte que, maintenant, il a été démontré que notre théorème est vrai si une fraction quelconque i/a est mise à la place de l'exposant n. La vérité est maintenant établie pour tous les nombres positifs mis à la place de l'exposant n.

11. Il n'y a plus qu'à démontrer aussi cette vérité pour les cas où l'exposant n est un nombre négatif. A cette fin, nous appellerons à la rescousse ce qui a été prouvé

$$[m].[n] = [m+n],$$

où m désigne un nombre positif, soit entier, soit fractionnaire, en sorte que l'on ait, comme nous l'avons montré à l'instant

$$[m] = (1+x)^m.$$

Posons maintenant $n = -m$, de sorte que $m + n = 0$ et par conséquent

$$[0] = (1 + x)^0 = 1 .$$

En faisant cette substitution , la formule ci-dessus donnera

$$(1 + x)^m \cdot [-m] = 1,$$

d'où nous concluons

$$[-m] = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m} .$$

Ainsi, la vérité du théorème de Newton est aussi établie dans le cas où l'exposant n est un nombre négatif quelconque. Qui plus est, ce théorème est confirmé par les preuves vraiment les plus solides.

---

6 Démonstration de Cauchy

En 1821, Cauchy publie son **Cours d'analyse**, du moins la première partie intitulée **Analyse algébrique**. Cette rédaction est tardive par rapport au cours effectué à l'Ecole poytechnique, car quelques témoignages (notamment des notes d'un élève fameux, Auguste Comte , notes qui demanderaient a être précisées) semblent prouver que l'architecture du cours était à peu près établie dès les premières leçons, en tout cas vers 1816.

Cauchy reprend la méthode d'Euler de 1774 pour la démonstration de la formule du binôme, mais surtout l'insère dans un habillage qui peut alors servir à toute l'analyse. Nous n'avons pas la place ici de montrer en détail combien <u>tout</u> le cours de Cauchy est tendu par la démonstration de cette formule pour le cas d'un exposant réel quelconque et pour des valeurs aussi bien reelles que complexes de la variable dans $(1+x)^{\alpha}$

Il nous suffira ici d'examiner comment Cauchy s'y prend pour éviter le piège de la démonstration d'Euler, et pour sauter des rationnels à toutes les valeurs réelles de l'exposant. Le cas complexe , bien que situé dans la même lignée, exige une démonstration autrement délicate car Cauchy éprouve le besoin -enfin- de préciser ce que signifie une expression comme $(1+x)^{\alpha}$ lorsque α est réel mais x complexe.

En effet la partie delicate de la démonstration d'Euler est celle par laquelle l'équation fonctionnelle est établie : c'est la fin du § 6 du texte d'Euler qui commence par ces mots" *Il convient d'observer que le mode de cette composition ne dépend pas de la nature des lettres m et n...*" Nous avons là effectivement un raisonnement formaliste en ce sens que la forme de la dépendance est considérée comme étant sans relation avec la nature des variables en jeu. Remarque d'autant plus surprenante qu'Euler a pris soin, dans son introduction, de nous avertir par un contre-exemple que de tels passages des entiers à des nombres quelconques n'étaient pas admissibles (§1, 2 et 3).

Euler part donc de la série entière que nous avons notée F (n,x) et qu'il écrit [n], car ses coefficients dépendent de n. Aucune remarque de convergence n'intervient ici, comme à l'accoutumée en analyse algébrique. Ensuite, Euler considère comme une évidence que le produit [n] [m] soit encore une série entière en x. C'est évidemment la généralisation de la multiplication de deux polynômes qui passe ainsi aux séries entières. Notons :

(15) $[n]\,[m] = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k x^k$,

là où Euler utilise l'ordre alphabétique A, B, C, D, etc, à la place de A_1, A_2, A_3, ... A_k. Euler explique la dépendance du coefficient A_k par rapport à la variable n, et nous reviendrons un peu plus loin sur son argumentation, notant ici $A_k(n,m)$ pour les besoins de l'exposé.

La deuxième étape entend établir que pour toutes les valeurs réelles des variables m et n, les coefficients introduits satisfont les relations

(16) $A_k\,(n,m) = f_k\,(n + m)$.

Dans cette formule, $f_k(p)$ désigne, pour toute valeur réelle de p, l'expression du coefficient général du binôme de Newton :

(17) $f_k(p) = \dfrac{p(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\ldots(p-k)}{k!}$

Dès lors, la deuxième étape s'effectue en deux temps. Un premier temps (c'est le paragraphe 5) introduit une démarche inductive. Euler vérifie (16), d'abord pour k = 1, puisque l'on a les deux égalités :

(18) $A_1\,(n,m) = f_1\,(n) + f_1\,(m)$

et

(19) $f_1\,(n + m) = f_1\,(n) + f_1\,(m)$.

Pour le cas où k est nul, Euler a dès le début posé sans discuter $A_0(n,m) = 1$, ce qui est justifié puisque les fonctions [n] et [m] valent 1 lorsque la variable x s'annule.

Euler vérifie ensuite la relation (16) pour k = 2, en se servant des deux égalités simultanées :

(20) $A_2\,(n,m) = f_2\,(n) + f_1\,(n)\,f_1\,(m) + f_2\,(m)$,

et

(21) $f_2\,(n + m) = f_2\,(n) + f_1\,(n)\,f_1\,(m) + f_2\,(m)$.

Et il indique que l'on pourrait -au prix d'un grand labeur- avoir de la même façon (16) en toute généralité, c'est-à-dire pour tout entier k, puisqu'ici m et n sont bien des variables réelles quelconques. Voire ! Cette démonstration ne peut suffire, car elle tombe bien entendu sous le coup du reproche de trop grande **induction** qu'Euler faisait au début de son article à la preuve antérieurement due à Aepinus.

Aussi, en un deuxième temps (§6), Euler change de fusil d'épaule et introduit une démonstration dont il souligne la profondeur

" *Ce raisonnement ne doit pas être considéré comme anodin puisque toute la force de la démonstration repose sur lui*".

L'argument repose sur la permanence d'une forme fonctionnelle, une permanence destinée à valider la méthode fonctionnelle. Au §7, en effet, Euler établit (16), pour les seules valeurs n et m entières, et pour tous les entiers k, ce qui est facile puisque pour ces valeurs particulières de la variable on a

$$[n] = (1 + x)^n.$$

Donc

$$[n]\,[m] = (1 + x)^{n+m},$$

c'est-à-dire

$$[n]\,[m] = \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k (n + m) x^k.$$

Soit la déduction de la relation (16), grâce à la définition de A_k dans (15) et en vertu de l'identification terme à terme de deux séries entières, selon la règle usuelle pour les polynômes. La relation (16) obtenue, on déduit grâce à l'unicité d'écriture d'une fonction en série entière, prolongement naturel du cas polynomial, et pour tous n et m entiers, l'égalité des séries (15) et [n + m], ce qui donne la relation fonctionnelle :

(20) $[n]\,[m] = [n + m].$

Pour passer à la validité de la relation fonctionnelle (20), cette fois avec des variables n et m réelles quelconques, Euler revient sur son explication précédente des coefficients A_k (n,m), qui les " *définissait* " comme fonctions

de deux variables, afin cette fois de mieux les " *déterminer*". Il fournit l'argument suivant : puisque la forme finale de ce calcul de *détermination* est indépendante de la nature des variables n et m d'une part, et puisque d'autre part on a la relation (16) pour tous les nombres n et m entiers, on doit nécessairement disposer de la relation (16) en toute généralité, pour des valeurs quelconques de n et m, c'est-à-dire valider (20) partout.

Pourtant, à bien y réfléchir, le calcul explicitement indiqué pour prouver que A_k (n,m) est fonction de n et m, assurerait facilement par récurrence sur k qu'il s'agit d'une fonction polynomiale à deux variables n et m. Tout comme f_k (n + m) est- cette fois par construction- une fonction polynomiale de n et m. Par suite, l'identité prouvée de ces deux polynômes pour toutes les valeurs entières de n et m, établit à coup sûr leur identité pour toutes les variables réelles n et m, et même d'ailleurs pour les valeurs complexes. Selon ce que nous avons déjà dit à propos d'une démonstration particulière d'Aepinus, tout repose sur la considération du degré d'un polynôme (n ou m pouvant être fixés) et donc sur la détermination d'un nombre fini de racines, laquelle s'oppose à cette infinité a priori de racines, à savoir tous les entiers.

Euler serait-il tellement obnubilé par le cas polynomial qu'il en oublierait de mentionner cette circonstance, pourtant indispensable au bien-fondé de sa preuve ? Ou bien estimerait-il, inconsciemment, que les fonctions se comportent, pour la permanence de certaines formes, comme des polynômes et par conséquent appliquerait-il, consciemment, l'argument polynomial ? Comme souvent en mathématiques, quand la démarche pèche par absence, et non par vice fondamental, on ne peut trancher à coup sûr. Mais on aura pris conscience sur cet exemple du jeu assez délicat entre la **généralité nécessaire** du concept fonctionnel afin de pouvoir "définir" A_k (n,m) et la **spécification particulière** de cette même fonction, ou "détermination", qui permet de conclure à la validité générale de l'équation fonctionnelle (22). Euler ne maîtrise pas complètement ce jeu là, et, apparemment, utilise deux registres : la généralité d'une part, et la permanence particulière d'autre part. Tout mathématicien sent bien qu'il se trouve en présence d'une situation exploitable, mais à clarifier : Cauchy s'y emploiera.

Allons plus loin pour nous étonner, si l'on suit notre façon de voir, qu'Euler n'indique pas la validité de la relation (22) pour des valeurs éventuellement complexes des variables. Ce que nous croyons être son présupposé polynomial devrait l'y conduire aussitôt, par le principe de permanence des formes ou par utilisation de l'argument sur le degré, argument valable aussi bien dans le champ complexe que dans le champ réel.

Toutefois, nous sommes vite arrêtés, car que gagnerait-il à passer aux nombres complexes ? L'exploitation pratique de (22) en vue de la formule du binôme, et sous cette généralité des variables, nécessiterait une étape supplémentaire et non des moindres. Il s'agirait en fait de résoudre l'équation fonctionnelle (22) en fournissant les seules solutions exponentielles. Or rien n'indique qu'Euler ait songé à agir de la sorte, puisqu'il termine son article en exploitant (22) de la façon la plus

rudimentaire. Cette manière suffit à lui procurer la formule du binôme dans le cas d'un exposant rationnel, positif ou négatif, mais, sans aménagement sérieux, elle n'est susceptible d'aucune extension à des exposants quelconques, tant réels que complexes.

Examinons maintenant la démonstration de Cauchy de 1821, en ne donnant que quelques extraits, faute de place. Le commentaire est peu utile, tant l'écriture de Cauchy est claire. Il faut remarquer l'intervention explicite de considérations numériques : nous sommes dans le cadre d'une théorie de la convergence .

Pour la bonne intelligence des extraits cités, il faut signaler que Cauchy indique par série (1) celle dont le terme général est $a_n x^n$:

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2 \dots, a_4 x^4, \dots \quad .$$

Il a fourni (au théorème I) le rayon de convergence à partir de la racine n-ème du module du coefficient général a_n (ou du rapport de a_n à a_{n+1}) et (au corollaire III théorème II) vérifié que 1 est le rayon de convergence de la série du binôme.

Nous avons donné aussi le calcul explicite de e selon Cauchy car il suit la formule du binôme, et fourni sa manière de donner le développement en série entière de e^x , tant nous voulons montrer les similitudes et les différences avec le traitement analogue d'Euler dans le cadre de l'analyse algébrique.

On repérera tout de suite une difficulté dans le texte de Cauchy avec l'appel fait, lors de la résolution du problème I, au théorème I (§I) du chapitre VI. Ce théorème assure qu'une série convergente composée de fonctions continues converge vers une fonction continue. Il y a là une erreur célèbre d'uniformité de Cauchy, erreur qui a exercé beaucoup l'attention des historiens et des épistémologues ces vingt dernières années.

Nous n'en parlerons pas ici.

Théorème III. — *Supposons que les deux séries*

$$(10)\qquad \begin{cases} a_0, & a_1 x, & a_2 x^2, & \ldots, & a_n x^n, & \ldots, \\ b_0, & b_1 x, & b_2 x^2, & \ldots, & b_n x^n, & \ldots, \end{cases}$$

étant à la fois convergentes, lorsqu'on attribue à la variable x une certaine valeur, aient alors pour sommes respectives s et s',

$$(11)\qquad a_0 + b_0,\quad (a_1+b_1)x,\quad (a_2+b_2)x^2,\quad \ldots,\quad (a_n+b_n)x^n,\quad \ldots$$

sera, dans le même cas, une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s + s'$.

[...]

Théorème IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si de plus chacune des séries (10) reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,*

$$(12)\qquad \begin{cases} a_0 b_0, \quad (a_0 b_1 + a_1 b_0)x, \quad (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2, \quad \ldots, \\ \ldots, \quad (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)x^n, \quad \ldots \end{cases}$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

[...]

Corollaire I. — Le théorème précédent se trouve compris dans la formule

$$(13)\qquad \begin{cases} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\ \quad = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots, \end{cases}$$

qui subsiste dans le cas où chacune des séries (10) reste convergente lors même qu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques, et qui sert à développer dans cette hypothèse le produit des sommes des deux séries en une nouvelle série de même forme.

Corollaire IV. — Si l'on prend pour termes généraux des séries (10)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

et

$$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,$$

μ, μ' désignant deux quantités quelconques, et la variable x étant renfermée entre les limites $x = -1$, $x = +1$, chacune des séries (10) restera convergente, même lorsqu'on réduira ses différents termes à leurs valeurs numériques, et le terme général de la série (12) deviendra

$$\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\mu'}{1} + \ldots + \frac{\mu}{1}\frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n$$
$$= \frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)(\mu+\mu'-2)\ldots(\mu+\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n.$$

Cela posé, si l'on appelle $\varphi(\mu)$ la somme de la première des séries (10) dans l'hypothèse que l'on vient de faire, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(15)\qquad \varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

les sommes des séries (10) et (12) seront respectivement désignées, dans la même hypothèse, par $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu')$ et $\varphi(\mu+\mu')$; en sorte que l'équation (13) deviendra

$$(16)\qquad \varphi(\mu)\varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu').$$

[...]

Concevons maintenant que dans la série (1) on fasse varier la valeur de x par degrés insensibles. Tant que la série restera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de x demeurera comprise entre les limites

$$-\frac{1}{A},\quad +\frac{1}{A},$$

la somme de la série sera (en vertu du théorème I. § I) une fonction continue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction continue. L'équation

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{A}$, $+\frac{1}{A}$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

$$(19)\qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad \left(x = -\frac{1}{A},\ x = +\frac{1}{A}\right).$$

Lorsque la série est supposée connue, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varphi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle *sommer* la série. Mais le plus souvent la fonction $\varphi(x)$ est donnée, et l'on se propose de revenir de cette fonction à la série, ou, en d'autres termes, de *développer* la fonction en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. Il est facile d'établir à ce sujet la proposition que je vais énoncer :

Théorème VI. — *Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.*

Démonstration. — En effet, supposons qu'on ait développé par deux méthodes différentes la fonction $\varphi(x)$, et soient

$$\begin{array}{llllll} a_0, & a_1x, & a_2x^2, & \ldots, & a_nx^n, & \ldots, \\ b_0, & b_1x, & b_2x^2, & \ldots, & b_nx^n, & \ldots \end{array}$$

les deux développements, c'est-à-dire deux séries dont chacune, étant convergente pour des valeurs de x différentes de zéro, ait pour somme, tant qu'elle demeure convergente, la fonction $\varphi(x)$. Ces deux séries étant constamment convergentes pour de très petites valeurs numériques de x, on aura, pour de semblables valeurs,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots.$$

Comme, en faisant évanouir x, on tire de l'équation précédente

$$a_0=b_0,$$

il en résulte qu'on peut la réduire généralement à

$$a_1x+a_2x^2+\ldots=b_1x+b_2x^2+\ldots$$

ou, ce qui revient au même, à

$$x(a_1+a_2x+\ldots)=x(b_1+b_2x+\ldots).$$

Si l'on multiplie par $\frac{1}{x}$ les deux membres de cette dernière équation, on obtiendra la suivante

$$a_1+a_2x+\ldots=b_1+b_2x+\ldots,$$

qui devra encore subsister pour de très petites valeurs numériques de la variable x, et de laquelle on conclura, en posant $x=0$,

$$a_1=b_1.$$

En continuant de même, on ferait voir que les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont respectivement égales aux constantes $b_0, b_1, b_2, \ldots$; d'où il suit que les deux développements de la fonction $\varphi(x)$ sont identiques.

Le Calcul différentiel fournit des méthodes très expéditives pour développer les fonctions en séries. Nous exposerons plus tard ces

méthodes, et nous nous bornerons pour l'instant à faire connaître, avec le développement de la fonction $(1+x)^\mu$, dans laquelle μ désigne une quantité quelconque, deux autres développements que l'on ramène facilement au premier, savoir, ceux des fonctions

$$A^x \quad \text{et} \quad L(1+x),$$

A désignant une constante positive, et L la caractéristique des logarithmes dans un système choisi à volonté. En conséquence, nous allons résoudre l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent :

Problème I. — *Développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$(1+x)^\mu$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Si d'abord on suppose $\mu=m$, m désignant un nombre entier quelconque, on aura, par la formule de Newton,

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$$

La série dont la somme constitue le second membre de cette formule est toujours composée d'un nombre fini de termes; mais, si l'on y remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, la nouvelle série que l'on obtiendra, savoir

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{\mu}{1}x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \quad \ldots,$$

se trouvera composée en général d'un nombre indéfini de termes, et sera convergente seulement pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Soit, dans cette hypothèse, $\varphi(\mu)$ la somme de la nouvelle série, en sorte qu'on ait

$$(15) \qquad \varphi(\mu)=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots \qquad (x=-1,\ x=+1).$$

En vertu du théorème I (§ I), $\varphi(\mu)$ sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura (*voir* le théorème III, corollaire IV)

$$(16)\qquad \varphi(\mu)\,\varphi(\mu') = \varphi(\mu + \mu').$$

Cette dernière équation étant entièrement semblable à l'équation (2) du Chapitre V (§ I) se résoudra de la même manière, et l'on en conclura

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^{\mu} = (1 + x)^{\mu}.$$

La valeur de $\varphi(\mu)$ étant ainsi déterminée, si on la substitue dans la formule (15), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = -1$, $x = +1$,

$$(20)\qquad (1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \dots \qquad (x = -1,\ x = +1).$$

Lorsque la valeur numérique de x devient supérieure à l'unité, la série (5), n'étant plus convergente, cesse d'avoir une somme, en sorte que l'équation (20) ne subsiste plus. Dans la même hypothèse, il devient impossible, ainsi qu'on le prouvera plus tard à l'aide du Calcul infinitésimal, de développer la fonction $(1 + x)^{\mu}$ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire I. — Si dans l'équation (20) on remplace μ par $\frac{1}{\alpha}$ et x par αx, α désignant une quantité infiniment petite, on aura, pour toutes les valeurs de αx renfermées entre les limites -1, $+1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \dots$$
$$\left(x = -\frac{1}{\alpha},\ x = +\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation lim placée devant une expression qui renferme la variable α, la

limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$(21)\qquad \lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \qquad (x = -\infty,\ x = +\infty).$$

Il reste à chercher la limite de $(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$. Or, en premier lieu, on tirera de la formule précédente

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots,$$

ou, en d'autres termes,

$$(22)\qquad \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

e désignant la base des logarithmes népériens [*voir* le § I, équat. (6)]. On en conclura immédiatement

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e,$$

et, par suite,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{x} = e^{x}.$$

Si maintenant on remet la valeur de $\lim(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation (21), on obtiendra la suivante :

$$(23)\qquad e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \qquad (x = -\infty,\ x = +\infty).$$

On pourrait arriver directement à l'équation (23) en observant que la série

$$(6)\qquad 1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \dots$$

est convergente pour toutes les valeurs possibles de la variable x, et cherchant la fonction de x qui représente la somme de cette même série. En effet, soit $\varphi(x)$ la somme de la série (6) qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n},$$

$\varphi(y)$ sera la somme de la série qui a pour terme général

$$\frac{y^n}{1.2.3\dots n};$$

et (en vertu du théorème VI, § III) le produit de ces deux sommes sera la somme d'une nouvelle série qui aura pour terme général

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\frac{y}{1} + \dots$$
$$+ \frac{x}{1}\frac{y^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3\dots n} = \frac{(x+y)^n}{1.2.3\dots n}.$$

Ce produit sera donc égal à $\varphi(x+y)$, et par suite, si l'on fait

$$\varphi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots,$$

la fonction $\varphi(x)$ vérifiera l'équation

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(x+y).$$

En résolvant cette équation, on en tirera

$$\varphi(x)=[\varphi(1)]^x=\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\right)^x,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x)=e^x.$$

Nous arrêtons là ces extraits de l'**Analyse algébrique** de Cauchy. On trouvera en appendice la table des matières du cours d'analyse en entier, et il n'est pas inutile de s'y reporter. Nous nous contenterons de noter que la démonstration de la formule du binôme utilise l'essentiel des résultats de ce cours, ce qui fait fortement penser que l'architecture elle-même du cours fut conçue en vue de la démonstration de cette formule qui se termine au chapitre IX. Il y a douze chapitres en tout et les trois derniers étaient indispensables dans un cours tel que celui de l'Ecole polytechnique, mais ne concernent pas la formule du binôme: Cauchy était souvent accusé par le Conseil de Perfectionnement de l'Ecole de ne pas respecter les programmes (cf introduction de l'**Histoire de l'Ecole Polytechnique**, par A. Fourcy, Belin 1987).

Le binôme réel est résolu au chapitre VI. Pour avoir $\phi(\mu) = 1 + \mu x + \ldots$ comme une fonction, Cauchy utilise sa définition du chapitre I et $\phi(\mu)$ est une série entière en x. Tout le chapitre VI est mis à contribution afin de calculer le rayon de convergence de cette série entière, ainsi que le terme général du produit $\phi(\mu)\,\phi(\mu')$. Le chapitre III entier permet de calculer effectivement ce coefficient général comme étant celui de $\phi(\mu + \mu')$. Le chapitre II et le chapitre VI fournissent la continuité de $\phi(\mu)$ et le chapitre IV permet de résoudre finalement $\phi(\mu)\,\phi(\mu') = \phi(\mu + \mu')$.

Le binôme complexe est résolu de la même façon grâce aux chapitres VII, VIII et IX utilisés dans leur intégralité.

7. Rigueur et méthode analytique

Le cadre de l'analyse algébrique étant fixé, la méthode suivie pour résoudre les problèmes en jeu n'est pas a priori spécifiée. Une des méthodes favorites, sinon la seule recommandée au cours du XVIIIème siècle, est la méthode analytique étendue au cadre fonctionnel. Nous l'appelerons ici la méthode fonctionnelle, parce que souvent la voie analytique reste restreinte au cadre polynomial issu de Viète et de Descartes.

Cette méthode fonctionnelle consiste à résumer analytiquement un problème donné en introduisant une ou des fonctions inconnues (1ère phase), puis à relier fonctions et données du problème par une ou des équations les concernant (2 ème phase), à résoudre ces équations, d'ailleurs de manière indépendante du problème posé (3ème phase) pour aboutir en définitive à l'application au problème originel (4ème phase) . Les équations liant la ou les fonctions introduites lors de la première phase sont des équations fonctionnelles, et ce vocable inclut les équations différentielles, les équations aux différences finies ou les équations aux dérivées partielles, par exemple.

Il importe de prendre conscience que ces quatre étapes sont conçues comme un tout, dirigé vers un but(la résolution d'un problème), mais qu'une fois ce tout constitué, chaque étape " vit " indépendamment des autres. Il est sûr que le choix des fonctions inconnues de la 1ère étape n'est effectué par le mathémticien conscient que lorsqu'il dispose de la possibilité de trouver une solution des équations lors de la troisième étape. De même, le retour au problème posé qui se fait à la 4ème étape consiste souvent en un inventaire des conditions initiales et aux limites , et force donc la pensée, par feed-back, lors de la mise en équation à la 2eme étape. Mais tout ceci figure dans l'organisation architecturale préalable du mathématicien qui conduit sa démonstration, et se fige ensuite.

Soyons plus concret en revenant à notre exemple de la formule du binôme de Newton. Aepinus prend comme fonctions inconnues les $f_k(\alpha)$, coefficients du développemen,t en série entière de $(1 + x)^\alpha$. Euler prend comme fonction inconnue la série $[\alpha] = 1 + \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha - 1)x^2 + ...$ Telle est dans chaque cas la première étape de la méthode fonctionnelle. On ne peut nier que dans chaque cas l'auteur fait un choix crucial. La deuxième étape consiste à exhiber les équations servant à règler les fonctions inconnues. Chez Aepinus, plusieurs équations fonctionnelles interviennent, dont les dépendances logiques a priori ne sont pas inventoriées. Euler se contente d'une seule équation , caractéristique pour lui de l'exponentielle

$$[\alpha]\,[\beta] = [\,\alpha + \beta\,].$$

Dans chaque cas des conditions aux limites viennent préciser les choses, mais on n'en aura besoin que plus loin. Ni Aepinus. ni Euler ne disent quelque chose de la nature a priori des fonctions inconnues dont ils ont donné des équations qu'elles satisfont. Seul Aepinus veut montrer à la première étape qu'il s'agit effectivement de fonctions, et il utilise pour cela une definition "causale" des fonctions. definition en un sens tres moderne comme nous le montrerons plus loin. Une correspondance est " fonctionnelle" lorsque la variation de la variable entraîne une variation de l'autre variable. Hélas, sa preuve de la "variabilité" des coefficients $A_k(m)$ en m est illusoire , car il

utilise un raisonnement par l'absurde fautif: il suppose que tous les coefficients soient constants , disons pour m et pour m+1, et aboutit alors facilement à l'écriture contradictoire

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1}.$$

Il est manifeste qu'Aepinus avance avec précaution dans le formalisme des fonctions, notamment dans l'ecriture de la dependance par rapport à la variable: au début du texte, s'il introduit avec bonheur la dépendance des coefficients en la variable m, selon B^m ou C^m etc. Aepinus éprouve le besoin, une fois trouvée la forme de C^m , d'écrire explicitement ce qu'est C^{m-1}, C^{m-2}, et d'indiquer que l'on procédera de même pour toutes les autres lettres. De tels égards pour le lecteur dans une publication savante (il s'agit , ne l'oublions pas, des actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg), manifestent surtout que nous sommes en terrain mal balisé par la tradition. Euler est nettement plus direct. Il donne un nom a la série du binôme, ne retient que la variable n (et oublie comme paramètre muet la variable x). Ce qui lui fait trouver la notation symbolique astucieuse [n]. Plus loin, au §6, c'est le calcul qui marque la dépendance de certains coefficients A, B en deux variables n et m: " *De même que nous avons pu déterminer les deux premiers coefficients A et B à partir des lettres m et n, ...*". Et si l'on ne peut pas effectuer matériellement le calcul dans le cas général, la possibilité théorique de ce calcul détermine les correspondances fonctionnelles .

La troisième étape est traitée de façon très différente sur le plan de la rigueur chez nos deux auteurs: il faut quand même rappeler qu'Euler vient plus de dix ans après la publication d'Aepinus, dont la démonstration fut vraisemblablement discutée bien des fois à Berlin puisque, dès 1752, Aepinus annonçait une nouvelle démonstration de la formule du binôme. Nous avons vu qu'Aepinus résout de façon fautive aussi bien pour des valeurs réelles que complexes, avec un appareil suspect d'infiniment petits, une équation fonctionnelle $B^{r+s} = B^r + B^s$, plus simple pourtant que celle dont s'occupera Euler.

Notre mesure de la rigueur de telles démarches analytiques porte, nous l'avons explicitement dit, sur la cohérence des concepts élaborés à l'occasion des différentes étapes qui, toutes, doivent s'inscrire dans le cadre general de l'analyse algebrique.

Et le manque de cohérence que nous constatons chez Aepinus se situe précisément par opposition entre la première étape (choix des fonctions inconnues) et la troisième (résolution générale des équations). Il y a contradiction entre la généralité nécessaire sur les fonctions inconnues pour la mise en équation de la première étape et la restriction tout autant nécessaire sur ces fonctions pour l'obtention effective des solutions lors de la troisième étape. Car la méthode, dans ce cas précis, exige la prise en compte de toutes les solutions, sans aucune restriction, de l'équation fonctionnelle introduite, quitte à éliminer à la dernière étape celles qui ne relèvent pas du problème posé.

Or nous avons noté qu'Aepinus manifesta au mieux un "presupposé polynomial" sur les fonctions solutions des équations fonctionnelles en jeu. Son erreur dépasse donc une simple "lacune": en tout cas, elle requiert pour être comblée une analyse d'une tout autre amplitude, assurément pas à sa portée. Euler, en 1774, ne commet pas

cette faute de rigueur, à ce niveau de la 3ème étape, puisqu'il résout son equation fonctionnelle sur le corps des rationnels seulement. Il y a la une nuance certaine. On a bien l'impression qu'Euler souhaitait aller jusqu'aux puissances réelles quelconques. En effet, le titre de l'article est significatif par négation: " *pour les cas où les exposants ne sont pas des entiers* ". Mais Euler se restreint volontairement, faute de moyens ad hoc de résolution des équations fonctionnelles dans ce cadre général. Il conclut (§10): " En sorte que maintenant, il a été démontré que notre théorème est vrai si une fraction quelconque i/a est mise à la place de l'exposant ". Il y a arrêt aux puissances fractionnaires, éventuellement negatives. <u>Euler sacrifie donc la généralité de son résultat à l'esprit de rigueur</u>. Cette rigueur est donc au rendez-vous, avec toute la connotation morale qu'elle contient usuellement dans l'usage non mathématique du mot. Certes ultérieurement, en 1776, Euler oubliera toutes ces precautions en faisant jouer à plein le "présupposé polynomial", mais sa démonstration est d'un autre type, et qui n'a pas péché jette la première pierre! De façon très surprenante, dans ce texte ultérieur, Euler choisit un titre restrictif" **Une démonstration nouvelle: le développement newtonien des puissances du binôme est valable même pour les exposants fractionnaires** alors qu'il conclut ce même texte par ces mots: "*le raisonnement universel que nous avons utilisé ici garde toute sa force, même si on va jusqu'à faire de l'exposant n un nombre imaginaire*". L'inconscient des mathématiciens se ferait- il souci de rigueur lui-aussi?

C'est seulement dans la mise en équation (2ème étape) qu'Euler commet la même erreur de nature qu'Aepinus, en supposant un comportement polynomial a priori comme nous l'avons indiqué. Toutefois, il faut reconnaître que le comportement polynomial est facile à déduire dans ce cas-là. Ces manques, tant chez Aepinus que chez Euler, ne sont pas justifiables dans le cadre de l'analyse algébrique, mais ils ne dérogent pas de la même façon, chez ces deux auteur, à la rigueur. Aepinus ne se résout pas à un effort de restriction: il fait trop de voltige, sans filet.

Cauchy, en 1821, efface de tels manques grâce à son concept de fonction continue. Il se fourvoit cependant dans la preuve que les fonctions inconnues sont continues, faute de savoir mettre en évidence une uniformité. Mais au moins tente-t-il de donner une telle preuve, ce qui est le signe net d'une volonté de rigueur en éveil. Ce faisant, il est symptomatique que Cauchy fasse disparaître ainsi l'intérêt du vieux cadre de l'analyse algébrique et que, dans un net mouvement architectural, il introduise ainsi l'analyse tout court. Remarquons en passant que Cauchy ne propose rien pour le cas d'un exposant complexe, et qu'il ne prétend pas du tout avoir résolu l'équation fonctionnelle correspondante sous une telle généralité. Abel parviendra à le faire en 1826, en poursuivant systématiquement la demarche fonctionnelle de Cauchy. Ainsi, Cauchy lui-aussi sacrifie la généralité du résultat à l'esprit de rigueur.

La méthode fonctionnelle que nous venons d'illustrer dans le cas du binôme de Newton fut en fait largement utilisée au XVIIIème siècle et dans des circonstances assez variables. Il importe de procéder à un classement pour ne pas donner l'impression que la démarche de rigueur ne s'attaque qu'à des problèmes déjà résolus et qu'il importerait seulement de bien présenter pour le seul plaisir de l'esthète. On serait au fond bien près

d'une tautologie en affirmant que pour les problèmes sur lesquels on dispose d'une solution simple, une autre solution doit se poser en rigueur. Par contre, si la démarche de mise au point en rigueur d'un problème déjà résolu est celle-là même suivie pour résoudre un problème a priori nouveau et inconnu, il devient difficile alors de nier la volonté explicite de rigueur.

La démarche analytique utilisant les fonctions figure au moins dans trois autres directions que la seule vérification d'un résultat déjà connu.

(1) On la trouve dès l'origine pour le traitement des équations aux dérivées partielles, notamment dans le problème des cordes vibrantes que soulevait d'Alembert à partir de 1747.

(2) On la trouve ensuite dans la démarche de type axiomatique, qui offre au XVIIIème siècle des occurrences plus nombreuses qu'on ne le dit, bien que ne comportant pas l'enchaînement de définitions et de théorèmes auquel nous sommes habitués par la lecture d'Euclide ... ou de Bourbaki. On peut mentionner à ce propos l'addition "vectorielle" des forces que tenta Daniel Bernoulli à partir de 1726 et que reprit d'Alembert en suivant une voie fonctionnelle. Cette même démarche se trouve dans l'axiomatisation de la géométrie telle qu'entreprise par Legendre à partir de 1794, notamment dans le but de se débarrasser de l'axiome euclidien des parallèles.

(3) Elle est au coeur de la présentation de certains manuels mathématiques, manuels qui ont pris une importance plus grande quant à l'organisation des mathématiques à partir de 1750. Certes, il ne faut pas

confondre cette présentation avec une démarche axiomatique. Ainsi , dans les traités d'Euler , on ne dispose pas d' une déduction à partir de données réunies de façon axiomatique , mais il figure une appropriation progressive de propriétés et de méthodes par un mouvement d'induction généralisatrice. Toutefois, des définitions assez précises viennent ponctuer le balisage du champ couvert. Bien des définitions ainsi étendues ne modifient pas le vocabulaire précédemment utilisé, ce qui est contraire à la démarche axiomatique , mais a le gros avantage de ne pas désarçonner le mathématicien pratiquant.

Il est donc difficile de maintenir l'idée d'une absence de rigueur uniforme dans les mathématiques du XVIIIème siècle. Dans bien des cas , on note la volonté de faire "rigoureusement", et mieux, on constate la recherche d'affinements sur la méthode analytique privilégiée, de façon à permettre de réussir cette rigueur. Parce que le succès ne vint pas nécessairement à temps au rendez-vous, il ne faudrait pas oublier que ces efforts de rigueur débouchèrent au siècle suivant , et la réussite s'inscrivit comme la suite naturelle de la méthode analytique.

Le XVIIIème siècle cherche très souvent à rivaliser avec l'exposé considéré comme celui de la rigueur par excellence, à savoir la rigueur géométrique qui semble représentée de façon paradigmatique dans les **Eléments** d'Euclide. L'objet , puisque l'on ne parvenait pas à réaliser une presentation satisfaisante de l'analytique, en algèbre aussi bien qu'en analyse , était de montrer que l'analytique , très riche par les développements déjà obtenus et étendus sans arrêt, parvenait aux mêmes résultats que la géométrie, ni plus ni moins, dans les domaines communs .

Aussi ces preuves accumulées, par le jeu d' une sorte de méthode Coué, devraient conduire à considerer que l'analytique procède de la même rigueur que la géométrie.

8. Rigueur, économie et élégance

D'ailleurs la geometrie fournit à la rigueur analytique qui se cherche certaines exigences de style. La volonté de rigueur n'entraîne pas en effet une démarche univoque; plusieurs pistes sont encore possibles comme les choix d'Euler et d'Aepinus nous permettent de l'illustrer. Ainsi Aepinus entend établir ab ovo la formule du binôme de Newton , sans passer par la connaissance préalable des coefficients du binôme telle que déduite du cas d'un exposant entier. Son choix se porte sur une méthode propre à permettre a priori cette décision : c'est la méthode des coefficients indéterminés dans la série du binôme développé selon les puissances . La méthode, quoique analytique dans son principe, se rapproche de ce que l'on appelait encore au XVIIIème siècle la méthode synthétique, celle qui paraissait propre à la géométrie des Anciens, et qui s'impose de tout établir sans rien presupposer et en partant seulement de ce qui est démontré préalablement en rigueur . Le prix à payer est assez élevé puisqu'Aepinus se croyait contraint de faire intervenir une multitude d'équations fonctionnelles, chacune à résoudre pour des variables réelles ou complexes.

Au contraire, Euler entendait seulement montrer que la formule connue est la bonne . En parfait analyste, il partait de la série en question , et se contentait de montrer qu'elle fournit bien le binôme. La seule vérification etait donc l'établissement de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle pour cette série. Euler était cependant arrêté par la resolution generale de cette equation fonctionnelle pour tous les nombres réels, dont pourtant il ne doutait pas un instant qu'elle ne fut caractéristique.

Dès lors, la démarche analytique d'Euler pouvait se donner le luxe de l'élégance, c'est-à-dire qu'elle réalisait une economie des moyens mis en oeuvre. Et comme Euler venait après Aepinus, il pouvait reprocher à ce dernier la multiplicité des équations fonctionnelles utilisées dans la démonstration, ou plutôt se demander quel était le critère qui permettait à Aepinus de retenir telle ou telle propriété fonctionnelle de la puissance $(1+x)^m$.

" *Il* [Aepinus] *a obtenu par une méthode fort ingénieuse les valeurs d'un certain nombre de coefficients A, B, C etc....De leur concordance avec la série de Newton, sans doute aucun, il a pu conclure justement que tous les coefficients seraient conformes à cette règle, mais il faut bien voir que cette belle démonstraton s'appuie beaucoup sur l'induction. D'autre part, il convient de noter que le coefficient B n'est pas déterminé par cette méthode, mais le devient grâce à d'autres conditions qui sont fort absconses et obscures*".

La volonté d'économie sur les équations fonctionnelles fut reprise par de nombreux auteurs, notamment par S.F.Lacroix, qui tenta, en 1797, le même essai qu'Aepinus: prouver la formule du binôme ab ovo. Il entendait utiliser une seule équation fonctionnelle, suffisamment générale pour tenir la caractérisation de l'exponentielle.

" *J'aurais pu parler aussi d'une propriété plus simple pour déterminer le*

développement de a^x, *employer, par exemple, l'equation* $a^{2x} = a^x a^x$; *mais l'équation* $a^x a^u = a^{x+u}$, *qui comprend la précédente, est plus générale, et renferme toutes les propriétés dont la fonction* a^x *est susceptible, parce qu'elle en exprime la définition la plus étendue, et la seule qui présente un sens lorsque la variable x est imaginaire*".

La difficulté que rencontra Lacroix, après Aepinus, est résolue en faisant d'abord longuement intervenir le développement en série de l'exponentielle et celui du logarithme, avant d'en arriver à une preuve de la formule du binôme valable pour tous les nombres réels. Mais à se restreindre aux nombres rationnels, comme Euler le fit, Lacroix réalisa la preuve à partir d'une seule équation fonctionnelle.

L'élégance est aussi le fruit de la longue patience, de la fréquente remise de l'ouvrage sur le métier. Les mathématiques ressemblent par certains côtés à une course de relais.

Un point doit retenir notre curiosité: aucun des auteurs mentionnés n'éprouve le besoin d'expliquer ce qu'est une fonction puissance telle que $(1+x)^m$ pour une valeur réelle voire même complexe de l'exposant m. Dans cette perspective de rigueur qui est celle aussi bien d' Euler que d'Aepinus, la démarche ne correspond pas à ce que nous mettons aujourd'hui sous le nom de cheminement axiomatique. Il n'est pas besoin d'exprimer une définition sur certains objets mathématiques dont il suffit de donner une description. Cauchy lui-même ne cherche pas à le faire dans son texte de 1821 (encore qu'une note apporte en annexe une précision constructive par densité à partir des puissances d'exposant rationnel, et que le cas de la puissance réelle d'un nombre complexe fasse l'objet d'un developpement très précis et d'ailleurs passablement long et compliqué).

Ne pourrait-on pas avancer que la démarche de la rigueur au XVIIIème siècle, que nous espérons avoir suffisamment mise en évidence, est avant tout une recherche de la rigueur dans les méthodes , plus que dans le déroulement d'une théorie. Enthousiasme du formalisme, disait Kline cité au début de cet exposé pour décrire le propos analytique des mathématiciens des Lumières! Nous voyons pourtant que l'analytique est questionné face à ses performances: en le mettant dans tous ses états. N'espérait-on pas en avoir une maîtrise suffisante pour qu'il livre finalement ses secrets, c'est-à-dire que l'on puisse l'inscrire sous la forme de l'exposé euclidien. Tel etait bien le vrai problème: comment fonder la méthode analytique?

Fallait-il adopter la forte remarque de Leibniz sur l'obligation de poursuivre les "pensées aveugles"? Etait-il possible , au contraire , de changer radicalement de doctrine, et de songer à une justification possible de l'analyse par l'induction à la Condillac , allant "naturellement" de généralisation en généralisation au nom d' une sorte d'épistémologie génétique. Le débat, non résolu, pourrait expliquer certaines variations dans les explications d'Euler, tenté par Condillac et revenant à Leibniz. Mais si les" pensées aveugles" fournissaient une ligne de conduite en accord avec la démarche analytique, le point de vue inductiviste restait flou pour un mathématicien, car il n'indiquait pas la raison du succès ou de l'échec d'une généralisation. Autant il était acceptable pour la présentation des résultats

une fois trouvés , voire pour les incorporer au corpus mathématique, le condillacisme n'offrait aucune methode d'invention : que se passait-il par exemple lorsque l'on changeait , dans une fonction , l'argument réel en un argument complexe.

Le XIXème siècle permet effectivement de mesurer les difficultés qui se présentaient et que la généralisaton inductive à la Condillac masquait a priori. Il fallait penser les quantités algébriques abstraites comme susceptibles de comportements différents des quantités réelles ; il fallait chercher à déduire le continu du discret contrairement à la réussite analytique qui permettait d'obtenir des résultats brillants en théorie des nombres par le biais du continu sous la forme des fonctions analytiques; il fallait imaginer que le passage indécis de la définition analytique , et quasi polynomiale , des fonctions à une définition causale , entrainerait l'intervention de pathologies comme les fonctions continues sans dérivée en aucune point ; il fallait se rendre compte que les propriétés du développement en série entière d'une fonction ne sont pas de même nature que celles du développement en série de polynômes (comme ceux de Legendre) ou du développement en serie de cosinus et sinus multiples entiers d'un même angle, etc .

La meilleure démarche, celle-là même soucieuse de rigueur et d'architecture des mathématiques, ne passait-elle donc pas par l'exploration systématique des possibilités analytiques, en particulier pour établir les formules clefs de l'analyse , plutôt que de s'escrimer sur ses fondements alors que les choses ne paraissaient pas mûres. La formule du binôme de Newton faisait partie de ces formules importantes.

9. La rigueur comme moteur de la construction architecturale mathématique

La voie de la méthode fonctionnelle était déjà en partie à l'oeuvre dans l'Art Analytique de Viète qui a lancé la méthode analytique. Nous pensons que la méthode fonctionnelle est un prolongement conscient de la méthode analytique , et que la gêne de la première moûture s'est amplifiée pour la seconde. Dans la méthode analytique de Viète, les quatre phases ou étapes signalées de la méthode fonctionnelle sont effectivement présentes. Mais les équations qui portent sur des nombres ne sont que des équations polynomiales. De toutes façons, la détermination de toutes les racines de ces polynômes, positives ou non, réelles ou non , est nécessaire. Certes l'origine du problème posé permet quelquefois de trancher en ne considérant que telle catégorie de racines parmi toutes les racines. Ceci dit, la méthode dispose d'un garant, à savoir le théorème de Girard, c'est-à-dire le théorème qualifié de théorème fondamental de l'algébre. Son énoncé dans l'**Invention nouvelle en algèbre**, parue en 1629, commence par "*toutes les équations d'algébre recoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre*". Ainsi ce théorème de dénombrement permet de vérifier qu'aucune racine n'est oubliée, puisqu'il en donne le nombre en relation avec le degré du polynôme considéré. Certes, tous les auteurs utilisant la méthode analytique n'auront pas le scrupule de vérifier la bonne obtention de toutes les racines, même si Decartes, dans un contexte philosophique plus général, dans son **Discours de la méthode** dont la **Géométrie** est l'illustration, énonce qu'il convient de " *faire partout des dénombrements si entiers , et des rev ues si générales, que je fusse assuré de ne rien ometrre*". Le même Descartes, tout le premier dans la **Géométrie** , laisse tomber des racines à propos du problème de Pappus lors d'un lieu à quatre droites.

Le passage à des fonctions non polynomiales, avec l'extension fonctionnelle de la methode analytique, fait disparaitre le garant de l'énoncé de Girard. Il faut trouver autre chose.

On ne trouve pas vraiment cette autre chose au XVIIIème siècle. L'analyse algébrique d'Euler constitue un essai pour délimiter un cadre general, en introduction prealable au calcul differentiel et integral. Cet essai tourne autour de l'extension polynomiale des fonctions, c'est-à-dire autour de l'outil central des séries entières de puissances. Quand bien même cet essai nous paraîtrait naïf en ce qui concerne la manipulation des infiniment petits et des fonctions , le grand avantage de la simplicité des trois principes évoqués plus haut pour la démarche eulérienne est de fournir un cadre architectural limité, mais relativiement précis. C'est aussi un moyen de renvoyer tout problème d'existence, "l'ontologie" si délicate en mathématiques , à la vérification de la cohérence de ce même cadre . Dans sa pratique, le mathématicien actif est ainsi libéré des doutes et des incertitudes sur le bien-fondé de sa démarche. S'il entend fonder en rigueur, il suffit qu'il parvienne à justifier l'analyse algébrique. Formalisme? Bien sûr , si l'on appelle ainsi la démarche qui consiste a exposer le plus simplement et économiquement possible un cadre.

Ce cadre prépare l'avenir sur deux plans au moins. Si le cadre apparait cohérent, il n'yaura qu'à poursuivre dans cette voie. Mais si le cadre ne se maintient pas, si sa coherence perd de sa rigueur appparente, lorsque les temps seront mûrs et qu'on disposera des moyens de la rigueur tant souhaitée, il suffira de recueillir et de démontrer les propriétés vraiment utilisées de l'analyse algébrique, proprietés dont Euler ne doute pas un instant qu'elles ne soient vraies. N'est-ce pas précisement ce qu'entreprit de faire Cauchy. Sa demarche réussie , lue à rebours , paraît justifier Euler et sa conception de la rigueur.

Aepinus , au contraire d'Euler, manque d'une telle vision architecturale en essayant de faire feu de tout bois.

Euler lui-même entreprend de temps à autre de justifier , ou de modifier , certains aspects de son analyse algébrique. On pourrait notamment envisager quelques modifications qui porterent sur les fonctions, car au cours de cet effort un changement important va être réalisé par Euler. De fait , Euler est progressivement passé d'une définition "analytique" ou par calcul des fonctions à une définition "causale", c'est-à-dire faisant jouer la seule relation de dépendance. Sa démarche ne fut pas linéaire , mais nous n'avons pas du tout la place ici de retracer ses différentes perspectives.Contentons-nous de remarquer que dans l'article donné sur la formule du binôme les fonctions sont traitées sur ce double registre. Ainsi , lorsqu'il s'est agi de verifier que les coefficients A_k qui figurent dans le developpement du produit [n+m] sont des fonctions des variables n et m. c'est bien la possibilité effective du calcul qui est retenue comme critère satisfaisant. Mais ce calcul ne conduit pas d'abord à la determination de la nature (polynomiale?) qui régit la dépendance du coefficient A_k par rapport aux deux variables quelconques a priori, n et m.

On peut quand même s'étonner du fait que le mot fonction ne soit pas utilisé par Euler, et qu'à sa place, on trouve le vocabulaire suivant :

... *comment les coefficients. A, B, C, D, E etc. sont* ***déterminés*** *par le couple des lettres m et n* ...

Mais en étudiant plus précisément, on constate qu'Euler hésite dans cet article entre deux vocabulaires. D'une part, un vocabulaire de la **détermination** (par le calcul) d'une variable par une autre, et d'autre part une autre terminologie, conceptuellement plus large, qui est celle de la **définition** d'une variable par une autre :

"Quedmadmodum hic duos primos coefficientes A et B per litteras m et n ***determinare*** *licuit, ita manifestum est, si superior multiplicatio ulterius continuaretur, inde etiam sequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem litteras m et n* ***definiri*** *posse, quamvis calculus mox ita fieret molestus ut maximum laborem requireret."*

"De même que nous avons pu ***déterminer*** *les deux premiers coefficients A et B, à partir des lettres m et n, il est manifeste qu'en continuant la muliplication ci-dessus, on pourrait à partir de là* ***définir*** *aussi les coefficients C, D, E, etc grâce aux mêmes lettres m et n, mais le calcul deviendrait très vite épineux dans la mesure où il nécessiterait un immense travail".*

Dans la phrase suivante, la même hésitation, un pareil balancement stylistique a lieu entre une "**détermination**" et une "**définition**". C'est une autre mesure, indirecte, des préjugés à l'oeuvre dans la méthode fonctionnelle. Nous avons développé ailleurs les difficultés et les raisons qui firent passer d'un concept calculatoire pour les fonctions à un concept marquant la seule relation de dépendance.

10 CONCLUSION

En 1740, lorsque Buffon traduisit (de l'anglais) **la méthode des fluxions et des séries infinies**, il indiquait :

" *La plupart de nos erreurs en Métaphysique viennent de la réalité que nous donnons aux idées de privation ; nous connaissons le fini, nous y voyons des propriétés réelles, nous l'en dépouillons, et en considérant après ce dépouillement , nous ne le reconnaissons plus, et nous croyons avoir créé un être nouveau, tant que nous n'avons fait que détruire quelque partie de celui qui nous était anciennement connu*".

Il espérait bien , en procédant de cette manière, éviter la suspicion sur le calcul différentiel et intégral, mais ainsi, il mettait l'accent sur " *le mérite*" qui " *est donc dans l'application, en un mot dans l'emploi qu'on en fait*". Tous les mathématiciens n'agissaient pas de la sorte au XVIIIème siècle, par un volontarisme basé sur les seuls résultats escomptés, et beaucoup tentèrent de démontrer rigoureusement, non certes tout le calcul, mais des formules ou des théorèmes centraux de l'analyse des fonctions. Nous avons voulu décrire ici les attitudes d'Euler et d'Aepinus à propos du théorème du binôme de Newton, et il nous semble tout à fait possible de décrire ces démarches comme des <u>démarches de rigueur</u>. En outre, ces démarches les obligèrent à inventer des notations originales et surtout leur permirent de prendre la mesure exacte des difficultés.

Le point de vue des fondements du calcul n'est certainement pas traité à cette époque selon les canons de la rigueur euclidienne qui n'ont pas été remis en question-on le reconnaît volontiers- mais Euler, avec l'analyse algébrique, proposa un cadre minimal, vraisemblablement provisoire, mais qui permit de se raccrocher à quelques règles.

La rigueur pouvait alors se développer selon deux directions : celle qui consistait à justifier le cadre de l'analyse algébrique et qui requérait longue patience ou génie, et celle qui s'attaquait à une déduction "rigoureuse" de tous les résultats connus de l'analyse, à partir de ce cadre et de ce cadre seulement. Les démonstrations de la formule du binôme au XVIIIème siècle suivirent cette deuxième voie.

C'est parce qu'il a réussi à pousser à son terme la démarche

débutée par Euler en 1774, lui-même partant d'une critique sérieuse d'Aepinus, que Cauchy , en 1821, tout à la fois <u>prouva</u> la formule du binôme dans le cas d'un exposant réel quelconque pour une variable aussi bien réelle que complexe, et offrit une <u>fondation rigoureuse</u> de l'analyse algébrique, en fait de l'analyse tout entière. L'architecture globalement obtenue résultait bien de la résolution d'un problème, somme toute particulier. <u>C'est une leçon historique à méditer sur le rôle de la rigueur mathématique.</u>

Lagrange s'essaya de la même façon, à partir de la formule de Taylor, à tout à la fois prouver rigoureusement une formule de base et fonder en rigueur l'analyse. On connaît son échec. <u>Il n'y a donc pas de voie assurée pour bénéficier de la rigueur mathématique</u>.

Références et orientation bibliographique

Nous n'entendons pas sacrifier ici à l'érudition, ni donner toutes les références destinées à appuyer telle ou telle remarque. D'autant que nous avons publié plusieurs articles munis de l'apparat critique usuel sur les textes d'Euler et d'Aepinus analysés. Autant que faire se pouvait, nous avons voulu maintenir le caractère primesautier d'un exposé oral, au cours duquel un certain ton permettait de corriger des assertions trop abruptes. L'écrit gomme malheureusement de tels indices, mais on aura quand même remarqué l'absence volontaire d'appel de notes, et les citations données directement en français.

Nous avons utilisé les traductions françaises disponibles. Lorsqu'aucune n'existait, nous avons fourni une traduction qui fut revue par différents latinistes, selon les cas J.L.Gardies, C.Dugal et surtout R.Violette. Nous remercions vivement ces collègues de leur aide.

Textes originaux utilisés

N.H. Abel 1826 Recherche sur la série $1 + (m/1)x + (m(m-1)/2)x^2 + \ldots$, *Journal de Crelle*, 1, **Oeuvres complètes**, tome I, Christiania, Grøndal, 1881, pp 221-250.

Aepinus F.U.T. 1751 Au lösung einer Aufgabe von den Logarithmen, *Mecklemburgische Gelehrte Zeitungen auf das Jahr 1751*. Rostock und Wismar, St. XIX, 12 Mai 1751, pp. 151-152.

1752 Demonstratio theorematis binomialis, *Gelehrte Nachrichten auf das Jahr 1752*, Rostock und Wismar, 31 Mars 1752, pp. 136.

1755/1757 De la figure des supports d'une voûte, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin 1755*, *(Mém. de l'Acad* tome XI, 1757).

1758/1765 Démonstra tion du théorème de Harriot, avec une méthode de chercher, si une équation algébrique a toutes les racines possibles, ou non ? *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1758, (tome XIV, Mém. de l'Acad., 1765).

1760/1763 Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando, *Nov. commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop*, tome VIII (1760-1761), (Petropoli 1763), pp.169-180.

1758/1760 De functionum algebraicarum integrarum. factoribus trinomialibus realibus commentatio, *Novi comm. Acad. Scient. Imp. Petrop*, tome VIII (1760-1761), (Petropoli 1763), pp. 181-188. Sommaire pp 29-30, soumis le 21 Décembre 1758, lu le 24 Mai 1759.

1754 **Commentatio de notione quantitatis negativae**, Rostock.

1755 **De Integratione et separatione variabilium in aequationibus differentialibus**, Rostock.

J. d'Alembert 1767 Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal, <u>in</u> **Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie**, vol. 5, Amsterdam, Chatelan.

1789 **Dictionnaire encyclopédique des mathématiques**, Paris : articles signés d'Alembert, Bossut, Lalande, Condorcet, etc.

L.F.A. Arbogast 1791 Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles. Saint-Pétersbourg, Acad. Imp. Sc.

Bernoulli D. 1726 Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium, *Comm. Sc. Imp. Petr.*, tome 1, pp.126-142 (**Die Werke von Daniel Bernoulli,** Bd 3, Birkhäuser Verlag, St 9, à paraître).

Bertrand L. 1778 **Développement nouveau de la partie élementaire des Mathématiques prise dans toute son étendue.** Genève (2 volumes).

B. Bolzano 1816 **Die binomische Lehrsatz**, Prague, Enders.

Cauchy A.L. 1843 Dei methodi analitici, Roma.

1821 **Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique** première partie, Analyse algébrique, Paris (Voir aussi **Oeuvres complètes,** 2ème série, volume 14, Paris, Gauthier-Villars).

Daviet de Foncenex 1760 Sur les principes fondamentaux de la mécanique, *Miscellanea Taurinensis*, t1 1, pp.299-325.

L. Euler 1748 **Introductio in analysin infinitorum**, Lausanne, voir aussi dans **Opera Omnia**, première série, volumes 8 et 9, A. Speiser (ed) Birkhäuser Verlag, 1913. Il y eut des rééditions (1783, 1797). Traduction française J.B. Labey, **Introduction à l'analyse infinitésimale**, Paris, 1ère édition 1796. Cette traduction est très bonne et très fidèle (réédition 1835). Une autre édition française parut en 1786.

1755 **Institutiones calculi differentialis**, Saint-Pétersbourg dans **Opera Omnia**, première série, volume 10, G. Kowalewski (éd.) Birkhäuser Verlag. Pas de traduction française disponible.

1768-1794 **Institutiones calculi integralis**, Saint-Pétersbourg dans **Opera Omnia**, 4 parties, première série, volumes 11, 12 et 13, F. Engel, L. Schlesinger (éd.), Birkhäuser Verlag. Pas de traduction française disponible. Il existe une traduction allemande.

1774 Demonstratio therorematis neutoniani de evolutione potestatum binomi pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 19 (1774), 1775, pp 103-111. (**Opera Omnia,** première série, volume 15, pp.207-216).

1776 Nova demonstratio quod evolutio potestatum binomi newtoniani etiam pro exponentibus fracti valeat, *Nova acta acad Sc. Petrop.* (1787), 1789, pp. 52-58, présenté en 1776 (**Opera Omnia,** première série, vol. 16, pp. 112-121).

K.F. **Gauss** 1813 Disquisitio generales circa seriem infinitam.

Comm. Soc. Reg. Sc. Gott pp 1-46 (in Gauss, **Werke**, vol. 3, Göttingen).

Grégoire de Saint-Vincent 1647 **Opus geometricum,** Antverpiae (prop. 109 et prop. 130).

Lacroix S.F. 1797/1810-1816 **Traité de calcul différentiel et intégral,** 1ère édition Paris, 2ème édition Paris.

J.L. **Lagrange** 1806 **Leçons sur le calcul des fonctions**, Paris, Coucier **Oeuvres**, vol. 10, Paris, Gauthier-Villars (Voir aussi **Séances des Ecoles Normales**, éd. 1800-1801, vol. 10, Cercle Social, Paris).

1797 **Théorie des fonctions analytiques**, Imprimerie de la République, Paris.

A.M. **Legendre** 1794 **Géométrie**, 1ère édition, 1794, Paris, F. Didot.

G.W. **Leibniz** 1701 Mémoire touchant son sentiment sur le calcul différentiel, *Journal de Trévoux*, pp 270-272 in **Mathematische Schriften** éd. G.I. Gerhardt, vol. 1, pp 350.

S. **L'Huilier** 1795 **Principiorum calculi diffferentialis et integralis**, Tübingen.

A **de Sarasa** 1649 **Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno minie propositi,** Antverpiae.

B. **Taylor** 1717, **Methodus incrementorum directa et inversa,** Londres.

Bibliographie succincte autour d'Euler

Euler L. 1959 **Die Berliner und die Petersburger Akademie des Wissenschaften in Briefwechsel Leonhard Eulers. I. Der Briefwechsel L. Euler mit G.F. Müller** (éd. A.P. Juškevič, E. Winter, avec la collaboration de P. Hoffmann), Berlin.

1983 **Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk,** Birkhäuser Verlag, Basel.

1984 **Zum Werk Leonhard Eulers Vorträge des Euler-Kolloquiums in Mai 1983 in Berlin,** Birkhäuser Verlag, Basel.

1986 **Correspondance, Opera Omnia**, Series quarta A, vol. 6, éd. Costabel, Winter, Grigorijan, Juškevič, Bâle.

Series quarta A, vol. 5, éd. Juškevič, Taton, Bâle.

Demidov S.S. 1980 Le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles du 1er ordre aux 18è et 19è siècles (en russe) *Istoriko-matematiceskie issledovnija*, 25, pp. 71-103.

Dhombres J. 1984/1985 Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle: Archaïsme, pédagogie et style d'écriture. *Sciences et techniques en perspective*, vol 8, pp 1-55

1986a Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, *Sciences et techniques en perspective*, vol 10, pp 192-249

1986b Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Archives Hist. of exact sciences*, vol 36, n°2, pp.91-181.

1987a Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18ème siècle, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, P. Dugac, R. Taton, à paraître.

Houzel C. 1976 Euler et l'apparition du formalisme pp 123-156 in **Philosophie et calcul de l'infini,** Paris, Maspéro.

Juškevič A.P. 1971 Leonhard Euler, **Dictionary of Scientific Biography,** vol IV, New York, Scribners and sons, pp. 467-484.

1959 Euler and Lagrange über die GrundLagen der Analysis Sammelband Schröder pp. 224-246.

D. **Laugwitz** 1978 Unendlich Grosses und unendlich Kleines bei L. Euler, Tech. Hochschule Darmstadt, Prepint 407.

J. **Lützen** 1978 The development of the concept of function from Euler to Dirichlet (en danois) Nord. Mat. Tidsskrift 25-26, pp. 5-32.

N. **Mathe** 1984 **Les méthodes de démonstration dans les écrits de théorie des nombres d'Euler,** thèse de troisième cycle, Toulouse, 1984.

J.F. **Montucla** 1802, **Histoire des mathématiques,** vol. 3 et 4, Paris (réédition Blanchard).

N.T. Simonov 1968 Sur les recherches d'Euler dans le domaine des équations différentielles, *Revue Histoire Sc* 21, pp.131-156.

A. Speiser 1939 Die Basler Mathematiker, 117, *Neujahrsblatt*,pp. 1-51.
1941 Leonhard Euler, Grosse Schweizer Forscher, 133 p.

O. Spiess 1929 **Leonhard Euler**, Huber, 228 p.

C.A. Truesdell 1981 The role of mathematics in science as exemplified by the work of the Bernoullis and Euler, *Verhandl. Naturforsch. Gesellschaft in Basel*, 91, pp. 5-22.

G. Vivanti 1909 Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari, *Biblioth. Mathematica* (3), 10 pp.244-249.

Bibliographie autour d'Aepinus

Dhombres J. Pensivy M. Notes et traduction d'un texte d'Aepinus sur le binôme de Newton, *Sciences et techniques en perspective*, vol 11, pp. 92-130.

Home R.W. 1977 **Aepinus 's essay in the theory of electricity and magnetism.**

Rigueur et fondations de l'Analyse

Baron M. 1969 **Origins of the infinitesimal calculus**, Pergamon Press.

Berkeley G. 1735 **A defence of freethinking in mathematics**, London.
1734 **The analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician**,en traduction française, **l'Analyste**, Paris, Aubier.

Boyer C. 1959 **History of the calculus and its conceptual development** New York, Dover reprint.

Dhombres J. 1978 **Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire**, Paris, Nathan/Cédic.
1982/1983 La langue des calculs de Condillac, ou comment propager les Lumières, *Sciences et Techniques en perspective*, vol 2, pp. 187-230.
1987b Un style axiomatique dans l'écriture de la physique mathématique au 18ème siècle. Daniel Bernoulli et la composition des forces. Traduction, notes et commentaires, *Sciences et techniques en perspective*, vol 11, pp.23-91.

Dieudonné J. 1978 **Abrégé d'histoire des mathématiques**, Paris, Hermann, 2 volumes.

Dugac P. 1976 **Richard Dedekind et les fondements des mathématiques**, Vrin, Paris.
1973 Elements d'analyse de Karl Weierstrass, *Arch. Hist. Exact Sc.*, 10, pp.41-176.

Grabiner J. 1981 **The origins of Cauchy's rigorous calculus**, M.I.T. Press, Boston.

Grattan-Guiness I. 1970 **The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann**, M.I.T. Press.

Gillispie C.C. (éd) 1979 **Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique**, Vrin, Paris.

C. Houzel,J.L. Ovaert, P. Raymond, J.J. Sansuc 1976 **Philosophie et calcul de l'infini**, Paris, Maspero.

Jourdain P.E.B. 1905 The theory of functions with Cauchy and Gauss *Bibliotheca math* (3), 6, pp. 190-207.

Kitcher P. 1975 Bolzano's ideal of algebraical analysis, *Studies in Hist. and Phil. of Science*, 6, pp.229-269.

Pensivy M. 1986/1987 **Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme**, thèse de troisième cycle, Université de Nantes, Octobre 1986. A paraître dans *Sciences et techniques en perspectives* en 1987.

Scriba C.J. 1981 Von Pascal Dreieck zu Eulers Gamma Funktion Zur Entwicklung der Methodik der Interpolation, **Mathematical Perspectives**, éd J. Dauben, Academic Press, pp. 221-235.

Tropfke J. 1980 **Geschichte der Elemantarmathematik** (4 Aufläge, Bd 1 Arithmetik und Algebra (K. Vogel, K. Reich, H. Gericke, W. de Gruyter), Berlin.

Truesdell C.F. 1960 **The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788, L. Euleri Opera Omnia**, 2ème série, 112, 435p. .

Verley J.L. 1975 La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, *Bulletin de l'APM*, *n°34*.
1978 Les fonctions analytiques, pp 129-163 in J. Dieudonné

(1978) **Eléments d'histoire des mathématiques.**

Weierstrass K. 1870 Ueber das sogenannte Dirichletsche Princip, gelesen in des Königl. Akad. des Wiss. (4 Juli 1870), **Werke,** t.2, pp 49-54, Mayer und Müller, Berlin , 1894-1927.

Rigueur mathématique

Bourbaki N. 1969 **Eléments d'histoire des Mathématiques,** Paris, Hermann.

F.E. **Browder** 1975 The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics. Proc. Amer. Workshop on the evolution of modern math. *Hist. Math* 2.

L. **Brunschwicg** 1912 **Les étapes de la philosophie mathématique** (réédition Blanchard, Paris).
1927 **Les progrès de la conscience dans la philosophie occidentale**, Paris.
1911 La notion moderne d'intuition et la philosophie des mathématiques, *Revue Métaphy. Morale*, 19, pp.145-176.

Cavaillès J. 1938 **Méthode axiomatique et formalisme,** Paris, Hermann.
1962 **Philosophie mathématique,** Paris, Hermann.

A. **Cournot** 1922 **Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique,** 3ème édition, Paris.

L. **Couturat** 1905 Définitions et démonstrations mathématiques *Enseignement Math* 7, pp.104-121.

J. **Dieudonné** 1939 Les méthodes axiomatiques et les fondements des mathématiques. *Revue Sc.* 77, pp.224-232.

Frege G. 1969 **Les fondements de l'arithmétique,** Paris, traduction française de C. Imbert (**Grundgesetze der Arithmetik**),

Goldstine K. 1977 **A history of numerical analysis from the 16th through the 19th cenrury**, New-York, Springer Verlag.

Hilbert D. 1930 Problem der Grundlegung der Mathematik , *Math. Annalen*,102,pp 1- ,

J. **Gergonne** 1818-1819 Essai sur la théorie des définitions , *Annales de mathématiques*, 9, pp 1-3.

G. **Israel** 1981 "Rigor" and "axiomatics" in modern mathematics, *Fund. Scient*, vol. 2, n°2 pp 205-219.

A.P. **Juškevič** 1977 The concept of function up to the middle of the nineteenth century. *Arch. Hist. Ex. Sc.* 16, pp 37-85, traduit par J.M. Bellemin, *Fragments d'histoire des mathématiques*, Paris 1981 pp 7-68.

M. **Kline** 1972 **Mathematical thought from ancient to modern time,** New-York, Oxford University Press.

F. **Le Lionnais (éd) Les grands courants de la pensée mathématique** Paris (réédition Blanchard).

Leray J. 1967 L'invention en mathématiques, in **Logique et connaissance scientifique**, la Pléiade, Paris, Gallimard, pp 465-473.

J. **Pierpont** 1928 Mathematical rigor, past and present , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 34, pp. 23-53.

H. **Poincaré** 1902 **La science et l'hypothèse**, Paris.

Russell B. 1952 **Introduction à la philosophie mathématique** (trad. française), Payot, Paris.

M. **Winter** 1911 **La méthode dans la philosophie des mathématiques**, Paris.

APPENDICE

Table des matières : Analyse Algébrique
A.L. CAUCHY (1821)

PREMIÈRE PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE