LA PREMIERE FORMULATION MATHEMATIQUE DE LA THEORIE DES FORCES CENTRALES CHEZ NEWTON

François De Gandt

CNRS, Paris

LES DISCUSSIONS DANS LE MILIEU ANGLAIS VERS 1680

La découverte de la gravitation universelle présupposait un ensemble de techniques mathématiques nouvelles, qui traduisent en termes mathématiques précis et rigoureux l'idée d'une force "centripéte". Il fallait pouvoir représenter et mesurer l'action de cette force sur les planètes -ou sur n'importe quel mobile-et étudier la manière dont cette force varie en fonction de la distance.

L'idée même d'une force dirigée vers le soleil, et diminuant selon une loi déterminée, était activement discutée à l'époque. En 1680-1683 plusieurs savants anglais s'intéressaient à une dérivation possible des mouvements planétaires à partir de la force solaire. A Londres en particulier,Wren, Hooke et Halley cherchaient une démonstration qui permît de passer d'une loi de décroissance de la force à la description des mouvements célestes.

L'idée première était que les planètes accomplissent leur trajet sous l'action d'une certaine force qui les entraîne vers le soleil.

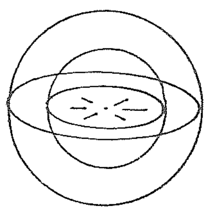
De quelle nature était cette force ? On ne savait pas trop. Elle pouvait "attirer" les planètes ou les "pousser". Dans le premier cas le soleil lui-même serait la cause, la source de la force ; dans l'autre cas il serait simplement, par hasard, au centre géométrique du mécanisme, sans être cause du mouvement.

Certains tentaient d'expliquer cette tendance dirigée vers le soleil par l'action d'un fluide ou d'un éther qui occuperait l'espace : par exemple il pourrait y avoir une matière invisible qui tourne à grande vitesse autour du soleil et repousse certains corps au milieu du tourbillon, comme les particules de thé qui se rassemblent au fond de la tasse. Ou encore les différences de pression du milieu interplanétaire pousseraient les corps vers le centre. C'est surtout sur le continent qu'on s'intéressait à ces fluides invisibles.

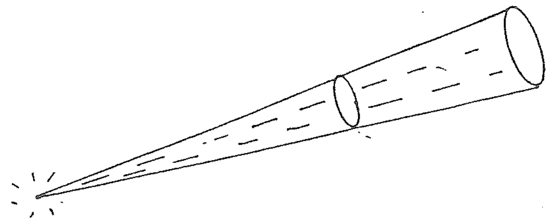
Le milieu anglais était plus ouvert à des théories "attractionnistes"; le soleil agirait à distance sur les planètes et les attirerait vers lui comme un grand aimant. Cette conception avait reçu le nom de Philosophie Magnétique et s'inspirait d'ouvrages déjà anciens : le De Magnete de William Gilbert (1600), les oeuvres de Kepler (Astronomie Nouvelle 1609, Epitome d'Astronomie Copernicienne, 1618- 1621).

Cette force qui dirige les planètes vers le soleil pourrait n'être pas la même aux différents points de l'espace, diminuant avec la distance selon une loi bien déterminée. Par exemple on pouvait imaginer que cette force décroit lorsqu'on s'éloigne du soleil dans la même proportion que le carré de la distance au soleil.

C'est assez plausible puisque la lumière elle-même diminue selon cette loi. Si à partir d'une source lumineuse ponctuelle les rayons se diffusent en ligne droite dans toutes les directions, sans aucune perte ni modification, une surface sphérique entourant la source recevra autant de lumière, qu'elle soit très proche ou très éloignée de la source située au centre :



Si l'on veut comparer deux morceaux de surface appartenant à deux sphères concentriques de rayon différent, à quelle condition recevront-ils la même quantité de lumière ? Il suffit que leurs contours appartiennent à un même cône issu de la source lumineuse :



Dans la partie initiale du cône les rayons sont plus serrés, ils sont plus espacés dans la portion plus distante de la source, mais il y en a toujours "autant" . Une même quantité de lumière se répartit ainsi sur des surfaces de plus en plus larges, proportionnelles au carré des rayons des sphères concentriques (puisque les surfaces croissent comme le carré des rayons).

Un élément de surface reçoit donc une quantité de lumière inversement proportionnelle au carré de sa distance à la source. Si la force qui pousse ou attire les planètes vers le soleil est analogue à la lumière, elle devrait diminuer selon cette même loi. Kepler lui-même avait envisagé cette hypothèse pour la rejeter. (1).

Le pas décisif, celui que nos trois Londoniens voudraient accomplir, consisterait à relier la trajectoire précise des planètes à cette loi de diffusion. L'affaiblissement de la force proportionnel au carré de la distance permet-il d'expliquer les particularités des mouvements célestes, notamment la forme elliptique des orbites ou les rapports des périodes des planètes ? On avait observé que les planètes marchaient d'autant plus lentement

---

(1) Astronomie Nouvelle chap. 36 (G.W. 3,250)
Epitome, IV, 3 (G.W. 7,304)

qu'elles étaient plus loin du soleil, et Kepler avait même donné une loi précise pour cette dépendance : la vitesse des différentes planètes varie avec leur distance au soleil de telle manière que le cube du rayon de l'orbite est proportionnel au carré de la période. Ces propriétés des mouvements célestes pouvaient-elles résulter de l'action d'une force variant comme $1/R^2$?

Finalement, comme on le sait, c'est un quatrième personnage qui résolut l'énigme.

Newton s'était fait connaître par ses idées sur la lumière, soulevant une polémique avec Hooke (déja !). Il avait aussi fait circuler de manière plus ou moins privée des lettres et des manuscrits mathématiques très novateurs, particulièrement à propos du développement en série infinie de certaines quantités algébriques. (1)

Lorsque Halley et la Royal Society apprirent que Newton possédait la solution, on l'engagea à la faire connaître par un livre. Mais Robert Hooke, informé des prétentions de Newton, se jugea frustré de sa part dans la découverte. Newton demanda alors l'avis de Halley. Sa réponse est un précieux récit des essais infructueux qui ont précédé les Principia :

" J'ai été reçu par Sir Christopher Wren et lui ai demandé si c'est M.Hooke qui lui avait donné l'idée de la proportion en inverse carré ; il me répondit que lui-même, il y avait bien des années, avait pensé à réaliser les mouvements des planètes en composant une descente

---

(1) Voici par exemple l'appréciation de Leibniz en 1976, onze ans avant les Principia : "Les découvertes de Newton sont dignes de son génie, que les expériences d'optique et le Tube Catadioptrique /-le télescope Newton-/ ont manifesté abondamment. Sa méthode pour obtenir les racines des équations et les aires des figures par des séries infinies diffère complètement de la mienne..." (The correspondence of Isaac Newton, Cambridge 1960, Vol 2, 57, 58)

vers le soleil et un mouvement imprimé ; mais à la longue il avait abandonné, ne trouvant pas le moyen de le faire. Depuis ce temps, M. Hooke lui avait fréquemment dit qu'il l'avait fait, mais ne l'avait jamais convaincu au point que ses démonstrations fussent contraignantes.

Effectivement je puis dire qu'en janvier 1683-1684, comme j'avais conclu moi-même, à partir de la proportion entre le cube et le carré, que la force centripète décroissait inversement en proportion du carré des distances, je vins en ville un mercredi, où je rencontrai Sir Christopher Wren et M. Hooke ; comme la conversation tomba là-dessus, M.Hooke affirma que sur ce principe toutes les lois des mouvements célestes pouvaient se démontrer, et que lui-même l'avait fait ; je déclarai l'insuccès de mes tentatives ; et Sir Christopher, pour encourager cette recherche, dit qu'il donnait à M.Hooke et moi-même deux mois pour lui en apporter une démonstration convaincante, et qu'outre l'honneur, celui d'entre nous qui y parviendrait recevrait de lui en cadeau un livre de 40 shillings.

M. Hooke dit alors qu'il y était parvenu, mais qu'il désirait tenir cela caché pendant quelque temps, pour que les autres, à force d'essayer et d'échouer, vinssent à en reconnaître la valeur lorsque lui même rendrait cela public.

Pourtant je me souviens que Sir Christopher était fort peu convaincu qu'il pût le faire, et bien que M.Hooke lui promît alors de le lui montrer, je ne trouve pas que dans cette circonstance il ait tenu sa parole.

Au mois d'août suivant, lorsque j'eus l'honneur de vous faire visite, j'appris cette bonne nouvelle que vous aviez mené cette démonstration à sa perfection, et il vous plut de m'en promettre une copie, qu'en novembre suivant je reçus de M.Paget avec une très grande satisfaction." (1)

---

(1) Lettre de Halley à Newton, 29 juin 1686, Corresp., 2,441-442.

Les échecs, les promesses non tenues témoignent combien il était difficile d'élaborer l'intuition première jusque dans le détail, difficile de transformer l'idée générale d'une force variant comme $1/R^2$ en une théorie aux conséquences déterminées.

Wren exige de véritables démonstrations contraignantes et ce que lui propose Hooke ne le convainct pas. Mais à quoi pourrait ressembler une démonstration en ces matières ? Sur quels exemples se guider ?

En géométrie on sait ce que c'est que prouver, grâce à toute une culture nourrie des livres des Anciens et cultivée par des discussions, des cours, des défis, des découvertes. Que pourrait être une preuve touchant des questions relatives aux forces et aux mouvements ? Quels principes indubitables adopter comme fondements ? A quels outils mathématiques recourir ?

Cette intuition première n'est pas encore celle d'une "gravitation universelle", si l'on s'en tient à ce texte. La force agit sur les planètes et les dirige vers le soleil. Mais il n'est pas question de la lune, ni de la pesanteur terrestre, à moins que ce ne soit compris par Hooke dans sa mention de "tous les mouvements célestes".

Quels cas Hooke embrassait-il effectivement dans son hypothèse ? Il est difficile de le préciser. Hooke joue dans ce récit le personnage d'un vantard, craignant qu'on ne l'estime pas à sa juste valeur, promettant plus qu'il ne peut tenir et proposant des raisonnements qui ne convainquent pas. Newton le lui fera cruellement sentir plus tard et minimisera son rôle dans le cheminement vers la découverte .

Wren, quant à lui, semble avoir d'abord posé la question dans un cadre moins strict : les mouvements des planètes peuvent-ils s'expliquer en combinant le mouvement inertial et un mouvement dirigé vers le soleil ? (peut-être à partir de l'idée de Galilée que les planètes, au commencement du monde, auraient d'abord été lancées en ligne droite selon un mouvement

acceleré de chute, puis détournées sur leur orbite circulaire) (1)

LA VISITE DE HALLEY

La fin de la lettre indique le dénouement de l'intrigue : Halley fit une visite à Newton dans sa retraite de Cambridge, et eut la surprise d'apprendre que celui-ci possédait la solution. Cette visite est l'impulsion première qui donna naissance aux Principia.

Le récit en a été transmis quarante ans plus tard, grâce aux souvenirs du mathématicien Abraham de Moivre :

" En 1684, le docteur Halley lui fit une visite à Cambridge. Après qu'ils furent restés quelque temps ensemble, le docteur lui demanda quelle serait à son avis la courbe qui serait décrite par les planètes en supposant que la force d'attraction vers le soleil est inversement comme le carré de leur distance à celui-ci.

Sir Isaac répondit immédiatement que ce serait une ellipse ;

le docteur, frappé de joie et d'étonnement, lui demanda comment il le savait ;

eh bien, dit-il je l'ai calculé ;

sur quoi le docteur Halley lui demanda son calcul sans autre délai ;

---

(1) Gf.Galilée, Discorsi, 4e Journée, Edizione Nazionale, VIII. 283-284. Le rapprochement est suggéré par J.A. Bennett, d'aprés les annotations personnelles de Wren à son exemplaire des Discorsi : J.A. Bennett, The mathematical science of Christopher Wren, Cambridge U.P.,1982, p.61.

Sir Isaac regarda parmi ses papiers, mais ne put le trouver ; mais il promit de le recommencer et alors de le lui envoyer." (1)

La date de la visite n'est pas certaine. La plupart des experts la situent dans le milieu de l'été 84, selon les termes de Halley lui-même ("août 84"), mais certains arguments pousseraient à la dater plutôt du mois de mai environ (2). Peu importe. Le délai de la réponse de Newton s'en trouverait allongé.

Car Newton a attendu plusieurs mois avant de tenir sa promesse. Et finalement ce n'est pas une démonstration que reçut Halley, mais un petit traité. L'exemplaire effectivement envoyé en novembre 84 n'a pas été retrouvé, mais il en existe plusieurs copies ou versions plus ou moins enrichies, à la Bibliothèque de Cambridge et à Londres. Leur titre commun est "De Motu" ("sur le mouvement") (3)

---

1. Récit de Moivre, traduit d'aprés le texte reproduit dans Cohen : Introduction to Newton's Principia, Harvard UP. 1971 . 50 et 297-298.

2. Cf. Hall and Hall, Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton, Cambridge, 1962, 239 et Math Papers of Isaac Newton, ed by I.T. Whiterid Cambridge Vol VI.

3. Il en existe au moins quatre textes manuscrits :

- De motu corporum in gyrum (ULC Add. 3965, fol .55-62 v; publié comme manuscrit B par Hall 237-267 . aussi in Math. P.VI,I §1,30-75 ; et in Herivel, The Bachground of Newton Principia, oxford, 1965.
- (sans titre) ULC Add. 3965, fol 63-70 (manuscrit C de Hall)
- De motu sphaericorum corporum in fluidis (ULC Add. 3965, fol 40-54. manuscrit D de Hall, extraits in Math P.VI,74-80)
- Isaaci Newtoni propositiones de motu (Royal Society Register, vol .VI. p.218-234 ; édité par Rouse Ball An essay on Newton's Principia London 1893, 35-51)

Ce sont des versions très simplifiées et encore très grossières des Principia. Newton les corrige, les réécrit, les enrichit, y insère des pièces d'une autre provenance. Ses cours à Cambridge, deux années de suite, sont faits de ces matériaux (1).

Le petit écrit De Motu est donc le noyau initial de l'énorme ouvrage. Les premiers manuscrits que nous possédions dans cette série qui aboutit aux Principia, et qui ressemblent certainement de très près au texte envoyé à Halley en novembre 84, contiennent seulement quatre théorèmes et quatre problèmes, en une dizaine de pages, alors que les Principia contiendront près de deux cents propositions, en plus de cinq cents pages. Le texte a grossi dans des proportions incroyables, au fil des rédactions successives, entre novembre 84 et janvier 87, date de la publication des Principia. La visite de Halley (2) avait déclenché une tempête créatrice.

---

(1) Si l'on en croit le texte qu'il a déposé à la Bibliothéque de Cambridge, comme trace officielle de son enseignement des semestres d'automne 1684 et 1685. Ce manuscrit, intitulé "Lucasian Lectures de Motu Corporum", représente une étape intermédiaire entre les manuscrits De Motu et le manuscrit final des Principia, déposé à la Royal Society pour publication. (Voir Math.P. VI,229-408.)

(2) Remarquons la question posée par Halley à Newton :
si on admet que la force varie en $1/R^2$, quelle sera la trajectoire qui en résulte ? En réalité les Principia répondront principalement à une autre question : si la trajectoire est une ellipse, quelle doit être la loi de variation de la force ?

LES ELEMENTS DE LA SOLUTION DE NEWTON

Venons à la démonstration qui fut effectivement donnée par Newton fin 1684, dans ce petit écrit qui réjouit tant le docteur Halley.

Comment passer de l'idée vague d'une force attractive à sa traduction géométrique ? a son évaluation le long d'une trajectoire ? Newton verra dans l'élaboration mathématique du problème toute la différence qui le sépare de Hooke. C'est une chose de proposer une conjecture sur la variation de la force, c'en est une autre d'entrer dans le détail de la détermination géométrique, des observations et des calculs. Hooke a fait comme si tout cela n'était qu'un travail subalterne, une simple corvée (drudgery) (1) qu'il n'avait pas le temps d'accomplir.

En fait pour venir à bout de la tâche, il fallait construire l'édifice entier d'une théorie des forces centrales, à partir des matériaux épars dans les recherches du 17ème siècle.

Si nous prenons une vue schématique du texte du De Motu, les éléments de la solution de Newton sont les suivants :

- laissées à elles-même, les planètes suivraient un mouvement rectiligne uniforme (c'est ce qu'on appelle le principe d'inertie, qui sera la loi I des Principia (2)

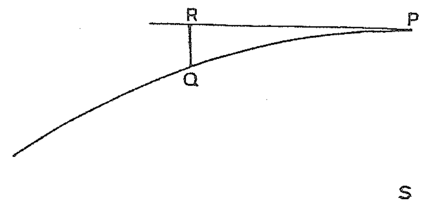
---

(1) Lettre de Newton à Halley du 20 Juin 1686 (Corresp. 2, 438).

(2) Dans la théorie de Newton, le mouvement rectiligne uniforme suppose une force, la "force inhérente" (vis insita).

-l'incurvation de leur trajectoire est due à une force extérieure ou ou "centripète" qui les dirige vers le soleil (Newton parle de déviation ou de déflexion) ;

- pour évaluer la force extérieure il faut mesurer l'incurvation, c'est à dire la différence R Q entre la trajectoire rectiligne virtuelle et la trajectoire incurvée réelle.



Cette supposition que la déviation permet d'évaluer la force extérieure, parce qu'elle lui est proportionnelle, reste encore implicite dans les premiers manuscrits de 1684, et deviendra la loi II des Principia :

" *Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée...* "

Le segment QR est donc l'indice et la mesure géométrique de la force qui tire P vers S.

La notion de force centripète est la grande innovation de ce texte. Nexton invente le mot, en une imitation consciente. Huygens avait imaginé la "force centrifuge", Newton lui rend hommage et le corrige en inversant le point de vue. La force qui permet d'expliquer les mouvements curvilignes est dirigée vers le centre, tendant-vers-le-centre (centripeta).

Le mode d'action de cette force est laissé indéterminé : ce peut être une poussée ou une traction -c'est à dire une attraction -("impellitur vel attrahitur"). Diverses explications restent possibles, une analyse dynamique des mouvements tournants n'exige pas que l'on détermine la cause "physique" qui incurve le mobile vers un point central.

Sur le point central lui-même nous savons peu de choses. Ce n'est pas un centre à proprement parler, mais un point quelconque qui peut être considéré conmme centre, parce que la trajectoire s'incurve autour de lui, sans être nécessairement tout à fait circulaire. Y a-t-il une vertu qui émane de ce point privilégié, un flux de magnétisme qui en jaillit ? Nous n'en savons rien.

La seule chose que nous apprenons en lisant le De Motu, c'est que la force centripète ressemble à la pesanteur. L'hypothèse 4 stipule que les effets de la force centripète sont assimilables à ceux de la pesanteur, au moins localement. La force centripète varie selon les points, mais en chaque point son action fait parcourir au corps un trajet proportionnel au carré du temps , comme la pesanteur. La parenté entre pesanteur et force centripète est si essentielle aux yeux de Newton qu'il a remplacé l'une par l'autre dans certaines versions du De Motu.

Les mouvements tournants seront analysés comme résultant de deux forces combinées : la "force inhérente" engendre, ou tend à engendrer un mouvement en ligne droite, et la "force centripète" incurve la trajectoire, continuement ou par à-coups, dans la direction du point qui joue le rôle de centre. Le mouvement curviligne d'un corps suppose ces deux éléments, et

rien d'autre : une force inhérente et une force centripète, celle-ci servant à défléchir le mouvement inertial dû à la première. Comme Newton l'écrit pour le cas du mouvement circulaire :

"Par la seule force inhérente (les corps tournants) décriraient les tangentes .... Les forces centripètes sont celles qui retirent perpétuellement les corps des tangentes vers les circonférences..." (Hall, Unpublished Sc. Papers, p 248)

C'est l'apport fondamental de ce manuscrit : pour la première fois le mouvement curviligne est analysé en détail selon ses deux composantes d'inertie et de déflexion. Galilée avait esquissé une idée assez voisine (Dialogo, EN VII, 242), d'autres encore avaient envisagé cette conception, mais comme en passant et sans en tirer tout le fruit. Newton lui-même, cinq ans plus tôt, était encore attaché à une représentation différente : selon sa deuxième réponse à Hooke, en 1679, la circulation d'un corps autour de son centre d'attraction serait dûe à la combinaison de la force centrifuge et de la pesanteur qui se dépasseraient alternativement (Corresp. 2, 307).

Dans le texte de 1684 la force centrifuge a disparu. Le mouvement tournant n'exige que la force centripète et la force inhérente. C'est probablement Hooke qui l'a fait comprendre à Newton, en lui proposant son hypothèse de " *"composer les mouvements célestes des planètes avec un mouvement direct selon la tangente et un mouvement attractif vers le corps central"* (Corresp. 2, 297 et 306).

LA GENERALISATION DE LA LOI DE CHUTE DE GALILEE

Comment mesurer à son tour la déviation QR ? Outre l'intensité de la force, il faut tenir compte d'autres facteurs si l'on veut savoir de combien le mobile s'écarte de la trajectoire rectiligne. L'écart entre la tangente et la courbe APQ est plus grand si par exemple le mobile est plus loin de P , en termes de longueur d'arc. Newton choisit le temps comme variable de base : la déviation dépend du temps écoulé.

Le De Motu pose comme hypothèse que la déviation QR est proportionnelle au carré du temps écoulé . D'ou vient cette relation ? C'est une généralisation de la loi de chute de Galilée (1) : l'espace parcouru par un mobile en chute libre à partir du repos est proportionnel au carré du temps écoulé. Pour pouvoir appliquer cette loi dans le cas présent, il faut admettre plusieurs présuppositions :

- la force qui attire les planètes vers le soleil est analogue à la pesanteur terrestre ;

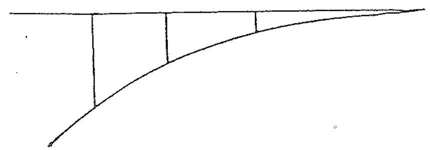
- La longueur QR représente une sorte de trajet de chute.

En d'autres termes la trajectoire courbe PQ doit être considérée comme la combinaison de deux mouvements : l'un rectiligne et uniforme de P vers R, l'autre accéléré de P vers S. La longueur QR représente cette deuxième composante, étudiée pour elle-même et abstraction faite de l'autre mouvement.

---

(1) Discorsi, Troisième Journée , Théor . 2 du mouvement accéléré (Discorsi E.N. VIII 209-210;)

C'est Galilée encore qui avait rendu possible et légitime une telle décomposition. Dans la Quatrième Journée des Discorsi, il avait montré comment la trajectoire des projectiles peut s'analyser en un mouvement rectiligne uniforme (horizontal ou oblique) et un mouvement accéléré vertical.



Dans l'oeuvre de Huygens par exemple, cette opération d'abstraction dans la décomposition des mouvements était devenue un outil très précieux (1).

Le cas des planètes présente pourtant plusieurs différences remarquables avec la pesanteur terrestre. La chute ou quasi-chute n'est pas verticale (à direction constante) mais dirigée vers un point, le centre fixe S. D'autre part l'intensité de la force varie selon les points de l'espace . Dès qu'on change de position, la "pesanteur" n'est plus la même, et le mobile est ainsi soumis à une force variable le long de son parcours, si petit soit -il.

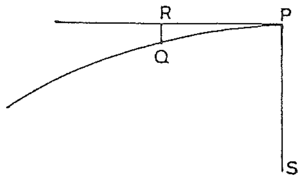
Aussi la loi de Galilée n'est-elle applicable que dans l'infiniment petit, au voisinage du point P. Selon les termes de Newton, la loi de chute est vérifiée ici seulement "au commencement du mouvement". Tout le raisonnement n'est donc valide que si l'arc PQ est très petit ou "naissant". (2)

---

(1) Voir le début du livre II de l'horloge à pendule, Huygens Oeuvres t. 18,123) et l'hypothèse 3 du De Motu Corporum ex percussionne (ibid t. 16,32-33).

(2) voir page suivante

En résumé, si nous reprenons la même figure -inspirée de celles de Newton-la longueur QR, qui est l'indice et la mesure de la force dirigée vers S, est proportionnelle à cette force, proportionnelle aussi au carré du temps, pourvu que P et Q soient très proches.



---

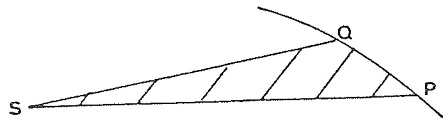
(2) Aucune justification, aucun début de preuve n'est avancé dans notre première version du De Motu pour appuyer l'extension de la loi de Galilée, ni pour fonder de semblables raisonnements infinitésimaux. Que signifie en toute rigueur " Le commencement du mouvement" ? Comment manipuler des entités aussi fuyantes ? Quelle sorte de démonstration ou de calcul peut-on attendre en cette matière ?

Dans les versions ultérieures du De Motu, dernière étape avant les Principia (manuscrit D de Hall), Newton donnera une démonstration quasi-géométrique, calquée sur celle de Galilée. La figure géométrique correspondant à une force constante sera déformée jusqu'à la disparition de certains éléments. Les relations entre grandeurs évanouissantes (ou naissantes) seront "lues" sur une sorte d'équivalent fini de la figure évanouissante, chaque ligne ou triangle infiniment petit étant reproduit dans le fini grâce à un correspondant fini qui lui reste toujours semblable. Cette démonstration sera progressivement amplifiée et deviendra le germe de toute la section I des Principia, relatives aux "proportions ultimes entre grandeurs naissantes ou évanouissantes" (Principia 3e édition 28-38). La généralisation de la loi de Galilée est ainsi le motif et le noyau initial du petit excursus mathématique que Newton a placé au début des Principia : c'est à l'occasion de l'extension de la loi de force de Galilée que s'est développé l'exposé newtonien sur les proportions ultimes.
(Voir F.De Gandt le style mathématique des Principia de Newton, Revue d'Histoire des sciences, 1986, p 195.222)

LA MESURE DU TEMPS PAR L'AIRE

Mais que dire du temps lui-même ? Comment le faire entrer dans les diagrammes et les calculs ? La représentation géométrique permet de figurer le trajet accompli, mais non le temps écoulé. Si la longueur du chemin était exactement proportionnelle au temps, on pourrait remplacer ce dernier par le trajet parcouru. Mais le mobile ne va toujours pas à la même allure, et pour évaluer sa vitesse il faudrait connaître sa vitesse initiale et la force aux différents points, la force dépendant à son tour de la position du mobile. Nous voilà au rouet.

La loi des aires de Kepler permet de sortir du cercle vicieux. Elle affirme que le temps de parcours d'une planète sur un arc peut être évalué en mesurant l'aire de secteur balayé par le rayon qui relie la planète au soleil.

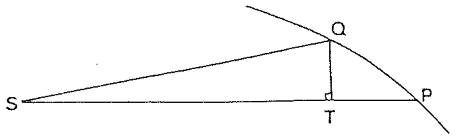


Quelle que soit l'intensité de la force en P, la surface engendrée par le rayon SP est toujours proportionnelle au temps qui s'écoule. Le triangle infiniment petit SPQ est donc une mesure du temps de parcours sur l'arc PQ. (1)

---

(1) Kepler avait formulé cette loi dans son Astronomie Nouvelle de 1609, et l'avait reprise de ses oeuvres ultérieures. La chose n'est donc pas très neuve en apparence : Newton redémontre un principe bien connu.

Il est alors possible de substituer au temps l'aire du triangle SPQ, et si l'on exprime cette aire par la base SP du triangle et sa hauteur QT, on pourra déclarer que la longueur QR est proportionnelle au carré de SP x QT.



(suite 1)

Pourtant, à la situer sous son éclairage correct, la démonstration de Newton est incroyablement nouvelle. Kepler avait proposé sa méthode des aires comme un procédé approximatif pour calculer les temps de parcours des planètes. Il ne l'avait démontré que très imparfaitement (et il devait même s'apercevoir qu'une des conséquences de l'énoncé contredisait l'une des prémisses !)

Enfin personne avant Newton n'avait accepté cette "loi" comme un principe indubitable : pour les astronomes entre Kepler et Newton, c'était à la rigueur un truc de calcul commode, mais on avait avantage à le remplacer par d'autres méthodes d'évaluation plus rapides et tout aussi plausibles.

Or Newton accepte ce principe comme point de départ de sa théorie, l'énonce en toute généralité et le démontre avec une économie de moyens inouïe - du moins si l'on accepte le passage à la limite qui achève la démonstration.

Par sa généralité la proposition de Newton va bien au delà de l'énoncé de Kepler. Ici le principe vaut pour toute force centripète, et non seulement pour le cas des planètes autour du soleil. De plus sa démonstration n'implique aucune loi de force particulière, alors que l'essai de démonstration de Kepler était fondé sur l'atténuation de la force avec la distance. Dans notre texte au contraire, la force peut varier arbitrairement selon les points de l'espace , on suppose seulement qu'elle est toujours dirigée vers S. Le génie de Newton est dans cette sobriété : du premier coup il établit la loi des aires au niveau de généralité qui lui convient.

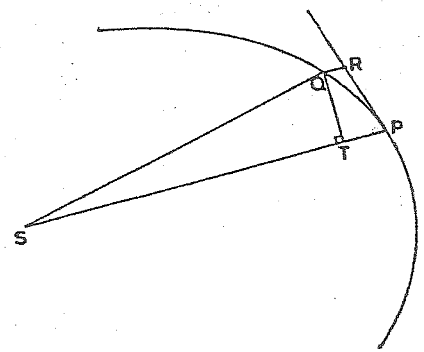
LA FORMULE GENERALE

On obtient ainsi (dans le Théorème 3 du De Motu qui correspond à la proposition 6 des Principia), une relation qui lie la force, la déflexion QR et le temps représenté par l'aire du triangle :

QR est comme la force et comme $(SP \times QT)^2$
ou sous une forme équivalente :

La force est comme la déflexion QR et inversement comme le carré de l'aire SP x QT.

Voilà l'expression entièrement géométrique de la force - du moins si l'on accepte en géométrie des arcs "naissants" et des trajets "très petits". Pour évaluer la force que subit un mobile en un point P d'une trajectoire, il suffira de déterminer la valeur de $QR/SP^2 \times QT^2$.



On pourra ainsi trouver dans différents cas "la loi de la force centripète". Précisons ce que cela signifie. La force centripète varie avec la position du mobile qui la subit.

Ici on compare la force aux différents points d'une même orbite. Sur une ellipse par exemple, une parabole ou une spirale, la distance au centre ou au foyer n'est pas constante, et l'intensité de la force centripète devrait varier.

Le pari de la théorie newtonienne est que cette variation de force obéit à une loi simple lorsque le mobile suit telle ou telle trajectoire déterminée . (Il n'y a aucune raison pour que cela soit possible en général). A chaque point de l'espace est associée une force analogue à la pesanteur ; on conjecture que cette pesanteur généralisée varie uniquement en fonction de la distance à un point central ; on conjecture aussi que la forme déterminée de la trajectoire permettra d'inférer une loi particulière et assez simple qui réglerait la variation d'intensité de la force centripète.

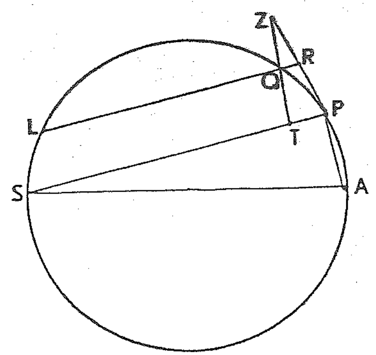
Comment évaluer la variation de la force centripète en fonction de la distance ? il suffit de mettre en oeuvre la formule générale donnée dans le théorème 3 : puisque la force centripète au point P est inversement proportionnelle à $SP^2 . QT^2 / QR$, on tâchera d'obtenir une expression égale à ce produit , et réduite à la forme la plus simple possible grâce aux relations qui découlent de la situation (orbite elliptique, ou circulaire, position fixée de S en un point particulier, etc...)

Il faut que les grandeurs QT et QR disparaissent de l'expression finale (ce sont des grandeurs naissantes), et que celle-ci ne contienne plus que des termes en SP (la distance) , mêlés éventuellement à diverses constantes. On verra alors de quelle manière la force centripète dépend de la distance variable SP entre le centre de force et le mobile.

Un exemple permettra de se faire une idée plus précise des procédés qu'utilise Newton pour évaluer la force centripète et déterminer sa loi de variation le long d'une trajectoire déterminée.

UN EXEMPLE D'APPLICATION

Le premier exemple que propose Newton (1), est tout à fait irréel, c'est plutôt un exercice d'application. Dans ce problème 1, Newton étudie un corps tournant sur un cercle sous l'action d'une force qui tend vers un point de la circonférence elle même. Que devient le mobile lorsqu'il parvient à ce point ? Le centre de force est sur la trajectoire et l'attraction près de ce point est considérable, croissant cinq fois plus vite que $1/R$. Newton discute brièvement cette question dans le scolie qui suit, et prétend, sans justification, que le corps s'éloignera selon la tangente après être passé par le centre de forces.

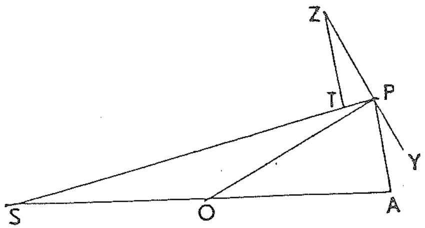


La démonstration suppose en premier lieu la similitude des trois triangles rectangles ZQR, ZTP, SPA. Pour vérifier cette similitude, il suffit

---

(1) Problème 1 du De Motu, in Hall & Hall Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton, Cambridge, 1962, p 250 - 251.

de prouver l'égalité des angles PZT et PSA. Plusieurs voies sont possibles (Newton n'en indique aucune). On peut utiliser la notion d'arc capable, ou recourir à des angles auxiliaires, par exemple en montrant successivement l'égalité des angles PZT, YPA, OPS et OSP :



Alors les côtes homologues des triangles semblables sont proportionnels :

ZP : ZT : : ZR : ZQ : : SA : SP.

La soustraction des rapports préserve la proportionnalité :

(ZP-ZR) : (ZT-ZQ) :: RP : QT :: SA : SP.

D'autre part la puissance du point R par rapport au cercle (Euclide, livre III) permet d'écrire :

$RP^2 = RQ.\ RL$

et donc (grâce au résultat ci-dessus) :

$RQ.RL : QT^2 :: SA^2 : SP^2$ ou : $QT^2 = RQ.RL.SP^2/SA^2$

On peut obtenir une expression égale à $SP^2.\ QT^2/QR$.
Cela est possible en multipliant les deux cotés par SP^2/QR.

La dernière étape consiste à remplacer dans l'expression obtenue RL par SP, puisque ces deux grandeurs finies ne diffèrent entre elles que d'une grandeur évanouissante lorque Q et P se rejoignent .

Alors l'expression égale à $SP^2.\ QT^2/QR$ ne contient plus que de constantes de la trajectoire(le diamètre SA du cercle) et la distance variable SP , élevée à la cinquième puissance (1). La force centripète est donc inversement proportionnelle à R^5.

Cet exemple très simple permet de voir comment l'étude des forces est devenue une branche des mathématiques. L'effet de la force centripète est représenté par la déviation, et le temps représenté par l'aire du secteur balayé. La déviation est déclarée proportionnelle à la force centripète et au carré du temps. D'autre part les relations particulilières à telle ou telle figure - ici les proportionnalités entre diverses grandeurs associées au cercle- permettent de transformer l'expression géométrique de la force. Il faut alors considérer ce que deviennent ces relations lorsque l'arc parcouru devient très petit ou "naissant". Finalement on en tire, si possible, une dépendance entre la force et la distance au centre.

Newton ne procède pas autrement dans sa démonstration capitale sur la force qui produit le mouvement elliptique des planètes (problème 3 du De Motu, prop. 11 des Principia). Le raisonnement est seulement un peu plus riche, utilisant les propriétés géométriques de l'ellipse pour parvenir à montrer que la force centripète varie comme $1/SP^2$.

Ce schéma fondamental de raisonnement du De Motu est repris dans les Principia, mais il y est devenu peu lisible, à cause de tous les compléments, enrichissements, raffinements démonstratifs, annexes philosophiques , dont Newton à progressivement surchargé son premier texte. Entre 1684 et la publication de 1687 l'ouvrage a démesurément grossi, passant de onze propositions à plus de deux cents.

---

(1) Ce résultat et cette démonstration passeront presque sans changement dans la prop. 7 des Principia, puis deviendront le corollaire 1 de la prop. (dans la 2ème édition).

Le De Motu est beaucoup plus modeste de proportions, beaucoup plus accessible aussi. Il y a grand avantage à lire d'abord l'une de ses versions avant de plonger dans les méandres et les raffinements des Principia. Une première orientation est indispensable, un repérage des résultats principaux , des enchaînements et des méthodes, permettant ensuite de suivre les Principia .

Les premières pages des Principia ont été très lues et activement discutées, notamment par les philosophes : lois du mouvement, scolie sur le temps et l'espace absolus. Les débats sur les fondements de la mécanique, sur la nature de l'espace et du temps, se sont nourris de ce préambule des Principia. Dans la perspective que nous adoptons ici, ces textes n'occupent plus une place aussi essentielle. le De Motu , dans ses toutes premières versions, ne contient encore ni les fameuses trois lois du mouvement, ni la mention du temps et de l'espace absolus. Il apporte avant tout le premier témoignage d'une traduction géométrique de la force centrale. C'est ce qui nous intéresse au premier chef : comment la force a pu recevoir une expression géométrique , et comment les mathématiques sont devenues aptes à traduire la dynamique.

Désormais la dynamique est intégrée au discours mathémathique. Les formes particulières pourront évoluer : Newton proposait l'étude de configurations géométriques naissantes ou ultimes, alors qu'après lui les Bernoulli ou Euler exprimeront les mêmes énoncés dans le langage nouveau du calcul différentiel. La science du mouvement se trouvera "exposée analytiquement" (selon le titre de la Mechanica d'Euler), mais son noyau essentiel restera identique à ce que Newton proposait dès 1684 dans les manuscrits De Motu.

LA RIGUEUR MATHEMATIQUE

EULER ET LE XVIIIe siècle

Jean DHOMBRES
IREM de Nantes