QUELQUES GRANDES PROBLEMATIQUES

DE L'HISTOIRE DE LA GEOMETRIE

Rudolf BKOUCHE

I.R.E.M. de Lille

<u>Le monde apparent est l'unique monde, c'est un mensonge que d'y ajouter le monde vrai</u>.

Nietzche

<u>L'histoire n'existe que par rapport aux questions que nous lui posons.</u>

Paul Veyne <u>L'inventaire des différences</u>

De quoi s'occupe le géomètre ?

Quel est l'objet de la géométrie ? question insidieuse, comment choisir (s'il faut choisir) entre la tradition euclidienne qui s'étend jusqu'à nos jours et le bouleversement de la pensée géométrique hilbertien ; s'agit-il de la même géométrie, s'agit-il seulement des mêmes objets même si l'on y retrouve les mêmes mots.

Ceci pose la question des objets mathématiques, moins celle de leur existence que celle de leur permanence tant il est vrai que l'histoire des mathématiques est en un certain sens l'histoire de la transformation des objets mathématiques ; la géométrie après Klein et Hilbert est-elle la même que la géométrie grecque, et plus précisément quel est le lien (si lien il y a) entre les diverses formes du discours mathématique.

Cette impossibilité d'assurer une permanence des objets mathématiques, paradoxale lorsqu'on <u>sait</u> que les mathématiques représentent l'un des blocs stables (sinon le seul) parmi les constructions de l'esprit humain, a conduit à concevoir les mathématiques moins comme une science qui se développe autour d'objets bien définis que comme un domaine de la connaissance qui se développe à travers une méthode, savoir la méthode déductive qui s'organise autour de la démonstration. Le miracle grec, dont les mathématiques se réclament, ne s'est-il pas accompli avec la naissance de la pensée rationnelle et la démonstration n'en est-elle pas le fruit le plus pur ?

Ainsi le slogan

<u>Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration</u>

qui ouvre l'introduction des Eléments de Mathématiques [8] de Nicolas Bourbaki, slogan fondateur de cette conception qui réduit les mathématiques à leur méthode, mais slogan paradoxal. La conception de la démonstration issue des mathématiques grecques n'a-t-elle pas été remise en question avec la fameuse crise des fondements et reformulée par la critique hilbertienne et l'introduction des méthodes formalistes. Ainsi l'attitude ambigüe devant les Eléments d'Euclide, considérés comme le premier exemple de ce qu'on appelle aujourd'hui le développement hypothético-déductif (ce qui est d'une certaine façon un anachronisme !) et en même temps critiqués pour leur manque de rigueur et le trop fréquent appel à une intuition géométrique que la modernité, grâce à Hilbert (comme on dit grâce à Dieu), aurait su débusquer et éliminer. Ainsi de ces fameux cas d'égalité des triangles dont les démonstrations à la grecque (depuis Euclide jusqu'à Legendre et aux ouvrages scolaires de l'avant-mathématiques-modernes) sont devenues inacceptables, justification au mieux comme je l'ai entendu dire par un professeur de lycée qui n'osait plus appeler démonstration de tels raisonnements.

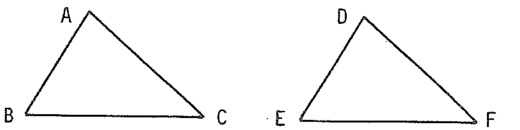
Il y aurait ainsi à écrire une histoire de la démonstration, ou plutôt des conditions de légitimation de la démonstration, histoire qui nous permettrait de mieux comprendre ce que signifie une telle légitimation, ainsi que les hésitations et les difficultés qui accompagnent sa mise en place, histoire qui nous permettrait aussi de nous libérer de certains délires logico-mathématiques qui sont loin d'avoir disparu de l'enseignement d'aujourd'hui.

Quelle relation y a-til entre la démonstration de la proposition 4 du livre I des Eléments d'Euclide (le second cas d'égalité des triangles) qui s'appuie sur le principe de l'égalité par superposition et la démonstration de ce second cas d'égalité via l'algèbre linéaire.

La première que nous citons ici dans la traduction de Hoüel [29] décrit ce qui se passe lorsqu'on applique le premier triangle sur le second, le principe de l'égalité par superposition légitimant le raisonnement ; celui-ci s'appuie explicitement sur la figure, celle-ci n'est pas simple support du raisonnement, elle représente l'objet sur lequel porte le raisonnement et c'est à travers l'intuition de l'objet que se constitue le raisonnement.

Si deux triangles ABC, DEF ont les deux cotés AB, AC, respectivement égaux aux deux côtés DE, DF, et si les angles BAC, EDF, compris entre les cotés égaux, sont égaux ; ces triangles auront leurs bases BC, EF égales, les triangles seront égaux et les angles restants, opposés aux cotés égaux, ABC et DEF, ACB et DFE égaux chacun à chacun.

Fig. 1



Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF, et pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E puisque AB=DE. Ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à l'angle EDF, AC prendra la direction de DF, et puisque AC=DF, le point C tombera sur le point F. Donc puisque B coincide avec E et C avec F, BC coïncidera avec EF, car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible. Le reste suit.

La seconde démonstration peut se formuler ainsi :

Dans le plan affine euclidien réel, on considère deux triangles ABC et A'B'C' tels que d(A,B)=d(A',B') et d(A,C)=d(A',C') et les angles (AB,AC) et (A'B',A'C') ont même mesure, on sait qu'il existe une application affine et une seule f telle que f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C', et les hypothèses impliquent que l'application linéaire associée à f est une isométrie vectorielle, ainsi f est une isométrie affine.

Au contraire de la démonstration euclidienne qui s'appuie sur la représentation que nous avons des triangles ABC et A'B'C', la démonstration algébrico-linéaire n'a pas besoin, théoriquement du moins, d'une telle représentation, on peut la lire à la lettre c'est-à-dire uniquement comme manipulation formelle de signes s'appuyant sur un discours formel antérieur, savoir la théorie des transformations linéaires et des formes quadratiques. Dans cette seconde démonstration, purement formelle, toute intuition a disparu et par cela même toute signification autre que celle liée à la manipulation des signes ; mais ce qu'elle perd en signification, elle le gagne par les potentialités de sens qu'elle ouvre à travers les divers domaines où le linéaire intervient ; le triangle euclidien n'est plus qu'un triplet de lettres satisfaisant à des relations données et l'énoncé physico-géométrique de la géométrie grecque est transformé en un énoncé algébrique porteur d'une multiplicité de représentations.

A côté de cette double démonstration du second cas d'égalité des triangles, nous citerons la démonstration de l'égalité des angles droits, première proposition des Eléments de Géométrie de Legendre [36] ; rappelons qu'Euclide avait admis cette proposition comme postulat.

Notons d'abord la définition de l'angle droit énoncé par Legendre.

Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre droite CD de telle sorte que les angles adjacents soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appellent un angle droit ; et la ligne AB est dite perpendiculaire à CD.

définition analogue à celle des Eléments d'Euclide.

Voici comment Legendre démontre l'égalité des angles droits.

Soient la droite CD perpendiculaire à la droite AB, et la droite GH perpendiculaire à la droite EF, on peut supposer que les segments CA, CB, GE, GF sont égaux.

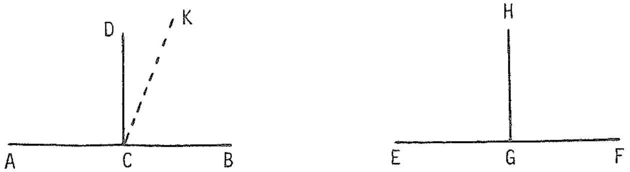


fig.2

Plaçons la droite EF sur la droite AB de sorte que E coïncide avec A et F avec B, auquel cas le point G milieu de EF coïncide avec le point C milieu de AB, alors la droite GH viendra coïncider avec la droite CD ; en effet dans le cas contraire où GH ne coïncide pas avec CD mais vient en CK situé par exemple dans le quadrant BCD, alors puisque les angles EGH et FGH sont égaux, les angles ACK et BCK seront égaux, mais d'autre part les angles ACD et BCD sont égaux, l'angle ACK est plus grand que l'angle ACD, l'angle BCK est plus petit que l'angle BCD, par conséquent l'angle ACK est plus grand que l'angle BCK ce qui est impossible. Donc GH vient coïncider avec CD (fig. 2) ce qui prouve la proposition.

Ici comme dans la démonstration euclidienne précédente, le raisonnement porte sur l'objet représenté par la figure, la démonstration a pour but de mettre en évidence une vérité portant sur les objets. Ce sont donc les objets qui définissent le domaine géométrique ce qui amène à préciser ce que sont les objets de la géométrie, objets issus du donné empirique mais qui sont déjà des abstractions de ce donné, en ce sens qu'ils se définissent par quelques propriétés particulières des objets empiriques, propriétés définies elles-mêmes par le type de problèmes que l'on se pose par rapport à ces objets. Et en ce qui concerne la géométrie étudiée par Euclide et Legendre, il s'agit essentiellement de problèmes liés à la mesure, nous y reviendrons. Ainsi l'abstraction, cette opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière sans faire attention aux autres comme l'explique D'Alembert [17] est elle-même reliée aux types de problèmes que se pose l'esprit humain confronté aux objets qu'il rencontre. Les méthodes de raisonnement portant sur les objets ainsi définis se construisent autour de ces objets, la logique n'étant que la technique qui permet la mise en forme du raisonnement de façon à en assurer la légitimité, mais cette légitimité se détermine à travers les objets ; ainsi Lacroix précise au début de ses Eléments de Géométrie [32] publiés au début du XIX^{e} siècle.

La méthode des Géomètres n'est pas l'unique cause de la certitude de leurs résultats, cette certitude est principalement due

à la nature même des idées qu'ils ont eues à combiner.

Ce qui transformera les conditions de légitimation de la démonstration et par voie de conséquence la forme du discours mathématique ne se situe pas dans un désir plus profond de rigueur et une plus grande abstraction (la démonstration via l'algèbre linéaire du second cas d'égalité des triangles n'est pas plus rigoureuse que l'euclidienne, elle est d'un autre ordre) ; c'est l'apparition de nouvelles problèmatiques qui montrera les limites de l'intuition géométrique à la grecque et par conséquent les limites du raisonnement euclidien ; en particulier, en ce qui concerne la géométrie, le problème des parallèles jouera un rôle important, problème moins d'ordre logique que d'ordre métaphysique, nous y reviendrons. L'axiomatique hilbertienne constituera la réponse la plus efficace aux problèmes de légitimation (elle ne fut pas la seule mais ce n'est point le lieu d'en parler ici) mais cela se fera au prix de la définition même des objets de la géométrie qui perdront leur caractère d'abstraction d'objets empiriques pour devenir de purs objets formels, c'est-à-dire définis seulement par les relations, elles aussi formelles, qui les lient; par voie de conséquence le raisonnement lui-même se transformera, réduit, théoriquement du moins, à une pure syntaxe.

Ainsi transformations des objets et transformations des méthodes s'induisent les unes les autres, impliquant la remise en cause des conditions de légitimation des démonstrations. Le slogan bourbakien qui espérait sauver l'unité des mathématiques en renonçant aux objets au profit des méthodes [8] devient lui-même évanescent ; la question se pose alors de ce qui constitue les permanences, les invariants historiques si l'on veut, qui font que l'on considère le discours euclidien et le discours bourbakien comme participant, malgré leurs différences, d'un même domaine de la connaissance qu'on appelle traditionnellement les mathématiques. Qu'est-ce qui fait que l'histoire de la géométrie n'est pas simple juxtaposition de discours faisant appel à quelques références communes ? qu'est-ce qui fait l'unité d'ouvrages aussi divers que les Eléments d'Euclide ou ceux de Legendre, le chapitre IX (Formes sesquilinéaires et formes quadratiques) de l'Algèbre de Bourbaki et la Géométrie de Berger ?

Le problème est alors moins de définir les objets et les méthodes de cette science multiforme que l'on appelle la géométrie que d'expliciter les diverses problématiques qui ont conduit à construire le domaine géométrique tel que nous le connaissons, et à travers ces problèmatiques d'essayer de comprendre les raisons de son évolution, de relier ainsi la géométrie d'aujourd'hui à celle d'hier et peut-être ainsi de mieux comprendre les enjeux de la science d'aujourd'hui ; c'est là en particulier que se situe l'intervention d'une perspective historique dans l'enseignement.

La géométrie, avant que d'être la construction rationnelle que l'on sait (que ce soit celle d'Euclide ou celle de Hilbert), est d'abord le moyen que s'est donné l'homme pour définir son rapport avec son environnement spatial. Les grandes problèmatiques de la géométrie se situent dans cette confrontation de l'homme avec les phénomènes spatiaux (les faits de l'espace pour rependre une expression de Charles Méray [41]).

x x x
x x

Problématique de la mesure d'abord, liée à l'arpentage d'une part (la mesure des terrains et la détermination de l'impôt, la délimitation des terrains après les crues du Nil en Egypte), à l'astrologie et l'astronomie d'autre part. La géométrie de la mesure sera développée par les géomètres grecs et codifiée par Euclide avec les Eléments, ouvrage qui restera, jusqu'à la mise en place de l'axiomatique moderne (celle de Hilbert), le modèle de cette rationalisation du réel que constitue la physique mathématique ; ainsi les Principia de Newton sont pour la mécanique ce que les Eléments d'Euclide sont pour la géométrie.

Qui dit mesure dit comparaison de grandeurs, ce qui nécessite la définition de l'égalité de ces grandeurs ; ce sera, en ce qui concerne les grandeurs géométriques, le principe de l'égalité par superposition (axiome 4 ou 8 des Eléments selon les éditions) que nous citons ici dans la traduction de Hoüel [29].

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles.

Nous retrouvons ce principe tout au long de l'histoire de la géométrie ; ainsi D'Alembert le considère comme l'une des deux propositions fondamentales de la géométrie, l'autre étant la mesure des angles par les arcs de cercle, les autres propositions s'en déduisant [17], et quelques années plus tard Lacroix écrira dans ses Eléments de Géométrie [32] à propos des angles.

Mais est-il indispensable de définir l'angle ? Ne suffit-il pas de le montrer et d'observer ensuite que les angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, leurs cotés coïncident chacun dans deux points, et qu'alors ils ne cesseront point de coïncider, quelque loin qu'on les prolonge ?

Axiome fondateur de la géométrie, le principe de l'égalité par superposition s'appuie essentiellement sur la notion de mouvement ; la géométrie est ainsi fondée empiriquement sur le lien entre corps solide et mouvement, et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité des deux corps [29]. Le problème de la géométrie est alors d'énoncer à priori des conditions d'égalité, ce qui permettra d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur les critères d'égalité ainsi définis. C'est le rôle des fameux cas d'égalité des triangles ; si leur démonstration s'appuie sur l'utilisation effective de la superposition (et par cela même du mouvement) leur intervention dans le raisonnement permet d'oublier le mouvement, exemple significatif d'une démarche s'appuyant sur un donné empirique (le mouvement) pour fabriquer de la connaissance rationnelle (c'est-à-dire construite sur le seul

raisonnement).

Et d'Alembert précise dans le texte cité ci-dessus à propos du principe de l'égalité par superposition [17]

Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.

Bien que le principe de l'égalité par superposition soit énoncé de façon générale, son utilisation pour les corps solides pose problème ; d'une part la superposition effective d'un corps solide sur un autre est matériellement impossible mais ceci ne remet pas en cause le principe dont le rôle est justement d'oublier la matérialité (et l'impénétrabilité) des corps ; d'autre part la considération des figures symétriques dans l'espace introduit une notion d'égalité irréductible à la superposition (le problème se résoud dans le cas des figures planes en sortant du plan). Euclide avait déjà défini au livre XI des Eléments une notion d'égalité des polyèdres reposant sur l'égalité des faces qui ne faisait pas appel à la superposition (celle-ci n'intervenant que pour l'égalité des faces) mais sa définition n'était pas suffisamment explicite. Ceci a conduit Legendre à distinguer deux types d'égalité, l'égalité par coïncidence et l'égalité par symétrie [36].

Dans la construction axiomatique hilbertienne, fondamentalement différente de la construction euclidienne, le problème de l'égalité sera résolu par l'introduction des axiomes de congruence mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler [28].

C'est ce principe de l'égalité par superposition qui relie géométrie et mécanique des corps solides, celle-ci s'appuyant sur la géométrie euclidienne dont elle est, en un certain sens, le prolongement.

Notons que la notion de mouvement peut être rendue explicite sans intervention du temps comme l'explique Hoüel dans l'ouvrage cité [29] et que cette notion fut à l'origine de la réforme de l'enseignement mathématique de 1905, réforme qui donna lieu à des débats aussi passionnés que celle de 1970 (nous renvoyons aux ouvrages de Méray, Borel et Bourlet cités en bibliographie).

Parmi les grands problèmes que se posaient les géomètres grecs, la détermination des aires a joué un rôle important, cel a conduit à ce qu'on peut appeler (avec précaution cependant) un calcul sur les aires : la méthode des aires qui consiste à déterminer les conditions d'égalité d'aires et les rapports d'aires (rapport au sens de la théorie des grandeurs) et à partir de laquelle on obtient diverses relations entre grandeurs (comme le théorème dit de Pythagore et autres relations métriques). Mais ce calcul s'appuie explicitement sur la nature des grandeurs sur lesquelles il opère et en cela il diffère du calcul algébrique moderne ; en particulier le terme d'algèbre géométrique employé par des historiens des sciences du début du siècle est trompeur.

La méthode des aires s'appuie essentiellement sur la proposition suivante (proposition XXXVII du livre I des Eléments d'Euclide) [21]

Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux

complétée après l'exposé de la théorie des grandeurs au livre V par la proposition I du livre VI.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

C'est la méthode des aires qui permet à Apollonius d'étudier les propriétés des coniques, en particulier les relations métriques dont on sait aujourd'hui qu'elles sont équivalentes aux équations d'une conique rapportée aux axes définis par une tangente et le diamètre passant par le point de contact.

Avec Apollonius on atteint les limites de la méthode des aires, à la fois par la lourdeur des énoncés et la complexité des démonstrations ; cependant la méthode des aires permettra de résoudre de nombreux problèmes liés à la mesure, en particulier elle permettra aux mathématiciens arabes Al Khwarizmi et Omar Khayyam de développer une étude géométrique de la résolution des équations [59].

Cependant, c'est avec le calcul littéral développé par Viète dans son Introduction à l'Art Analytique (1591) [56] que se mettra en place une nouvelle méthode, ce sera la méthode des coordonnées de Descartes et Fermat.

C'est en 1637 que Descartes publie la Géométrie [18], appendice au Discours de la Méthode, dans laquelle il développe le nouveau calcul géométrique.

Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après, que de connaitre la longueur de quelques lignes droites pour les construire

écrit Descartes au début de son ouvrage, et il remarque que le choix d'une unité permet de ramener tout problème de géométrie, via la mesure, au calcul sur des nombres.

Fermat, quant à lui, suit une démarche analogue à celle de

Descartes dans son Introduction aux lieux plans et solides (publiée après la mort de Fermat mais qui aurait été rédigée avant la publication de la Géométrie de Descartes), retrouvant et complétant des résultats d'Apollonius dont il a par ailleurs reconstitué les Deux livres sur les lieux plans [24].

Si Descartes et Fermat suivent des méthodes analogues, confortés tous deux dans la puissance de leur méthode par la résolution d'un vieux problème posé par Pappus au IV^{e} siècle, savoir, déterminer le lieu d'un point dont le produit des distances à une première famille de droites est dans un rapport donné avec le produit des distances à une seconde famille de droites, leur conceptions sont différentes. Malgré des notations plus lourdes que celles de Descartes, Fermat semble avoir compris la portée formelle du calcul littéral, ainsi c'est par des arguments relevant du calcul littéral qu'il montre comment la résolution d'une équation se ramène à une intersection de courbes dans sa Dissertation en trois parties [24] ; Descartes au contraire abordant le même problème de l'étude géométrique des équations algébriques au livre III de la Géométrie a constamment besoin de références géométriques ce qui d'une certaine façon alourdit sa démarche.

Ainsi se mettent en place avec la méthode des coordonnées à la fois une algébrisation de la géométrie et une géométrisation de l'algèbre ici définie comme l'étude des équations, contribuant ainsi au mouvement d'unification des deux domaines des mathématiques définis par le nombre d'une part et la figure de l'autre. Cette unification via la mesure reste dans le prolongement de la tradition grecque qu'elle renouvelle sur le plan de la méthode, objets et problèmes s'inscrivant quant à eux dans le cadre de la pensée mathématique grecque. Cependant, et c'est en cela que je pense que Fermat a une vision plus vaste que celle de Descartes (en ce qui concerne les mathématiques), cette unification mettra en valeur la place du formel, c'est-à-dire d'un calcul sans référence aux objets.

Autre aspect de la méthode des coordonnées, la vieille classification des problèmes géométriques telle qu'elle est expliquée par Pappus dans sa Collection Mathématique [44] sera complètement transformée ; pour les géomètres grecs la résolution d'un problème de géométrie se ramène à la détermination d'une intersection de courbes et la classification de Pappus repose sur le type de courbes qui y interviennent : problèmes plans lorsque ces courbes sont des droites et des cercles (problèmes résolubles à la règle et au compas), problèmes solides lorsqu'interviennent des sections coniques et problèmes linéaires lorqu'interviennent d'autres courbes. La méthode des coordonnées en associant à une courbe une équation va permettre de distinguer les courbes géométriques (définies par une équation polynomiale) et les courbes mécaniques (les autres), respectivement appelées depuis Leibniz courbes algébriques et courbes transcendantes ; de plus les courbes algébriques sont classifiées par leur degré (le degré de l'équation qui les définit). Ceci permettra de classer les problèmes à partir des courbes qui interviennent dans leur résolution. En particulier se pose dans le cas algébrique le problème de déterminer le plus petit degré possible, problème qui sera étudié par

Fermat dans sa Dissertation en trois parties pour la détermination des moyennes proportionnelles : on rappelle que deux grandeurs a et b étant données, il s'agit de trouver une suite de grandeurs x_1, x_2... x_4 telles que dans la suite (a, x_1, x_2,... x_n, b), le rapport de deux grandeurs consécutives soit le même , ou si l'on préfère

$$a/x_1=x_1/x_2=\ldots=x_n/b$$

Nous ne pouvons ici développer plus longtemps l'histoire de la méthode des coordonnées et nous renvoyons à la bibliographie [16] [31]

x x x
x x

Problèmatique de la représentation ensuite, issue des problèmes posés par la représentation sur un plan (et plus généralement sur une surface) des situations spatiales, qui conduit de l'étude de la perspective par les peintres et les architectes de la Renaissance à la géométrie projective du XIX^{e} siècle, problématique née d'une pratique, celle du dessin et dont les premières théorisations sont liées à l'art du dessin [37] [43].

Pour les Italiens du Quattrocento, le tableau est défini comme la fenêtre ouverte (Alberti) ou la paroi de verre (Leonardo da Vinci) à travers laquelle on voit les objets, la représentation picturale est alors définie comme l'intersection de la pyramide visuelle joignant les divers points de l'objet à l'oeil. Le problème est alors de construire cette intersection.

Une première méthode sera développée par Brunelleschi et Alberti, continuée par Piero della Francesca puis Albrecht Dürer: la construction légitime. On connaissait les projections orthogonales sur le plan horizontal et sur le plan vertical, le plan et l'élévation (l'ichnographia et l'ortographia du premier des Dix livres d'Architecture de Vitruve au premier siècle avant J.C.), c'est à partir de ces projections que l'on construit la représentation perspective, le plan du tableau étant supposé vertical et perpendiculaire au plan de l'élévation. Cette construction trop lourde sera simplifiée, ce sera la construction abrégée exposée par Alberti dans son Trattato della Pittura (1435) puis par Piero della Francesca dans son De Prospectiva Pingendi (ouvrage qui ne sera publié qu'en 1899) et Dürer dans son Underweyssüng der Messung dem Zirckel und Rychtscheyd (Instructions pour la mesure à la règle et au compas) publié en 1525. Cette construction se met en place autour de la représentation d'un dallage carré (qui sera la figure de référence pour les constructions perspectivistes).

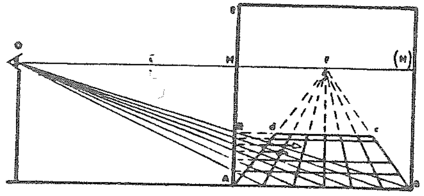


fig.3

A côté de cette construction se mettra en place la méthode des points de distance, points vers lesquels convergent les diagonales du dallage, points qui sont sur la ligne d'horizon à une distance du point de fuite principal (projection de l'oeil sur le plan du tableau et par lequel passent les perspectives des droites perpendiculaires au plan du tableau) égale à la distance de l'oeil au tableau.

La convergence des diagonales fut d'abord un procédé de vérification de l'exactitude de la représentation perspective d'un dallage carré avant d'être un procédé de construction ; les points de distance ont été définis par Piero della Francesca dans son traité De Prospectiva Pingendi, on les retrouve sous le nom de tiers points dans les dessins du De Artificiali Perspectiva de Jean Pelerin dit Viator, publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins ne donne aucune indication sur leur statut.

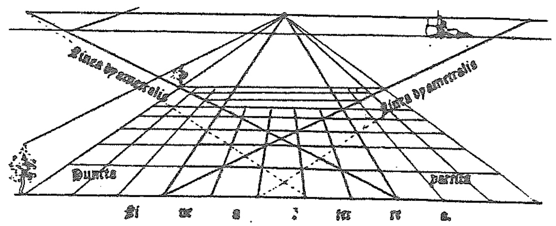


fig.4

Pour plus de détails sur ces deux méthodes : construction abrégée et méthode des points de distance, nous renvoyons à l'article de J.P. Legoff [37] et à l'ouvrage de R. Sinisgalli [51]

L'équivalence des deux méthodes sera démontrée rigoureusement (c'est-à-dire en utilisant la théorie euclidienne des proportions) par Vignola, architecte italien mort en 1573 dans un ouvrage Le due regole della prospettiva publié en 1584 par E.

Danti, ouvrage sur lequel nous reviendrons. Cette démonstration serait aujourd'hui considérée comme redondante dans la mesure où l'on sait que l'on représente le même objet de l'espace par la même transformation, mais cela fait appel à la fois à la notion d'espace et à la notion de transformation, notions étrangères au contexte de l'époque où se met en place la perspective (ce sont les recherches autour des constructions perspectivistes qui conduiront à mettre en place ces notions [54]) ; on pourrait d'autre part remarquer que l'équivalence à priori des deux constructions s'appuie sur les propriétés d'incidence mais celles-ci sont utilisées à l'époque avec prudence comme le montre l'ouvrage de Guido Ubaldo Del Monte publié en 1600, les Perspectivae Libri sex (Les six livres de perspective) dont Christian Guipaud doit bientôt publier une traduction commentée [27].

Dans son ouvrage, Guido Ubaldo définit la notion générale de point de fuite d'une direction donnée, point du tableau par lequel passent les perspectives des droites parallèles à cette direction. Guido Ubaldo donne une première démonstration qui utilise la théorie euclidienne des proportions, démonstration compliquée qu'il étudie à travers divers cas particuliers, et c'est seulement après cette démonstration qu'il en indique une seconde utilisant les propriétés d'incidence : une droite étant donnée, non parallèle au plan du tableau, le plan passant par l'oeil et la droite contient la parallèle à cette droite passant par l'oeil, parallèle qui coupe le plan du tableau en un point par lequel passe la perspective de la droite donnée. Démonstration à la fois courte et efficace, mais il semble que celle-ci ne soit pas canonique pour l'époque, la rigueur géométrique s'appuyant sur un discours géométrique à la grecque comme aujourd'hui, pour certains, il n'y a de rigueur qu'à travers le discours à la Hilbert. Une autre démonstration de l'existence du point de fuite s'appuyant sur les propriétés d'incidence sera donnée par Stevin dans son Traité d'Optique (1605) mais l'exposé y montre un certain embarras. Il faudra attendre l'ouvrage de Taylor (celui de la formule) New Principles of Linear Perspective (1719) [53] pour un exposé géométrique de la perspective fondé sur les relations d'incidence préalablement énoncée comme axiomes (cités ici dans la traduction du P. Rivoire (1759).

Axiome I — L'intersection commune de deux plans est une ligne droite.

Axiome II — Lorsque deux lignes droites se rencontrent en un point, ou lorsqu'elles sont parallèles l'une à l'autre, un même plan peut passer par toutes les deux.

Axiome III — si deux lignes droites, étant parallèles ou formant un angle, sont coupées par une troisième, elles seront toutes trois dans le même plan ; c'est-à-dire, qu'un plan qui passera par deux de ces lignes, passera aussi par la troisième

Axiome IV — Tous les points d'une ligne droite sont dans le même plan où est cette ligne.

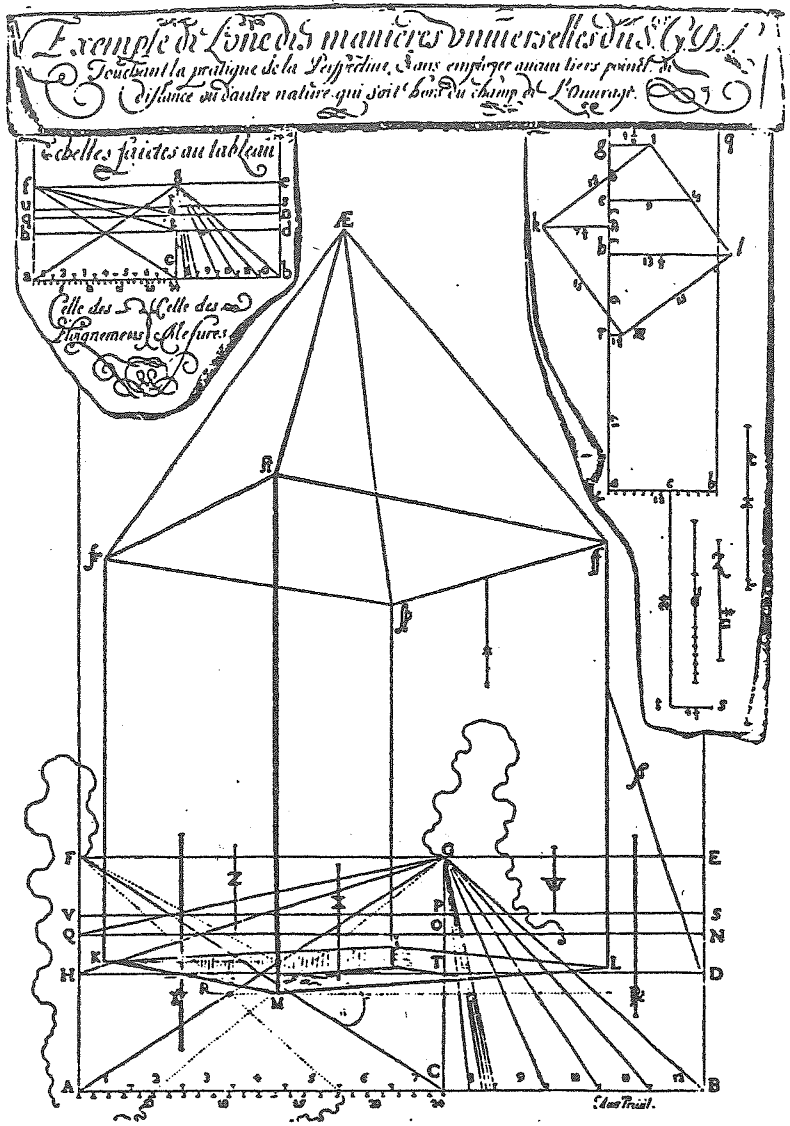


fig.5

Tout au long du XVI^{e} siècle paraîtront de nombreux ouvrages sur la perspective définissant diverses méthodes de constructions, plus ou moins reliées à la construction légitime et à la méthode des points de distance, nous avons cité ceux de Vignola, Guido Ubaldo et Stevin, pour une liste plus complète nous renvoyons à l'ouvrage de Poudra [48].

Si les ouvrages de Guido Ubaldo et de Stevin définissent les principes de la perspective, les méthodes pratiques utilisées sont multiples ce qui alourdit l'exposé et n'en montre pas toujours l'unité. Ce sera l'oeuvre de Desargues, ingénieur et architecte, de chercher à définir une méthode générale unifiant les divers procédés des praticiens : peintres, architectes, tailleurs de pierre, méthode qui relève à la fois du tracé géométrique et de la géométrie rationnelle. Cette démarche vers la construction d'une méthode géométrique qui se veut universelle est analogue à celle de ses contemporains Descartes et Fermat construisant une telle méthode autour du calcul algébrique (cf. ci-dessus).

En 1636, Desargues publie un opuscule de 12 pages <u>Exemples de l'une des manières universelle du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective</u>... dans lequel il indique, autour d'une figure (cf. fig.5) les principes essentiels de la construction, un fac-similé de ce texte est reproduit dans l'ouvrage de Field and Gray [25]. Je me contenterai, en ce qui concerne ce texte, de noter la réticulation du plan horizontal par des faisceaux de lignes parallèles (les lignes coordonnées d'aujourd'hui) représentés sur le plan du tableau par des faisceaux de lignes parallèles ou de lignes concourantes (suivant que la direction des lignes est parallèle au plan du tableau ou non), ce qui permet de placer un point sur le plan du tableau à partir des lignes coordonnées passant par ce point. Notons de plus que Desargues ramène par un changement d'échelle un point de fuite extérieur au tableau à l'intérieur du tableau ce qui rend la méthode plus délicate mais montre la maîtrise de Desargues pour cette construction.

Le procédé de réticulation du plan est ancien et se relie à la figure de référence déjà citée du tracé perspectif, savoir le dallage carré, et nous nous référons ici à une construction de Vignola, la première figure est reproduite par Poudra [48], la seconde par Sinisgalli [51]

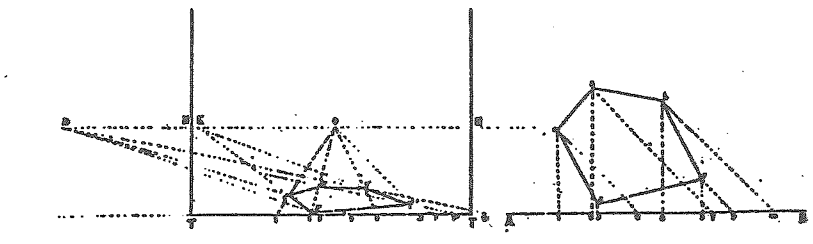


fig.6

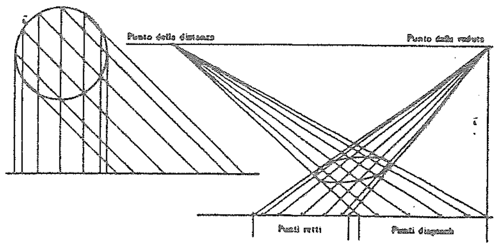


fig.7

Cette intervention de ce que nous appelons aujourd'hui les lignes coordonnées amènera Desargues à considérer faisceaux de droites concourantes et faisceaux de droites parallèles comme analogues et ainsi à introduire la notion de point à l'infini (point de concours de droites parallèles) qu'il étudie comme un point ordinaire. C'est le point de départ de son <u>Brouillon project d'une atteinte aux évènemens des rencontres du cône avec un plan</u> (1639) [52]. Il considère un cône ou un cylindre à base circulaire comme la même figure qu'il appelle un <u>rouleau</u>, figure engendrée par une droite passant par un point fixe (à distance finie ou à l'infini) et s'appuyant sur un cercle. Une conique est alors l'intersection d'un plan et d'un rouleau ce qui la définit comme perspective d'un cercle. Desargues montre alors l'invariance par perspective de certaines configurations, ce qui lui permet de <u>projeter</u> les propriétés du cercle pour obtenir les propriétés des coniques, c'est la <u>méthode des transformations</u> qui sera l'un des principes directeurs des géomètres projectifs du XIX^{e} siècle.

Si le point de vue de Desargues est projectif comme le montre la façon dont il utilise les éléments à l'infini, les démonstrations restent dans la tradition grecque, s'appuyant sur la théorie des proportions et les comparaisons de raisons ; cependant Desargues précise, via le théorème de Menelaüs, l'invariance par projection de certaines relations métriques ce qui lui permet d'étendre la définition de certaines configurations définies métriquement au cas ou certains éléments sont à l'infini, ainsi la configuration définie par six points en involution et celle définie par quatre points en involution (la division harmonique).

C'est encore l'utilisation de la perspective et du théorème de Menelaüs qui permet à Desargues de démontrer le théorème sur les triangles homologiques (appelé aujourd'hui <u>théorème de Desargues</u>) qui paraît en 1648 dans un traité de perspective publié par Abraham Bosse : <u>Manière universelle de Monsieur Desargues pour pratiquer la perspective</u>... [32]

Ainsi le point de vue projectif issu du problème de la représentation perspective s'appuie pour être légitimé sur le raisonnement <u>à la grecque</u> lié à la mesure ; le raisonnement projectif (c'est-à-dire lié aux propriétés d'incidence) se dégagera peu à peu jusqu'au traité déjà cité de Brook Taylor, notons cependant

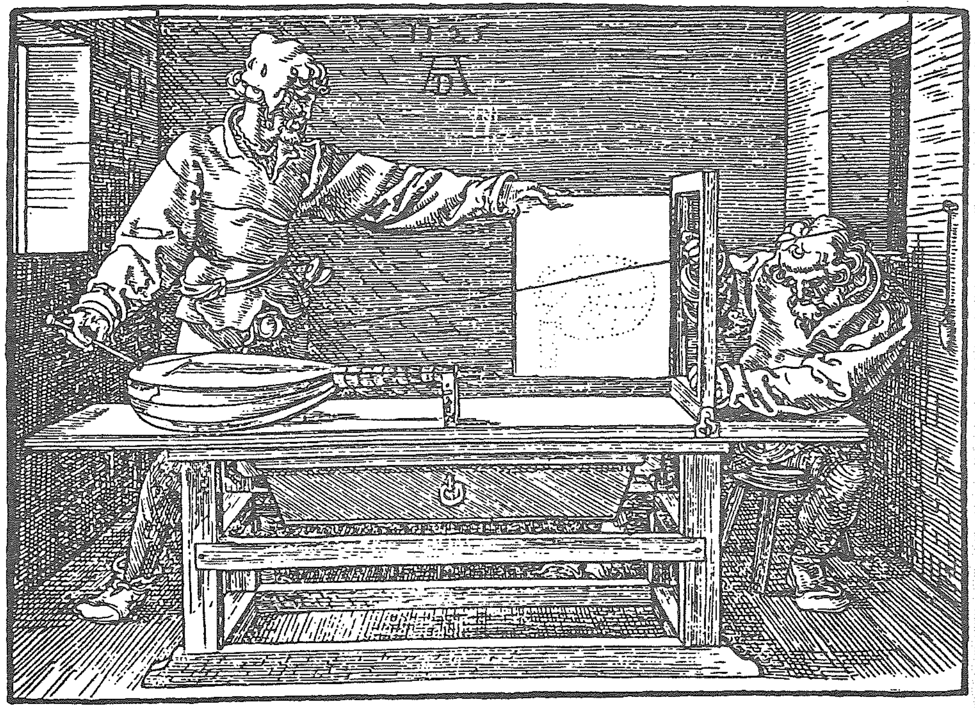


fig.8

le Traité des Coniques de Blaise Pascal, ouvrage dont il ne nous reste que le premier chapitre retrouvé dans les papiers de Leibniz, dans lequel Pascal détermine les divers types d'interection d'un cône et d'un plan (les trois coniques usuelles mais aussi les coniques dégénérées en droites ou réduites à un point) [45].

Il faut cependant noter que les propriétés d'incidence apparaissent déjà chez les perspectivistes y compris sous l'aspect expérimental de la fenêtre ouverte ou de la paroi de verre illustré par les portillons de Dürer, instrument à dessiner en perspective que Dürer a représenté dans certaines de ses gravures (cf ci-contre). Le problème se pose alors d'expliciter les raisons qui font que ces propriétés ne sont pas ou sont acceptées dans le raisonnement géométrique, ce qui renvoie au problème de la légitimation posé au début de cet article, problème relié au statut des objets mathématiques sur lequel nous reviendrons à la fin de cet article.

Pour diverses raisons, le point de vue projectif élaboré par Desargues sera occulté par la méthode des coordonnées plus proche du calcul infinitésimal naissant ; toutefois ce point de vue ne sera pas complètement effacé, nous avons déjà cité Blaise Pascal, nous citerons un autre disciple de Desargues : Philippe de la Hire qui publie plusieurs ouvrages sur les coniques introduisant des notions telles que les propriétés harmoniques du quadrilatère complet, les pôles et polaires (la dénomination moderne apparaitra plus tard au début du XIXème siècle), notions qu'il utilise pour étudier les propriétés des coniques.

L'étude de la perspective se poursuit au XVIIème siècle où paraissent plusieurs traités, en particulier citons les travaux sur les anamorphoses, déformations perspectivistes qui exigent, peut-être plus que la représentation perspectiviste classique, la rigueur de la construction ; nous renvoyons aux articles de Bessot dans les Cahiers de la Perspective [3] ainsi qu'à l'ouvrage de référence de Baltrusaitis [1].

La géométrisation de la perspective s'achève avec l'ouvrage déjà cité de Taylor et les travaux de Lambert dans la seconde partie du XVIIIème siècle. Dans la continuité de la pensée de Desargues, tout en se libérant du raisonnement géométrique à la grecque et s'appuyant sur les propriétés d'incidence, Taylor et Lambert se proposent de définir des règles universelles de construction s'appuyant sur quelques principes généraux. Ainsi Lambert écrit au début de La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral (1759) [34]

Des règles universelles présupposent des principes également universels, qu'il vaut la peine d'approfondir, quand on n'a trouvé que les premières. Avec une attention médiocre on découvrira beaucoup au delà de ce qu'on attendait, dès qu'on a soin de combiner les rapports entre les parties de l'objet.

C'est que, pour Lambert, les règles ont à la fois une fonction pratique : déterminer les procédures de construction effectives et une fonction théorique en ce que leur effectivité même légitime les principes qui les sous-tendent ; ainsi l'aspect instrumental de la géométrie, que ce soit avec la règle et le compas des géomètres grecs ou avec les instruments plus sophistiqués inventés par les géomètres ultérieurs, est inséparable de son aspect théorique, ainsi les constructions participent du raisonnement géométrique. Ce que Roger Laurent précise dans la préface de la réédition de l'Essai sur la Perspective [33] où Lambert définit le perspectographe, instrument à dessiner en perspective qu'il a inventé :

La construction du perspectographe est en même temps la démonstration d'une suite de propositions soigneusement établies et qui en justifie la construction.

Pour établir les règles de construction perspectiviste, Lambert s'appuie sur la distribution des points de fuite sur la ligne d'horizon sur laquelle il construit une graduation définie par la mesure des angles des directions horizontales avec la direction perpendiculaire au plan du tableau (le transporteur perspectif), ceci l'amène à définir la géométrie perspective, autrement dit la géométrie des objets représentés sur le plan du tableau (en langage moderne, la transformée de la géométrie usuelle par la perspective) [35].

Ceci le conduira à aborder des problèmes de construction à la règle seule, problèmes qui joueront un rôle dans l'élaboration de la géométrie projective moderne.

Nous ne pouvons développer dans le cadre de cet article l'histoire de la géométrie projective du XIXème siècle et nous renvoyons à l'appendice historique qui suit l'Initiation à la Géométrie de Daniel Lehmann [38].

Disons seulement que ce sont encore des raisons d'ordre technique qui vont conduire au développement de la géométrie projective. Gaspard Monge comme d'autres mathématiciens français de la fin du XVIIIème siècle est professeur dans une école militaire et il est amené à s'intéresser à la construction des fortifications, il rencontre ainsi le problème de la représentation qui le conduit à une étude systématique du procédé de la double projection orthogonale, ce sera la géométrie descriptive.

Mais le mathématicien Monge, mettant en place la géométrie descriptive, comprend que cette technique de représentation peut être aussi méthode de recherche en géométrie rationnelle, en particulier les problèmes de représentation plane des corps solides le conduisent à préciser des propriétés de géométrie plane (ainsi les propriétés de pôles et polaires qu'il relie à la détermination des plans tangents menés d'une droite à une sphère ou plus généralement une surface du second ordre), explicitant ce que Chasles appellera l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes [14].

x x x
x x

Les constructions perspectivistes n'ont pas seulement permis le développement de nouvelles méthodes géométriques, elles ont participé à la mise en place de l'un des concepts géométriques fondamentaux de la physique mathématique moderne, je veux parler du concept d'espace.

Il n'y a pas d'espace chez les géomètres grecs, seulement des objets, ce que j'ai appelé des situations spatiales [38] que le géomètre étudie à travers les représentations qu'il en donne (les figures de la géométrie), mais ces situations spatiales sont étudiées chacune isolément. La notion d'espace apparaît lorsqu'il s'agit de coordonner ces diverses situations, que ce soit avec le mouvement et ce sera la mécanique, que ce soit avec le problème de la représentation plane tel qu'il a été posé par les peintres et les architectes de la Renaissance [54].

Les méthodes de représentation dès qu'elles dépassent le stade naïf sont liées à la conception de la vision des objets de l'espace et par conséquent à la marche des rayons lumineux.

Les Grecs étaient partagés entre deux conceptions ; pour les uns, dont Euclide, les rayons lumineux vont de l'oeil vers l'objet, pour les autres, ils vont de l'objet à l'oeil, mais en ce qui concerne le problème de la représentation, cette distinction importe peu ; ce qui importe c'est comment la répartition des rayons lumineux détermine la vision des objets ; ainsi pour Euclide la distance apparente entre les diverses parties d'un objet est définie par l'écart des rayons lumineux joignant l'oeil à ces parties, ce qui signifie une théorie de la représentation centrée sur l'oeil [22] [43].

C'est le décentrement proposé par les artistes de la Renaissance, la fenêtre ouverte d'Alberti ou la paroi de verre de Leonardo da Vinci, qui amène à mettre en relation les trois composantes que sont l'objet à représenter, le tableau, et l'oeil du spectateur.

Il faut ici mettre l'accent sur les aspects techniques de cette mise en relation, nous avons déjà parler de la construction légitime qui consiste à construire la représentation perspective à partir de deux représentations, le plan et l'élévation ; cette construction, nous l'avons vu, s'appuie sur la figure de référence : le dallage carré, qui conduira à la mise en place des lignes coordonnées (cf. ci-dessus) constituant ainsi une première structuration de l'espace.

La mise en place progressive de ce nouvel objet de la géométrie qu'est l'espace conduira Pascal à écrire dans une Introduction à la Géométrie aujourd'hui perdue mais dont le début a été retrouvé dans les papiers de Leibniz [45].

Principe 1 : L'objet de la pure géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur, largeur et profondeur, en donnant indifféremment chacun de ces noms à chacune de ces dimensions, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes-là sont connus d'eux-mêmes.

Principe 2 : L'espace est infini selon toutes ces dimensions

Principe 3 : et immobile en tout et en chacune de ces parties

conception de l'espace qui annonce celle de Newton dans les *Principia* [42]

Absolute space, in its own nature, without relation to anything external, remains always and immovable.

Cependant cet espace, distinct des corps qui y sont contenus, est essentiellement le lieu des phénomènes géométriques et physiques, il ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent ainsi que l'explique Euler dans la première lettre de la seconde partie de ses *Lettres à une Princesse d'Allemagne* [23].

Ainsi si le concept d'espace est au coeur d'une pratique scientifique, géométrique et physique, il n'est pas lui-même objet d'une telle pratique, même s'il est objet d'un discours philosophique quant à sa nature et à ses propriétés. Il faudra attendre le XIX^{e} siècle pour que l'espace devienne en tant que tel objet d'une pratique géométrique, et cela après la naissance des géométries non-euclidiennes d'une part et les travaux sur les rapports entre propriétés projectives et propriétés métriques qui conduiront au *Programme d'Erlangen* [30] [4].

D'une part la naissance des géoméries non-euclidiennes posera le problème de la multiplicité des géométries et ainsi de la multiplicité des espaces, et nous renvoyons ici au texte de Riemann : *Sur les hypothèses servent de fondement à la géométrie* [52]. D'autre part le développement de la géométrie projective et son caractère de géométrie générale que lui donne ses adeptes conduira à expliciter le lien entre propriétés projectives et propriétés métriques (de façon précise à définir les propriétés métriques comme propriétés projectives particulières), ainsi Cayley définit-il les propriétés métriques d'une figure comme les propriétés projectives de la figure obtenue en ajoutant les points cycliques [12]. Ce problème sera résolu avec le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein et l'introduction des groupes de transformations. Ce n'est pas ici le lieu de le développer et nous renvoyons à l'appendice historique de l'*Initiation à la Géométrie* de Lehmann [38] ; nous nous contenterons de dire que l'un des apports essentiels de Klein est de faire opérer les transformations sur l'espace alors que les géomètres projectifs s'intéressaient essentiellement aux transformations sur les figures, ainsi Klein

mettait l'accent sur l'espace comme objet géométrique.

Ainsi le courant perspectiviste se trouve à l'origine de l'un des concepts fondamentaux de la géométrie d'aujourd'hui, aussi bien la géométrie physique que la géométrie mathématique pour reprendre la distinction moderne explicitée par Einstein [20]. Peut-être plus que le calcul des coordonnées qui renouvelle les méthodes des géomètres grecs sans en changer fondamentalement le contenu (le changement viendra ultérieurement avec le développement des méthodes analytiques), le courant perspectiviste renouvelle le contenu en déplaçant l'objet de la géométrie ; l'étendue cartésienne reste encore ancrée dans la géométrie grecque des figures et des lieux dont elle conserve le caractère local alors que la conception pascalienne ouvre une nouvelle perspective.

x x x
x x

Nous parlerons peu ici du problème des parallèles et des géométries non-euclidiennes renvoyant à l'article de Jean-Luc Chabert dans ces mêmes Actes [13] ; je voudrais ici, à propos du problème des parallèles, revenir sur les conditions de légitimation de la démonstration.

Rappelons une démonstration bien connue du postulat des parallèles, ou plutôt de la proposition équivalente qui dit que la somme des angles d'un triangle vaut deux droites.

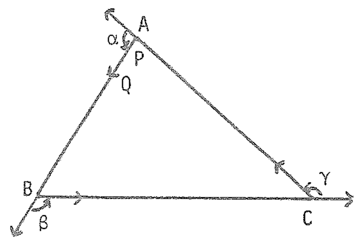


fig.9

Soit un triangle ABC et un segment PQ que l'on déplace de la façon suivante. Il est d'abord placé le long de AB, P coïncidant avec A et on déplace le segment PQ le long de AB jusqu'à ce que P coïncide avec B, puis on le fait tourner autour de B de façon que PQ vienne le long de BC, on déplace de nouveau le segment PQ le long de BC jusqu'à ce que P coïncide avec C, on fait tourner PQ autour de C jusqu'à ce qu'il vienne le long du côté CA, on déplace de nouveau le segment PQ le long de CA jusqu'à ce que P coïncide avec A et on le fait tourner autour de A jusqu'à ce qu'il reprenne sa position initiale.

Le segment PQ a ainsi tourné de quatre droits, d'autre part il a tourné successivement des angles β,γ,α (cf. fig 7), ainsi la somme des angles α,β,γ vaut quatre droits et par conséquent la somme des angles du triangle ABC vaux deux droits.

Examinons maintenant la validité de cette démonstration (que nos connaissances actuelles nous incitent à penser fausse).

Une première critique repose sur le refus de l'utilisation explicite du mouvement dans le raisonnement géométrique, les vérités géométriques doivent être établies sans considération de mouvement, ce qui revient, d'une part à mettre en cause le principe de l'égalité par superposition et ainsi la conception euclidienne de la géométrie (qui n'est pas liée àu postulat des parallèles), d'autre part à mettre en question de la même façon la construction de la géométrie non-euclidienne (celle des pères fondateurs Gauss, Bolyai, Lobatchevski) qui s'appuie aussi sur la conception euclidienne, y ajoutant un usage explicite du mouvement dans les démonstrations. Cette critique repose en fait sur un <u>à priori</u> idéologique, le refus du mouvement relevant moins de la logique que de la métaphysique, voire de la théologie.

<u>Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient, si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas</u>.

ainsi s'exprime le Socrate platonicien dans <u>La République</u> [47]

Il n'y a ainsi, dans le cadre de la conception euclidienne, (<u>la science absolue de l'espace</u>, pour reprendre une expression de Bolyai sur la partie de la géométrie euclidienne indépendante du postulat des parallèles), aucune raison logique pour rejeter cette démonstration comme il n'y a aucune raison logique pour l'accepter ; les conditions de légitimation se situent ailleurs, nous y reviendrons.

Une seconde critique, mathématiquement plus pertinente, rappelle que la démonstration utilise implicitement le fait que l'on peut comparer des angles d'origines différentes, ce que l'on sait être aujourd'hui équivalent au postulat des parallèles, où si l'on veut dire les choses de façon plus savante, que la <u>courbure</u> du plan est nulle. Mais cette critique repose sur la connaissance de la distinction entre géométrie euclidienne et géométrie non-euclidienne, c'est donc une critique <u>à posteriori</u> et sa validité logique qu'on ne saurait nier <u>aujourd'hui</u> ne suffit pas à montrer l'invalidité de la démonstration ci-dessus dans un cadre pré-non-euclidien ; tout au plus met-elle l'accent sur l'équivalence logique entre le postulat des parallèles et la possibilité de comparer des angles d'origines différentes.

Si nous avons rappelé cette démonstration, c'est pour mettre l'accent sur les quelques remarques suivantes.

La problématique des parallèles ne se situe pas sur le même plan que la problématique de la mesure ou celle de la représentation, elle se relie à ce qu'on appelle le problème des fondements, à condition de ne pas réduire ce dernier à sa seule signi-

fication logique. Le postulat des parallèles est lié d'une certaine façon à un échec ; Euclide, après avoir montré que si deux droites font avec une sécante des angles alternes-internes égaux, elles sont parallèles (<u>Eléments</u>, livre I, proposition 28), veut démontrer la réciproque (proposition 29) et c'est pour cette démonstration qu'il introduit son postulat.

<u>Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.</u>

énoncé moins simple que la proposition qu'il veut démontrer, proposition dont la démonstration n'est, somme toute, qu'une paraphrase du postulat. Aussi peut-on se demander pour quelles raisons Euclide n'a pas choisi l'énoncé de la proposition 29 comme postulat, proposition qui énonce qu'une sécante fait avec des droites parallèles des angles égaux ; comme s'il était nécessaire que la proposition 29 qui joue un rôle essentiel dans le développement ultérieur, soit démontrée, quitte à ce que le principe qui permet cette démonstration soit moins évident.

Notons que la propriété qu'une sécante fait avec des droites parallèles des angles égaux, sera considérée comme <u>évidente</u> dans plusieurs traités de géométrie élémentaire du XVIII^{e} siècle moin soucieux de rigueur formelle que d'efficacité, ainsi les ouvrage de Clairaut [15] et de Camus [11].

Il est vrai que le postulat des parallèles se justifie d'abord par la vérité de ses conséquences, vérité au sens que les géomètres donnent à ce terme jusqu'à la mise en place de la méthode hypothético-déductive moderne qui parle seulement de validité à l'intérieur d'un système d'axiomes. C'est le postulat des parallèles qui justifie la méthode des aires en permettant de comparer les aires des triangles et des parallèlogrammes (cf. ci-dessus p. 7). Ce qui fait problème, c'est donc moins la vérité la non-vérité du postulat des parallèles que l'absence de démonstration d'un énoncé non évident mais dont on ne peut pas ne pa reconnaître la vérité ; c'est là qu'est le <u>scandale de la géométrie</u>, pour reprendre une expression de D'Alembert.

La question se pose alors, en quoi la démonstration donnée ci-dessus est-elle ou non acceptable ? La réponse, nous l'avons vu, si réponse il y a, ne relève pas de la seule logique.

x x x x

x x

Après ce parcours à travers quelques grandes problématiq de la géométrie (mesure des grandeurs, représentation des objets de l'espace, parallèles) nous revenons à la question posée au début de cet article : que sont les objets mathématiques ? Si l'histoire des mathématiques est d'une certaine façon l'histoire de la transformation des objets mathématiques et par cela même de l'objet des mathématiques, se pose le problème de ce qui fait la permanence de ce domaine de la connaissance (si permanence il y a!)

En ce qui concerne la géométrie, cette transformation pourrait se caractériser ainsi ; d'abord étude locale des situations spatiales, la géométrie pose le problème global de l'espace, contenant universel des phénomènes, concept dont la structuration progressive (à travers les géométries non-euclidiennes d'une part, le développement de la géométrie projective d'autre part, mais aussi les problèmes liés au mouvement et à la mécanique dont nous n'avons pas parlé ici) conduit à la définition moderne de la géométrie comme étude des types d'espaces.

Ce déplacement de la géométrie, dans ses objets et dans son objet, a une histoire ancrée dans les problèmes étudiés, les diverses structurations se construisent autour de ces problèmes, même si par la suite elles en deviennent autonomes, ainsi les méthodes analytiques (la réduction de la géométrie à l'algèbre comme on dit) qui oublient le substrat grec (la mesure des grandeurs) qui sous-tend la construction de la géométrie analytique, ainsi la géométrie projective qui, avec les espaces numériques de Cayley et le programme d'Erlangen, oublie le problème de la représentation dont elle est issue, ainsi la conception structurale d'aujourd'hui qui fait de la géométrie élémentaire un simple chapitre de l'algèbre linéaire [9] [19].

C'est à partir de ce déplacement qu'on peut essayer de comprendre la transformation des méthodes, le passage du raisonnement euclidien au raisonnement formel d'aujourd'hui, les conditions et les raisons d'une telle transformation et, en contrepoint, comment la transformation des méthodes intervient dans la transformation des objets.

La fonction du raisonnement est d'abord de connaître à priori, c'est-à-dire sans avoir besoin de passer par l'expérience, la fonction du raisonnement géométrique est alors moins d'éliminer le sensible que d'en éviter les difficultés et les contradictions, d'y mettre de l'ordre, si l'on préfère. La distinction entre connaissance sensible et connaissance intelligible ne se situe pas dans un monde idéal que l'homme chercherait à redécouvrir et dont le monde sensible ne serait qu'une apparence plus ou moins déformée (la caverne de Platon), la construction de l'intelligible est l'un des moyens de l'esprit humain de connaître le monde, mais cet intelligible ne se construit pas à priori, y compris l'intelligible mathématique, il est moins refus que dépassement du sensible. Ainsi le raisonnement euclidien, loin d'être en dehors du monde sensible, est ancré dans ce sensible, même si d'une certaine façon, il le remodèle, et ce qu'on appelle l'intuition géométrique est en quelque sorte l'un des moyens qui permet de construire de l'intelligible à partir du sensible ; c'est en ce sens qu'on peut présenter le raisonnement géométrique euclidien comme une lecture raisonnée du dessin, raisonnement que l'on retrouve, sous des formes diverses, tout au long de l'histoire de la géométrie chez les Grecs comme chez les théoriciens de la perspective, dans les grands traités de géométrie élémentaire (pour une revue de quelques grands traités en langue française, cf. [38]) et les géomètres projectifs du XIX^{e} siècle, et même chez les pères fondateurs de la géométrie non-euclidienne (je renvoie ici au texte de Lobatchevski [40] cité en partie dans le chapitre Géométrie de Mathematiques au fil des âges [60]). Ce sont les problèmes posés par cette lecture raisonné du dessin qui conduiront à préciser la forme du discours, à en énoncer les règles, voire à les modifier, à construire ce que Gonseth appelle la doctrine préalable nécessaire à l'élaboration de la géométrie, doctrine préalable qui se construit en même temps que la géométrie, même si sur le plan de la légitimation elle la précède, autrement dit lès conditions de légitimation du raisonnement, si elles sont antérieures au raisonnement sur le plan de la logique, se construisent en même temps que lui et d'une certaine façon le justifie (et se justifient) après coup [26].

Cette explicitation des règles mettra en valeur le caractère de nécessité de la connaissance rationnelle (c'est-à-dire de la connaissance par le raisonnement), c'est ce qui la distingue essentiellement de la connaissance sensible, ce que Wittgenstein appelle l'inexorabilité des mathématiques [58].

La géométrie euclidienne peut alors être considérée comme l'une des premières constructions de l'esprit humain permettant de dépasser le sensible (sans toutefois l'émiminer) et mettant en place les conditions d'une connaissance rationnelle (à priori) du monde ; sa réussite conduira à oublier le donné empirique sur lequel elle s'appuie, l'intuition géométrique euclidienne devenant pure rationalité. C'est la critique de l'idée d'une géomètre purement rationnelle qui conduira à penser la géométrie non euclidienne [5], ainsi Gauss écrit en 1817

Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécéssité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature à priori mais plutôt à côté de la mécanique.

et quelques années plus tard Lobatchevski dans sa préface aux Nouveaux principes de la géométrie [39] publiés en 1838 et Riemann dans son article cite de 1854 [50] développeront des idées analogues (je renvoie aux textes cités dans le chapitre Géométrie de Mathématiques au fil les âges) [60])

En retour, la possibilité d'une géométrie non-euclidienne conduira à remettre en question l'intuition géométrique euclidienne et par cela même la légitimité du raisonnement à la grecque, posant ainsi le problème d'une redéfinition des conditions de légitimation du raisonnement géométrique.

Cette remise en question, associée aux difficultés rencontrées avec l'intervention de la théorie des ensembles en analyse et les paradoxes que l'on sait, conduira Hilbert et son école à privilégier les structures formelles du raisonnement au dépens de toute signification, tout au moins d'un point de vue méthodologique. Ce sera le <u>formalisme</u>, avec les grandes constructions axiomatiques et le rôle primordial des structures dans ce que Bourbaki a appelé <u>l'architecture des mathématiques</u> [7].

En ce qui concerne la géométrie, le formalisme mettra un terme, en principe, au rôle de l'intuition géométrique dans le raisonnement et à toute référence au sensible. Après le retour à l'empirisme qui avait permis de faire éclater le cadre euclidien, la solution apparaissait à travers une nouvelle forme de rationalité fondée sur les structures formelles.

Dans les <u>Grundlagen der Geometrie</u> (les fondements de la géométrie) [28] qu'il publie en 1899, Hilbert explicite sa construction axiomatique de la géométrie : ayant introduit les termes primitifs, <u>trois systèmes de choses</u>, qu'il nomme respectivement points, droites et plans (sans que ces noms renvoient, sur le plan théorique, à des images antérieures), Hilbert énonce les relations primitives entre les termes, vingt trois axiomes qu'il répartit en cinq groupes d'axiomes correspondant aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore les mots ne renvoient théoriquement à aucune image antérieure. Seules interviennent dans le développement de la géométrie les règles logiques qui régissent l'usage des termes et des énoncés, ainsi disparait tout recours à l'intuition et à la signification des termes et des énoncés; une démonstration ne s'appuie que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrés et les règles logiques. Ceci implique la mise en place d'une grammaire explicite des règles logiques, et c'est cette nécessité grammaticale qui conduira aux langages formalisés, langages définis par un système de signes et de règles d'utilisation de ces signes.

L'axiomatique formelle ainsi définie se distingue radicalement de l'axiomatique euclidienne fondée sur des principes <u>évidents</u> régissant des objets d'origine empirique et permettant par le moyen du raisonnement la découverte de nouvelles vérités ; dans l'axiomatique hilbertienne on ne peut parler de vérité d'un énoncé, seulement de sa validité à l'intérieur d'un système axiomatique défini.

Une autre construction axiomatique sera développée dans le cadre de l'algèbre linéaire avec les ouvrages de Giuseppe Peano [46] et Hermann Weyl [57], réduisant la géométrie à n'être (du point de vue structural) qu'un chapitre de l'algèbre linéaire [10] [20]. Nous n'y reviendrons pas ici, renvoyant à l'appendice historique déjà cité [38].

Cette nouvelle conception de la géométrie consacrait la distinction entre géométrie mathématique et géométrie physique comme l'explique Einstein dans un texte déjà cité [20], distinction que Hans Reichenbach résume ainsi [49]

<u>Mathematics reveals the possible spaces ; physics decides</u>

<u>which among them corresponds to physical space</u>.

Cette dualité entre une géométrie mathématique relevant d'une axiomatique formelle et une géométrie physique qui se construit sur le donné empirique, pose le problème de l'adéquation des structures formelles à l'étude du réel, problème que nous ne pouvons aborder ici, problème qu'on ne peut comprendre si l'on oublie, comme cela a lieu trop souvent aujourd'hui, que les structures formelles se construisent à partir des problèmes qu'elles se proposent de résoudre.

Et c'est ainsi qu'on peut essayer de comprendre ce qu'il y a de commun aux deux démonstrations, rappelées au début de cet article, du second cas d'égalité des triangles, essayer de comprendre le lien profond entre l'intuition géométrique, la pensée rationnelle et le point de vue formel, lien sans lequel les mathématiques ne sont que discours vain ou bricolage inconsistant.

Lille, le 14 Avril 1988

Entre mon exposé à l'Université d'Eté de Toulouse et la rédaction de ce texte, j'ai rédigé l'appendice historique de l'<u>Initiation à la Géométrie</u> de Daniel Lehmann ; cet appendice et cet article se recoupent et se complètent, c'est pourquoi je me permets de renvoyer à l'appendice cité.

B I B L I O G R A P H I E

1. BALTRUSAITIS Jurgis — Anamorphoses Flammarion Paris 1984

2. BERGER Marcel — Géometrie (5 volumes) Cedic/Nathan Paris 1979

3. BESSOT Didier — O che curiosa cosa e' questa prospettiva in Les Cahiers de la Perspective n° 4 1987

4. BKOUCHE Rudolf — Historique in Brigitte Sénéchal Groupes et Géométrie Hermann Paris 1980

5. BKOUCHE Rudolf — Euclide, Klein, Hilbert et les autres... in La Rigueur et le Calcul (Groupe Epistémologie Inter-IREM) Cedic Paris 1982

6. BOREL Emile — Geometrie Armand Colin Paris 1910

7. BOURBAKI Nicolas — L'Architecture des Mathématiques in Les Grands Courants de la Pensée Mathématique Blanchard Paris 1962

8. BOURBAKI Nicolas — Théorie des Ensembles Hermann Paris 1954

9. BOURBAKI Nicolas — Algèbre Ch IX Formes sesquilinéaires et formes quadratiques Hermann Paris 1959

10. BOURLET Carlo — Cours abrégé de Géométrie Hachette Paris 1908

11. CAMUS — Elémens de Géométrie Théorique et Pratique Ballard Paris 1764

12. CAYLEY Arthur — A sixth memoir on quantics (1859) Collected Mathematical Papers n° 58 Cambridge University Press

13. CHABERT Jean Luc — La géométrie non euclidienne (ce volume)

14. CHASLES Michel — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837) Gauthier-Villars Paris 1889

15. CLAIRAUT Alexis-Claude — Elémens de Géométrie (1741) Editions Siloé Laval 1987

16. COOLIDGE Julian — A History of Geometrical Methods (1940) Dover New-York 1963

17. D'ALEMBERT Jean Le Rond — Essai sur les Eléments de Philosophie (1759) Fayard Paris 1986

18. DESCARTES René — La Géométrie in Discours de la Méthode (1637) Fayard Paris 1986

19. DIEUDONNE Jean — Algèbre linéaire et Géométrie Elémentaire Hermann Paris 1961

20. EINSTEIN Albert — La Géométrie et l'Expérience (traduction française Solovine) in Reflexions sur l'Electrodynamique, l'Ether, la Géométrie et la Relativité Gauthier Villars Paris 1972

21. EUCLIDE — Les Oeuvres d'Euclide (traduction française Peyrard) Blanchard Paris 1966

22. EUCLIDE — L'Optique et la Catoptrique (traduction française Ver Eecke) Blanchard Paris 1959

23. EULER Léonhard — Lettres à une Princesse d'Allemagne Charpentier Paris 1859

24. FERMAT Pierre de — Oeuvres Gauthier-Villars Paris 1896

25. FIELD J.V. and GRAY J.J. — The Geometrical work of Girard Desargues Springer-Verlag New-York Berlin Heidelberg 1987

26. GONSETH Ferdinand — La Géométrie et le Problème de l'Espace Editions du Griffon Neuchatel 1945

27. GUIDO UBALDO Del MONTE — Les Six Livres de Perspective (traduction française Christian Guipaud) à paraître

28. HILBERT David — Les fondements de la géométrie (1899) (traduction française et notes Paul Rossier) Dunod Paris 1971

29. HOUEL Jules — Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire Gauthier-Villars Paris 1867

30. KLEIN Felix — Le Programme d'Erlangen (1872) (traduction française Padé) Gauthier-Villars Paris 1974

31. KLINE Morris — Mathematical thought from Ancient to Modern Times Oxford University Press 1972

32. LACROIX S.F. — Elémens de Géométrie Courcier Paris (1804)

33. LAMBERT Jean Henri — Essai sur la Perspective (1752) (traduction de J. Peiffer, commentaires de R. Laurent) Monom Coubron 1981

34. LAMBERT Jean Henri — La Perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral (1759) Alain Brieux Paris 1977

35. LAURENT Roger, PEIFFER Jeanne — La place de Lambert dans l'histoire de la Perspective Cedic/Nathan Paris 1987

36. LEGENDRE Adrien-Marie — Eléments de Géométrie (Douzième édition) Firmin Didot Paris 1823

37. LEGOFF Jean-Pierre — Une oeuvre aux confins des sciences et des arts de prospectiva pingendi de Piero della Francesca in Les cahiers de la Perspective n° 4 1987

38. LEHMANN Daniel, BKOUCHE Rudolf — Initiation à la Géométrie PUF Paris 1988

39. LOBATCHEVSKI Nicolas — Nouveaux Principes de la Géométrie (1838) (traduction française Maillieux) Mémoires de la Société Royale de Liège 3e série tome 2 1900

40. LOBATCHEVSKI Nicolas — Etudes géométriques sur la théorie des parallèles (1840) (traduction française J. Hoüel) Mémoire de la Société de Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux VI 1866

41. MERAY Charles — Nouveaux Eléments de Géométrie (2ème édition) Jobard Dijon 1903

42. NEWTON Isaac — Mathematical Principles of Natural Philosophy (1686/1713) (english translation by Motte 1729) University of California Press Berkeley Los Angeles London 1962

43. PANOFSKY Erwin — La Perspective comme Forme Symbolique (traduction française Ballangi) Editions de Minuit Paris 1975

44. PAPPUS D'Alexandrie — Collection Mathématique (2 volumes) (traduction Ver Eecke) Blanchard Paris 1982

45. PASCAL Blaise — Oeuvres complètes Le Seuil Paris 1962

46. PEANO Giuseppe — Calcolo geometrico Fratelli Bocca Editori Torino 1888

47. PLATON — La République (livre VII) (traduction française Baccou) Garnier Flammarion Paris 1966

48. POUDRA M. — Histoire de la Perspective Correard Editeur Paris 1864

49. REICHENBACH Hans — Philosophy of Space and Time (english translation M. Reichenbach and J. Freund) Dover New-York 1957

50. RIEMANN Bernhart — Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (traduction française Hoüel) in Oeuvres Blanchard Paris 1968

51. SINISGALLI Rocco — Il contributo di Simon Stevin alla Sviluppo Scientifico della Prospettiva Artificiale l'Erma de Bretschneider Roma 1978

52. TATON René — L'oeuvre scientifique de Desargues Vrin Paris 1981

53. TAYLOR Brook — Nouveaux Principes de la Perspective Linéaire (traduction française Rivoire) Amsterdam 1759

54. THUILLIER Pierre — La Naissance de la Perspective in La Recherche n° 160 1984

55. VEYNE Paul — L'inventaire des différences Le Seuil Paris 1976

56. VIETE François — Introduction à l'Art Analytique (1591) (traduction française Vaulezard) in Vaulezard : La Nouvelle Algèbre de M. Viète (1630) Fayard Paris 1986

57. WEYL Hermann — Space Time Matter Dover New-York 1952

58. WITTGEINSTEIN Ludwig — Remarques sur les fondements des mathématiques (traduction française M.A. Lescouret) Gallimard Paris 1983

59. YOUSCHKEVITCH Adolf — Les Mathématiques Arabes (traduction française Cazenave et Jaouiche) Vrin Paris 1976

60. GROUPE EPISTEMOLOGIE INTER-IREM — Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars Paris 1987