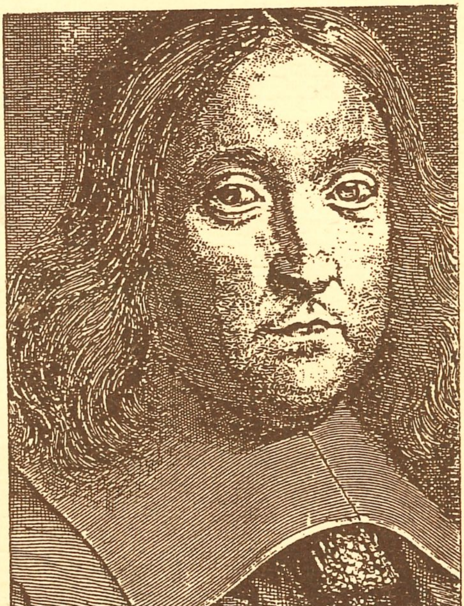
COMMISSION INTER-IREM ÉPISTÉMOLOGIE

I. R. E. M.

ACTES DE L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ sur L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

6.12 JUILLET 1986



I.R.E.M. de TOULOUSE

SOMMAIRE

ANNEXES

AVANT-PROPOS

La Commission nationale inter I.R.E.M. "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" a organisé, du 6 au 12 Juillet 1986, à Toulouse, la seconde Université d'Eté consacrée à l'histoire des mathématiques. Cette Université d'Eté, subventionnée par le Ministère de l'Education Nationale, la Société d'Histoire des Sciences et des Techniques, le Centre National de la Recherche Scientifique , l'Association des Professeurs de Mathématiques et l'Université Paul Sabatier de Toulouse à reçu l'appui de la Société Mathématique de France.

Elle a accueilli 140 participants français et étrangers - Italie, Belgique, R.F.A., Espagne, Tunisie - professeurs de collège ou de lycée, universitaires, chercheurs en histoire des mathématiques. Cette Université d'Eté, à vocation interdisciplinaire, était ouverte aux enseignants de mathématiques, mais aussi aux enseignants de philosophie, de physique et d'histoire.

L'Université d'Eté a été organisée dans le but de répondre à une forte demande des enseignants de mathématiques vis-à-vis d'une formation à l'histoire et à l'épistémologie de leur discipline - il y a eu 291 candidatures. Les objectifs de l'Université d'Eté étaient de développer chez les participants une culture scientifique en étudiant la construction historique du savoir mathématique, de présenter aux participants les apports didactiques des recherches en épistémologie des mathématiques et de leur proposer des démarches pédagogiques visant à introduire une perspective historique dans l'enseignement.

Les contenus de l'Université d'Eté visaient à la fois des connaissances historiques, épistémologiques et didactiques : la construction des grands champs de savoir (géométrie, algèbre, analyse, arithmétique, algorithmique), le contexte scientifique, philosophique, technique, culturel et social de l'élaboration des concepts et des théories mathématiques, les rapports entre mathématiques et sociétés, les apports didactiques de l'épistémologie des mathématiques (obstacles et ruptures épistémologiques, rectifications des savoirs, rôle des problèmes, de la conjoncture, de l'évidence, de l'erreur, de la démonstration, du symbolisme dans l'activité mathématique), l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement.

L'organisation de l'Université d'Eté comprenait des conférences portant sur des thèmes généraux de l'histoire des mathématiques ou sur l'insertion de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, des exposés traitant de points précis de l'histoire, des travaux en atelier s'appuyant sur la lecture de textes anciens, des comptes-rendus d'expérience pédagogique, des recherches en bibliothéque, des travaux de traduction et des projets constitués autour de la réalisation d'un thème précis.

A l'issue de l'Université d'Eté s'est tenue une table ronde qui a permis de débattre des enjeux de l'introduction de l'histoire dans la formation scientifique : pourquoi une perspective historique dans l'enseignement ? quelles conceptions ? quelles conditions ? quels résultats ? pourquoi l'histoire des mathématiques dans la formation des maîtres ? quelle vision des mathématiques? approche culturelle ? aspects interdisciplinaires ? recherches didactiques ? etc.

Des professeurs de collège ou de lycée, des universitaires et des chercheurs en histoire des mathématiques, français et étrangers ont animé avec devouement et enthousiasme cette seconde Université d'Eté. Qu'ils veuillent bien trouver ici en notre nom personnel et au nom de tous les participants l'expression de nos plus sincères remerciements. Nous exprimons aussi toute notre reconnaissance au Président de l'Université Paul-Sabatier, aux Directeurs et au personnel de l'I.R.E.M. de Toulouse qui nous ont permis de mener à bien l'organisation matérielle de cette manifestation.

Les bulletins de liaison 4 et 5 de la Commission Inter I.R.E.M. Epistemologie et histoire des Mathématiques, et la publication de ces Actes doivent permettre d'assurer le suivi de cette seconde Université d'Eté. La troisiéme Université d'Eté qui aura lieu à la Rochelle au mois d'Aout 1988 est un gage de la réussite de ce type de formation.

Pour la Commission :

Evelyne BARBIN, Maryvonne SPIESSER, Michel GUILLEMOT.

MATHEMATIQUES ET ARTILLERIE

LA NOUVELLE SCIENCE DE NICOLAS TARTAGLIA

Evelyne BARBIN
Michèle CHOLIERE
I.R.E.M. du Mans

"L'artillerie est née de la conjonction de deux courants très anciens : le développement des armes de jet et l'usage de la poudre"(1). La légende raconte que les premiers canons utilisés dans une bataille furent les trois canons anglais de Crécy (1346) qui mirent à mal Français et Génois. Dans la seconde moitié du XIVème siècle, l'emploi de l'artillerie à feu se répand : Venise s'en sert contre Gênes en 1378, les Maures contre l'Espagne à Algésiras en 1343, les Anglais contre les Ecossais en 1338, les Teutons contre les Polonais en 1410. Il semble cependant que Duguesclin préfère à l'artillerie la démolition à coups de grosses pierres.

Au cours des XVème et XVIème siècles, plusieurs perfectionnements techniques sont apportés aux engins primitifs destinés à augmenter leur puissance et leur portée. Les principales innovations concernent les projectiles. A partir de 1450 ils sont fabriqués en fer forgé, dès 1500 ils sont calibrés par leur poids. Leurs formes restent assez irrégulières jusqu'à la fin du XVème siècle, ils deviennent ensuite plus homogènes et mieux calibrés. Les premières bombes -le projectile est chargé de poudre- apparaissent en 1452 au siège de Bordeaux. Les premières fusées -le projectile est un cylindre de bois rempli de pulvérin- sont utilisées à la fin du XVIème siècle.

Au début du XVème siècle, seul le tir tendu est employé et il n'y a aucun mécanisme de pointage en hauteur. Il est vrai que tant qu'aucune étude de balistique n'aura été entreprise, tout autre tir serait imprudent. Blondel raconte dans son Art de jeter les bombes de 1699, les malheurs du sieur Malthus, ingénieur anglais, que le Roi fît venir de Hollande en 1634 pour introduire les fusées dans son armée : "Il n'avait aucune connaissance des mathématiques, ni d'aucune science qui pût lui faire savoir la nature du mouvement des bombes, et de la ligne courbe qu'elles décrivent dans l'air par leur passage, ou de la différence de leurs portées suivant les différences de leurs élévations(...). Et l'on venait se plaindre à tous moments que les bombes qu'il pensait jeter dans la place, passaient par-dessus et allaient tuer du monde dans la tranchée aux attaques de Monsieur de Candale et de Monsieur de la Meilleraye qui étaient aux autres côtés de la ville"(2).

(1). article Artillerie, Encyclopedia Universalis.
(2). BLONDEL, L'art de jeter les bombes, p. 4-5.

Depuis des siècles, les savants se sont penchés sur l'étude du mouvement, mais toutes leurs spéculations ne servent absolument à rien pour les artilleurs, comme l'explique Blondel dans son ouvrage :

"Tous les philosophes anciens ont fort bien su que les mouvements des corps qui tombent et qu'ils ont appelé le mouvement naturel, s'augmentaient incessamment à mesure qu'ils s'éloignent du commencement de leur chute : mais personne n'a su dire par quelle proportion se fait cette augmentation de vitesse. Ils ont bien connu que les corps jetés en l'air, par un mouvement qu'ils ont appelé violent, y décrivent en passant une ligne courbe ; mais ils n'ont jamais dit de quelle nature est cette ligne, et quelles en sont les propriétés"(1). Les artilleurs ont besoin, pour déterminer la portée en fonction de l'angle de tir, de connaitre la trajectoire du boulet de canon, sa forme et sa mesure. Blondel est un homme de la fin du XVIIème siècle et son jugement envers les "philosophes anciens" est sévère : toutes leurs considérations sur la nature des mouvements, mouvement naturel ou mouvement violent, ne nous disent absolument rien sur ce qu'est finalement l'effet du mouvement, c'est à dire la trajectoire du projectile. Blondel poursuit : "Nicolas Tartaglia est le premier qui a recherché l'un et l'autre (proportion et courbe), et qui en a voulu faire l'application au mouvement des boulets tirés par le canon ou le mortier".

En 1537, Tartaglia publie un ouvrage intitulé Nova Scientia ; par ce titre, l'auteur veut annoncer l'invention d'une nouvelle science, celle de la balistique. Cette science a pour but de répondre aux nouvelles préoccupations nées de l'usage de l'artillerie sur de grandes distances et avec des angles de tir variés. Elle doit, par conséquent, résoudre une question délicate, celle de la forme de la trajectoire du boulet de canon. Tartaglia remplira ainsi parfaitement la fonction de mathématicien ingénieur, qui apparaît en Italie en liaison avec les arsenaux, et que favorisent les princes soucieux d'efficacité militaire(2). Ces ingénieurs ont une obligation pressante, "celle de résoudre les problèmes de leur profession, d'améliorer leur art d'inventer, afin d'assurer leur subsistance ou leur gloire" (3).

La tâche à accomplir montre que l'objet des recherches de

(1). BLONDEL, op.cit.
(2). Article Histoire de la mécanique, Encyclopedia Universalis.
(3). MOSCOVICI, Essai sur l'histoire humaine de la nature.

Tartaglia est complétement différent de celui des doctes scolastiques du Moyen-Age, ce en quoi la Nova Scientia est déjà nouvelle. Ce n'est pas un traité "de motu", sur la nature des mouvements ; au contraire, Tartaglia semble vouloir éviter toute discussion philosophique concernant les causes des phénomènes qu'il est en train d'étudier (1). L'objet de son étude n'est pas la nature ou l'essence du mouvement, mais un phénomène particulier de mouvement. Par conséquent, il ne s'occupe que des corps également graves, c'est à dire ceux qui "par suite de la gravité de leur matière et par suite de leur forme ne sont pas susceptibles d'éprouver une opposition sensible de l'air à leur mouvement"(2). Il fait abstraction de la résistance du milieu, ce qui était nécessaire dans un premier temps à l'étude de la trajectoire des projectiles.

Cependant, on donne une image incorrecte des travaux de Tartaglia en affirmant qu'il "se veut empiriste -les canons sont des faits, les boulets volent et tombent- et qu'il s'adresse plus au praticien qu'au philosophe"(3). En effet, alors que les constructeurs de canons ne fournissent que des recettes et s'efforcent de dégager les principes de leur art sans les rapporter à une conception plus générale du réel, Tartaglia veut élaborer une théorie, ce en quoi la Nova Scientia est une science. Sa définition des corps "également graves" s'applique certes aux boulets de canon sphériques -mais ils ne l'étaient pas tous- en plomb, fer ou pierre, mais elle est surtout réponse théorique à une question de même ordre. Le corps sphérique a l'avantage d'occuper, quel que soit le mouvement, la même situation dans l'air ambiant et la pesanteur a toujours le même effet sur lui, il est "également grave" et peut servir d'élément à la science des projectiles(4). Par ailleurs, le traité de Tartaglia est élaboré sur le mode euclidien, "modo geometrico" : une série de définitions, puis des suppositions et des sentences communes, desquelles sont déduits les théorèmes de la nouvelle science. Enfin, s'il fournit un moyen pratique d'évaluer l'angle de tir -l'équerre-, il ne donne pas la méthode pour calculer effectivement la portée selon l'angle de tir, méthode que Tartaglia promet pourtant dans

(1). KOYRE, La dynamique de Nicolo Tartaglia.
(2). Livre I, définition I.
(3). KOYRE, op.cit.
(4). COSTABEL, Observations et théorie du mouvement au XVIème siècle.

sa préface au duc d'Urbino.

Les définitions de la Nova Scientia utilisent les termes traditionnels -mouvement, mouvement naturel, mouvement violent- mais elles leur assignent un sens très étroit. Le mouvement est "transmutation qu'un corps fait d'un lieu dans un autre lieu"(1), c'est à dire qu'il est restreint à la catégorie aristotélicienne du changement de lieu. Le mouvement naturel des corps également graves est "celui qu'ils font, sans violence aucune, d'un lieu supérieur à un lieu inférieur"(2), c'est à dire que le mouvement naturel correspond strictement à la chute des graves. Le mouvement violent des corps également graves est celui qu'ils font "en y étant forcés, de bas en haut, de haut en bas, de ça de là, en vertu de quelque puissance mouvante"(3) et cette puissance mouvante est définie comme "n'importe quelle machine artificielle qui soit capable de lancer ou de tirer violemment par l'air un corps également grave"(4). Ce mouvement violent est conforme à l'étude à laquelle se limite la Nova Scientia, le mouvement des projectiles lancés par un canon. Les définitions de Tartaglia n'ont pas pour but d'expliquer ce qu'est l'essence du mouvement, de distinguer le mouvement naturel du mouvement violent par leurs finalités. Tout comme les définitions des Eléments de géométrie d'Euclide, elles ont pour statut de mettre en place un langage sur lequel chacun pourra s'accorder ; le mouvement naturel est la chute des graves, le mouvement violent est le lancer.

Que le mouvement violent soit défini à partir de la donnée d'une puissance mouvante, elle même obtenue par la présence d'une machine artificielle, mérite attention. Pour un savant scolastique, l'action d'une machine ne saurait être le point d'ancrage d'une théorie, elle ne peut être traitée que comme un exemple, sur lequel éventuellement appliquer une conception générale du mouvement. Au contraire, Tartaglia propose de prendre une machine artificielle comme moyen d'analyser scientifiquement le mouvement(5). Par là, il inaugure un nouveau courant de pensée qui cherche à établir les principes de la nature à partir d'artifices mécaniques et qui trouvera

(1). Livre I, définition IV.
(2). Livre I, définition VI.
(3). Livre I, définition VII.
(4). Livre I, définition XIII.
(5). MOSCOVICI, op.cit.

dans le monde des machines un mode de connaissance de l'univers et une nouvelle vision du monde.

Alors, Tartaglia s'adresse-t-il au praticien ou au philosophe ? La question n'est presque plus de mise, car avec la Nova Scientia, l'alternative est en train de perdre son sens, le philosophe mécanicien va remplacer le philosophe naturaliste.

I. La balistique de Nicolas Tartaglia

Dans la Nova Scientia, Tartaglia donne une réponse fausse à la question de la trajectoire du boulet de canon. Il propose une trajectoire semi-rectiligne, semi-circulaire car il ne peut se résoudre à composer les mouvements. Lui-même ne se satisfait pas de son résultat, et il présente en 1546, dans les Quesiti et Inventioni diverse, une trajectoire entièrement curviligne. Ni dans l'un ni dans l'autre traité, Tartaglia ne trouve les moyens de mesurer la trajectoire, donc de calculer les portées, comme le réclament les artilleurs. Cependant, sa balistique constitue une étape décisive dans l'étude des phénomènes du mouvement.

1. La trajectoire du boulet de canon dans la Nova Scientia

Dans la première supposition, Tartaglia admet que si un corps en mouvement produit un effet plus grand, c'est qu'il va plus vite. Il s'appuie sur cette conception pour énoncer dans la première sentence commune, qu'un corps également grave fait un effet d'autant plus grand sur un autre corps qu'il vient de plus haut par un mouvement naturel, et dans la quatrième sentence commune, qu'un corps également grave animé d'un mouvement violent, fera un effet d'autant plus grand sur un autre corps que celui-ci sera plus proche du point de départ de ce mouvement(1). Il déduit des suppositions et sentences communes les propriétés du mouvement naturel et du mouvement violent. L'aspect dynamique des sentences communes disparaît alors pour ne laisser place qu'à des considérations de nature cinématique.

"Dans le mouvement naturel tout corps également grave va d'autant plus vite qu'il s'éloigne du point de départ ou s'approche du point d'arrivée de son mouvement"(2). En conséquence, le corps également grave va plus lentement au début de son mouvement qu'à la fin, et la vitesse d'un corps grave varie constamment. Tartaglia démontre que "tous les corps également graves semblables et égaux, partent du principe de leur mouvement naturel avec une vitesse égale, mais augmentent leurs vitesses de façon telle que celui qui traversera un espace plus grand ira plus vite"(3). La croissance de la vitesse

(1). KOYRE, op.cit.
(2). Livre I, proposition I.
(3). Livre I, proposition II.

est-elle proportionnelle à la distance ou au temps ? En comparant le mouvement relatif de deux corps, Tartaglia évite de répondre à cette question difficile.

Le mouvement violent a des propriétés symétriques à celles du mouvement naturel : "Plus un corps également grave, s'éloigne du principe ou s'approche de la fin du mouvement violent, plus il va lentement"(1). Il découle "qu'un corps également grave a, au commencement de son mouvement violent, la vitesse la plus grande et, à la fin, la plus petite qu'à aucun endroit de sa course ; et que, plus grand est l'espace qu'il a à parcourir, plus il ira vite au principe de son mouvement". En conséquence, la vitesse d'un corps mû d'un mouvement violent varie constamment, et deux corps également graves et égaux ont au bout de leur mouvement la même vitesse, quelle que soit leur vitesse initiale.

Pour traiter de la trajectoire d'un corps également grave lancé obliquement, Tartaglia doit maintenant aborder le problème de la composition des mouvements et se situer par rapport aux deux préceptes de la tradition aristotélicienne du Moyen-Age qui stipulent que deux mouvements contraires ne peuvent se succéder que lorsque le premier s'est éteint et après une pause intermédiaire, le "media quies"(2). Tartaglia ne se prononce pas sur le second, mais suit le premier et énonce : "Aucun corps également grave ne peut pendant aucun espace de temps ni de lieu naturel marcher d'un mouvement composé à la fois de mouvement violent et de mouvement naturel"(3). La symétrie des propriétés des mouvements naturels et violents semble être une entrave à la composition des mouvements. En effet, un corps peut-il se mouvoir en diminuant et en augmentant à la fois sa vitesse? Il y a une façon de répondre positivement à cette question, en envisageant les directions des mouvements considérés. C'est la démarche qu'emprunte Léonard de Vinci, lorsqu'il explique le fléchissement de la toupie par l'existence d'un mouvement composé.

En toute logique, Tartaglia devrait proposer une trajectoire en deux parties : une droite oblique jusqu'à ce que le mouvement violent s'épuise, puis une droite verticale, lorsque le mouvement naturel agit (Fig.1). Pourtant, Tartaglia affirme que la trajectoire

(1). Livre I, proposition III.
(2). COSTABEL. op.cit.
(3). Livre I, proposition V.

du projectile est composée de trois parties : tant que le mouvement violent n'est pas contrarié le mouvement est rectiligne, quand il s'épuise le mouvement naturel entre en conflit et le mouvement est alors circulaire, enfin seul demeure le mouvement naturel qui provoque une chute rectiligne et verticale (Fig. 2). Tartaglia précise qu'au point de raccordement, les deuxièmes et troisièmes parties de la

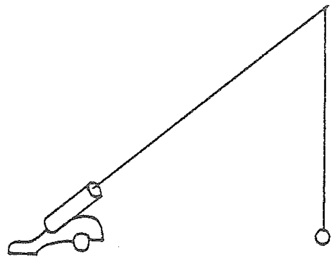


Fig. 1

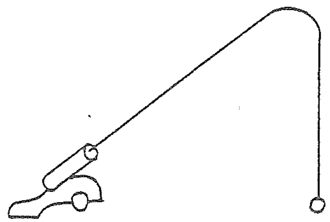


Fig. 2

trajectoire sont "contingentes" -c'est à dire tangentes-, c'est à dire qu'il admet que dans la deuxième partie le mouvement naturel agit(1). Mais les mouvements ne se composent pas, ils sont en conflit. Tartaglia admet également qu'un mouvement violent puisse être courbe, et qu'au point de raccordement le mouvement violent s'éteint, tout en conservant un "minimum naturel" -un minimum de vitesse-.

Ces infractions lui permettent d'exclure une trajectoire anguleuse, inacceptable, même pour un piètre observateur. Il reste que la courbe proposée ne correspond pas à ce que voit un observateur un peu attentif. D'ailleurs, le frontiscipe de la Nova Scientia (Fig. 3) présente deux obusiers, l'un qui tire sur un très grand angle et l'autre horizontalement, les deux trajectoires sont courbes, la première est une magnifique parabole. Est-ce un hasard ou Tartaglia a-t-il voulu signaler ainsi les limites de sa théorie ? Il démontre, neuf ans plus tard, dans les Quesiti et inventioni diverse que la trajectoire d'un boulet de canon en tir tendu n'est nulle part rectiligne.

(1). COSTABEL, op.cit.

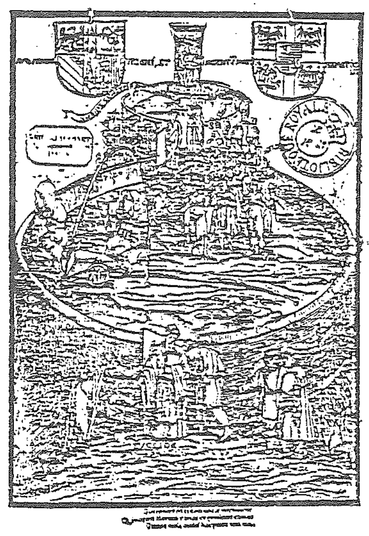


Fig. 3

2. La trajectoire curviligne du boulet de canon

Les arguments sur lesquels se fonde la trajectoire de la Nova Scientia sont trop conflictuels, le résultat obtenu est trop peu conforme à l'observation pour que ne s'opère pas une rupture dans la théorie de Tartaglia. La symétrie des propriétés du mouvement naturel et du mouvement violent joue à l'encontre de la composition des mouvements, mais elle va aussi dans le sens d'une conception commune de ces deux mouvements, qui devrait permettre d'associer leurs actions sur le projectile. Par ailleurs, la deuxième partie de la trajectoire pose plus de problèmes qu'elle n'en résout. Si on admet que le mouvement naturel agit lorsque le mouvement violent ne s'est pas encore éteint, alors il faut supposer que son influence s'exerce pendant tout le parcours ou bien expliquer la "propriété étrange"(1) du point à partir duquel il peut incurver la trajectoire rectiligne due au mouvement violent. En s'interrogeant sur le lieu de ce point, Tartaglia va conclure dans les Quesiti et Inventioni diverse, publié en 1546, que la trajectoire du boulet de canon est entièrement curviligne. Sa démonstration repose sur un raisonnement par dichotomie, mais elle est renforcée par des considérations

(1). Article Histoire de la mécanique, Encyclopedia Universalis.

pratiques -le sursaut de la pièce d'artillerie au moment du tir(1)- et par des observations directes -une expérience de tir faite à Vérone en 1531(2).

Les Quesiti et Inventioni diverse se présentent sous la forme d'un dialogue entre l'illustrissime Duc D'Urbino et Nicolas Tartaglia lui-même. L'examen de la trajectoire d'un boulet tiré horizontalement fait l'objet du troisième dialogue. Tartaglia annonce d'emblée que "non seulement on ne le tirera pas (le boulet) 50 pas en ligne parfaitement droite, mais on ne le tirera pas un seul". Dans la Nova Scientia, il s'agissait de construire une théorie explicative de la trajectoire du boulet de canon, alors que dans les Quesiti et inventioni diverse, il s'agit de réfuter l'existence d'une portion rectiligne sur cette même trajectoire. La forme du dialogue est bien adaptée à ce nouveau propos : le but n'est pas de mettre en place une science hypothético-déductive, mais d'établir un argument contradictoire. Tartaglia réplique au duc qui s'insurge : "L'opinion de votre Excellence est que le boulet tiré d'une couleuvrine dans le point de mire doit parcourir une partie de sa trajectoire, où agit le mouvement violent, en ligne droite et ce qui reste en ligne courbe. Mettons que ce soit vrai, je voudrais savoir suivant cette opinion, quelle est la raison pour laquelle le boulet parcourt une ligne droite dans la partie où l'opinion dit qu'il se meut ainsi, et quelle est la raison pour laquelle il se meut en ligne courbe dans la partie où votre Excellence suppose qu'il se meut ainsi"(3). Tartaglia met en demeure le Duc d'expliquer pourquoi la trajectoire serait ici rectiligne et ailleurs curviligne : si en un point la trajectoire s'incurve, il faut expliquer pourquoi ce point est ici et pas ailleurs.

Tartaglia commence par examiner la manière dont les deux mouvements agissent conflictuellement et continuellement sur le boulet : "plus il y a de vitesse dans le boulet tiré violemment, moins il y a de gravité, et inversement, moins il y a de vitesse, plus il y a de gravité". Le mouvement naturel agit constamment et de plus en plus intensément, de sorte que "pour celui où la gravité

(1). COSTABEL, op.cit.
(2). Quesiti et inventioni diverse, p. 5.
(3). idem, p. 11

est plus grande, la tendance est plus grande à tirer le dit boulet vers le centre du monde, c'est à dire vers la terre". Ainsi, plus la vitesse due au mouvement violent est grande, plus le projectile est léger et plus le mouvement est rectiligne. Tandis que moins il ira vite, plus il sera lourd et plus la courbe s'incurvera vers le bas. Ces résultats étant admis par le Duc, Tartaglia démontre par l'absurde que la trajectoire n'est nulle part "parfaitement droite" :

"Or, pour conclure notre propos, nous supposerons que tout le trajet, ou voyage, que doit faire ou qu'a fait le boulet tiré du canon soit toute la ligne ABCD. S'il est possible qu'en ce trajet il y ait quelque partie qui soit parfaitement droite, posons que ce soit toute la partie AB, laquelle soit divisée en 2 parties égales au point E. Le boulet parcourra plus vite l'espace AE (selon la 3° proposition du livre I de notre science nouvelle) que l'espace EB, donc le dit boulet ira plus droit, pour les raisons mentionnées ci-dessus, dans l'espace AE que dans l'espace EB ; d'où la ligne AE serait plus droite que la ligne EB. Chose impossible, car si toute la ligne AB est supposée parfaitement droite, l'une de ses moitiés ne peut être ni plus ni moins droite que l'autre. Et si pourtant l'une des moitiés est plus droite que l'autre, il s'ensuit nécessairement que l'autre n'est pas droite, et il s'ensuit nécessairement que la partie EB n'est pas parfaitement droite (Fig.4).

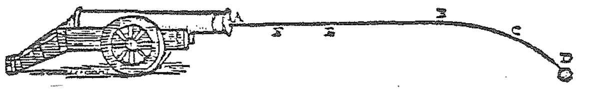


Fig.4

Mais si pourtant quelqu'un a encore l'opinion que la partie AE est parfaitement droite, on peut trouver la fausseté d'une telle opinion par les mêmes moyens : c'est-à-dire en divisant la dite partie AE en 2 parties égales au point F. Pour les mêmes raisons que celles invoquées précédemment, il sera manifeste que la partie AF sera plus droite que la partie FE, donc la dite partie FE, nécessairement, ne sera pas parfaitement droite. De même que si l'on divise encore AF en 2 parties égales, pour les mêmes raisons, il apparaît que la moitié du côté de A est plus droite que la moitié vers F. Celui qui diviserait encore cette moitié en 2 autres parties égales atteindrait le même résultat, c'est-à-dire que la partie se terminant en A serait plus droite que l'autre. Et parce que ce procédé est infini, il s'ensuit nécessairement que non seulement toute la ligne AB n'est pas parfaitement droite, mais qu'il n'y a aucune minime partie de celle-ci qui le soit, ce qui est la proposition à démontrer. On voit donc comment le boulet tiré du canon dans une telle situation ne va dans aucune partie de son mouvement selon une ligne parfaitement droite (quand bien même il sortirait avec une vitesse aussi grande qu'on voudrait) parce que la vitesse (aussi grande soit-elle) n'est jamais suffisante, en de telles situations, pour le faire aller en ligne droite. Il est vrai que plus il va vite, plus il s'approche du mouvement rectiligne, c'est-à-dire du mouvement selon une ligne droite, mais cependant il ne peut jamais arriver à ce point. Il convient mieux de dire, en pareils cas, que plus le boulet va vite, moins son mouvement est courbe"(1).

Le Duc admet la valeur du raisonnement, mais le résultat obtenu lui paraît étrange : lors d'un tir oblique, la trajectoire comporte nécessairement une partie rectiligne. Tartaglia maintient sa position : la balle ne va en ligne droite que si elle est tirée verticalement, vers le haut ou vers la terre ; pour toute autre inclinaison, la balle décrit une courbe. Plus l'élévation du tir est grande, moins la gravité agit et plus l'incurvation est faible, mais elle n'est pas nulle. Jamais le boulet ne va en ligne droite "dans aucune partie, si minime soit-elle, de son mouvement". Il est vrai que, si la trajectoire de la Nova Scientia contredit l'observation, celle des Quesiti et inventioni diverse se heurte à notre perception du mouvement et gêne notre bon sens. Il reste à examiner dans quelle mesure, les trajectoires proposées par Tartaglia répondent aux problèmes des artilleurs concernant la portée du canon.

(1). Quesiti et inventioni diverse, p. 12, traduction A. Gelé.

3. La portée du canon

Dans le livre II de la Nova Scientia, Tartaglia aborde le problème de la portée du canon(1). Puisque la troisième partie de la trajectoire est verticale, la portée du canon est donnée par la distance entre le point de départ et le point où commence la retombée verticale. Tartaglia énonce deux résultats. D'une part, la portée du canon varie avec l'élévation du canon et dépend autant de la partie rectiligne du parcours que de celle de la partie circulaire. D'autre part, la partie circulaire est d'autant plus grande que l'angle de tir est plus grand. Il en déduit que "Les trajectoires des mouvements violents des corps également graves, projetés au-dessus de l'horizon avec une inclinaison égale, seront sembables et, par conséquent, proportionnelles ainsi que les distances parcourues"(2). Par conséquent, les portées sont proportionnelles à la vitesse initiale.

En ce qui concerne les angles de tir, Tartaglia démontre que deux élévations différentes du canon peuvent donner des portées égales. Considérant les résultats obtenus pour des portées de 0° et 90°, il en conclut que la position médiane -le tir à 45°- correspond à la portée maximale. Il estime que cette portée est dix fois supérieure à celle obtenue pour un tir horizontal. Blondel écrit que Tartaglia est le premier à avoir énoncé que la portée la plus grande est obtenue pour un angle de 45°, et que les canonniers ont longtemps pensé que ceux qui étaient au-dessous de 45° allaient plus loin(3).

Les Quesiti et Inventioni diverse nous ont appris que la trajectoire du boulet de canon n'est une courbe nulle part rectiligne, mais ne disent rien de la nature de cette courbe. Cependant, les considérations sur l'allègement du boulet en fonction de la rapidité du mouvement et de l'élévation du tir permettent à Tartaglia d'énoncer un certain nombre de nouveaux résultats, utiles aux artilleurs. Tartaglia montre que l'allongement de la partie quasi-rectiligne de la trajectoire augmente avec l'accroissement de la vitesse du boulet et avec l'élévation du canon(4). L'allongement du parcours

(1). KOYRE, La dynamique de Nicolo Tartaglia.
(2). Livre II, Proposition VII.
(3). BLONDEL, L'art de jeter les bombes, p. 14.
(4). KOYRE, op.cit.

quasi-rectiligne en fonction de la vitesse initiale est une conséquence de la proposition VII du Livre II de la Nova Scientia. Pour démontrer l'allongement du parcours selon l'angle de visée, Tartaglia utilise les travaux statiques sur la balance de Jordanus qu'il fit éditer(1). Comme d'autres, avant ou après lui, il essaie d'étendre les schémas fructueux de la statique à la dynamique. Tartaglia considère qu'un corps pesant équilibré partant de la position horizontale du fléau de la balance devient plus léger en s'éloignant de cette position, et ce d'autant qu'il s'en éloigne davantage. Par analogie, il en déduit qu'un boulet qui part de la position horizontale est plus pesant qu'il ne l'est pour une autre position. Ainsi, un boulet tiré horizontalement est plus lourd et commence sa descente plus tôt qu'il ne le ferait pour un autre angle de tir. Par contre, le boulet tiré obliquement est plus léger et, plus l'obliquité est grande, plus il est léger et plus la distance parcourue d'un mouvement quasi-rectiligne est grande. Tartaglia note qu'une élévation de 45° donne une distance quatre fois plus grande qu'un tir horizontal.

En conséquence, l'artilleur ne doit pas pratiquer le tir horizontal, il est le moins efficace. En effet, si la longueur de la partie quasi-rectiligne de la trajectoire est de 200 pas pour un tir horizontal, elle est de 800 pas pour un tir à 45°. Supposons que le but à atteindre soit à 60 pas en ligne horizontale. Le boulet tiré horizontalement frappera avec une vitesse capable de lui faire parcourir 140 pas ; tandis que le boulet tiré en contre bas à 45°, même s'il parcourt 100 pas avant d'atteindre le but, frappera avec une vitesse capable de lui faire parcourir 700 pas, donc beaucoup plus fort(2). Même si le raisonnement est fruste, il est préférable à celui qui conduit Tartaglia à concevoir une vitesse minimale sur la trajectoire du boulet, conclusion fort gênante pour les artilleurs.

Les traités de Tartaglia constituent une première tentative pour mesurer la portée du canon ; ils fournissent un certain nombre de paramètres pour estimer cette portée, mais ils ne produisent en aucun cas une méthode pour calculer la portée selon l'angle de tir.

L'originalité de l'oeuvre de Tartaglia réside dans l'unicité

(1). DUGAS, Histoire de la mécanique
(2). KOYRE, op.cit.

de l'objet de ses études sur le mouvement, la trajectoire des projectiles . La Nova Scientia eut un succès considérable. Ecrite en italien, dans la langue de la vallée du Pô, elle connut sept éditions jusqu'en 1583(1) et fut traduite dans toutes les langues européennes(2). La trajectoire tripartite rencontra un important succès, aussi bien auprès des artilleurs -les hommes de l'art- qu'auprès des savants. Par contre, la trajectoire curviligne des Quesiti et Inventioni diverse n'en eut aucun, et la tentative de Tartaglia d'établir une science de la balistique resta sans suite pendant près d'un siècle.

(1). Histoire générale des sciences, tome I.
(2). COSTABEL, op.cit.

II. Les traités d'artillerie du début du XVIIème siècle

La balistique de la Nova Scientia, qui n'exige pas des artilleurs des connaissances très étendues et qui reste fidèle aux préceptes traditionnels de la scolastique, fut rapidement populaire auprès des hommes de l'art et le resta jusqu'à la moitié du siècle suivant. Traduite dans toutes les langues européennes, elle est reprise dans tous les traités d'artillerie édités au début du XVIIème siècle en cette Europe guerrière : l'El perfeto Capitan instruido en la disciplina Militar y nueva cienca de la Artilleria de Diego de Alaba publié en 1590 à Madrid, le Praticca Manuale dell'Artigliera de l'espagnol Luis Collado publié en 1606 à Milan, les Eléments d'Artillerie de Rivault de Fleurance publié en 1608 à Paris, le Tratado de Artilleria de Diego Ufano publié en 1613 à Bruxelles, The gunner, shewing the whole practise of Artillerie de Robert Norton publié en 1628 à Londres, Le corona et palma militare di artieglira d'Alessandro Capo publié en 1643 à Venise, Le Grand Art de l'artillerie de Casimir Simienovski paru en 1650 en Pologne.

Les auteurs de ces traités sont des ingénieurs du Roi ou des militaires, capitaines ou lieutenants d'artillerie -Rivault se présente comme précepteur du Roi Louis XIII. Ils y traitent de tous les sujets qui intéressent un bon officier d'artillerie : les ingrédients de la bonne poudre, la description de la fonte, la manière de loger l'artillerie et de faire une batterie, la conduite d'une mine et la construction d'un pont, les obligations des officiers, etc..., et les problèmes de balistique. Les hommes de l'art veulent prolonger les travaux de Tartaglia en répondant à l'exigence des artilleurs, c'est à dire en leur apportant le moyen de calculer la portée du canon selon l'angle de tir. Diego de Albala professe que les portées sont proportionnelles aux sinus des angles de tir et Collado étudie des formules empiriques rattachant les portées à des progressions arithmétiques(1). Nous verrons que Ufano fournit une règle et imprime des tables de tir, tandis que Rivault ramène la mesure de la portée à un calcul géométrique. Pour obtenir ces

(1). DUGAS, La mécanique au XVIIème siècle.

formules de calcul, les hommes de l'art s'appuient sur la trajectoire tripartite de Tartaglia ; mais comme il s'agit de mesurer des portées, ils recourent nécessairement à des expériences. Le problème de la balistique constitue un terrain propice pour ces expériences primitives : il s'agit de mesurer la portée selon l'angle de tir. Pour évaluer les distances, les artilleurs utilisent les instruments de Biringuccio(1), et pour évaluer les angles de tir, ils se servent de la célèbre équerre que Tartaglia leur a léguée.

1. L'équerre de Tartaglia

Lorsque Tartaglia s'interroge sur la portée du canon, il ne néglige pas d'apporter certaines considérations techniques. Lorsque dans les Quesiti et inventioni diverse, le Prieur de Barletta lui demande si deux tirs effectués coup sur coup, avec la même pièce d'artillerie, vers le même but et une charge égale, sont égaux, il lui est répondu que "sans aucun doute ils seront inégaux : le second coup partira plus loin que le premier". Tartaglia avance deux raisons. D'une part, lors du premier tir le boulet a trouvé l'air en repos alors que dans le second il trouve l'air déjà ébranlé, donc plus facile à mouvoir et à pénétrer. D'autre part, lors du premier tir le canon est plein d'humidité alors que dans le second il est parfaitement sec(2). Dans le livre III de la Nova Scientia, Tartaglia aborde aussi des problèmes pratiques et décrit un instrument pour mesurer les angles de tir. Tartaglia consacre également le premier dialogue de ses Quesiti et inventioni diverse à la description et à l'usage de cet objet, qui à lui seul aurait fait la renommée de son inventeur(3).

L'instrument de mesure de Tartaglia est une équerre composée d'une partie fixe et d'une partie mobile, ainsi que d'un fil à plomb se déplaçant devant un quadrant divisé en 12 parties égales qui marquent les 12 points de l'équerre (Fig. 5). Pour utiliser l'équerre, l'artilleur fait pénétrer la partie fixe dans "l'âme" du canon, puis déplace la partie mobile jusqu'à ce qu'elle coïncide avec le fil à plomb. Le quadrant permet alors de mesurer l'angle de tir ;

(1). DUGAS, La mécanique au XVIIème siècle.
(2). KOYRE, op.cit.
(3). TARTAGLIA, Quesiti et inventioni diverse, p.5-6.

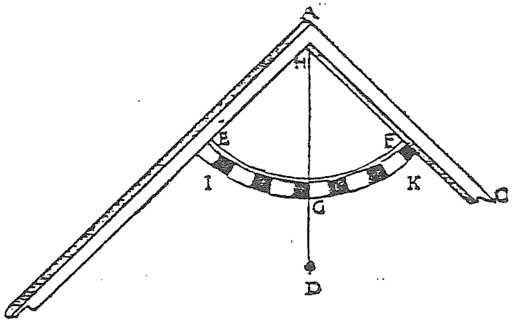


Fig. 5

ainsi, le sixième point de l'équerre correspond à un tir de 45° (Fig. 6).

Un artilleur, même peu versé dans la science balistique, peut toujours se servir de l'équerre pour ajuster empiriquement ses tirs. Blondel ironise sur l'usage qu'en fait l'ignorant sieur Malthus : "Il ne pointa jamais son mortier que par hasard et en tatônnant, ou pour mieux dire par l'estime qu'il faisait de l'éloignement du lieu où il voulait jeter la bombe, suivant lequel il lui donnait plus ou moins d'élévation ; prenant garde si les premiers coups étaient justes ou non, afin de baisser son mortier, si sa portée était courte ; ou le hausser si elle allait au-delà de son but ; se servant à cet effet d'une équerre dont il faisait parade"(1). Blondel imagine que les artilleurs, et même Tartaglia,

(1). BLONDEL, L'art de jeter les bombes, p. 5-6.

2. Les éléments de l'artillerie de Rivault

Rivault de Fleurance est un érudit qui a donné une traduction latine des ouvrages grecs d'Archimède avec quelques commentaires. Il se dit précepteur du Roi Louis XIII, auquel il aurait enseigné les mathématiques. Le titre complet de son traité est Les Eléments de l'artillerie concernant tant la théorie que la pratique du canon. Dans sa préface à Messire Maximilien de Béthune, Rivault présente son oeuvre en précisant : "De sorte que si elle n'était marquée de théorie et pratique, de contemplation et d'action, elle ne serait nullement acceptable devant vous et ne ferait qu'indignement paraître la différence qu'on doit faire du grand Maître d'avec le commun officier". L'étrangeté du traité résulte peut être de sa double vocation, théorique et pratique. L'organisation de l'ouvrage est euclidienne -d'où, sans doute, le choix du mot "Eléments"- avec des définitions, des maximes et des théorèmes. Les conceptions du mouvement se situent dans une lignée aristotélicienne très orthodoxe. Les définitions du premier livre portent sur les termes quantités, figure ou vitesse, tandis que celles de deux autres livres ont pour objet l'âme du canon, l'émerillon ou la couleuvrine. Les théorèmes se préoccupent de l'existence du vide, de la résistance du mobile aussi bien que de l'inflammation de la poudre et du recul du canon.

Les définitions et les maximes du premier livre se rapportent au mouvement dans une conception aristotélicienne. Le verbe mouvoir signifie "transporter de lieu en autre", "tourner en un même lieu" et aussi "changer de qualité"(1). Le verbe monter veut dire s'approcher du ciel, et le verbe descendre s'en éloigner et approcher du centre du monde. La deuxième maxime énonce que "tout mouvement se fait sur quelque quantité", mais Rivault appelle quantité "le soutien et le sujet de tout mouvement" : une quantité bouge, change de couleur ou change de nature. La quatrième maxime rappelle que "chaque chose meuve pour se porter en son lieu naturel" et la cinquième que les corps rares montent, le feu plus que l'air, et que les épais descendent,

(1). Définition VIII, p. 8.

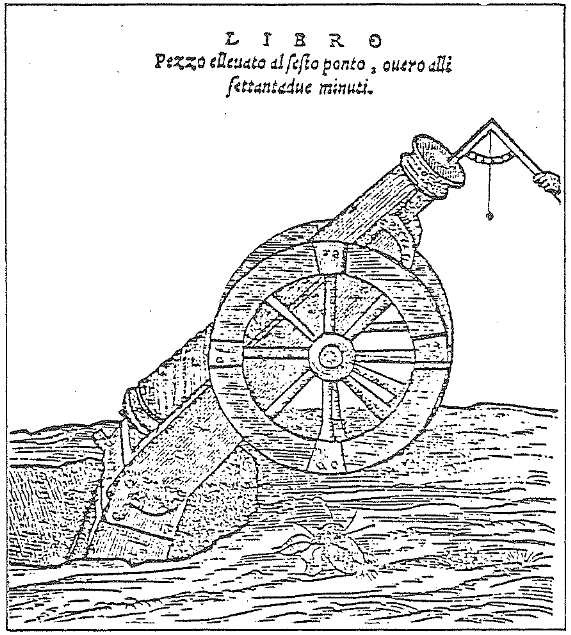


Fig.6

ont pu croire "que les différentes étendues des coups de canon (...) croissaient et décroissaient à proportion des points de l'équerre. C'est à dire qu'un coup d'une pièce pointée au quatrième point allait quatre fois plus loin". Il n'en est probablement rien, les auteurs des traités d'artillerie s'acharnent, au contraire, à déterminer la façon de faire correspondre une portée à chaque point de l'équerre, et leurs solutions sont parfois très sophistiquées. Nous allons examiner celles de Rivault et d'Ufano.

la terre plus que l'eau.

Rivault donne une définition de la vitesse -ce qui est rare- dont l'usage permet de comprendre toutes les difficultés qu'il y avait à analyser les mouvements dans un contexte dynamique. Il appelle vitesse "force qui fait beaucoup en peu de temps"(1). Deux théorèmes du livre I concernent le mouvement des projectiles. Rivault a défini les mots pousser, "mouvoir sans quitter", et chasser, "mouvoir en quittant". Il énonce que "En la chasse des corps, il part quelque force du mouvant qui touche toujours le mobile et le meut tant qu'il dure" et que "La résistance du mobile proportionnée aux forces du mouvement raidit le mouvement : et plus longtemps le mouvement touche en poussant, plus la force mouvante reste de temps vive"(2). Malheureusement, dans le cas d'un boulet tiré par un canon, le mouvement n'est pas le résultat d'un simple contact mais la suite d'une explosion. De plus, "il ne peut se faire mouvement ni action plus violente que celle du canon". De tout ceci, Rivault ne peut rien conclure sur les trajectoires du boulet et les portées du canon. Il adopte sans explication la trajectoire tripartite de Tartaglia. Quant à sa méthode de calcul des portées, il la donne après avoir avoué que "D'autant que la différente longueur du canon et la variété de la poudre apportent de la différence à la force et la véhémence du coup : il est impossible de donner une règle certaine du port du canon"(3).

Dans le deuxième livre, Rivault définit la portée du point en blanc, la portée moyenne et la portée morte du canon(4).La portée du canon de point en blanc est "la droite ligne que décrit la balle jusqu'à ce que la pesanteur d'icelle commence à vaincre la force mouvante et décliner en l'arc de chute". La portée moyenne du canon est "la ligne de la portée de point en blanc conduite droit jusqu'à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire qui serait élevée sur l'horizon du point où tombe la balle". La portée morte est "la distance du canon et du lieu où tombe la balle en terre" (Fig. 7). Ainsi AK est la portée de point en blanc, AC la portée moyenne et AD la portée morte. Rivault introduit alors la trajectoire du boulet de canon:

(1). Définition XI, p.10.
(2). Théorème XIV et XV, p. 83.
(3). Problème XV, p. 183.
(4). Définitions VIII, IX, X, p. 86.

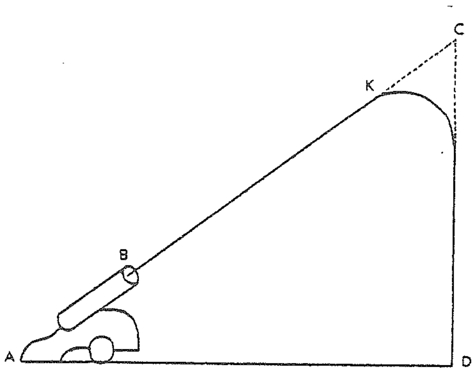


Fig. 7

"Imaginons que le canon AB soit braqué en l'angle BAI. Premièrement la balle est poussée tout droit comme aux points K et L, puis la force qui pousse imprimée par la violence de la machine, vient à s'affaiblir peu à peu tellement que la balle la vainc de sa pesanteur et fait premièrement un arc tel que font KO et LN et enfin elle tombe en terre comme en D ou en E" (Fig. 8).

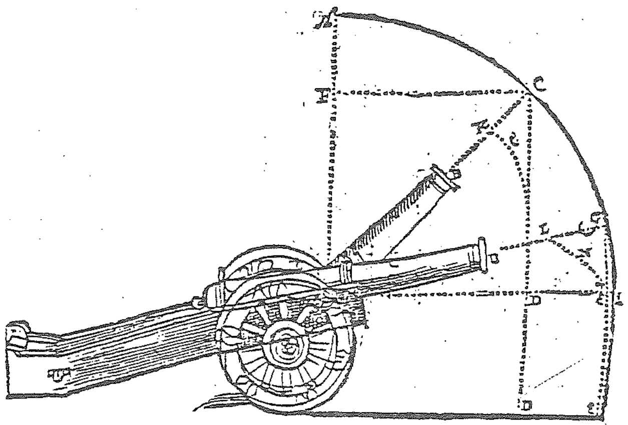


Fig. 8

Le calcul de portée repose entièrement sur la cinquième demande du livre II : "Qu'il soit permis de faire les portées moyennes d'un canon toujours égales, en quelque angle qu'il soit braqué". D'après cette conception un tir horizontal devrait avoir une portée plus grande que celle d'un tir à 45° (Fig. 11), ce qui est contraire à l'observation. Rivault cite l'expérience de Girolamo Rucelli où un tir à 45° donna une portée de 2 683 pas et un tir horizontal une portée de 900 pas. La raison en est, explique-t-il, que le boulet tiré à 45° a pu s'élever librement, tandis que le boulet tiré horizontalement a vu sa chute écourtée en rencontrant le sol : "Puis ce n'est pas tant la différence de la force du coup, qui fait varier les portées mortes, que l'empêchement et la rencontre de terre où donne la balle quand le canon est braqué bas". Par conséquent, Rivault suppose en sa demande "que la portée soit libre et sans empêchement". C'est ici que la traité de Rivault est le plus étrange, la nature très théorique de cette demande -il faut supposer qu'il n'y a pas de sol- ne l'empêche pas de l'utiliser pour des calculs pratiques.

Grâce à cette demande, le calcul des portées se ramène à un calcul métrique élémentaire du triangle. Rivault montre d'abord comment "connaître par la portée morte, la portée moyenne du canon pointé de bas en haut"(1). Supposons que le canon AB soit braqué à l'angle 50° et que la balle soit tombée à 1000 pas au-delà du canon. Il est possible de construire le triangle ADC et donc de calculer AC, qui est égal à la portée moyenne du canon (Fig. 9).

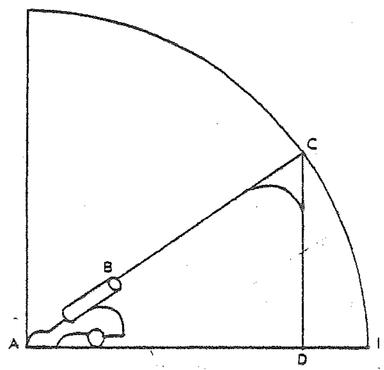


Fig. 9

(1). Problème XVI, p. 183.

Il montre ensuite comment "pointer le canon en tel angle que la balle vienne à tomber en un point donné"(1). La distance AD est connue et il faut calculer l'angle de tir. Il est possible de construire le quart de cercle de centre A et ayant pour rayon la portée moyenne du canon, supposée connue. En menant de D la perpendiculaire à AI, on obtient le point C et le calcul de l'angle CAD est immédiat. Est-ce que Rivault croit vraiment à cette théorie basée sur une demande farfelue ? Il est justifié de se poser la question puisqu'il nous avertit par ailleurs que toute règle certaine est impossible et que "la seule expérience en peut donner avis". La manière dont Rivault utilise les portées moyenne et morte du canon, fait que tout se passe comme si la trajectoire du canon ne comportait pas de partie curviligne, se réduisant aux droites AC et AD, en toute conformité aristotélicienne (fig.12).

3. L'artillerie d'Ufano

Diego Ufano est un capitaine espagnol qui a longtemps servi dans l'artillerie pendant les guerres de Flandres, et particulièrement au siège d'Ostende en 1611(2). Il publie en 1613 à Bruxelles un Tratado de Artilleria, dans lequel sont données pour la première fois des tables de tir(3). Ce traité est traduit en plusieurs langues, il paraît en français en 1621 sous le titre Artillerie.

L'ouvrage d'Ufano est un manuel à usage professionnel qui contient "vraie instruction de l'artillerie et de toutes ses appartenances et déclaration de tout ce qui est de l'office d'un général d'icelle assiégé". Toutes les questions, aussi bien techniques que stratégiques, qui intéressent un officier d'artillerie sont abordées. Les livres I et III, découpés en chapitres, concernent la fabrication, la description et le maniement du matériel d'artillerie. Le livre II, consacré à l'art de la guerre, se présente sous forme de dialogues entre un capitaine -Ufano lui-même- et un général. Les problèmes balistiques sont abordés, parmi les autres, en réponse à des questions précises, tactiques ou pratiques. L'Artillerie n'est pas un ouvrage théorique : ni traité sur le mouvement, ni même exposé de balistique. Il présente très exactement les demandes d'un corps de métier, demandes

(1). Problème XVII, p. 188-189.
(2). BLONDEL, L'art de jeter les bombes.
(3). DUGAS, La mécanique au XVIIème siècle.

qu'Ufano s'efforce de satisfaire.

Un chapitre du livre III donne "La forme et proportion du quadrant avec l'instruction comment on doit en user tant en grandes pièces qu'au mortier"(1). Ufano décrit l'équerre de Tartaglia, avec les douze divisions du quadrant, et explique comment s'en servir en s'appuyant sur une figure (Fig.10) : "Voici donc la structure du quadrant, voyons maintenant quand et comment on en usera et ce en l'exemple suivant (...). En quoi lui servira de beaucoup la figure d'un mortier qui au niveau de l'âme, noté A au quadrant, a la portée de 200 pas, où est la balle A. Mais étant élevée au point B, il fait 487 pas. Au second C, 755 pas. Au troisième D, 937 pas. Au quatrième E, 1065 pas. Au cinquième F, 1132 pas. Au sixième G, qui est le point du milieu du quadrant et de la plus haute élévation, il fera 1170". Il donne ensuite les portées pour les angles en degrés.

La figure qui sert de référence indique que la portée maximale du canon est obtenue pour un angle de 45°, point G du quadrant, et que des angles symétriques par rapport à 45° donnent des portées égales. Ufano n'explique pas comment ont été obtenues les propriétés des angles de tir et les mesures portées sur la figure. Il décrit les trois mouvements auxquels est soumis le boulet : "Tous ces tirs se font premièrement par le mouvement violent ou droit, puis par le mouvement mêlé la balle déclinant de la ligne droite, dont elle est sortie du mortier et faisant un arc ou une courbée, et finalement par le naturel, ayant perdu toute sa force, et cherchant son centre de haut en bas ; comme on en voit les traces en la dite figure". Cependant, les trajectoires représentées sur cette figure n'ont pas la forme orthodoxe de la Nova Scientia, elles ne sont vraiment rectilignes que dans la première partie du parcours. Même si l'explication de Tartaglia est encore présente, elle n'est plus acceptée dans les faits : les vrais boulets de canon ne suivent pas la trajectoire tripartite. Plusieurs figures de l'Artillerie représentent des trajectoires quasi-curvilignes (Fig.11). Par ailleurs, les trajectoires représentées ne sont pas conformes aux mesures indiquées, puisque les portées dessinées sont en progression arithmétique.

(1). Chapitre XIII, p. 115-117.

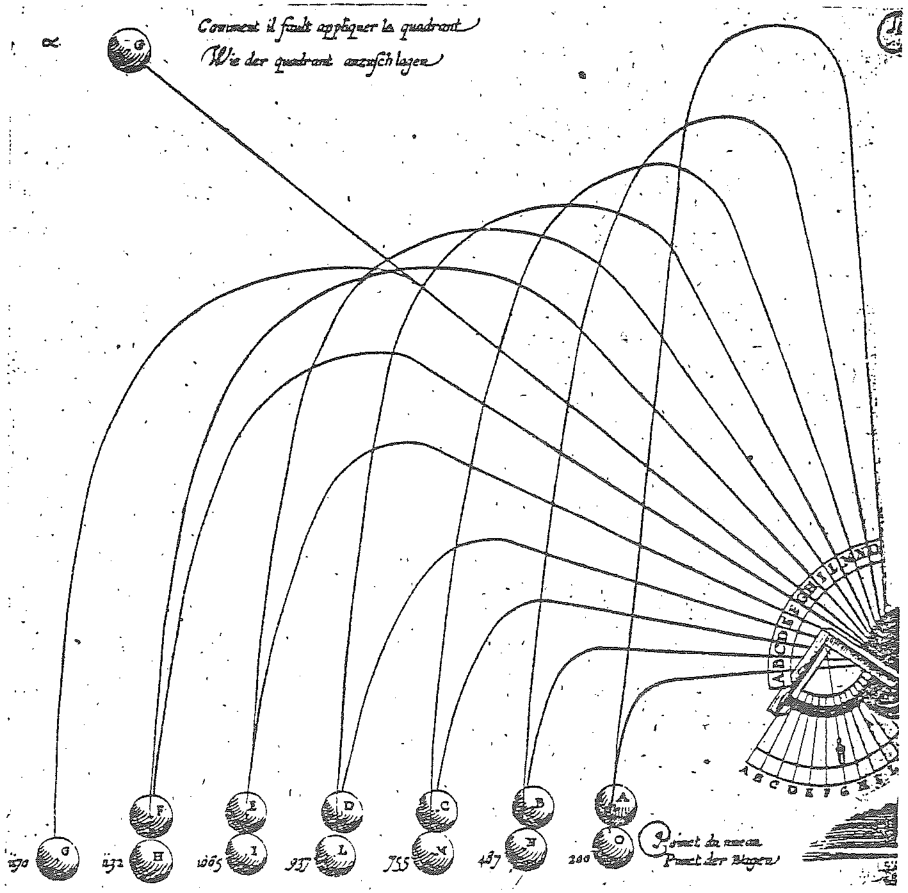


Fig. 10

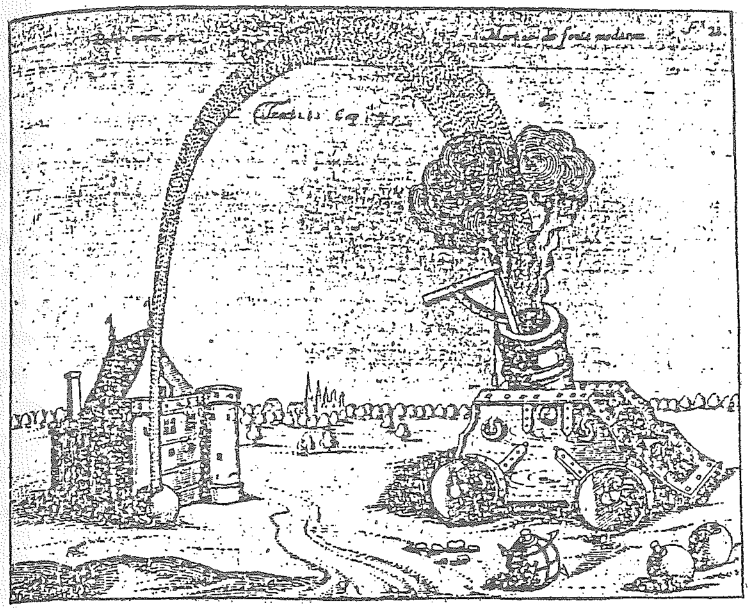


Fig.11

Pour expliquer l'utilisation du quadrant, Ufano a commencé par donner un exemple numérique. Il poursuit en donnant une règle pratique pour calculer la portée selon l'angle de tir exprimé en degré : "La règle commune par laquelle l'artilleur connaîtra quelle sera la portée de la pièce et de degré à degré de l'élévation d'icelle est : qu'il regarde de combien de pas elle sera selon la mire commune. Lesquels il divisera par 50, et multipliera le quotient par 11, qui sera le nombre de la plus grande digression, lequel il divisera derechef par 44, dont le quotient sera justement le nombre de pas; que la balle perdra les autres digressions, degré à degré. Pour exemple. Le canon tire par la pointera de riz les métaux 1000 pas, qui divisés par 50, donnent le quotient de 20, lesquels multipliés par 11 font 220 pas, qui est le nombre de la plus grande digression, qui se fait au second degré du quadrant, ou le premier après le niveau. Mais toutes les autres digressions vont toujours diminuant, jusques au quarante cinquième degré. Pour savoir donc de combien sera cette diminution de degré en degré jusques au 45, qui est la plus haute élévation, il prendra le nombre de degrés dès le premier jusques au dit 45, qui feront 44 et divisant par iceux le nombre précédent de 220, il trouvera le quotient de 5, qui est le nombre qui ira toujours décroissant dès la première jusques à la dernière digression". Si pour un degré la portée est de 1000 pas, alors pour deux degrés la digression sera de 220 pas et la portée sera de 1220 pas, pour trois degrés la digression sera de 215 pas et la portée sera de 1435 pas, etc... Autrement dit, si u_n désigne la portée correspondant à n degrés, les portées sont calculées à partir de u_1 et de la formule de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + a - (n - 2)b$$

avec $a = (u_1 : 50) \times 11$, la plus grande digression, et $b = a : 44$. Ufano effectue les calculs des portées pour tous les angles de tir jusqu'à 45°, il trouve alors 5950 pas. Il fournit ainsi une table que les artilleurs peuvent utiliser pour calculer la portée de leur engin en effectuant un seul tir et en appliquant une règle de trois. En effet, la formule de récurrence implique que u_n est proportionnelle à u_1 et à une fonction de n. En cherchant et en trouvant cette règle, Ufano a satisfait la demande des artilleurs. Comment l'a-t-il obtenue ? Les mesures données sur la figure de référence sont déduites elles aussi de cette mystérieuse règle.

Dans ce chapitre du livre III, consacré à l'ajustement du tir, Ufano cherche surtout à définir une règle et ne s'intéresse pas à la trajectoire du boulet de canon. Blondel le lui reproche : sa règle est "à la fois subtile et ingénieuse ; mais elle n'est point véritable, parce que cet officier n'a pas connu la nature de la ligne courbe que le boulet décrit en passant par l'air"(1). Par contre, dans un dialogue du livre II, à propos d'une question plus stratégique, Ufano se trouve obligé d'envisager cette trajectoire. La question du général est la suivante : "Des pièces égales, quelle poussera la balle plus loin, celle qui est logée au haut d'une tour ou celle qui est logée au pied d'icelle ?"(2). Pour répondre à cette question, il est nécessaire de comparer les trajectoires des boulets lancés en haut et en bas de la tour. Aussi, le général demande-t-il plus loin : "Quelle différence de mouvement a la balle, dès la première

(1). BLONDEL, L'art de jeter les bombes, p. 18.
(2). Dialogue 9, p. 54-55.

sortie de sa pièce jusques à son repos ?" Le capitaine Ufano explique : "Il y a trois mouvements divers. Le premier à son commencement incontinent dès la sortie de la bouche de la pièce, comprenant en une ligne droite toute la force et vigueur d'icelle : dont il est appelé mouvement violent. L'autre commence quand après la droiture la ligne se va courbant en un arc. Lequel d'autant qu'il participe encore de la violence, mais en décadence, est appelé motus mixtus ou mouvement mêlé. Mais le troisième qui commence dès la dernière pointe de son arc où la balle de son mouvement naturel, cherchant, selon sa propre pesanteur, son centre et repos, en ligne droite et perpendiculaire, est appelé mouvement pur et naturel. Tous trois, montrés en la dite figure dès le commencement du violent jusqu'à la fin du naturel". En suivant cette conception, le capitaine estime que le canon placé en haut de la tour devrait lancer la balle plus loin que celui placé en bas (Fig.12). Mais il n'ose pas l'affirmer ne l'ayant pas lui-même

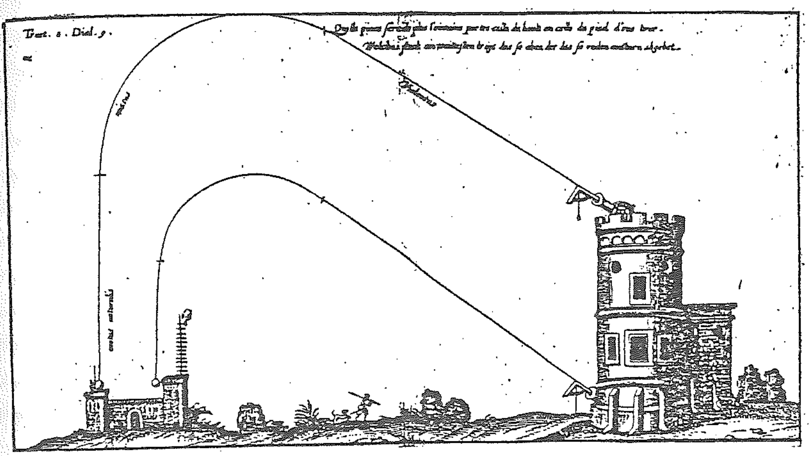


Fig. 12

observé ou expérimenté : "Je n'en pourrai aussi donner plus entière résolution, recommandant et remettant le reste aux esprits curieux et vifs jusqu'à ce que l'expérience nous enseigne plus clairement".

Une fois de plus, Ufano se montre peu empressé de suivre à la lettre la théorie de la Nova Scientia, à laquelle il préférerait la certitude d'une expérience. Il est vrai que la trajectoire tripartite ne permet pas vraiment de conclure. Quant à la trajectoire curviligne, non mentionnée par les artilleurs, elle serait ici comme ailleurs parfaitement inutile. Effectivement, l'argument final du capitaine se réfère à une expérience : "Au surplus j'ai entendu d'un qui longuement avait pratiqué l'artillerie au siège de certaine ville étant contraint de loger l'artillerie quelque peu plus loin d'icelle qu'on fait coutumièrement on lui commande d'essayer si d'un demi-canon il pourrait mettre la balle en ladite ville. Et voyant qu'il ne pouvait atteindre que les remparts il s'avisa d'élever en hâte la plate-forme sur laquelle la pièce avait été logée de six pieds : et la y remettant et retournant à l'essai il trouva que sa balle pénétra de 800 pas d'avantage en la ville, qu'elle n'avait fait auparavant, donc il apparaît que tant plus que la pièce est élevée, tant est la portée plus lointaine".

Ce dialogue réaffirme l'importance pour les artilleurs de connaître la véritable trajectoire du boulet de canon. De plus, la nécessité de recourir à l'observation et à l'expérience est clairement affirmée.

4. Les expériences de tir

Il semble que les premières expériences que les artilleurs aient effectuées concernent la doctrine de Tartaglia, selon laquelle la portée maximale est obtenue pour un angle de tir de 45°. Blondel rapporte que, dès 1532, des canonniers désireux de la vérifier en firent l'expérience à Vérone "où l'on tira deux coups de couleuvrine de vingt livres chargés également de poudre et de balle, l'un sur l'élévation du sixième point, et l'autre sur celle de deux points au-dessous"(1). Le premier coup alla à 1972 perches et le second à 1872 perches, ce qui confirma le bien fondé de la doctrine. Lorsque Rivault note la contradiction entre cette même doctrine et l'égalité des portées moyennes, il fait également référence à l'expérience d'un certain Girolamo Rucelli : "On a bien observé d'un canon portant balle de cent livres à douze onces le livre, et chargé de 66 livres de poudre (...) s'il est pointé à l'angle de demi-droit sur l'horizon que la balle meurt à 2683 pas loin, et que s'il est pointé à niveau,

(1). BLONDEL, op.cit., p. 14.

elle ne va qu'à huit ou neuf cent pas"(1).

Des expériences plus élaborées sont relatées dans l'Artillerie d'Ufano. Le dialogue 21 narre l'"épreuve d'un canon tirant 24 livres de fer contre une colubrine de 13 livres faite au château d'Anvers par le châtelain Augustin de Mexia et le maître de camp Jérôme Monroy, en l'an 1601"(2). Le demi-canon, élevé à 22°, tira à 300 pas et la colubrine, élevée à 18°, tira seulement à 150 pas. Le capitaine Ufano juge probablement les paramètres trop nombreux et peu pertinents: "Croyez-moi Monseigneur, que si la colubrine n'eut été que de 32 calibres, elle eut porté la balle beaucoup plus loin". Il rapporte alors plusieurs expériences où les canonniers ont fait varier le calibre du canon, c'est à dire sa longueur, et observer les résultats obtenus : "Donc il est certain que la colubrine étant de 32 livres, la balle acquiert toute la vigueur, comme on s'en peut apercevoir qu'au sortir elle fait plus grand tonnerre et la pièce en reculer plus rudement chose qui selon le témoignage de Louis Collade a été éprouvée au Royaume de Naples, en un colubrine faite à Gênes tirant 48 livres de fer et longue de 47 calibres mais qui en sa plus haute élévation, n'égalait la portée d'une demi-colubrine de 32 calibres et de 16 livres de fer. Donc les officiers en firent ôter 8 calibres ; et voyant que la portée en fut meilleure, en firent couper encore 7 dont la dite pièce venant à la juste proportion de 32 calibres fît sa portée de 1500 pas plus avant, qu'elle n'avait au commencement. De même nous dit le sergent de Holmedo qui étant soldat au Rocher de Vélez de Gomera (...) il s'y trouve une demi-colubrine de 45 calibres et de 12 livres de balle, qui ne pouvait mettre la balle au fort d'Alcenlareio auquel un demi-canon pouvait aisément mettre la sienne : donc les officiers Jean de Moline et Andrieu de Sepulvead lui firent rogner 12 calibres, laissant la pièce de 33 calibres, qui ainsi raccourcie poussa la balle non seulement aussi fort, mais aussi environ 800 pas plus avant".

Pour perfectionner leur art, les canonniers doivent essayer de connaître et de maîtriser les paramètres qui interviennent sur

(1). RIVAULT, op.cit., p. 92.
(2). UFANO, op.cit., p. 78.

la portée de leur engin. Ils sont ainsi conduits à effectuer des mesures, à comparer les mesures obtenues en faisant varier les paramètres, puis à isoler certains paramètres. Ces essais font partie du métier d'artilleur, mais ils constituent aussi un premier pas vers la réalisation d'expériences physiques. Ils viennent aussi pallier la principale lacune des travaux de Tartaglia : il est clair que les problèmes d'artillerie exigent des résultats quantitatifs. La trajectoire peut être rectiligne ou curviligne, mais quelle est sa mesure ? Le boulet va plus ou moins vite, mais dans quelle proportion ? Galilée va répondre précisément à ces deux questions, dans ses Discours concernant deux sciences nouvelles de 1637 (1).

(1) voir IREM LE MANS, Mathématiques, Arts et Techniques au XVIIème siècle.

BIBLIOGRAPHIE

I. SOURCES

BLONDEL, L'art de jeter les bombes, Mortier, Amsterdam, 1699.

MOLTZHEIN de, Esquisse historique de l'artillerie française depuis le moyen-âge jusqu'à nos jours, Simon, Strasbourg, 1868.

RIVAULT, Les éléments de l'artillerie concernant tant la théorie que la pratique du canon, Beys, Paris, 1608.

TARTAGLIA, Nova Scientia, Venise, 1537.

TARTAGLIA, Quesiti et inventioni diverse, Brisciano, Venise, 1546.

UFANO, Artillerie, Aelst, Zutphen, 1621.

II. ORIENTATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

COSTABEL, Observations et théories du mouvement au XVIème siècle, in Cahiers du Séminaire d'Epistémologie et d'histoire des sciences, Université de Nice, n° 7/8, 1980.

DUGAS, Histoire de la mécanique, Dunod, Paris, 1950

DUGAS, La mécanique du XVIIème siècle, Editions du griffon, Neufchâtel, 1954.

GILLE, Les ingénieurs de la Renaissance, Hermann, Paris, 1964.

I.R.E.M. LE MANS, Mathématiques, Arts et Techniques au XVIIème siècle, Publication n° 4, Université du Maine, 1987.

KLINE, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, New York, 1972.

KOYRE, La dynamique de Nicolas Tartaglia, in La science au XVIème siècle, Actes du colloque de Royaumont, Hermann, Paris, 1960.

MOSCOVICI, Essai sur l'histoire humaine de la nature, Flammarion, Paris, 1977.

TATON, Histoire générale des sciences, tomes I et II, P.U.F., 1957.

QUELQUES GRANDES PROBLEMATIQUES

DE L'HISTOIRE DE LA GEOMETRIE

Rudolf BKOUCHE

I.R.E.M. de Lille

Le monde apparent est l'unique monde, c'est un mensonge que d'y ajouter le monde vrai.

Nietzche

L'histoire n'existe que par rapport aux questions que nous lui posons.

Paul Veyne L'inventaire des différences

De quoi s'occupe le géomètre ?

Quel est l'objet de la géométrie ? question insidieuse, comment choisir (s'il faut choisir) entre la tradition euclidienne qui s'étend jusqu'à nos jours et le bouleversement de la pensée géométrique hilbertien ; s'agit-il de la même géométrie, s'agit-il seulement des mêmes objets même si l'on y retrouve les mêmes mots.

Ceci pose la question des objets mathématiques, moins celle de leur existence que celle de leur permanence tant il est vrai que l'histoire des mathématiques est en un certain sens l'histoire de la transformation des objets mathématiques ; la géométrie après Klein et Hilbert est-elle la même que la géométrie grecque, et plus précisément quel est le lien (si lien il y a) entre les diverses formes du discours mathématique.

Cette impossibilité d'assurer une permanence des objets mathématiques, paradoxale lorsqu'on sait que les mathématiques représentent l'un des blocs stables (sinon le seul) parmi les constructions de l'esprit humain, a conduit à concevoir les mathématiques moins comme une science qui se développe autour d'objets bien définis que comme un domaine de la connaissance qui se développe à travers une méthode, savoir la méthode déductive qui s'organise autour de la démonstration. Le miracle grec, dont les mathématiques se réclament, ne s'est-il pas accompli avec la naissance de la pensée rationnelle et la démonstration n'en est-elle pas le fruit le plus pur ?

Ainsi le slogan

Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration qui ouvre l'introduction des Eléments de Mathématiques [8] de Nicolas Bourbaki, slogan fondateur de cette conception qui réduit les mathématiques à leur méthode, mais slogan paradoxal. La conception de la démonstration issue des mathématiques grecques n'a-t-elle pas été remise en question avec la fameuse crise des fondements et reformulée par la critique hilbertienne et l'introduction des méthodes formalistes. Ainsi l'attitude ambigüe devant les Eléments d'Euclide, considérés comme le premier exemple de ce qu'on appelle aujourd'hui le développement hypothético-déductif (ce qui est d'une certaine façon un anachronisme !) et en même temps critiqués pour leur manque de rigueur et le trop fréquent appel à une intuition géométrique que la modernité, grâce à Hilbert (comme on dit grâce à Dieu), aurait su débusquer et éliminer. Ainsi de ces fameux cas d'égalité des triangles dont les démonstrations à la grecque (depuis Euclide jusqu'à Legendre et aux ouvrages scolaires de l'avant-mathématiques-modernes) sont devenues inacceptables, justification au mieux comme je l'ai entendu dire par un professeur de lycée qui n'osait plus appeler démonstration de tels raisonnements.

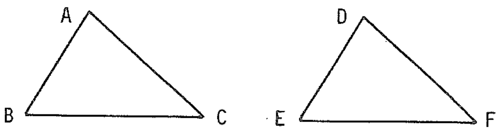
Il y aurait ainsi à écrire une histoire de la démonstration, ou plutôt des conditions de légitimation de la démonstration, histoire qui nous permettrait de mieux comprendre ce que signifie une telle légitimation, ainsi que les hésitations et les difficultés qui accompagnent sa mise en place, histoire qui nous permettrait aussi de nous libérer de certains délires logico-mathématiques qui sont loin d'avoir disparu de l'enseignement d'aujourd'hui.

Quelle relation y a-til entre la démonstration de la proposition 4 du livre I des Eléments d'Euclide (le second cas d'égalité des triangles) qui s'appuie sur le principe de l'égalité par superposition et la démonstration de ce second cas d'égalité via l'algèbre linéaire.

La première que nous citons ici dans la traduction de Hoüel [29] décrit ce qui se passe lorsqu'on applique le premier triangle sur le second, le principe de l'égalité par superposition légitimant le raisonnement ; celui-ci s'appuie explicitement sur la figure, celle-ci n'est pas simple support du raisonnement, elle représente l'objet sur lequel porte le raisonnement et c'est à travers l'intuition de l'objet que se constitue le raisonnement.

Si deux triangles ABC, DEF ont les deux cotés AB, AC, respectivement égaux aux deux côtés DE, DF, et si les angles BAC, EDF, compris entre les cotés égaux, sont égaux ; ces triangles auront leurs bases BC, EF égales, les triangles seront égaux et les angles restants, opposés aux cotés égaux, ABC et DEF, ACB et DFE égaux chacun à chacun.

Fig. 1



Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF, et pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E puisque AB=DE. Ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à l'angle EDF, AC prendra la direction de DF, et puisque AC=DF, le point C tombera sur le point F. Donc puisque B coïncide avec E et C avec F, BC coïncidera avec EF, car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible. Le reste suit.

La seconde démonstration peut se formuler ainsi :

Dans le plan affine euclidien réel, on considère deux triangles ABC et A'B'C' tels que d(A,B)=d(A',B') et d(A,C)=d(A',C') et les angles (AB,AC) et (A'B',A'C') ont même mesure, on sait qu'il existe une application affine et une seule f telle que f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C', et les hypothèses impliquent que l'application linéaire associée à f est une isométrie vectorielle, ainsi f est une isométrie affine.

Au contraire de la démonstration euclidienne qui s'appuie sur la représentation que nous avons des triangles ABC et A'B'C', la démonstration algébrico-linéaire n'a pas besoin, théoriquement du moins, d'une telle représentation, on peut la lire à la lettre c'est-à-dire uniquement comme manipulation formelle de signes s'appuyant sur un discours formel antérieur, savoir la théorie des transformations linéaires et des formes quadratiques. Dans cette seconde démonstration, purement formelle, toute intuition a disparu et par cela même toute signification autre que celle liée à la manipulation des signes ; mais ce qu'elle perd en signification, elle le gagne par les potentialités de sens qu'elle ouvre à travers les divers domaines où le linéaire intervient ; le triangle euclidien n'est plus qu'un triplet de lettres satisfaisant à des relations données et l'énoncé physico-géométrique de la géométrie grecque est transformé en un énoncé algébrique porteur d'une multiplicité de représentations.

A côté de cette double démonstration du second cas d'égalité des triangles, nous citerons la démonstration de l'égalité des angles droits, première proposition des Eléments de Géométrie de Legendre [36] ; rappelons qu'Euclide avait admis cette proposition comme postulat.

Notons d'abord la définition de l'angle droit énoncé par Legendre.

Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre droite CD de telle sorte que les angles adjacents soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appellent un angle droit ; et la ligne AB est dite perpendiculaire à CD.

définition analogue à celle des Eléments d'Euclide.

Voici comment Legendre démontre l'égalité des angles droits.

Soient la droite CD perpendiculaire à la droite AB, et la droite GH perpendiculaire à la droite EF, on peut supposer que les segments CA, CB, GE, GF sont égaux.

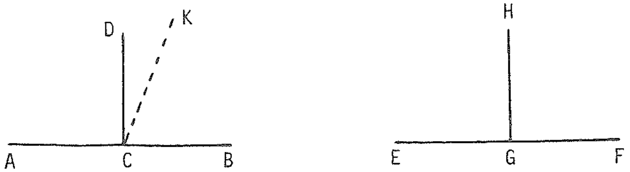


fig.2

Plaçons la droite EF sur la droite AB de sorte que E coïncide avec A et F avec B, auquel cas le point G milieu de EF coïncide avec le point C milieu de AB, alors la droite GH viendra coïncider avec la droite CD ; en effet dans le cas contraire où GH ne coïncide pas avec CD mais vient en CK situé par exemple dans le quadrant BCD, alors puisque les angles EGH et FGH sont égaux, les angles ACK et BCK seront égaux, mais d'autre part les angles ACD et BCD sont égaux, l'angle ACK est plus grand que l'angle ACD, l'angle BCK est plus petit que l'angle BCD, par conséquent l'angle ACK est plus grand que l'angle BCK ce qui est impossible. Donc GH vient coïncider avec CD (fig. 2) ce qui prouve la proposition.

Ici comme dans la démonstration euclidienne précédente, le raisonnement porte sur l'objet représenté par la figure, la démonstration a pour but de mettre en évidence une vérité portant sur les objets. Ce sont donc les objets qui définissent le domaine géométrique ce qui amène à préciser ce que sont les objets de la géométrie, objets issus du donné empirique mais qui sont déjà des abstractions de ce donné, en ce sens qu'ils se définissent par quelques propriétés particulières des objets empiriques, propriétés définies elles-mêmes par le type de problèmes que l'on se pose par rapport à ces objets. Et en ce qui concerne la géométrie étudiée par Euclide et Legendre, il s'agit essentiellement de problèmes liés à la mesure, nous y reviendrons. Ainsi l'abstraction, cette opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière sans faire attention aux autres comme l'explique D'Alembert [17] est elle-même reliée aux types de problèmes que se pose l'esprit humain confronté aux objets qu'il rencontre. Les méthodes de raisonnement portant sur les objets ainsi définis se construisent autour de ces objets, la logique n'étant que la technique qui permet la mise en forme du raisonnement de façon à en assurer la légitimité, mais cette légitimité se détermine à travers les objets ; ainsi Lacroix précise au début de ses Eléments de Géométrie [32] publiés au début du XIX^{e} siècle.

La méthode des Géomètres n'est pas l'unique cause de la certitude de leurs résultats, cette certitude est principalement due

à la nature même des idées qu'ils ont eues à combiner.

Ce qui transformera les conditions de légitimation de la démonstration et par voie de conséquence la forme du discours mathématique ne se situe pas dans un désir plus profond de rigueur et une plus grande abstraction (la démonstration via l'algèbre linéaire du second cas d'égalité des triangles n'est pas plus rigoureuse que l'euclidienne, elle est d'un autre ordre) ; c'est l'apparition de nouvelles problèmatiques qui montrera les limites de l'intuition géométrique à la grecque et par conséquent les limites du raisonnement euclidien ; en particulier, en ce qui concerne la géométrie, le problème des parallèles jouera un rôle important, problème moins d'ordre logique que d'ordre métaphysique, nous y reviendrons. L'axiomatique hilbertienne constituera la réponse la plus efficace aux problèmes de légitimation (elle ne fut pas la seule mais ce n'est point le lieu d'en parler ici) mais cela se fera au prix de la définition même des objets de la géométrie qui perdront leur caractère d'abstraction d'objets empiriques pour devenir de purs objets formels, c'est-à-dire définis seulement par les relations, elles aussi formelles, qui les lient; par voie de conséquence le raisonnement lui-même se transformera, réduit, théoriquement du moins, à une pure syntaxe.

Ainsi transformations des objets et transformations des méthodes s'induisent les unes les autres, impliquant la remise en cause des conditions de légitimation des démonstrations. Le slogan bourbakien qui espérait sauver l'unité des mathématiques en renonçant aux objets au profit des méthodes [8] devient lui-même évanescent ; la question se pose alors de ce qui constitue les permanences, les invariants historiques si l'on veut, qui font que l'on considère le discours euclidien et le discours bourbakien comme participant, malgré leurs différences, d'un même domaine de la connaissance qu'on appelle traditionnellement les mathématiques. Qu'est-ce qui fait que l'histoire de la géométrie n'est pas simple juxtaposition de discours faisant appel à quelques références communes ? qu'est-ce qui fait l'unité d'ouvrages aussi divers que les Eléments d'Euclide ou ceux de Legendre, le chapitre IX (Formes sesquilinéaires et formes quadratiques) de l'Algèbre de Bourbaki et la Géométrie de Berger ?

Le problème est alors moins de définir les objets et les méthodes de cette science multiforme que l'on appelle la géométrie que d'expliciter les diverses problématiques qui ont conduit à construire le domaine géométrique tel que nous le connaissons, et à travers ces problèmatiques d'essayer de comprendre les raisons de son évolution, de relier ainsi la géométrie d'aujourd'hui à celle d'hier et peut-être ainsi de mieux comprendre les enjeux de la science d'aujourd'hui ; c'est là en particulier que se situe l'intervention d'une perspective historique dans l'enseignement.

La géométrie, avant que d'être la construction rationnelle que l'on sait (que ce soit celle d'Euclide ou celle de Hilbert), est d'abord le moyen que s'est donné l'homme pour définir son rapport avec son environnement spatial. Les grandes problèmatiques de la géométrie se situent dans cette confrontation de l'homme avec les phénomènes spatiaux (les faits de l'espace pour rependre une expression de Charles Méray [41]).

x x x
x x

Problématique de la mesure d'abord, liée à l'arpentage d'une part (la mesure des terrains et la détermination de l'impôt, la délimitation des terrains après les crues du Nil en Egypte), à l'astrologie et l'astronomie d'autre part. La géométrie de la mesure sera développée par les géomètres grecs et codifiée par Euclide avec les Eléments, ouvrage qui restera, jusqu'à la mise en place de l'axiomatique moderne (celle de Hilbert), le modèle de cette rationalisation du réel que constitue la physique mathématique ; ainsi les Principia de Newton sont pour la mécanique ce que les Eléments d'Euclide sont pour la géométrie.

Qui dit mesure dit comparaison de grandeurs, ce qui nécessite la définition de l'égalité de ces grandeurs ; ce sera, en ce qui concerne les grandeurs géométriques, le principe de l'égalité par superposition (axiome 4 ou 8 des Eléments selon les éditions) que nous citons ici dans la traduction de Hoüel [29].

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles.

Nous retrouvons ce principe tout au long de l'histoire de la géométrie ; ainsi D'Alembert le considère comme l'une des deux propositions fondamentales de la géométrie, l'autre étant la mesure des angles par les arcs de cercle, les autres propositions s'en déduisant [17], et quelques années plus tard Lacroix écrira dans ses Eléments de Géométrie [32] à propos des angles.

Mais est-il indispensable de définir l'angle ? Ne suffit-il pas de le montrer et d'observer ensuite que les angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, leurs cotés coïncident chacun dans deux points, et qu'alors ils ne cesseront point de coïncider, quelque loin qu'on les prolonge ?

Axiome fondateur de la géométrie, le principe de l'égalité par superposition s'appuie essentiellement sur la notion de mouvement ; la géométrie est ainsi fondée empiriquement sur le lien entre corps solide et mouvement, et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité des deux corps [29]. Le problème de la géométrie est alors d'énoncer à priori des conditions d'égalité, ce qui permettra d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur les critères d'égalité ainsi définis. C'est le rôle des fameux cas d'égalité des triangles ; si leur démonstration s'appuie sur l'utilisation effective de la superposition (et par cela même du mouvement) leur intervention dans le raisonnement permet d'oublier le mouvement, exemple significatif d'une démarche s'appuyant sur un donné empirique (le mouvement) pour fabriquer de la connaissance rationnelle (c'est-à-dire construite sur le seul

raisonnement).

Et d'Alembert précise dans le texte cité ci-dessus à propos du principe de l'égalité par superposition [17]

Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.

Bien que le principe de l'égalité par superposition soit énoncé de façon générale, son utilisation pour les corps solides pose problème ; d'une part la superposition effective d'un corps solide sur un autre est matériellement impossible mais ceci ne remet pas en cause le principe dont le rôle est justement d'oublier la matérialité (et l'impénétrabilité) des corps ; d'autre part la considération des figures symétriques dans l'espace introduit une notion d'égalité irréductible à la superposition (le problème se résoud dans le cas des figures planes en sortant du plan). Euclide avait déjà défini au livre XI des Eléments une notion d'égalité des polyèdres reposant sur l'égalité des faces qui ne faisait pas appel à la superposition (celle-ci n'intervenant que pour l'égalité des faces) mais sa définition n'était pas suffisamment explicite. Ceci a conduit Legendre à distinguer deux types d'égalité, l'égalité par coïncidence et l'égalité par symétrie [36].

Dans la construction axiomatique hilbertienne, fondamentalement différente de la construction euclidienne, le problème de l'égalité sera résolu par l'introduction des axiomes de congruence mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler [28].

C'est ce principe de l'égalité par superposition qui relie géométrie et mécanique des corps solides, celle-ci s'appuyant sur la géométrie euclidienne dont elle est, en un certain sens, le prolongement.

Notons que la notion de mouvement peut être rendue explicite sans intervention du temps comme l'explique Hoüel dans l'ouvrage cité [29] et que cette notion fut à l'origine de la réforme de l'enseignement mathématique de 1905, réforme qui donna lieu à des débats aussi passionnés que celle de 1970 (nous renvoyons aux ouvrages de Méray, Borel et Bourlet cités en bibliographie).

Parmi les grands problèmes que se posaient les géomètres grecs, la détermination des aires a joué un rôle important, cel a conduit à ce qu'on peut appeler (avec précaution cependant) un calcul sur les aires : la méthode des aires qui consiste à déterminer les conditions d'égalité d'aires et les rapports d'aires (rapport au sens de la théorie des grandeurs) et à partir de laquelle on obtient diverses relations entre grandeurs (comme le théorème dit de Pythagore et autres relations métriques). Mais ce calcul s'appuie explicitement sur la nature des grandeurs sur lesquelles il opère et en cela il diffère du calcul algébrique moderne ; en particulier le terme d'algèbre géométrique employé par des historiens des sciences du début du siècle est trompeur.

La méthode des aires s'appuie essentiellement sur la proposition suivante (proposition XXXVII du livre I des Eléments d'Euclide) [21]

Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux

complétée après l'exposé de la théorie des grandeurs au livre V par la proposition I du livre VI.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

C'est la méthode des aires qui permet à Apollonius d'étudier les propriétés des coniques, en particulier les relations métriques dont on sait aujourd'hui qu'elles sont équivalentes aux équations d'une conique rapportée aux axes définis par une tangente et le diamètre passant par le point de contact.

Avec Apollonius on atteint les limites de la méthode des aires, à la fois par la lourdeur des énoncés et la complexité des démonstrations ; cependant la méthode des aires permettra de résoudre de nombreux problèmes liés à la mesure, en particulier elle permettra aux mathématiciens arabes Al Khwarizmi et Omar Khayyam de développer une étude géométrique de la résolution des équations [59].

Cependant, c'est avec le calcul littéral développé par Viète dans son Introduction à l'Art Analytique (1591) [56] que se mettra en place une nouvelle méthode, ce sera la méthode des coordonnées de Descartes et Fermat.

C'est en 1637 que Descartes publie la Géométrie [18], appendice au Discours de la Méthode, dans laquelle il développe le nouveau calcul géométrique.

Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après, que de connaitre la longueur de quelques lignes droites pour les construire

écrit Descartes au début de son ouvrage, et il remarque que le choix d'une unité permet de ramener tout problème de géométrie, via la mesure, au calcul sur des nombres.

Fermat, quant à lui, suit une démarche analogue à celle de

Descartes dans son Introduction aux lieux plans et solides (publiée après la mort de Fermat mais qui aurait été rédigée avant la publication de la Géométrie de Descartes), retrouvant et complétant des résultats d'Apollonius dont il a par ailleurs reconstitué les Deux livres sur les lieux plans [24].

Si Descartes et Fermat suivent des méthodes analogues, confortés tous deux dans la puissance de leur méthode par la résolution d'un vieux problème posé par Pappus au IV^{e} siècle, savoir, déterminer le lieu d'un point dont le produit des distances à une première famille de droites est dans un rapport donné avec le produit des distances à une seconde famille de droites, leur conceptions sont différentes. Malgré des notations plus lourdes que celles de Descartes, Fermat semble avoir compris la portée formelle du calcul littéral, ainsi c'est par des arguments relevant du calcul littéral qu'il montre comment la résolution d'une équation se ramène à une intersection de courbes dans sa Dissertation en trois parties [24] ; Descartes au contraire abordant le même problème de l'étude géométrique des équations algébriques au livre III de la Géométrie a constamment besoin de références géométriques ce qui d'une certaine façon alourdit sa démarche.

Ainsi se mettent en place avec la méthode des coordonnées à la fois une algébrisation de la géométrie et une géométrisation de l'algèbre ici définie comme l'étude des équations, contribuant ainsi au mouvement d'unification des deux domaines des mathématiques définis par le nombre d'une part et la figure de l'autre. Cette unification via la mesure reste dans le prolongement de la tradition grecque qu'elle renouvelle sur le plan de la méthode, objets et problèmes s'inscrivant quant à eux dans le cadre de la pensée mathématique grecque. Cependant, et c'est en cela que je pense que Fermat a une vision plus vaste que celle de Descartes (en ce qui concerne les mathématiques), cette unification mettra en valeur la place du formel, c'est-à-dire d'un calcul sans référence aux objets.

Autre aspect de la méthode des coordonnées, la vieille classification des problèmes géométriques telle qu'elle est expliquée par Pappus dans sa Collection Mathématique [44] sera complètement transformée ; pour les géomètres grecs la résolution d'un problème de géométrie se ramène à la détermination d'une intersection de courbes et la classification de Pappus repose sur le type de courbes qui y interviennent : problèmes plans lorsque ces courbes sont des droites et des cercles (problèmes résolubles à la règle et au compas), problèmes solides lorsqu'interviennent des sections coniques et problèmes linéaires lorqu'interviennent d'autres courbes. La méthode des coordonnées en associant à une courbe une équation va permettre de distinguer les courbes géométriques (définies par une équation polynomiale) et les courbes mécaniques (les autres), respectivement appelées depuis Leibniz courbes algébriques et courbes transcendantes ; de plus les courbes algébriques sont classifiées par leur degré (le degré de l'équation qui les définit). Ceci permettra de classer les problèmes à partir des courbes qui interviennent dans leur résolution. En particulier se pose dans le cas algébrique le problème de déterminer le plus petit degré possible, problème qui sera étudié par

Fermat dans sa Dissertation en trois parties pour la détermination des moyennes proportionnelles : on rappelle que deux grandeurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ étant données, il s'agit de trouver une suite de grandeurs $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$... $\underline{x}_4$ telles que dans la suite ($\underline{a}$, $\underline{x}_1$,$\underline{x}_2$,... $\underline{x}_n$,$\underline{b}$), le rapport de deux grandeurs consécutives soit le même , ou si l'on préfère

$$\underline{a}/\underline{x}_1=\underline{x}_1/\underline{x}_2=\ldots=\underline{x}_n/\underline{b}$$

Nous ne pouvons ici développer plus longtemps l'histoire de la méthode des coordonnées et nous renvoyons à la bibliographie [16] [31]

x x x
x x

Problèmatique de la représentation ensuite, issue des problèmes posés par la représentation sur un plan (et plus généralement sur une surface) des situations spatiales, qui conduit de l'étude de la perspective par les peintres et les architectes de la Renaissance à la géométrie projective du XIX^{e} siècle, problématique née d'une pratique, celle du dessin et dont les premières théorisations sont liées à l'art du dessin [37] [43].

Pour les Italiens du Quattrocento, le tableau est défini comme la fenêtre ouverte (Alberti) ou la paroi de verre (Leonardo da Vinci) à travers laquelle on voit les objets, la représentation picturale est alors définie comme l'intersection de la pyramide visuelle joignant les divers points de l'objet à l'oeil. Le problème est alors de construire cette intersection.

Une première méthode sera développée par Brunelleschi et Alberti, continuée par Piero della Francesca puis Albrecht Dürer: la construction légitime. On connaissait les projections orthogonales sur le plan horizontal et sur le plan vertical, le plan et l'élévation (l'ichnographia et l'ortographia du premier des Dix livres d'Architecture de Vitruve au premier siècle avant J.C.), c'est à partir de ces projections que l'on construit la représentation perspective, le plan du tableau étant supposé vertical et perpendiculaire au plan de l'élévation. Cette construction trop lourde sera simplifiée, ce sera la construction abrégée exposée par Alberti dans son Trattato della Pittura (1435) puis par Piero della Francesca dans son De Prospectiva Pingendi (ouvrage qui ne sera publié qu'en 1899) et Dürer dans son Underweyssüng der Messung dem Zirckel und Rychtscheyd (Instructions pour la mesure à la règle et au compas) publié en 1525. Cette construction se met en place autour de la représentation d'un dallage carré (qui sera la figure de référence pour les constructions perspectivistes).

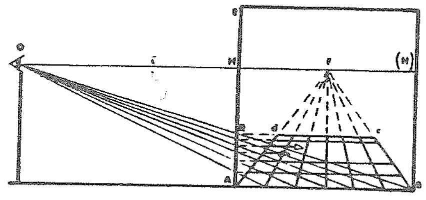


fig.3

A côté de cette construction se mettra en place la méthode des points de distance, points vers lesquels convergent les diagonales du dallage, points qui sont sur la ligne d'horizon à une distance du point de fuite principal (projection de l'oeil sur le plan du tableau et par lequel passent les perspectives des droites perpendiculaires au plan du tableau) égale à la distance de l'oeil au tableau.

La convergence des diagonales fut d'abord un procédé de vérification de l'exactitude de la représentation perspective d'un dallage carré avant d'être un procédé de construction ; les points de distance ont été définis par Piero della Francesca dans son traité De Prospectiva Pingendi, on les retrouve sous le nom de tiers points dans les dessins du De Artificiali Perspectiva de Jean Pelerin dit Viator, publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins ne donne aucune indication sur leur statut.

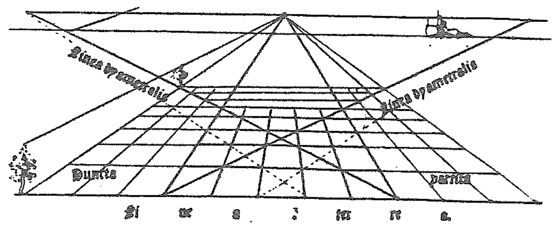


fig.4

Pour plus de détails sur ces deux méthodes : construction abrégée et méthode des points de distance, nous renvoyons à l'article de J.P. Legoff [37] et à l'ouvrage de R. Sinisgalli [51]

L'équivalence des deux méthodes sera démontrée rigoureusement (c'est-à-dire en utilisant la théorie euclidienne des proportions) par Vignola, architecte italien mort en 1573 dans un ouvrage Le due regole della prospettiva publié en 1584 par E.

Danti, ouvrage sur lequel nous reviendrons. Cette démonstration serait aujourd'hui considérée comme redondante dans la mesure où l'on sait que l'on représente le même objet de l'espace par la même transformation, mais cela fait appel à la fois à la notion d'espace et à la notion de transformation, notions étrangères au contexte de l'époque où se met en place la perspective (ce sont les recherches autour des constructions perspectivistes qui conduiront à mettre en place ces notions [54]) ; on pourrait d'autre part remarquer que l'équivalence à priori des deux constructions s'appuie sur les propriétés d'incidence mais celles-ci sont utilisées à l'époque avec prudence comme le montre l'ouvrage de Guido Ubaldo Del Monte publié en 1600, les Perspectivae Libri sex (Les six livres de perspective) dont Christian Guipaud doit bientôt publier une traduction commentée [27].

Dans son ouvrage, Guido Ubaldo définit la notion générale de point de fuite d'une direction donnée, point du tableau par lequel passent les perspectives des droites parallèles à cette direction. Guido Ubaldo donne une première démonstration qui utilise la théorie euclidienne des proportions, démonstration compliquée qu'il étudie à travers divers cas particuliers, et c'est seulement après cette démonstration qu'il en indique une seconde utilisant les propriétés d'incidence : une droite étant donnée, non parallèle au plan du tableau, le plan passant par l'oeil et la droite contient la parallèle à cette droite passant par l'oeil, parallèle qui coupe le plan du tableau en un point par lequel passe la perspective de la droite donnée. Démonstration à la fois courte et efficace, mais il semble que celle-ci ne soit pas canonique pour l'époque, la rigueur géométrique s'appuyant sur un discours géométrique à la grecque comme aujourd'hui, pour certains, il n'y a de rigueur qu'à travers le discours à la Hilbert. Une autre démonstration de l'existence du point de fuite s'appuyant sur les propriétés d'incidence sera donnée par Stevin dans son Traité d'Optique (1605) mais l'exposé y montre un certain embarras. Il faudra attendre l'ouvrage de Taylor (celui de la formule) New Principles of Linear Perspective (1719) [53] pour un exposé géométrique de la perspective fondé sur les relations d'incidence préalablement énoncée comme axiomes (cités ici dans la traduction du P. Rivoire (1759).

Axiome I — L'intersection commune de deux plans est une ligne droite.

Axiome II — Lorsque deux lignes droites se rencontrent en un point, ou lorsqu'elles sont parallèles l'une à l'autre, un même plan peut passer par toutes les deux.

Axiome III — si deux lignes droites, étant parallèles ou formant un angle, sont coupées par une troisième, elles seront toutes trois dans le même plan ; c'est-à-dire, qu'un plan qui passera par deux de ces lignes, passera aussi par la troisième

Axiome IV — Tous les points d'une ligne droite sont dans le même plan où est cette ligne.

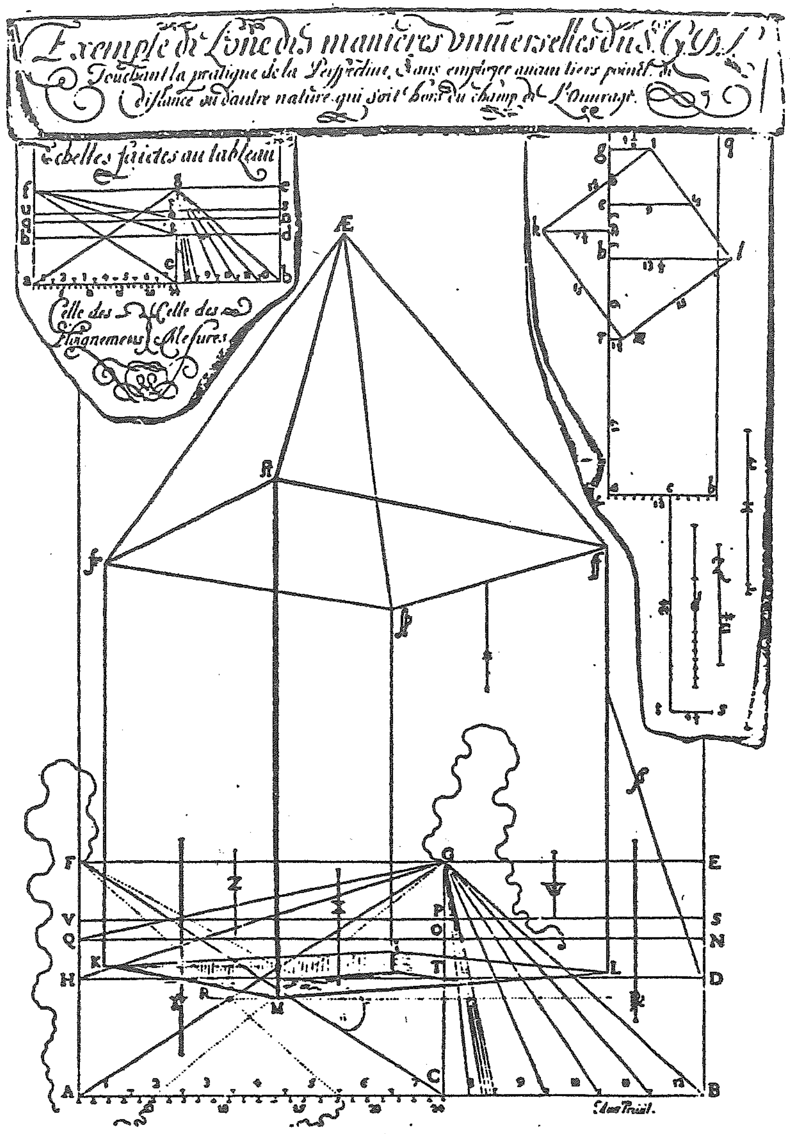


fig.5

Tout au long du XVI^{e} siècle paraîtront de nombreux ouvrages sur la perspective définissant diverses méthodes de constructions, plus ou moins reliées à la construction légitime et à la méthode des points de distance, nous avons cité ceux de Vignola, Guido Ubaldo et Stevin, pour une liste plus complète nous renvoyons à l'ouvrage de Poudra [48].

Si les ouvrages de Guido Ubaldo et de Stevin définissent les principes de la perspective, les méthodes pratiques utilisées sont multiples ce qui alourdit l'exposé et n'en montre pas toujours l'unité. Ce sera l'oeuvre de Desargues, ingénieur et architecte, de chercher à définir une méthode générale unifiant les divers procédés des praticiens : peintres, architectes, tailleurs de pierre, méthode qui relève à la fois du tracé géométrique et de la géométrie rationnelle. Cette démarche vers la construction d'une méthode géométrique qui se veut universelle est analogue à celle de ses contemporains Descartes et Fermat construisant une telle méthode autour du calcul algébrique (cf. ci-dessus).

En 1636, Desargues publie un opuscule de 12 pages Exemples de l'une des manières universelle du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective... dans lequel il indique, autour d'une figure (cf. fig.5) les principes essentiels de la construction, un fac-similé de ce texte est reproduit dans l'ouvrage de Field and Gray [25]. Je me contenterai, en ce qui concerne ce texte, de noter la réticulation du plan horizontal par des faisceaux de lignes parallèles (les lignes coordonnées d'aujourd'hui) représentés sur le plan du tableau par des faisceaux de lignes parallèles ou de lignes concourantes (suivant que la direction des lignes est parallèle au plan du tableau ou non), ce qui permet de placer un point sur le plan du tableau à partir des lignes coordonnées passant par ce point. Notons de plus que Desargues ramène par un changement d'échelle un point de fuite extérieur au tableau à l'intérieur du tableau ce qui rend la méthode plus délicate mais montre la maîtrise de Desargues pour cette construction.

Le procédé de réticulation du plan est ancien et se relie à la figure de référence déjà citée du tracé perspectif, savoir le dallage carré, et nous nous référons ici à une construction de Vignola, la première figure est reproduite par Poudra [48], la seconde par Sinisgalli [51]

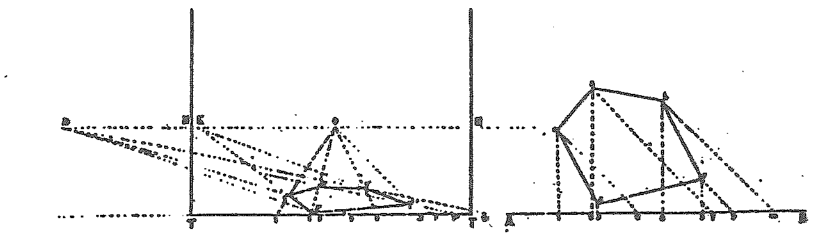


fig.6

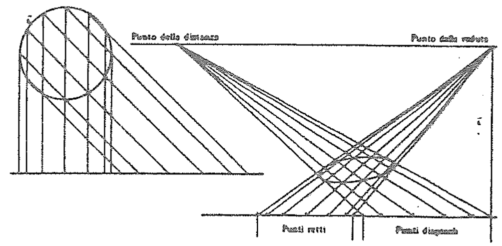


fig.7

Cette intervention de ce que nous appelons aujourd'hui les lignes coordonnées amènera Desargues à considérer faisceaux de droites concourantes et faisceaux de droites parallèles comme analogues et ainsi à introduire la notion de point à l'infini (point de concours de droites parallèles) qu'il étudie comme un point ordinaire. C'est le point de départ de son Brouillon project d'une atteinte aux évènemens des rencontres du cône avec un plan (1639) [52]. Il considère un cône ou un cylindre à base circulaire comme la même figure qu'il appelle un rouleau, figure engendrée par une droite passant par un point fixe (à distance finie ou à l'infini) et s'appuyant sur un cercle. Une conique est alors l'intersection d'un plan et d'un rouleau ce qui la définit comme perspective d'un cercle. Desargues montre alors l'invariance par perspective de certaines configurations, ce qui lui permet de projeter les propriétés du cercle pour obtenir les propriétés des coniques, c'est la méthode des transformations qui sera l'un des principes directeurs des géomètres projectifs du XIX^{e} siècle.

Si le point de vue de Desargues est projectif comme le montre la façon dont il utilise les éléments à l'infini, les démonstrations restent dans la tradition grecque, s'appuyant sur la théorie des proportions et les comparaisons de raisons ; cependant Desargues précise, via le théorème de Menelaüs, l'invariance par projection de certaines relations métriques ce qui lui permet d'étendre la définition de certaines configurations définies métriquement au cas ou certains éléments sont à l'infini, ainsi la configuration définie par six points en involution et celle définie par quatre points en involution (la division harmonique).

C'est encore l'utilisation de la perspective et du théorème de Menelaüs qui permet à Desargues de démontrer le théorème sur les triangles homologiques (appelé aujourd'hui théorème de Desargues) qui paraît en 1648 dans un traité de perspective publié par Abraham Bosse : Manière universelle de Monsieur Desargues pour pratiquer la perspective... [32]

Ainsi le point de vue projectif issu du problème de la représentation perspective s'appuie pour être légitimé sur le raisonnement à la grecque lié à la mesure ; le raisonnement projectif (c'est-à-dire lié aux propriétés d'incidence) se dégagera peu à peu jusqu'au traité déjà cité de Brook Taylor, notons cependant

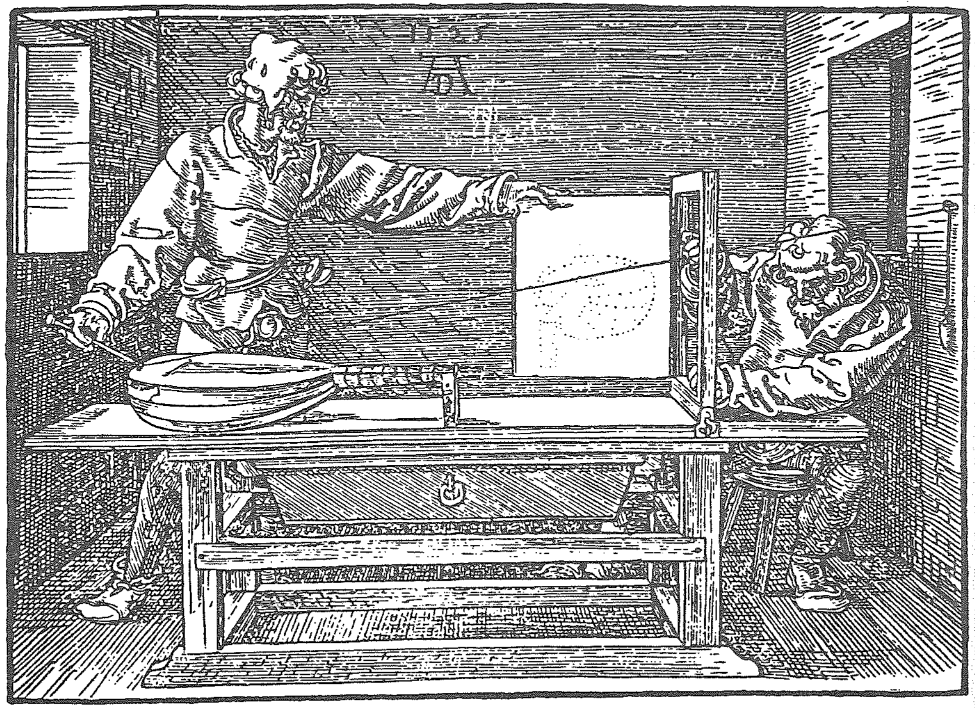


fig.8

le Traité des Coniques de Blaise Pascal, ouvrage dont il ne nous reste que le premier chapitre retrouvé dans les papiers de Leibniz, dans lequel Pascal détermine les divers types d'interection d'un cône et d'un plan (les trois coniques usuelles mais aussi les coniques dégénérées en droites ou réduites à un point) [45].

Il faut cependant noter que les propriétés d'incidence apparaissent déjà chez les perspectivistes y compris sous l'aspect expérimental de la fenêtre ouverte ou de la paroi de verre illustré par les portillons de Dürer, instrument à dessiner en perspective que Dürer a représenté dans certaines de ses gravures (cf ci-contre). Le problème se pose alors d'expliciter les raisons qui font que ces propriétés ne sont pas ou sont acceptées dans le raisonnement géométrique, ce qui renvoie au problème de la légitimation posé au début de cet article, problème relié au statut des objets mathématiques sur lequel nous reviendrons à la fin de cet article.

Pour diverses raisons, le point de vue projectif élaboré par Desargues sera occulté par la méthode des coordonnées plus proche du calcul infinitésimal naissant ; toutefois ce point de vue ne sera pas complètement effacé, nous avons déjà cité Blaise Pascal, nous citerons un autre disciple de Desargues : Philippe de la Hire qui publie plusieurs ouvrages sur les coniques introduisant des notions telles que les propriétés harmoniques du quadrilatère complet, les pôles et polaires (la dénomination moderne apparaitra plus tard au début du XIXème siècle), notions qu'il utilise pour étudier les propriétés des coniques.

L'étude de la perspective se poursuit au XVIIème siècle où paraissent plusieurs traités, en particulier citons les travaux sur les anamorphoses, déformations perspectivistes qui exigent, peut-être plus que la représentation perspectiviste classique, la rigueur de la construction ; nous renvoyons aux articles de Bessot dans les Cahiers de la Perspective [3] ainsi qu'à l'ouvrage de référence de Baltrusaitis [1].

La géométrisation de la perspective s'achève avec l'ouvrage déjà cité de Taylor et les travaux de Lambert dans la seconde partie du XVIIIème siècle. Dans la continuité de la pensée de Desargues, tout en se libérant du raisonnement géométrique à la grecque et s'appuyant sur les propriétés d'incidence, Taylor et Lambert se proposent de définir des règles universelles de construction s'appuyant sur quelques principes généraux. Ainsi Lambert écrit au début de La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral (1759) [34]

Des règles universelles présupposent des principes également universels, qu'il vaut la peine d'approfondir, quand on n'a trouvé que les premières. Avec une attention médiocre on découvrira beaucoup au delà de ce qu'on attendait, dès qu'on a soin de combiner les rapports entre les parties de l'objet.

C'est que, pour Lambert, les règles ont à la fois une fonction pratique : déterminer les procédures de construction effectives et une fonction théorique en ce que leur effectivité même légitime les principes qui les sous-tendent ; ainsi l'aspect intrumental de la géométrie, que ce soit avec la règle et le compas des géomètres grecs ou avec les instruments plus sophistiqués inventés par les géomètres ultérieurs, est inséparable de son aspect théorique, ainsi les constructions participent du raisonnement géométrique. Ce que Roger Laurent précise dans la préface de la réédition de l'Essai sur la Perspective [33] où Lambert définit le perspectographe, instrument à dessiner en perspective qu'il a inventé :

La construction du perspectographe est en même temps la démonstration d'une suite de propositions soigneusement établies et qui en justifie la construction.

Pour établir les règles de construction perspectiviste, Lambert s'appuie sur la distribution des points de fuite sur la ligne d'horizon sur laquelle il construit une graduation définie par la mesure des angles des directions horizontales avec la direction perpendiculaire au plan du tableau (le transporteur perspectif), ceci l'amène à définir la géométrie perspective, autrement dit la géométrie des objets représentés sur le plan du tableau (en langage moderne, la transformée de la géométrie usuelle par la perspective) [35].

Ceci le conduira à aborder des problèmes de construction à la règle seule, problèmes qui joueront un rôle dans l'élaboration de la géométrie projective moderne.

Nous ne pouvons développer dans le cadre de cet article l'histoire de la géométrie projective du XIXème siècle et nous renvoyons à l'appendice historique qui suit l'Initiation à la Géométrie de Daniel Lehmann [38].

Disons seulement que ce sont encore des raisons d'ordre technique qui vont conduire au développement de la géométrie projective. Gaspard Monge comme d'autres mathématiciens français de la fin du XVIIIème siècle est professeur dans une école militaire et il est amené à s'intéresser à la construction des fortifications, il rencontre ainsi le problème de la représentation qui le conduit à une étude systématique du procédé de la double projection orthogonale, ce sera la géométrie descriptive.

Mais le mathématicien Monge, mettant en place la géométrie descriptive, comprend que cette technique de représentation peut être aussi méthode de recherche en géométrie rationnelle, en particulier les problèmes de représentation plane des corps solides le conduisent à préciser des propriétés de géométrie plane (ainsi les propriétés de pôles et polaires qu'il relie à la détermination des plans tangents menés d'une droite à une sphère ou plus généralement une surface du second ordre), explicitant ce que Chasles appellera l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes [14].

x x x
x x

Les constructions perspectivistes n'ont pas seulement permis le développement de nouvelles méthodes géométriques, elles ont participé à la mise en place de l'un des concepts géométriques fondamentaux de la physique mathématique moderne, je veux parler du concept d'espace.

Il n'y a pas d'espace chez les géomètres grecs, seulement des objets, ce que j'ai appelé des situations spatiales [38] que le géomètre étudie à travers les représentations qu'il en donne (les figures de la géométrie), mais ces situations spatiales sont étudiées chacune isolément. La notion d'espace apparaît lorsqu'il s'agit de coordonner ces diverses situations, que ce soit avec le mouvement et ce sera la mécanique, que ce soit avec le problème de la représentation plane tel qu'il a été posé par les peintres et les architectes de la Renaissance [54].

Les méthodes de représentation dès qu'elles dépassent le stade naïf sont liées à la conception de la vision des objets de l'espace et par conséquent à la marche des rayons lumineux.

Les Grecs étaient partagés entre deux conceptions ; pour les uns, dont Euclide, les rayons lumineux vont de l'oeil vers l'objet, pour les autres, ils vont de l'objet à l'oeil, mais en ce qui concerne le problème de la représentation, cette distinction importe peu ; ce qui importe c'est comment la répartition des rayons lumineux détermine la vision des objets ; ainsi pour Euclide la distance apparente entre les diverses parties d'un objet est définie par l'écart des rayons lumineux joignant l'oeil à ces parties, ce qui signifie une théorie de la représentation centrée sur l'oeil [22] [43].

C'est le décentrement proposé par les artistes de la Renaissance, la fenêtre ouverte d'Alberti ou la paroi de verre de Leonardo da Vinci, qui amène à mettre en relation les trois composantes que sont l'objet à représenter, le tableau, et l'oeil du spectateur.

Il faut ici mettre l'accent sur les aspects techniques de cette mise en relation, nous avons déjà parler de la construction légitime qui consiste à construire la représentation perspective à partir de deux représentations, le plan et l'élévation ; cette construction, nous l'avons vu, s'appuie sur la figure de référence : le dallage carré, qui conduira à la mise en place des lignes coordonnées (cf. ci-dessus) constituant ainsi une première structuration de l'espace.

La mise en place progressive de ce nouvel objet de la géométrie qu'est l'espace conduira Pascal à écrire dans une Introduction à la Géométrie aujourd'hui perdue mais dont le début a été retrouvé dans les papiers de Leibniz [45].

Principe 1 : L'objet de la pure géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur, largeur et profondeur, en donnant indifféremment chacun de ces noms à chacune de ces dimensions, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes-là sont connus d'eux-mêmes.

Principe 2 : L'espace est infini selon toutes ces dimensions

Principe 3 : et immobile en tout et en chacune de ces parties

conception de l'espace qui annonce celle de Newton dans les Principia [42]

Absolute space, in its own nature, without relation to anything external, remains always and immovable.

Cependant cet espace, distinct des corps qui y sont contenus, est essentiellement le lieu des phénomènes géométriques et physiques, il ne fait que fournir les lieux que les corps occupent et remplissent ainsi que l'explique Euler dans la première lettre de la seconde partie de ses Lettres à une Princesse d'Allemagne [23].

Ainsi si le concept d'espace est au coeur d'une pratique scientifique, géométrique et physique, il n'est pas lui-même objet d'une telle pratique, même s'il est objet d'un discours philosophique quant à sa nature et à ses propriétés. Il faudra attendre le XIX^{e} siècle pour que l'espace devienne en tant que tel objet d'une pratique géométrique, et cela après la naissance des géométries non-euclidiennes d'une part et les travaux sur les rapports entre propriétés projectives et propriétés métriques qui conduiront au Programme d'Erlangen [30] [4].

D'une part la naissance des géoméries non-euclidiennes posera le problème de la multiplicité des géométries et ainsi de la multiplicité des espaces, et nous renvoyons ici au texte de Riemann : Sur les hypothèses servent de fondement à la géométrie [52]. D'autre part le développement de la géométrie projective et son caractère de géométrie générale que lui donne ses adeptes conduira à expliciter le lien entre propriétés projectives et propriétés métriques (de façon précise à définir les propriétés métriques comme propriétés projectives particulières), ainsi Cayley définit-il les propriétés métriques d'une figure comme les propriétés projectives de la figure obtenue en ajoutant les points cycliques [12]. Ce problème sera résolu avec le Programme d'Erlangen de Felix Klein et l'introduction des groupes de transformations. Ce n'est pas ici le lieu de le développer et nous renvoyons à l'appendice historique de l'Initiation à la Géométrie de Lehmann [38] ; nous nous contenterons de dire que l'un des apports essentiels de Klein est de faire opérer les transformations sur l'espace alors que les géomètres projectifs s'intéressaient essentiellement aux transformations sur les figures, ainsi Klein

mettait l'accent sur l'espace comme objet géométrique.

Ainsi le courant perspectiviste se trouve à l'origine de l'un des concepts fondamentaux de la géométrie d'aujourd'hui, aussi bien la géométrie physique que la géométrie mathématique pour reprendre la distinction moderne explicitée par Einstein [20]. Peut-être plus que le calcul des coordonnées qui renouvelle les méthodes des géomètres grecs sans en changer fondamentalement le contenu (le changement viendra ultérieurement avec le développement des méthodes analytiques), le courant perspectiviste renouvelle le contenu en déplaçant l'objet de la géométrie ; l'étendue cartésienne reste encore ancrée dans la géométrie grecque des figures et des lieux dont elle conserve le caractère local alors que la conception pascalienne ouvre une nouvelle perspective.

x x x
x x

Nous parlerons peu ici du problème des parallèles et des géométries non-euclidiennes renvoyant à l'article de Jean-Luc Chabert dans ces mêmes Actes [13] ; je voudrais ici, à propos du problème des parallèles, revenir sur les conditions de légitimation de la démonstration.

Rappelons une démonstration bien connue du postulat des parallèles, ou plutôt de la proposition équivalente qui dit que la somme des angles d'un triangle vaut deux droites.

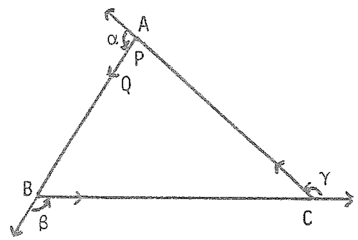


fig.9

Soit un triangle ABC et un segment PQ que l'on déplace de la façon suivante. Il est d'abord placé le long de AB, P coïncidant avec A et on déplace le segment PQ le long de AB jusqu'à ce que P coïncide avec B, puis on le fait tourner autour de B de façon que PQ vienne le long de BC, on déplace de nouveau le segment PQ le long de BC jusqu'à ce que P coïncide avec C, on fait tourner PQ autour de C jusqu'à ce qu'il vienne le long du côté CA, on déplace de nouveau le segment PQ le long de CA jusqu'à ce que P coïncide avec A et on le fait tourner autour de A jusqu'à ce qu'il reprenne sa position initiale.

Le segment PQ a ainsi tourné de quatre droits, d'autre part il a tourné successivement des angles β,γ,α (cf. fig 7), ainsi la somme des angles α,β,γ vaut quatre droits et par conséquent la somme des angles du triangle ABC vaux deux droits.

Examinons maintenant la validité de cette démonstration (que nos connaissances actuelles nous incitent à penser fausse).

Une première critique repose sur le refus de l'utilisation explicite du mouvement dans le raisonnement géométrique, les vérités géométriques doivent être établies sans considération de mouvement, ce qui revient, d'une part à mettre en cause le principe de l'égalité par superposition et ainsi la conception euclidienne de la géométrie (qui n'est pas liée àu postulat des parallèles), d'autre part à mettre en question de la même façon la construction de la géométrie non-euclidienne (celle des pères fondateurs Gauss, Bolyai, Lobatchevski) qui s'appuie aussi sur la conception euclidienne, y ajoutant un usage explicite du mouvement dans les démonstrations. Cette critique repose en fait sur un à priori idéologique, le refus du mouvement relevant moins de la logique que de la métaphysique, voire de la théologie.

Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient, si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas.

ainsi s'exprime le Socrate platonicien dans La République [47]

Il n'y a ainsi, dans le cadre de la conception euclidienne, (la science absolue de l'espace, pour reprendre une expression de Bolyai sur la partie de la géométrie euclidienne indépendante du postulat des parallèles), aucune raison logique pour rejeter cette démonstration comme il n'y a aucune raison logique pour l'accepter ; les conditions de légitimation se situent ailleurs, nous y reviendrons.

Une seconde critique, mathématiquement plus pertinente, rappelle que la démonstration utilise implicitement le fait que l'on peut comparer des angles d'origines différentes, ce que l'on sait être aujourd'hui équivalent au postulat des parallèles, où si l'on veut dire les choses de façon plus savante, que la courbure du plan est nulle. Mais cette critique repose sur la connaissance de la distinction entre géométrie euclidienne et géométrie non-euclidienne, c'est donc une critique à posteriori et sa validité logique qu'on ne saurait nier aujourd'hui ne suffit pas à montrer l'invalidité de la démonstration ci-dessus dans un cadre pré-non-euclidien ; tout au plus met-elle l'accent sur l'équivalence logique entre le postulat des parallèles et la possibilité de comparer des angles d'origines différentes.

Si nous avons rappelé cette démonstration, c'est pour mettre l'accent sur les quelques remarques suivantes.

La problématique des parallèles ne se situe pas sur le même plan que la problématique de la mesure ou celle de la représentation, elle se relie à ce qu'on appelle le problème des fondements, à condition de ne pas réduire ce dernier à sa seule signi-

fication logique. Le postulat des parallèles est lié d'une certaine façon à un échec ; Euclide, après avoir montré que si deux droites font avec une sécante des angles alternes-internes égaux, elles sont parallèles (Eléments, livre I, proposition 28), veut démontrer la réciproque (proposition 29) et c'est pour cette démonstration qu'il introduit son postulat.

Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

énoncé moins simple que la proposition qu'il veut démontrer, proposition dont la démonstration n'est, somme toute, qu'une paraphrase du postulat. Aussi peut-on se demander pour quelles raisons Euclide n'a pas choisi l'énoncé de la proposition 29 comme postulat, proposition qui énonce qu'une sécante fait avec des droites parallèles des angles égaux ; comme s'il était nécessaire que la proposition 29 qui joue un rôle essentiel dans le développement ultérieur, soit démontrée, quitte à ce que le principe qui permet cette démonstration soit moins évident.

Notons que la propriété qu'une sécante fait avec des droites parallèles des angles égaux, sera considérée comme évidente dans plusieurs traités de géométrie élémentaire du XVIII^{e} siècle moin soucieux de rigueur formelle que d'efficacité, ainsi les ouvrage de Clairaut [15] et de Camus [11].

Il est vrai que le postulat des parallèles se justifie d'abord par la vérité de ses conséquences, vérité au sens que les géomètres donnent à ce terme jusqu'à la mise en place de la méthode hypothético-déductive moderne qui parle seulement de validité à l'intérieur d'un système d'axiomes. C'est le postulat des parallèles qui justifie la méthode des aires en permettant de comparer les aires des triangles et des parallèlogrammes (cf. ci-dessus p. 7). Ce qui fait problème, c'est donc moins la vérité la non-vérité du postulat des parallèles que l'absence de démonstration d'un énoncé non évident mais dont on ne peut pas ne pa reconnaître la vérité ; c'est là qu'est le scandale de la géométrie, pour reprendre une expression de D'Alembert.
La question se pose alors, en quoi la démonstration donnée ci-dessus est-elle ou non acceptable ? La réponse, nous l'avons vu, si réponse il y a, ne relève pas de la seule logique.

x x x x
x x

Après ce parcours à travers quelques grandes problématiq de la géométrie (mesure des grandeurs, représentation des objets de l'espace, parallèles) nous revenons à la question posée au début de cet article : que sont les objets mathématiques ? Si l'histoire des mathématiques est d'une certaine façon l'histoire de la transformation des objets mathématiques et par cela même de l'objet des mathématiques, se pose le problème de ce qui fait la permanence de ce domaine de la connaissance (si permanence il y a!)

En ce qui concerne la géométrie, cette transformation pourrait se caractériser ainsi ; d'abord étude locale des situations spatiales, la géométrie pose le problème global de l'espace, contenant universel des phénomènes, concept dont la structuration progressive (à travers les géométries non-euclidiennes d'une part, le développement de la géométrie projective d'autre part, mais aussi les problèmes liés au mouvement et à la mécanique dont nous n'avons pas parlé ici) conduit à la définition moderne de la géométrie comme étude des types d'espaces.

Ce déplacement de la géométrie, dans ses objets et dans son objet, a une histoire ancrée dans les problèmes étudiés, les diverses structurations se construisent autour de ces problèmes, même si par la suite elles en deviennent autonomes, ainsi les méthodes analytiques (la réduction de la géométrie à l'algèbre comme on dit) qui oublient le substrat grec (la mesure des grandeurs) qui sous-tend la construction de la géométrie analytique, ainsi la géométrie projective qui, avec les espaces numériques de Cayley et le programme d'Erlangen, oublie le problème de la représentation dont elle est issue, ainsi la conception structurale d'aujourd'hui qui fait de la géométrie élémentaire un simple chapitre de l'algèbre linéaire [9] [19].

C'est à partir de ce déplacement qu'on peut essayer de comprendre la transformation des méthodes, le passage du raisonnement euclidien au raisonnement formel d'aujourd'hui, les conditions et les raisons d'une telle transformation et, en contrepoint, comment la transformation des méthodes intervient dans la transformation des objets.

La fonction du raisonnement est d'abord de connaître <u>à priori</u>, c'est-à-dire sans avoir besoin de passer par l'expérience, la fonction du raisonnement géométrique est alors moins d'éliminer le sensible que d'en éviter les difficultés et les contradictions, d'y mettre de l'ordre, si l'on préfère. La distinction entre connaissance sensible et connaissance intelligible ne se situe pas dans un monde idéal que l'homme chercherait à redécouvrir et dont le monde sensible ne serait qu'une apparence plus ou moins déformée (la caverne de Platon), la construction de l'intelligible est l'un des moyens de l'esprit humain de connaître le monde, mais cet intelligible ne se construit pas <u>à priori</u>, y compris l'intelligible mathématique, il est moins refus que dépassement du sensible. Ainsi le raisonnement euclidien, loin d'être en dehors du monde sensible, est ancré dans ce sensible, même si d'une certaine façon, il le remodèle, et ce qu'on appelle l'<u>intuition géométrique</u> est en quelque sorte l'un des moyens qui permet de construire de l'intelligible à partir du sensible ; c'est en ce sens qu'on peut présenter le raisonnement géométrique euclidien comme une <u>lecture raisonnée du dessin</u>, raisonnement que l'on retrouve, sous des formes diverses, tout au long de l'his-

toire de la géométrie chez les Grecs comme chez les théoriciens de la perspective, dans les grands traités de géométrie élémentaire (pour une revue de quelques grands traités en langue française, cf. [38]) et les géomètres projectifs du XIX^{e} siècle, et même chez les pères fondateurs de la géométrie non-euclidienne (je renvoie ici au texte de Lobatchevski [40] cité en partie dans le chapitre <u>Géométrie</u> de <u>Mathematiques au fil des âges</u> [60]). Ce sont les problèmes posés par cette lecture raisonné du dessin qui conduiront à préciser la forme du discours, à en énoncer les règles, voire à les modifier, à construire ce que Gonseth appelle la <u>doctrine préalable</u> nécessaire à l'élaboration de la géométrie, doctrine préalable qui se construit en même temps que la géométrie, même si sur le plan de la légitimation elle la précède, autrement dit les conditions de légitimation du raisonnement, si elles sont antérieures au raisonnement sur le plan de la logique, se construisent en même temps que lui et d'une certaine façon le justifie (et se justifient) après coup [26].

Cette explicitation des règles mettra en valeur le caractère de <u>nécessité</u> de la connaissance rationnelle (c'est-à-dire de la connaissance par le raisonnement), c'est ce qui la distingue essentiellement de la connaissance sensible, ce que Wittgenstein appelle l'<u>inexorabilité</u> des mathématiques [58].

La géométrie euclidienne peut alors être considérée comme l'une des premières constructions de l'esprit humain permettant de dépasser le sensible (sans toutefois l'émiminer) et mettant en place les conditions d'une connaissance rationnelle (<u>à priori</u>) du monde ; sa réussite conduira à oublier le donné empirique sur lequel elle s'appuie, l'intuition géométrique euclidienne devenant pure rationalité. C'est la critique de l'idée d'une géomètre purement rationnelle qui conduira à <u>penser</u> la géométrie non euclidienne [5], ainsi Gauss écrit en 1817

<u>Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécéssité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature à priori mais plutôt à côté de la mécanique</u>.

et quelques années plus tard Lobatchevski dans sa préface aux <u>Nouveaux principes de la géométrie</u> [39] publiés en 1838 et Riemann dans son article cite de 1854 [50] développeront des idées analogues (je renvoie aux textes cités dans le chapitre <u>Géométrie</u> de <u>Mathématiques au fil les âges</u>) [60])

En retour, la possibilité d'une géométrie non-euclidienne conduira à remettre en question l'intuition géométrique euclidienne et par cela même la légitimité du raisonnement <u>à la grecque</u>, posant ainsi le problème d'une redéfinition des conditions de légitimation du raisonnement géométrique.

Cette remise en question, associée aux difficultés rencontrées avec l'intervention de la théorie des ensembles en analyse et les paradoxes que l'on sait, conduira Hilbert et son école à privilégier les structures formelles du raisonnement au dépens de toute signification, tout au moins d'un point de vue méthodologique. Ce sera le <u>formalisme</u>, avec les grandes constructions axiomatiques et le rôle primordial des structures dans ce que Bourbaki a appelé <u>l'architecture des mathématiques</u> [7].

En ce qui concerne la géométrie, le formalisme mettra un terme, en principe, au rôle de l'intuition géométrique dans le raisonnement et à toute référence au sensible. Après le retour à l'empirisme qui avait permis de faire éclater le cadre euclidien, la solution apparaissait à travers une nouvelle forme de rationalité fondée sur les structures formelles.

Dans les <u>Grundlagen der Geometrie</u> (les fondements de la géométrie) [28] qu'il publie en 1899, Hilbert explicite sa construction axiomatique de la géométrie : ayant introduit les termes primitifs, <u>trois systèmes de choses</u>, qu'il nomme respectivement points, droites et plans (sans que ces noms renvoient, sur le plan théorique, à des images antérieures), Hilbert énonce les relations primitives entre les termes, vingt trois axiomes qu'il répartit en cinq groupes d'axiomes correspondant aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore les mots ne renvoient théoriquement à aucune image antérieure. Seules interviennent dans le développement de la géométrie les règles logiques qui régissent l'usage des termes et des énoncés, ainsi disparait tout recours à l'intuition et à la signification des termes et des énoncés; une démonstration ne s'appuie que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrés et les règles logiques. Ceci implique la mise en place d'une grammaire explicite des règles logiques, et c'est cette nécessité grammaticale qui conduira aux langages formalisés, langages définis par un système de signes et de règles d'utilisation de ces signes.

L'axiomatique formelle ainsi définie se distingue radicalement de l'axiomatique euclidienne fondée sur des principes <u>évidents</u> régissant des objets d'origine empirique et permettant par le moyen du raisonnement la découverte de nouvelles vérités ; dans l'axiomatique hilbertienne on ne peut parler de vérité d'un énoncé, seulement de sa validité à l'intérieur d'un système axiomatique défini.

Une autre construction axiomatique sera développée dans le cadre de l'algèbre linéaire avec les ouvrages de Giuseppe Peano [46] et Hermann Weyl [57], réduisant la géométrie à n'être (du point de vue structural) qu'un chapitre de l'algèbre linéaire [10] [20]. Nous n'y reviendrons pas ici, renvoyant à l'appendice historique déjà cité [38].

Cette nouvelle conception de la géométrie consacrait la distinction entre géométrie mathématique et géométrie physique comme l'explique Einstein dans un texte déjà cité [20], distinction que Hans Reichenbach résume ainsi [49]

<u>Mathematics reveals the possible spaces ; physics decides</u>

<u>which among them corresponds to physical space</u>.

Cette dualité entre une géométrie mathématique relevant d'une axiomatique formelle et une géométrie physique qui se construit sur le donné empirique, pose le problème de l'adéquation des structures formelles à l'étude du réel, problème que nous ne pouvons aborder ici, problème qu'on ne peut comprendre si l'on oublie, comme cela a lieu trop souvent aujourd'hui, que les structures formelles se construisent à partir des problèmes qu'elles se proposent de résoudre.

Et c'est ainsi qu'on peut essayer de comprendre ce qu'il y a de commun aux deux démonstrations, rappelées au début de cet article, du second cas d'égalité des triangles, essayer de comprendre le lien profond entre l'intuition géométrique, la pensée rationnelle et le point de vue formel, lien sans lequel les mathématiques ne sont que discours vain ou bricolage inconsistant.

Lille, le 14 Avril 1988

Entre mon exposé à l'Université d'Eté de Toulouse et la rédaction de ce texte, j'ai rédigé l'appendice historique de l'<u>Initiation à la Géométrie</u> de Daniel Lehmann ; cet appendice et cet article se recoupent et se complètent, c'est pourquoi je me permets de renvoyer à l'appendice cité.

B I B L I O G R A P H I E

1. BALTRUSAITIS Jurgis — Anamorphoses Flammarion Paris 1984

2. BERGER Marcel — Géometrie (5 volumes) Cedic/Nathan Paris 1979

3. BESSOT Didier — O che curiosa cosa e' questa prospettiva in Les Cahiers de la Perspective n° 4 1987

4. BKOUCHE Rudolf — Historique in Brigitte Sénéchal Groupes et Géométrie Hermann Paris 1980

5. BKOUCHE Rudolf — Euclide, Klein, Hilbert et les autres... in La Rigueur et le Calcul (Groupe Epistémologie Inter-IREM) Cedic Paris 1982

6. BOREL Emile — Geometrie Armand Colin Paris 1910

7. BOURBAKI Nicolas — L'Architecture des Mathématiques in Les Grands Courants de la Pensée Mathématique Blanchard Paris 1962

8. BOURBAKI Nicolas — Théorie des Ensembles Hermann Paris 1954

9. BOURBAKI Nicolas — Algèbre Ch IX Formes sesquilinéaires et formes quadratiques Hermann Paris 1959

10. BOURLET Carlo — Cours abrégé de Géométrie Hachette Paris 1908

11. CAMUS — Elémens de Géométrie Théorique et Pratique Ballard Paris 1764

12. CAYLEY Arthur — A sixth memoir on quantics (1859) Collected Mathematical Papers n° 58 Cambridge University Press

13. CHABERT Jean Luc — La géométrie non euclidienne (ce volume)

14. CHASLES Michel — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837) Gauthier-Villars Paris 1889

15. CLAIRAUT Alexis-Claude — Elémens de Géométrie (1741) Editions Siloé Laval 1987

16. COOLIDGE Julian — A History of Geometrical Methods (1940) Dover New-York 1963

17. D'ALEMBERT Jean Le Rond — Essai sur les Eléments de Philosophie (1759) Fayard Paris 1986

18. DESCARTES René — La Géométrie in Discours de la Méthode (1637) Fayard Paris 1986

19. DIEUDONNE Jean — Algèbre linéaire et Géométrie Elémentaire Hermann Paris 1961

20. EINSTEIN Albert — La Géométrie et l'Expérience (traduction française Solovine) in Reflexions sur l'Electrodynamique, l'Ether, la Géométrie et la Relativité Gauthier Villars Paris 1972

21. EUCLIDE — Les Oeuvres d'Euclide (traduction française Peyrard) Blanchard Paris 1966

22. EUCLIDE — L'Optique et la Catoptrique (traduction française Ver Eecke) Blanchard Paris 1959

23. EULER Léonhard — Lettres à une Princesse d'Allemagne Charpentier Paris 1859

24. FERMAT Pierre de — Oeuvres Gauthier-Villars Paris 1896

25. FIELD J.V. and GRAY J.J. — The Geometrical work of Girard Desargues Springer-Verlag New-York Berlin Heidelberg 1987

26. GONSETH Ferdinand — La Géométrie et le Problème de l'Espace Editions du Griffon Neuchatel 1945

27. GUIDO UBALDO Del MONTE — Les Six Livres de Perspective (traduction française Christian Guipaud) à paraître

28. HILBERT David — Les fondements de la géométrie (1899) (traduction française et notes Paul Rossier) Dunod Paris 1971

29. HOUEL Jules — Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire Gauthier-Villars Paris 1867

30. KLEIN Felix — Le Programme d'Erlangen (1872) (traduction française Padé) Gauthier-Villars Paris 1974

31. KLINE Morris — Mathematical thought from Ancient to Modern Times Oxford University Press 1972

32. LACROIX S.F. — Elémens de Géométrie Courcier Paris (1804)

33. LAMBERT Jean Henri Essai sur la Perspective (1752) (traduction de J. Peiffer, commentaires de R. Laurent) Monom Coubron 1981

34. LAMBERT Jean Henri La Perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral (1759) Alain Brieux Paris 1977

35. LAURENT Roger, PEIFFER Jeanne La place de Lambert dans l'histoire de la Perspective Cedic/Nathan Paris 1987

36. LEGENDRE Adrien-Marie Eléments de Géométrie (Douzième édition) Firmin Didot Paris 1823

37. LEGOFF Jean-Pierre Une oeuvre aux confins des sciences et des arts de prospectiva pingendi de Piero della Francesca in Les cahiers de la Perspective n° 4 1987

38. LEHMANN Daniel, BKOUCHE Rudolf Initiation à la Géométrie PUF Paris 1988

39. LOBATCHEVSKI Nicolas Nouveaux Principes de la Géométrie (1838) (traduction française Maillieux) Mémoires de la Société Royale de Liège 3e série tome 2 1900

40. LOBATCHEVSKI Nicolas Etudes géométriques sur la théorie des parallèles (1840) (traduction française J. Hoüel) Mémoire de la Société de Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux VI 1866

41. MERAY Charles Nouveaux Eléments de Géométrie (2ème édition) Jobard Dijon 1903

42. NEWTON Isaac Mathematical Principles of Natural Philosophy (1686/1713) (english translation by Motte 1729) University of California Press Berkeley Los Angeles London 1962

43. PANOFSKY Erwin La Perspective comme Forme Symbolique (traduction française Ballangi) Editions de Minuit Paris 1975

44. PAPPUS D'Alexandrie Collection Mathématique (2 volumes) (traduction Ver Eecke) Blanchard Paris 1982

45. PASCAL Blaise Oeuvres complètes Le Seuil Paris 1962

46. PEANO Giuseppe Calcolo geometrico Fratelli Bocca Editori Torino 1888

47. PLATON La République (livre VII) (traduction française Baccou) Garnier Flammarion Paris 1966

48. POUDRA M. Histoire de la Perspective Correard Editeur Paris 1864

49. REICHENBACH Hans Philosophy of Space and Time (english translation M. Reichenbach and J. Freund) Dover New-York 1957

50. RIEMANN Bernhart Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (traduction française Hoüel) in Oeuvres Blanchard Paris 1968

51. SINISGALLI Rocco Il contributo di Simon Stevin alla Sviluppo Scientifico della Prospettiva Artificiale l'Erma de Bretschneider Roma 1978

52. TATON René L'oeuvre scientifique de Desargues Vrin Paris 1981

53. TAYLOR Brook Nouveaux Principes de la Perspective Linéaire (traduction française Rivoire) Amsterdam 1759

54. THUILLIER Pierre La Naissance de la Perspective in La Recherche n° 160 1984

55. VEYNE Paul L'inventaire des différences Le Seuil Paris 1976

56. VIETE François Introduction à l'Art Analytique (1591) (traduction française Vaulezard) in Vaulezard : La Nouvelle Algèbre de M. Viète (1630) Fayard Paris 1986

57. WEYL Hermann Space Time Matter Dover New-York 1952

58. WITTGEINSTEIN Ludwig Remarques sur les fondements des mathématiques (traduction française M.A. Lescouret) Gallimard Paris 1983

59. YOUSCHKEVITCH Adolf Les Mathématiques Arabes (traduction française Cazenave et Jaouiche) Vrin Paris 1976

60. GROUPE EPISTEMOLOGIE INTER-IREM Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars Paris 1987

LES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Jean Luc CHABERT

Université de Picardie

Pour mieux comprendre l'avènement des géométries non euclidiennes au XIX^{e} siècle, il n'est pas inutile de considérer d'abord les périodes antérieures, remonter au III^{e} siècle avant J-C nous suffira cependant.

PREMIERE PARTIE

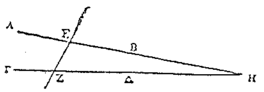
LA PREHISTOIRE DES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Cette préhistoire commence véritablement avec Euclide, car il est non seulement géomètre euclidien, mais aussi, et peut-être à cause de cela, le premier géomètre non euclidien.

EUCLIDE

Le Premier Livre des *Eléments* d'Euclide débute par une liste de définitions, de postulats et d'axiomes (cf. [10]). Ce sont les postulats, demandes spécifiques de la géométrie, qui nous intéressent ici, le cinquième tout particulièrement, celui sur lequel nous allons revenir constamment :

<u>Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.</u>



Viennent ensuite 48 propositions suivies de leur démonstration selon un rituel souvent évoqué. Ces propositions se succèdent dans un enchaînement remarquable et les démonstrations observent les règles de la déduction d'une façon quasi-rigoureuse. Faire précéder ce déroulement d'un ensemble d'hypothèses et particulièrement de postulats géométriques semble une véritable nouveauté à l'époque. C'est sans doute cette

apparition vers 300 ans avant J-C d'un corpus géométrique développé selon un mode axiomatico-déductif, cette création d'une théorie quasi-parfaitement constituée qui a permis d'imaginer une vingtaine de siècles plus tard une théorie autre. C'est parce que la géométrie euclidienne existait, du moins était mise en forme, que les géométries non euclidiennes ont pu voir le jour.

Il subsiste en fait des controverses au sujet des postulats et des axiomes qu'Euclide aurait effectivement formulés, car nous ne disposons pas du texte original d'Euclide, nous ne le connaissons que par des copies, manuscrits grecs, latins ou arabes redécouverts à la Renaissance et les multiples éditions des Eléments élaborées à partir de ces textes diffèrent entre elles. Certains axiomes et postulats ont pu être rajoutés, en particulier ceux correspondant à certaines demandes formulées dans le cours du texte. Il est alors possible d'imaginer ... que le cinquième postulat n'ait pas été énoncé par Euclide lui même. Tannery [25] le suggère. Cela ne remet cependant pas en cause nos idées sur les Eléments car, même si ce postulat n'avait pas été effectivement formulé, il figurerait quand même de façon implicite dans tout ce Premier Livre. En effet, l'enchaînement des propositions y est tel que les 28 premières n'utilisent pas le Postulat dans leur démonstration, alors qu'au contraire toutes celles qui suivent et ce jusqu'à la fin du Livre, la 31ème exceptée, nécessitent le Postulat soit directement, soit par l'intermédiaire d'une proposition l'employant elle-même.

Et c'est bien pourquoi l'on peut dire qu'Euclide est aussi le premier géomètre non euclidien, puisque l'ensemble de ses 28 premières propositions est vrai indépendamment du fait que le cinquième postulat le soit ou non. Ceci sera d'ailleurs constamment utilisé par tous ceux qui tenteront de prouver le cinquième postulat et aussi par ceux qui au contraire essayeront de construire une géométrie sans cinquième postulat.

Avant de quitter Euclide, relevons dans le Premier Livre des Eléments les propositions logiquement équivalentes au Postulat, bien qu'Euclide n'y ait jamais évoqué la possibilité d'une telle équivalence. La proposition XXIX, pour la démonstration de laquelle le Postulat semble avoir été énoncé, s'en déduit automatiquement par l'absurde :

<u>Une droite tombant sur deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entre eux ... et les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits.</u>

La proposition XXX :

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles peut s'énoncer aussi (formulation appelée axiome de Playfair) :

Par un point extérieur à une droite passe au plus une parallèle à cette droite

ou encore, compte tenu de l'existence des parallèles prouvée par la proposition XXXI :

Par un point extérieur à une droite passe une parallèle et une seule à cette droite.

Dorénavant, toutes les assertions que nous soulignerons seront des énoncés "équivalents" au cinquième postulat.

Poursuivons notre étude de la préhistoire avec ceux que l'on appelle :

LES COMMENTATEURS D'EUCLIDE

Ils sont grecs jusqu'au VIe siècle après J-C, arabes du IXe au XIIIe siècles essentiellement, puis européens à partir de la Renaissance. Ils ont plus particulièrement discuté et interprété deux points : la théorie des parallèles du Livre I et la théorie des proportions du Livre V. C'est le premier point bien sûr qui nous intéresse ici et le cinquième postulat y occupe une place de choix dans la mesure où tous les commentateurs ont exprimé le désir de le rayer de la liste des postulats. D'une certaine manière ils y sont tous parvenus, mais de façons diverses. Deux méthodes s'offraient à eux : ou bien démontrer le Postulat - éventuellement en le remplaçant par un autre jugé plus naturel ou plus facilement acceptable -, ou bien changer la définition des parallèles. A ce propos rappelons celle d'Euclide :

Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Voici quelques unes des principales tentatives.

Les commentateurs grecs

L'essentiel de ce que nous savons d'eux nous le tenons de Proclus, chef au Ve siècle de l'Ecole néo-platonicienne d'Athènes, auteur entre autres d'un énorme *Commentaire sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide* [22].

Posidonius (Ier siècle avant J-C)

aurait défini les droites parallèles comme des droites coplanaires équidistantes c'est à dire des droites situées dans un même plan telles que toutes les perpendiculaires amenées de points de l'une à l'autre soient égales. Deux droites parallèles selon Posidonius le sont aussi selon Euclide, mais la réciproque est-elle vraie ? Euclide montre bien - en fait montre presque - dans sa proposition XXXIV que deux parallèles sont équidistantes, mais il utilise pour cela le cinquième postulat. A vrai dire, les deux définitions coïncident :

Deux droites parallèles sont équidistantes

si et seulement si le Postulat est vrai.

Posidonius considère donc une notion de droites parallèles correspondant à une propriété "plus forte" que celle choisie par Euclide et qui semble a priori mieux adaptée à la théorie puisqu'elle évite le recours au Postulat. Mais une question se pose : pour sa part, Euclide a bien prouvé l'existence, dans sa théorie, de droites parallèles sans cinquième postulat ; comment peut-on savoir par contre s'il existe effectivement des parallèles au sens de Posidonius sans faire appel à un "principe d'existence" c'est à dire à un postulat ? Celle-ci serait assurée si l'on savait que :

Le lieu des points équidistants d'une droite et situé d'un même côté de cette droite est une droite,

mais une telle assertion équivaut là encore au Postulat.

Géminus (Ier siècle avant J-C)

aurait insisté, toujours selon Proclus, sur la distinction entre ces deux notions de parallèles. En effet certaines lignes courbes situées dans un même plan peuvent se rapprocher perpétuellement sans jamais se couper, comme l'hyperbole et son asymptote. Pourquoi un tel phénomène ne pourrait-il avoir lieu pour deux droites : être asymptotes, se rapprocher indéfiniment et ne pas se couper ? La pertinence de cette question nous apparaît bien aujourdhui.

Proclus (Ve siècle après J-C)

propose lui-même une démonstration (cf [7]) en prouvant l'énoncé suivant clairement équivalent au Postulat :

Lorsqu'une droite coupe l'une des parallèles, elle coupe l'autre aussi,

mais pour cela il admet implicitement que :

La distance entre deux parallèles est bornée,

ce qui justement, on le verra revient à supposer le Postulat.

Aganis (VIe siècle)
utilise une définition semblable à celle de Posidonius et prouve le Postulat, mais en présupposant l'existence de parallèles selon sa terminologie autrement dit en admettant que :

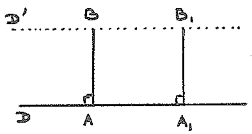
Par un point extérieur à une droite, il passe toujours une droite équidistante de la première.

Les commentateurs arabes

Les premières traductions des Eléments datent du IXe siècle. Parmi les commentateurs ayant apporté une contribution à la théorie des parallèles, citons al-Ǧauharī (IXe siècle), Ṯābit ibn Qurra (Xe siècle), Ibn al-Hayṯam (X/XIe siècles), al- Ḫayyām [Omar Khayyam] (XI/XIIe siècles) et Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (XIIIe siècle).

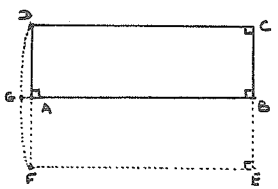
Les auteurs cités ici sont tous des mathématiciens écrivant leurs ouvrages scientifiques dans la langue arabe (cf [14]). Regardons en particulier la façon dont Ibn al-Hayṯam et Omar Khayyam abordent la question car certaines de leurs idées originales seront reprises en Occident.

Ibn al Hayṯam
utilise le mouvement dans son raisonnement. Considérant un segment se déplaçant perpendiculairement à une droite donnée, il



affirme que lorsqu'une des extrémités du segment décrit la droite, l'autre extrémité décrit une autre droite parallèle et même équidistante de la première.

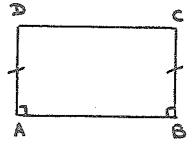
Ayant obtenu ainsi l'existence de parallèles au sens fort, celui de Posidonius ou d'Aganis, il peut démontrer le Postulat. Il considère à cet effet le quadrilatère dont se servira Lambert au XVIIIe siècle, un quadrilatère ABCD ayant trois angles droits et pour lequel il s'agit de montrer que le quatrième, l'angle en D, est droit lui aussi.



Ibn al Hayṯam montre tout d'abord que CD = AB. En effet, soient E et F les symétriques de C et D relativement à AB ; lorsque le segment EF se meut en restant perpendiculaire à EC, le point E restant sur EC, le segment EF vient sur CD lorsque E est en C et sur BG lorsque E est en B. D'après ce qui a été supposé, dans ce mouvement le point F décrit une droite, les points F, G, D sont alignés, mais les points F,A,D aussi ; donc G coïncide avec A et par suite CD = AB.

Pour montrer que l'angle en D est droit, Ibn al-Hayṯam raisonne alors par l'absurde en envisageant les deux autres cas : l'angle en D est aigu, l'angle en D est obtus. Cette énumération des cas sera souvent reprise ensuite. La conclusion en résulte assez facilement.

Omar Khayyam
se propose lui aussi de prouver le Postulat en insérant huit nouvelles propositions dans les Eléments, juste après la proposition XXVIII. Utilisant donc les 28 premiers énoncés d'Euclide, récusant par contre



l'emploi du mouvement en géométrie tel qu'Ibn al-Hayṯam le pratique, il introduit pour sa part le quadrilatère dont Saccheri se servira au XVIIIe siècle, un quadrilatère ABCD ayant deux angles droits en A et B et les côtés AD et BC égaux. Les angles en C et D sont égaux, il s'agit de montrer qu'ils sont droits. Raisonnant lui aussi par l'absurde afin d'écarter les cas où ces angles seraient aigus ou obtus, il considère un axiome auxiliaire - de type philosophique, dit-il - selon lequel :

Deux droites non sécantes ne peuvent pas s'écarter des deux côtés à la fois.

Malgré un cercle vicieux apparaissant dans le déroulement déductif, la contribution d'Omar Khayyam est remarquable par les idées nouvelles qu'elle apporte.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī reprendra et critiquera les travaux de ses prédécesseurs avant de formuler un certain nombre de propositions intéressantes elles-aussi. Au XVIIe siècle, Wallis exposera une démonstration du Postulat attribuée à aṭ-Ṭūsī, vraisemblablement le seul travail arabe connu à cette époque. Retenons de ces commentateurs arabes d'une part la mise en évidence du lien entre le Postulat et la somme des angles d'un quadrilatère, d'autre part la méthode de démonstration fondée sur une contradiction devant résulter de l'hypothèse selon laquelle cette somme ne serait pas égale à quatre angles droits.

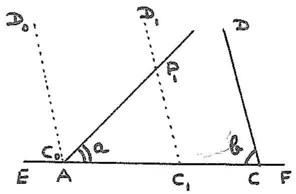
Les commentateurs européens

Les Eléments d'Euclide sont imprimés pour la première fois en latin à Venise en 1482 et les Commentaires de Proclus sont édités à Bâle en 1533. Mais qu'ils aient connu ou non les travaux de leurs prédécesseurs grecs ou arabes, les commentateurs européens n'apportent rien de vraiment nouveau. Relevons une idée originale cependant, celle de Wallis.

John Wallis (1616-1703)
demande d'admettre le principe fondamental suivant :

Pour un figure quelconque, il en existe toujours une autre de grandeur quelconque qui lui soit semblable.

Voici l'idée de la démonstration (cf[8]) :



Les demi-droites AB et CD faisant avec AC des angles a et b tels que a + b < 2 droits, il s'agit de montrer qu'elle sont sécantes. Déplaçons la demi-droite CD de façon que l'angle qu'elle forme avec AC soit constamment égal à b. Lorsque C arrive en A, CD occupe la position C_0 D_0 dans l'angle EAB ; il existe donc une position intermédiaire C_1D_1 où la demi-droite coupe AB en un point P_1. Le postulat de similitude assure l'existence d'un triangle ACP semblable à AC_1 P_1 et le point P est alors à la fois sur AB et CD.

Cette idée sera reprise à la fin du XVIIIe siècle par Lazare Carnot dans sa ***Géométrie de position*** : "la théorie des parallèles tient à une notion première à peu près du même ordre de clarté que celle de l'égalité parfaite ou de la superposition, la notion de similitude", reprise aussi par Laplace dans son ***Exposition du Système du Monde*** : "la proportionnalité est un postulatum bien plus naturel que celui d'Euclide", car elle se retrouve dans les lois de l'attraction tout comme dans celles des forces électriques et magnétiques, d'ailleurs "la simplicité des lois de la nature ne nous permet d'observer et de connaître que des rapports".

Saccheri notera qu'en fait Wallis utilise seulement une formulation réduite du principe de similitude :

Pour tout triangle, il en existe toujours un autre de grandeur arbitraire ayant les mêmes angles

et il montrera même que le postulat résulte de la simple supposition :

Il existe deux triangles inégaux ayant les mêmes angles.

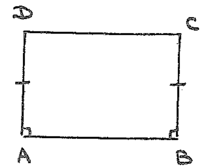
Mais avec Saccheri nous abordons le XVIIIe siècle, une période intermédiaire entre la préhistoire et l'histoire des géométries non euclidiennes.

LES PRECURSEURS

Il s'agit de Saccheri et Lambert, les premiers à avoir formulé des énoncés de géométrie non euclidienne, sans pour autant admettre celle-ci.

Girolamo Saccheri (1677-1733)

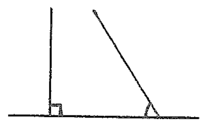
publie l'année de sa mort son chef d'oeuvre, ***Euclide lavé de toute tache*** [24], où il est essentiellement question du Postulat, mais aussi des rapports et de la difficile définition de leur égalité. Saccheri croit à la vérité du Postulat et il désire le démontrer. A cet effet, il suppose connues et établies les 28 premières propositions d'Euclide et introduit la figure à la base de tout son édifice, la quadrilatère d'Omar Khayyam, quadrilatère ABCD dont les angles en A et B sont droits et les côtés AD et BC sont égaux. Ses trois premiers énoncés rappellent étonnamment ceux d'Omar Khayyam,



mais, à la question de la valeur des angles en C et D, il ne répond pas qu'ils sont droits, il introduit explicitement, sous forme de définitions, l'hypothèse de l'angle droit, l'hypothèse de l'angle obtus et l'hypothèse de l'angle aigu, selon que ces angles égaux sont droits, obtus ou aigus.

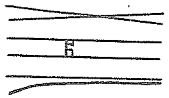
Saccheri montre alors : dès que l'une de ces hypothèses est vraie pour un quadrilatère, elle est vraie pour tous les quadrilatères. Bien plus, la somme des angles d'un quadrilatère quelconque est égale, supérieure ou inférieure à 4 angles droits, la somme des angles d'un triangle quelconque est égale, supérieure ou inférieure à 2 angles droits, un angle inscrit dans un demi-cercle est droit, obtus ou aigu, selon que l'on est dans l'hypothèse de l'angle droit, obtus ou aigu. Mais en montrant que :

Une perpendiculaire et une oblique se coupent,

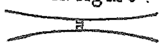


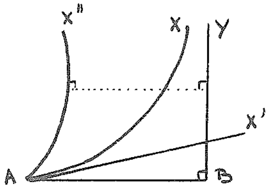
aussi bien dans l'hypothèse de l'angle droit que dans celle de l'angle obtus, Saccheri peut conclure : "l'hypothèse de l'angle obtus est absolument fausse, car elle se détruit elle-même." En effet, elle implique le Postulat qui lui-même impose l'angle droit. Ce rejet de l'hypothèse de l'angle obtus (celle de la géométrie sphérique) s'explique par l'usage que fait Saccheri de la proposition XVI d'Euclide, selon laquelle un angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'un angle intérieur opposé, car celle-ci se sert du caractère infini des droites (cf [7]).

La moitié du chemin est donc parcourue, il ne reste qu'à obtenir une autre contradiction, dans l'hypothèse de l'angle aigu cette fois. Saccheri se place désormais dans celle-ci (il existe une perpendiculaire et une oblique qui ne se coupent pas) et les choses deviennent alors très intéressantes. Il établit tout un enchaînement de propositions nouvelles et prouve en particulier que pour deux droites quelconques, il existe trois possibilités :



1) elles sont sécantes
2) elles ont une perpendiculaire commune
3) elles sont asymptotes.

Chez Euclide, seuls les deux premiers cas peuvent se réaliser ; ici, un nouveau type de non-sécantes apparaît, celui suggéré par Géminus. Pire, lorsque deux droites ont une perpendiculaire commune, elles divergent des deux côtés à partir de cette perpendiculaire : l'intuition ne peut plus se fonder sur la figure :  mais sur celle-ci :  et le postulat d'Omar Khayyam tombe.



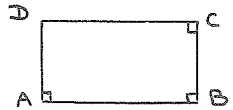
Ou encore, étant donné un segment AB, il existe un angle XAB tel que 1) AX ne rencontre pas la perpendiculaire BY à AB 2) toute oblique AX' comprise dans l'angle XAB rencontre BY 3) toute oblique AX' faisant un angle aigu plus grand que XAB avec AB a avec BY une perpendiculaire commune. C'est une classification que Lobatchevsky retrouvera un siècle plus tard. Nous avons là de véritables énoncés de géométrie non euclidienne et pourtant, dès la proposition suivante, Saccheri affirme : "L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car cela répugne à la nature de la ligne droite." Selon lui, les asymptotes AX et BY auraient en leur point commun à l'infini une perpendiculaire commune, ce qui ne se peut.

Ainsi, mû par sa conviction, il détruit d'un seul coup tout l'édifice patiemment construit grâce à ses remarquables qualités de logicien, lui permettant de manier aisément la preuve par l'absurde ou le raisonnement sur des figures impossibles.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

philosophe et mathématicien, connu pour sa preuve de l'irrationnalité de π, fournit une contribution importante à la géométrie avec sa **Theorie der Parallellinien** (écrite à partir de 1766 mais publiée en 1786) [17]. La figure fondamentale y est le

quadrilatère à trois angles droits utilisé par Ibn al-Haytam. Il formule lui aussi trois hypothèses selon la valeur du quatrième angle et il obtient assez rapidement une contradiction dans l'hypothèse de l'angle obtus. Quant à l'hypothèse de l'angle aigu, non seulement



la somme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ des angles d'un triangle ABC y est inférieure à 180°, mais de plus le déficit ou le défaut du triangle : $180 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ est proportionnel à l'aire du triangle.

Lambert note alors la ressemblance de la géométrie plane avec la géométrie sphérique dans l'hypothèse de l'angle obtus et avec la géométrie d'une sphère imaginaire dans celle de l'angle aigu. Car, l'aire d'un triangle tracé sur une sphère de rayon r est de la forme $r^2\ (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180)$; par suite, sur une sphère de rayon imaginaire ir, cette aire prend la forme $r^2\ (180 - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$.

Une conséquence chagrine Lambert cependant : si l'hypothèse de l'angle aigu était vraie, il existerait une mesure absolue des longueurs, tout comme il existe une mesure absolue des angles. En effet, on peut toujours associer à un segment un triangle équilatéral ayant ce segment pour côté et par suite faire correspondre au segment la valeur commune des angles de ce triangle équilatéral, valeur mesurée de façon absolue. La formule relative au défaut du triangle montre que lorsque la longueur du segment croît de 0 à l'infini, l'angle correspondant décroît de 60° à 0°.

Aussi, rejetant l'existence d'une unité de longueur absolue ou en en prenant prétexte, Lambert écarte l'hypothèse de l'angle aigu, tout comme Saccheri, bien qu'ayant avancé assez loin dans la théorie. C'est que pour lui et ses contemporains, les axiomes de la géométrie ne sont que le reflet des propriétés de l'espace. La question n'est pas de savoir si le cinquième postulat est vrai ; selon la conception kantienne de l'espace, la conviction existe indépendamment de toute démonstration. La question est plutôt celle de la possibilité de prouver mathématiquement le Postulat, ce que d'Alembert formule ainsi dans l'**Encyclopédie** : "la définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de géométrie".

De nombreux mathématiciens s'essayeront encore à la recherche d'une démonstration à la fin du XVIIIe siècle et au début du XIXe siècle, comme Farkas Bolyai, le père de Janos, Friedrich Wachter, Ferdinand Schweikart, Franz Taurinus et surtout Legendre.

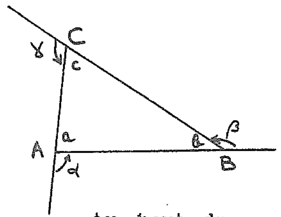
Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

a multiplié les tentatives de démonstration dans les différentes éditions de ses **Eléments de Géométrie** de 1794 à 1823 (cf. [18]) la plupart tournant autour de la valeur de la somme des angles d'un triangle.

A chaque fois, il introduit une idée nouvelle et assez ingénieuse, mais fondée sur une hypothèse équivalente au Postulat, comme par exemple :

Par tout point pris à l'intérieur d'un angle, il passe toujours une droite coupant les deux côtés de l'angle.

Avant d'aborder l'histoire proprement dite des géométries non euclidiennes, voici à titre d'anecdote la méthode utilisée avec la Tortue de LOGO pour bien faire comprendre aux enfants que la somme des angles d'un triangle vaut 180° [1]. Il s'agit en fait de la démonstration donnée en 1809 par Bernhard Thibaut.



Il est simplement demandé à la Tortue de parcourir les trois côtés du triangle ABC : placée en A et orientée vers B, elle décrit AB, arrivée en B, elle tourne d'un angle β, puis décrit BC, tourne alors d'un angle γ, décrit ensuite CA et tourne enfin d'un angle α de façon à reprendre sa position initiale.

Au bout du compte, elle a effectuée un tour complet sur elle-même, soit 360°, ainsi $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ et $a + b + c = 180°$. Ce faisant le lecteur mathématicien a bien sûr noté que cette démonstration n'est correcte que si les translations et les rotations considérées sont des opérations indépendantes, c'est à dire qu'elles commutent entre elles (en tant qu'opérations effectuées par notre Tortue)!

DEUXIEME PARTIE
L'HISTOIRE DES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Au cours de la première moitié du XIX^{e} siècle, trois mathématiciens développent à peu près en même temps, mais de façon indépendante, une nouvelle géométrie où le cinquième postulat est nié.

LA GEOMETRIE NON EUCLIDIENNE DE GAUSS, BOLYAI ET LOBATCHEVSKY.

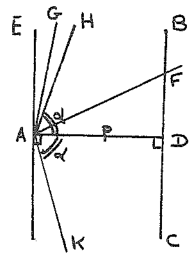
Evoquons les travaux de Lobatchevsky car sa théorie se présente à la fois de la façon la plus complète et la plus facile à aborder.

Nicolas Ivanovitch Lobatchevsky (1793 - 1856)

professeur à l'Université de Kazan, exprime, dans un essai sur les fondements de la géométrie de 1828-29, l'idée d'une géométrie dans laquelle par un point extérieur à un droite passerait deux parallèles à cette

droite. Celle-ci est développée de 1835 à 1838 dans ses ***Nouveaux principes de Géométrie***, texte relativement facile à lire mais assez indigeste. Il reprend ce travail de façon plus agréable et concise dans une brochure parue en 1840 à Berlin intitulée ***Etudes géométriques sur la Théorie des Parallèles*** [19] :

Après avoir énoncé quelques propositions élémentaires assez semblables à celles du Premier Livre des Eléments, il y formule son fameux partage des droites passant par un point en deux classes : "toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée".



Parmi les droites passant par A, la perpendiculaire AD à BC coupe BC, alors que la perpendiculaire AE à AD ne coupe pas BC. Soit AH la droite limite des deux classes, elle ne coupe pas BC, toute droite AG dans l'angle EAH ne coupe pas BC et toute droite AF dans l'angle HAD coupe BC.

L'angle $\alpha = \widehat{HAD}$ est appelé angle de parallélisme. Lobatchevsky pose $\alpha = \pi\ (p)$ pour exprimer la dépendance de l'angle α relativement à la distance $p = AD$. Ce qui du même coup présuppose une certaine homogénéité de l'espace, celle-là même utilisée par Euclide pour effectuer les transports de figures nécessaires afin d'établir les cas d'égalité des triangles.

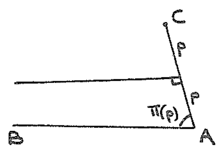
Ainsi Lobatchevsky commence par ce par quoi Saccheri achève. La situation décrite ici est posée a priori par Lobatchevsky alors qu'il s'agit en fait de celle à laquelle Saccheri a abouti à la suite de longs développements théoriques sous l'hypothèse de l'angle aigu. En effet, la non-sécante limite AH, dite parallèle à BC, n'est autre que le troisième cas évoqué par Saccheri, celui de deux droites asymptotes, tandis que les autres non-sécantes telles que AG correspondent au deuxième cas, celui de deux droites admettant une perpendiculaire commune.

La droite AK symétrique de AH par rapport à AD est aussi une non-sécante limite, donc une parallèle à BC. Ainsi, il passe par le point A deux parallèles à BC, chacune relative à un sens, sauf si $\alpha = \pi(p) = \pi/2$ (cas de la géométrie euclidienne). Cette nouvelle notion de parallèles vérifie encore de bonnes propriétés, dont la preuve n'est cependant pas immédiate : "une ligne droite conserve le caractère de parallélisme en tous ses points" ; "deux droites sont toujours réciproquement parallèles" ; "deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles".

Se plaçant désormais dans l'hypothèse : $\pi(p) < \pi/2$, Lobatchevsky montre que "étant donné un angle quelconque α, on peut toujours trouver une distance p tel que l'on ait $\pi(p) = \alpha$." De plus, lorsque p croit de 0 à l'infini, $\pi(p)$ décroit de $\pi/2$ à 0 (ce qui n'est pas sans rappeler la mesure absolue des longueurs de Lambert).

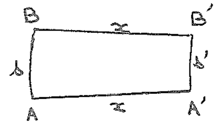
Lobatchevsky introduit alors une notion relativement nouvelle, celle d'horocycle ou courbe-limite. A cet effet, remarquons tout d'abord qu'en géométrie euclidienne les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, alors que, sans cinquième postulat, les trois médiatrices sont soit concourantes soit non-sécantes deux à deux et, si deux d'entre elles sont parallèles, elles le sont toutes trois. Un horocycle sera par définition une ligne courbe située dans un plan telle que toutes les médiatrices de ses cordes soient parallèles entre elles.

[Pour convaincre ceux qui penseraient qu'une telle courbe n'existe pas, voici un procédé de construction : la droite AB étant fixe, si sur la droite AC faisant avec AB l'angle $\widehat{CAB} = \pi(p)$, on place le point C de façon que AC = 2p, alors la médiatrice du segment AC est parallèle à AB par construction. Par suite, lorsque l'angle $\widehat{CAB}$ varie, les points C ainsi obtenus décrivent un horocycle, puisque les médiatrices des cordes sont toutes parallèles à AB ; on les appelle axes de l'horocycle. Un horocycle peut d'ailleurs être considéré comme un cercle de rayon infiniment grand.



A ce propos indiquons qu'il existe trois types de mouvements dans un plan de Lobatchevsky : la rotation autour d'un point à distance finie O, la rotation autour d'un point à l'infini dans une direction d et la translation le long d'une droite D ; les courbes invariantes sont respectivement : les cercles de centre O, les horocycles de direction d'axe d et les courbes équidistantes de D.]

Une curieuse formule : soient AB et A'B' deux arcs d'horocycles de même direction d'axes limités justement par deux axes AA' et BB'. Posons AA' = BB' = x, alors $\boxed{\widehat{A'B'} = \widehat{AB}\, e^{-x/k}}$ où k est une constante positive. Cette formule montre en particulier que les droites parallèles AA' et BB' sont asymptotes.



Lobatchevsky introduit ensuite les horosphères ou surfaces limites obtenues dans la rotation d'un horocycle autour d'un de ses axes. Disons simplement que, si on fait jouer aux horocycles le rôle de droites, très curieusement, ces horosphères vont être de véritables modèles de plans euclidiens, la trigonométrie des triangles sur ces surfaces n'étant autre que la trigonométrie ordinaire. Mais ajoutons surtout qu' à la suite de calculs délicats, utilisant à la fois horosphères et trigonométrie sphérique, Lobatchevsky établit le système des relations entre les angles A, B, C et les côtés a, b, c d'un triangle rectiligne quelconque :

$$\sin A \operatorname{tg} \pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \pi(b)$$

$$\cos A \cos \pi(b) \cos \pi(c) + \frac{\sin \pi(b) \sin \pi(c)}{\sin \pi(a)} = 1$$

$$\operatorname{cotg} A \sin C \sin \pi(b) + \cos C = \frac{\cos \pi(b)}{\cos \pi(a)}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \pi(a)}$$

ainsi que les relations qui s'en déduisent par permutations et la formule fondamentale : $\boxed{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi(x) = e^{-x/k}}$

On remarquera que "la géométrie imaginaire se change en la géométrie ordinaire lorsqu'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petit". En effet, en première approximation :

$$\sin \pi(x) = 1 - \frac{1}{2}(x/k)^2 \;,\quad \cos \pi(x) = x/k \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \pi(x) = k/x \;,\quad \text{d'où}$$

les formules usuelles :

$b \sin A = a \sin B$, $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\quad A + B + C = \pi$.

Pour Lobatchevsky, les équations précédentes "constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire". A ce propos, parallèlement à ses publications à Kazan de 1835 à 1838, il fait paraître dans le journal de Crelle en 1837 un article en français intitulé ***Géométrie Imaginaire*** dans lequel il part à priori de ces formules trigonométriques : "c'est en rebroussant pour ainsi dire chemin et en partant des équations fondamentales que je tâcherai d'introduire leur adoption dans la géométrie et de mettre hors de doute qu'ils puissent jamais mener à une absurdité, sous quelque rapport que ce soit." A cet effet, il ramène par des transformations ces équations à celles de la trigonométrie sphérique dont il a montré par ailleurs qu'elle "est indépendante de l'une ou l'autre hypothèse sur la somme des angles dans un triangle rectiligne".

En 1855 encore, peu avant sa mort, déjà aveugle mais toujours soucieux de faire comprendre et accepter ses théories, il dicte un exposé complet de son système écrit en russe et en français sous le titre ***Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie rigoureuse et générale des parallèles.***

Il nous faut évoquer maintenant les travaux de Bolyai et de Gauss, plus succintement car ceux de Bolyai sont tout à fait analogues à ceux de Lobatchevsky et ceux de Gauss n'ont pas été rédigés en un texte suivi et complet.

Janos Bolyai (1802 - 1860)

Son père Farkas Bolyai, géomètre hongrois, ami de Gauss a longtemps cherché à démontrer le cinquième postulat. Indiquons pour mémoire qu'il l'a ramené à l'énoncé suivant :

Par trois points non alignés passe toujours un cercle

(autrement dit les médiatices d'un triangle sont toujours concourantes).

Janos Bolyai, officier hongrois de l'armée autrichienne, mis à la retraite à 31 ans, eu pour occupation favorite la théorie des parallèles malgré les efforts de son père pour l'en dissuader : " Tu ne devrais pas t'engager sur ce chemin pour mettre à l'épreuve les parallèles ; je connais ce chemin jusqu'au bout moi aussi, j'ai mesuré cette nuit sans fond et elle a éteint toute lumière et toute joie dans ma vie".

Jusque vers 1820 environ, il essaye de prouver le Postulat. Puis il se met à construire une "théorie absolue de l'espace" selon la méthode déductive sans décider a priori si le cinquième postulat est vrai ou non. Dès 1823 il est en possession de la formule fondamentale $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\pi(x) = e^{-x/k}$.

Bien que sa théorie ne soit pas encore selon lui tout à fait au point, il peut dire à son père : "J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui... j'ai tiré du néant un nouvel univers."

Son manuscrit est achevé en 1829, intitulé ***Sur la science absolue de l'espace*** [3], il est publié en 1832 en appendice d'un gros ouvrage paternel. Après une définition des parallèles assez semblable à celle de Lobatchevsky, il introduit les horocycles et les horosphères - avec une autre terminologie bien sûr - et il obtient les formules de trigonométrie et de géométrie non euclidienne.

[Voici un exemple de résultat remarquable et assez simple en "géométrie absolue" : les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels à la circonférence des cercles dont les rayons sont égaux aux côtés opposés ; la circonférence d'un cercle de rayon r étant de la forme $2\pi k\,\mathrm{sh}\,(r/k)$. Lorsque k tend vers l'infini, on trouve à la limite la longueur usuelle $2\pi r$. Ajoutons enfin que Bolyai résout la quadrature du cercle dans le cas où le cinquième postulat est nié.]

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Ce sont essentiellement sa correspondance avec Farkas Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus et Bessel et quelques notes trouvées dans ses papiers qui permettent de reconstituer les directions de recherche de Gauss sur les parallèles [11]. Il aurait réfléchi au sujet dès 1792, à l'âge de 15 ans, et bien sûr aurait tout d'abord essayé de prouver le Postulat. Ainsi, dans une lettre à Bolyai, il écrit en 1799 : "Si on pouvait montrer qu'

il existe un triangle d'aire aussi grande que l'on veut

alors je pourrais prouver la géométrie toute entière de façon absolument rigoureuse".

Vers 1813, il commence à obtenir les théorèmes fondamentaux d'une nouvelle géométrie "anti-euclidienne" selon Wachter, "astrale" selon Schweikart ou encore "non-euclidienne". Bien que convaincu de ce que cette géométrie n'a pas en elle même de contradictions, alors que "certains résultats ont l'apparence de paradoxes", Gauss ne diffuse pas ses travaux par craintes des "cris de béotiens", il y fait simplement allusion en écrivant à ses amis.

Dans deux courts exposés trouvés dans ses papiers, Gauss donne une définition des parallèles semblable à celle de Bolyai ou de Lobatchevsky, il montre qu'elles ont les mêmes bonnes propriétés, puis il introduit la notion de points correspondants sur deux parallèles, permettant ainsi de retrouver celle d'horocycle comme lieu des points correspondants sur un faisceau de parallèles. Il fournit lui aussi la longueur du cercle dans une lettre à Schumacher de 1831.

Citons aussi les travaux de Franz Adolph Taurinus qui en 1826 construit un système de géométrie analytique selon l'hypothèse de l'angle aigu : en partant des formules de trigonométrie sphérique, il remplace le rayon r par un rayon ir imaginaire et obtient les formules de ce qu'il appelle la géométrie logarithmo-sphérique. Mais pour Taurinus l'intérêt de ses formules reste théorique et il ne pense pas à leur application dans le plan.

Les géomètres non euclidiens et la nature de l'espace.

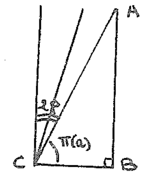
Dans une lettre à Olbers, Gauss écrit en 1817 :

"Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique."

Une telle affirmation est clairement en contradiction avec les idées kantiennes, selon lesquelles "le concept d'espace n'est en aucun sens d'origine empirique, mais est une nécessité inévitable de la pensée". Gauss n'aurait cependant jamais eu pour objectif de tester la géométrie euclidienne au cours de ses nombreuses mesures de géodésie, contrairement à un mythe largement répandu [5].

Le point de vue de Lobatchevsky est proche de celui de Gauss. L'échec des tentatives de démonstration le conduit assez tôt à penser que ce que l'on veut prouver n'est pas dans les données et qu'il est nécessaire d'avoir recours à l'expérimentation. Voici d'ailleurs celle qu'il propose (cf.[4]) pour avoir une idée de la valeur de la constante k intervenant dans la formule : $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\pi(x) = e^{-x/k}$ (la géométrie euclidienne correspondant à $\pi(x) = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire k infini).

On considère un triangle ABC donc le côté BC = a est égal au diamètre de l'orbite terrestre et dont le sommet A est une étoile fixe de direction perpendiculaire à BC. Soit 2p la parallaxe maximale de l'étoile A.



Alors $\pi(a) > \widehat{BCA} = \frac{\pi}{2} - 2p$ soit $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\pi(a) > \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} - p)$

c'est à dire $e^{-a/k} > \frac{1 - \mathrm{tg}\,p}{1 + \mathrm{tg}\,p}$, d'où $\frac{a}{k} < \mathrm{tg}\,2p$.

De la parallaxe de Sirius égale à 1"24, Lobatchevsky déduit que a/k < 0,000 006. Ainsi, on ne connait pas k, mais on sait qu'il est très grand relativement au diamètre de l'orbite terrestre. On pourrait recommencer avec des étoiles de parallaxe inférieure. D'ailleurs, si la géométrie euclidienne est vraie, k est infiniment grand et il doit exister des étoiles dont la parallaxe est infiniment petite.

Le cheminement des idées.

On peut s'étonner que, à peu près en même temps et de façon indépendante, trois hommes découvrent cette nouvelle géométrie que personne n'avait eu l'idée d'imaginer au cours de plus de vingt siècles de tentatives infructueuses. Bien sûr la multiplication des échecs a pu conduire à cette nécessité et, Saccheri et Lambert, quoique convaincus de la vérité du Postulat, avaient déjà largement ouvert la voie de l'hypothèse de l'angle aigu. D'ailleurs, la question des parallèles fut, à la charnière des XVIII^e et XIX^e siècles, l'objet de publications nombreuses. Gauss enfin se situe au centre d'un foyer scientifique dont, dans une certaine mesure, Bolyai et Lobatchevsky ont subi l'influence.

Certes les travaux de Saccheri et Lambert furent assez méconnus, mais Klügel, qui analyse en 1763 à Göttingen les essais de démonstration antérieurs, a certainement contribué à la diffusion des idées de nos deux précurseurs. En outre les diverses preuves de Legendre, dont nous avons peu parlé, remarquables par l'originalité des méthodes et la clarté de l'exposition, ont joué un rôle non négligeable, surtout pour Lobatchevsky, qui les avait étudiées de près. Ajoutons enfin que Bartel, le professeur de Lobatchevsky à Kazan, et Farkas Bolyai, le père de Janos, furent tous deux des amis de Gauss.

Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky n'ont pas reçu de leurs contemporains l'attention qu'ils méritaient. Est-ce dû aux idées dominantes de l'époque, aux conceptions kantiennes ? La ville de Kazan et la Hongrie étaient-elles trop éloignées des grands centres scientifiques. Des questions de langage ont-elles joué ? Lobatchevsky a pourtant pris soin de publier aussi en allemand et en français. En tout cas, en 1833 encore, Legendre fait paraître l'ensemble de ses démonstrations du Postulat.

C'est à partir des années 1860 que les théories de Bolyai et de Lobatchevsky ont commencé à être largement diffusées. En France, Jules Houël traduit les ***Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*** avec en appendice des extraits de la correspondance de Gauss et Schumacher [19], apportant ainsi la caution de Gauss au travaux de Lobatchevsky, puis il traduit ***La Science absolue de l'Espace*** de Janos Bolyai. En Italie c'est Battaglini qui introduit la géométrie non euclidienne.

Mais cette nouvelle géométrie va connaitre des développements bien plus considérables encore. Celle-ci sera en effet resituée dans des cadres très généraux, qu'on ne pouvait imaginer alors, à la suite d'une part de la conception riemannienne de l'espace, d'autre part de la classification kleinienne des géométries.

LA CONCEPTION RIEMANNIENNE DE L'ESPACE

Bernhard Riemann (1826-1866) effectue un saut conceptuel considérable, un saut dans l'abstraction permettant une prise de distance par rapport aux intuitions a priori de l'espace. Dans son mémoire d'admission à la faculté de philosophie de Göttingen, ***Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie***, présenté en 1854, publié en 1867 [23], il considère d'emblée des "grandeurs de dimension multiple" c'est à dire des variétés de dimension n quelconque, dont les points dépendent continûment de n paramètres $(x_1, ..., x_n)$. Il se propose d'étudier les rapports métriques dans une telle variété. En géométrie euclidienne il faut, pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur unité. Ici, Riemann considère les choses localement, il fait appel à la géométrie différentielle et définit la métrique en introduisant en chaque point de la variété un élément linéaire ds de la forme :

$$ds^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g_{ij} \quad dx_i \quad dx_j$$

où les gij sont des fonctions des coordonnées $x_1, ..., x_n$; le cas de l'espace euclidien correspondant à : $ds^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} dx_i^2$

Afin de pouvoir nous représenter ces objets abstraits, limitons nous aux variétés de dimension 2 c'est à dire aux surfaces, sujet que Gauss avait justement exploré en 1827 dans ses ***Recherches générales sur les Surfaces courbes*** [12]. C'est d'ailleurs ce travail qui a très certainement inspiré Riemann. En effet Gauss y étudie la géométrie intrinsèque des

surfaces autrement dit la géométrie qui fait abstraction des propriétés de l'espace dans lequel la surface est plongée. Intuitivement il s'agit de la géométrie que pourrait connaître un être à deux dimensions vivant sur la surface et n'ayant aucune idée de ce qui se passe ailleurs.

Les points de la surface dépendant des deux paramètres p et q, le carré de l'élément linéaire ds au point correspondant à p et q est de la forme :

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2\,Fdpdq + G\,dq^2$$

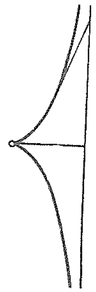
où E, F et G désignent des fonctions de p et de q. Gauss montre que la seule connaissance de ds c'est à dire des fonctions E, F, G suffit pour retrouver les propriétés métriques de la surface, les longueurs, les angles, la courbure. Ainsi, la courbure d'une surface en un point que l'on définit a priori à partir de son plongement dans l'espace et de ses sections par des plans est en fait une propriété intrinsèque. On peut donc inversement se donner a priori des fonctions E, F, G et définir une géométrie sur la surface indépendamment de l'existence d'un plongement.

C'est ce à quoi Riemann procède dans un cadre très général avec ses variétés. Il s'intéresse en particulier aux variétés dans lesquelles "les figures peuvent se mouvoir sans subir d'extension", ce sont les variétés de courbure constante, l'élément linéaire y est la forme :

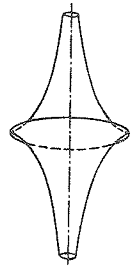
$$ds = \frac{\sqrt{\Sigma \quad dx_i^2}}{1+\frac{K}{4} \quad \Sigma \quad x_i^2}$$

Mais restons au niveau des surfaces plus aisément visualisables. Les surfaces de courbure nulle ou surfaces développables peuvent être appliquées sur un plan - du moins localement - dans une déformation sans extension, sans changement des longueurs tout comme on peut déformer une feuille de papier flexible mais non extensible. Les surfaces de courbure K constante et positive peuvent être appliquées sur une sphère de rayon $1/\sqrt{K}$. Le cas des surfaces de courbure K constante et négative est plus délicat.Beltrami montre en 1868 [2] que de telles surfaces peuvent être appliquées sur une pseudosphère.

Il s'agit de la surface de révolution engendrée par une tractrice dans une rotation autour de son asymptote. (une tractrice est une courbe telle que la portion de tangente comprise entre le point de contact et l'asymptote soit constante.)



tractrice



pseudosphère

Rappelons la formule suivante établie par Gauss :

$$\boxed{\iint_{ABC} K\,ds = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi}$$

où K désigne en chaque point la courbure (éventuellement variable) de la surface et où l'intégrale double est calculée dans le triangle ABC, le rôle des droites étant joué par les géodésiques (lignes de plus courtes distances entre chacun de leurs points). Ainsi, lorsque K est constant :

$$K.\ \text{aire de } ABC = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

d'où
$$\begin{cases} K = 0 & : \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \\ K = \dfrac{1}{r^2} & : \quad \text{aire } ABC = r^2\ (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) \\ K = -\dfrac{1}{r^2} & : \quad \text{aire } ABC = r^2\ (\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}) \quad \text{(cf.[20])} \end{cases}$$

Ainsi, sphères et pseudosphères, surfaces de l'espace euclidien, sont des exemples de plans ou plutôt de morceaux de plans où la géométrie de l'angle obtus (pour la sphère) et celle de l'angle aigu (pour la pseudosphère) sont réalisées du moins de façon locales et à condition d'effectuer les bonnes traductions terminologiques, en particulier de remplacer "ligne droite" par "courbe géodésique".

Mais sphères et pseudosphères ne sont, nous l'avons dit, que des modèles locaux . La pseudosphère possède toute un ligne de points singuliers. Hilbert montrera d'ailleurs en 1901 qu'il n'existe pas de surface analytique régulière sur laquelle la géométrie de Lobatchevsky soit réalisée. Quant à la sphère, deux droites c'est à dire deux grands cercles s'y rencontrent toujours en deux points ; pour éviter cette situation il faut identifier les points antipodaux, la surface alors obtenue n'a qu'une face tout comme la bande de Moëbius.

A propos de la géométrie et de l'espace, citons Riemann lorsqu'il demande de "faire la distinction entre l'illimité et l'infini", car la "propriété de l'espace d'être illimité possède une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence ; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu et qu'ainsi l'on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive si petite qu'elle fût". La notion d'illimité est dite aujourd'hui de nature topologique, celle d'infini étant de nature métrique.

Ainsi, en n'imposant plus aux droites d'être infinies, mais seulement illimitées, la proposition XVI d'Euclide n'est plus valable et l'hypothèse de l'angle obtus n'a plus à être rejetée. Les espaces envisagés par Riemann, susceptibles d'une diversité infinie, apparaissent comme extrêmement généraux. Dans le cas très particulier d'une courbure constante - le cas des géométries d'Euclide et de Lobatchevsky puisqu'on y déplace les figures - trois possibilités subsistent encore, rappelons les :

courbure	géométrie	hypothèse	exemple	nbre de parallèles
nulle	d'Euclide	angle droit	plan euclidien	1
négative	de Lobatchevsky	angle aigu	sphère	2 ou une infinité selon la terminologie
positive	dite de Riemann (par habitude)	angle obtus	pseudosphère	0

Nous venons d'envisager le versant différentiel des extensions, dans lequel est adopté un point de vue local. Revenons à un abord global avec des méthodes algébriques.

LA CLASSIFICATION KLEINIENNE DES GEOMETRIES

De façon contemporaine à la géométrie non euclidienne, une autre géométrie prend son essor : la géométrie projective.

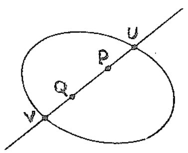
La géométrie projective

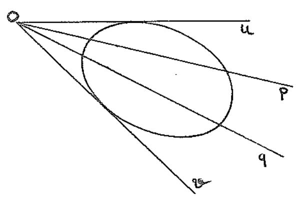
Issue de l'étude de la perspective par les peintres et les architectes de la Renaissance, inventée par Desargues au XVIIe siècle, éclipsée par l'efficacité de la Géométrie Analytique de Descartes et le Calcul Infinitésimal de Newton et Leibniz, la Géométrie Projective connait ses heures de gloire au XIXe siècle après la mise au point de la Géométrie Descriptive par Monge et surtout le **Traité des Propriétés Projectives des Figures** de Poncelet en 1822.

Bien qu'un peu mystérieuse, elle ne posait pas les mêmes problèmes métaphysiques que la géométrie de Lobatchevsky, dans la mesure où son objet n'était pas la description de l'espace lui-même mais une représentation conventionnelle de celui-ci. L'étonnant en elle résidait plutôt dans la puissance de ses méthodes permettant d'obtenir sans peine des énoncés de géométrie classique dès lors que ceux-ci exprimaient des propriétés de nature projective c'est à dire conservées par projection ou encore invariantes par toute transformation conservant l'alignement des points.

Une propriété à la fois remarquable et fondamentale des transformations projectives, celles qui préservent l'alignement des points, est la conservation du birapport de quatre points alignés ainsi que celle du birapport de quatre droites concourantes. Elles modifient par contre les distances et les angles. En 1859 cependant Arthur Cayley parvient à introduire de façon relativement naturelle des métriques dans les espaces projectifs.

Limitons-nous pour simplifier au plan projectif. Considérons dans ce plan une conique non dégénérée et, à tout couple de point P et Q, associons le nombre $PQ = k\,|\ln\ (P, Q, U, V)|$ où U et V sont les points d'intersection réels ou imaginaires de la droite PQ avec la conique, où (P, Q, U, V) désigne le birapport des quatre points et où k est une constante.





La quantité ainsi définie possède les propriétés d'une distance et, les transformations projectives du plan qui conserve cette métrique ne sont autres que celles laissant la conique invariante, cette dernière est appelée

l'<u>absolu</u> du plan. Quant à l'angle en O de deux droites p et q, il peut être défini par $k\,|\ln\ (p, q, u, v)|$ où u et v sont les tangentes à la conique issue du point O, (p, q, u, v) désigne le birapport des quatre droites et k est une constante. Pour traiter le cas de l'espace il suffit de remplacer la conique par un quadrique.

Géométrie projective et géométrie non euclidienne

Cette géométrie projective n'est pas sans lien avec la question des parallèles, puisque des droites parallèles n'y sont autres que des droites concourantes à l'infini. Mais aucun rapport n'était alors mis en évidence entre géométries projective et non euclidiennes.

En 1871, Félix Klein [15] découvre une telle relation lorsque ces espaces projectifs sont munis d'une métrique de Cayley. Dans le plan projectif, il n'existe que deux types de coniques non dégénérées, les coniques réelles et les coniques imaginaires dont les équations peuvent être ramenées respectivement aux formes :

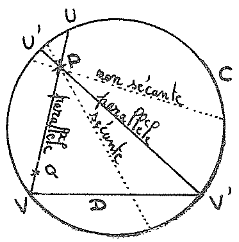
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Quand l'absolu est une conique réelle, l'ensemble des points situés à l'intérieur de la conique possède les propriétés géométriques du plan de Lobatchevsky, que Klein appelle géométrie <u>hyperbolique</u>. Quand l'absolu est imaginaire les points du plan projectif vérifient la géométrie "de Riemann" ou elliptique. Enfin quand l 'absolu de réel devient imaginaire en passant par un état dégénéré ($x^2 + y^2 = 0$), on retrouve la géométrie euclidienne ou <u>parabolique</u>.

Ainsi, les géométries euclidiennes ou non ne sont que des cas particuliers de la géométrie projective. De façon plus générale, Klein poursuit cette comparaison entre les diverses géométries possibles et dans son fameux Programme d'Erlangen de 1872 [16] il montre comment chaque géométrie est caractérisée par un groupe, le groupe des transformations qui conservent certaines propriétés caractéristiques de la géométrie et comment à l'emboîtement éventuel des groupes les uns dans les autres correspond une hiérarchie des géométries. Dans le cas présent, le groupe projectif, groupe des transformations du plan projectif contient trois types de sous-groupes formés des transformations conservant trois types de coniques auxquels correspondent nos trois types de géométries.

Ce faisant, Klein met en évidence un véritable modèle du plan de Lobatchevsky. C'est avec la description de ce modèle que la géométrie hyperbolique obtiendra pleinement droit de cité et assurance de non contradiction aux yeux de la communauté. Reprenons ce modèle avec un cercle C pour absolu.

Le modèle de Klein - Beltrami du plan hyperbolique



Les points du plan hyperbolique sont les points situés à l'intérieur du cercle C et les droites sont les cordes de C (extrémités non comprises). Il existe une infinité de non sécantes à D passant par P et les cordes limites UV et U'V' sont les deux parallèles à D passant par P (attention, les points U, V, U', V' sur C n'appartiennent pas au plan hyperbolique). Dans ce plan, la distance entre les points P et Q de la corde UV est définie par le logarithme du birapport des 4 points P, Q, U, V : $\ln\left(\frac{PU}{PV} : \frac{QU}{QV}\right)$.

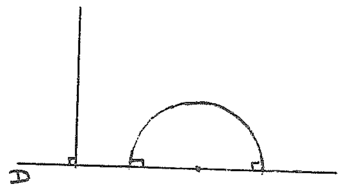
Plus on se rapproche du bord du cercle C, plus les longueurs sont "dilatées"; les points du cercle C sont "à l'infini".

Ce modèle du plan hyperbolique est remarquable en ce qu'il utilise pour sa description le plan euclidien et ses seules propriétés. Ainsi, si la géométrie euclidienne est exempte de contradiction, il en est automatiquement de même de la géométrie de Lobatchevsky. Inversement nous savons déjà que les horosphères jouent dans l'espace de Lobatchevsky le rôle de modèles de plans euclidiens et par suite si la géométrie hyperbolique est exempte de contradiction, il en est assurément de même de la géométrie euclidienne.

Ajoutons à propos de cette dernière que, dans ses **Fondements de la géométrie** [13] de 1899, Hilbert met clairement et précisément en évidence les différents axiomes utilisés de façon à pouvoir en formaliser la théorie. Et la question de la non-contradiction se ramène alors aisément grâce à la représentation cartésienne de l'espace à celle de la non-contradiction des seuls axiomes portant sur les nombres réels.

Le modèle de Poincaré

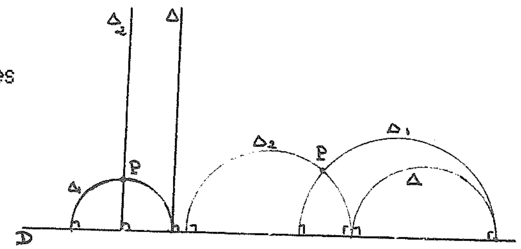
Poincaré propose un autre modèle de plan hyperbolique [2 1]. Les "points" de ce modèle sont les points d'un demi-plan ouvert limité par une droite D et les "droites" sont les demi-droites et les demi-cercles de ce demi-plan orthogonaux à D. [Le demi-plan généralement considéré est $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, les "droites" sont alors les demi-droites perpendiculaires à l'axe des x et les demi-cercles centrés sur cet axe].

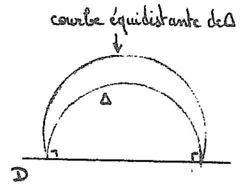


Les transformations isométriques sont les inversions par rapport à un cercle centré sur D et les composées de ces inversions [dans $\mathbb{C}$ il s'agit des transformations homographiques $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres réels tels que $ad - bc = 0$].

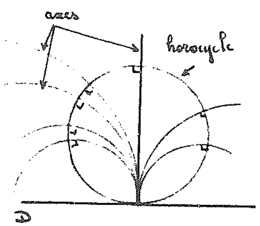
Ainsi, deux "segments" sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre par une telle transformation. L' "angle" de deux "droites" est l'angle usuel (l'inversion conserve les angles).

Par un point P extérieur à une "droite" Δ passent deux parallèles à Δ : les demi-cercles Δ_1 et Δ_2 centrés sur D, passant par P et tangents à Δ. (Les points de D n'appartiennent pas au modèle).





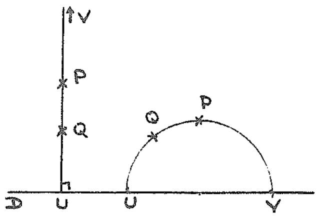
Dans ce modèle un "cercle" est un cercle ne coupant pas D, une courbe équidistante de la "droite" Δ est l'arc d'un cercle non centré sur D mais coupant D aux mêmes points que Δ et un horocycle est un cercle tangent à D, ses axes étant les "droites" coupant D au point de contact.



La distance entre deux points P et Q est donnée par l'expression :

$$PQ = k \,|\ln (P, Q, U, V)|$$

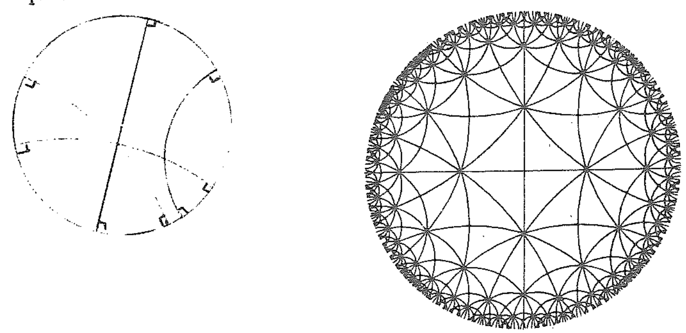
où U et V désignent les points d'intersection avec D de la "droite" passant par P et Q.



Un grand avantage de ce modèle est que l'on y dispose de formules simples pour décrire les isométries et on peut y retrouver la relation $\pi(x) = 2 \text{ Arc tg } e^{-x/k}$ ainsi que les formules trigonométriques.

Situé dans un plan euclidien et utilisant les droites et les cercles euclidiens, il n'est pas cependant plongé dans un tel plan car sa métrique n'est pas induite par la métrique euclidienne comme dans les études gaussiennes sur les surfaces, mais par l'expression de l'élément linéaire ds $[ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2]$ selon le point de vue riemannien. S'il n'est pas plongé, par contre ce modèle est global, c'est la description d'un plan de Lobatchevsky dans sa totalité.

L'application au demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \;|\text{Im}(z) > 0\}$ de la transformation $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ fournit un nouveau modèle dont les "points" sont les points situés à l'intérieur du cercle unité et les "droites" sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle unité ainsi que les diamètres de ce dernier. Les pavages hyperboliques de ce disque sont souvent utilisés à des fins esthétiques.



Pavages hyperboliques
Logiciel C. Léger. Réalisation D. Bouderlique

Epilogue : à propos de la géométrie de notre espace

A la question de savoir qu'elle est de toutes ces géométries rencontrées celle qui permet le mieux de décrire le monde physique, la simple logique mathématique, nous l'avons vu, ne permet pas de choisir, la réponse dépend d'abord du problème étudié, la géométrie euclidienne restant souvent performante. Indiquons cependant comment la géométrie riemannienne, la plus générale de toutes a priori, s'introduit naturellement dans la physique d'Einstein, celle de la relativité générale, ce que Riemann lui-même pressent dans une certaine mesure lorsqu'il écrit dans ses hypothèses : "Si cette indépendance entre les corps et le lieu n'existe pas...".

Puisque dans le vide tous les corps tombent de la même façon, il y a équivalence entre masse inerte et masse pesante, il y a équivalence entre forces d'inertie et forces de gravitation, par suite les processus physiques s'effectuent dans un champ de gravitation comme ils s'effectueraient relativement à un système de référence accéléré. C'est à partir de ce principe d'équivalence qu'Einstein élabore sa théorie de la gravitation.

Or, les forces de gravitation peuvent être absorbées localement par la donnée d'un univers non euclidien, un corps pesant courbant l'univers dans son voisinage. Car compte tenu de l'équivalence précédente, si on écrit la loi du mouvement d'un corps de façon qu'elle soit indépendante du choix des variables de lieu et de temps, une grandeur invariante apparaît :

$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \, dx_i \, dx_j$ où les g_{ij}, fonctions de $x_1, \ldots, x_4$, servent à la représentation du champ de gravitation[9]. On reconnaît là le ds^2 de la géométrie riemannienne. Dans cet univers courbe, un corps n'est soumis à aucune force, il décrit simplement les lignes les plus droites de cet univers, à savoir les géodésiques.

Cette théorie ne pouvait avoir une réelle portée que si des conclusions non newtonniennes vérifiées par l'expérience en étaient déduites. Ainsi, Einstein montre en 1915 comment elle explique l'avance séculaire du perihélie de Mercure, et les résultats théoriques coïncident assez bien avec les données de l'observation. Plus intéressante est la déviation des rayons lumineux dans un champ de gravitation, car il s'agit là d'un effet nouveau prédit par la théorie et non connu à l'époque. Or les déviations, observées par Eddington au voisinage du Soleil au cours de l'éclipse de 1919, permettant de voir des étoiles en principes cachées par le Soleil, ne sont pas en contradiction avec les calculs théoriques.

Concluons par une question d'actualité, celle de la valeur de la densité de l'univers. Si cette densité ρ est inférieure à une densité critique ρ_C, la courbure de l'univers est négative, sa géométrie est "de type lobatchevskien" (c'est l'espace-temps à quatre dimensions qui est courbe), il n'y aura pas de recontraction dans la théorie cosmologique du Big Bang ; si $\rho = \rho_C$, la géométrie est "de type euclidien", il n'y aura toujours pas de recontraction, la vitesse d'éloignement des galaxies tend asymptotiquement vers zéro ; enfin, si $\rho > \rho_C$, la courbure est positive, l'univers est fini, il y aura recontraction , ce sera le Big Crunch. Notre histoire s'arrête là.

BIBLIOGRAPHIE

1 H. ABELSON et A. diSESSA, Turtle Geometry, MIT Press, 1980.

2 E. BELTRAMI, Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne, 1868 ; trad. fr. J. Houël, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure T. 6, 1869, 251-288.

3 J. BOLYAI, Sur la science absolue de l'espace, 1832, trad. fr. J. Houël, Mém. de la Soc. des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux, t.5, 1867, 189 - 248.

4 R. BONOLA, La geometria non euclidea, Bologne 1906 ; trad. anglaise 1912, rééd. Dover, New York, 1955.

5 E. BREITENGERGER, Gauss's Geodesy and the Axioms of Parallels, Archives for History of Exact Sciences, t. 31, n°3, 1984, 273 - 289.

6 J-L CHABERT, La préhistoire des géométries non euclidiennes, IREM de Picardie, 1986.

7 J-L CHABERT, Compte-rendu d'un atelier sur la théorie des parallèles, Groupe Histoire et Epistémologie des Mathématiques, Bulletin de liaison n°4, 1987.

8 J-L CHABERT et J. NEUBERG, Wallis, le cinquième postulat et la similitude, IREM de Picardie, 1986.

9 A. EINSTEIN, Sur le problème de la relativité, Scientia, 1914 ; trad. fr. Scienta, t. 114, 1979.

10 EUCLIDE, Les oeuvres d'Euclide traduites littéralement par F. Peyrard, 1819 ; rééd. Blanchard, 1966.

11 C-F GAUSS, Werke, t. 8., Göttingen, 1900.

12 C-F GAUSS, Recherches générales sur les surfaces courbes, 1827 ; trad. fr., rééd. Blanchard, 1966.

13 D. HILBERT, Les fondements de la géométrie, 1899 ; trad. fr., Dunod, 1971.

14 K. JAOUICHE, La théorie des parallèles en pays d'Islam, Vrin, Paris, 1986.

15 F. KLEIN, Sur la géométrie dite non euclidienne, Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 2, 1871, 341-351.

16 F. KLEIN, Le programme d'Erlangen, 1872 ; trad. fr. , Gauthier-Villars, 1974.

17 J-H LAMBERT, Theorie der Parallellinien, dans F. Engel et P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Teubner, Leipzig, 1895.

18 A-M LEGENDRE, Réflexions sur les différentes manières de démontrer la théorie des parallèles, Mémoires de l'académie Royale des Sciences de l'Institut de France, vol XII, 1833, 367-410.

19 N-I LOBATCHEVSKY, Etudes géométriques sur la théorie des parallèles, Berlin, 1840 ; trad. fr. J. Houël, 1866 ; rééd. Monom, 1980

20 J-P PETIT, Le Géométricon, collection Les aventures d'Anselme Lanturlu, Belin, Paris, 1982.

21 H. POINCARE, Théorie des groupes fuschiens, Acta mathematica, t.1, 1-62.

22 PROCLUS de Lycie, Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide, tr. Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer et cie, Bruges, 1948 ; rééd. Blanchard, 1959.

23 B. RIEMANN, Sur les Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie, 1854 ; tr. fr. J. Houël, 1870 ; rééd. dans les oeuvres mathématiques de Riemann, Blanchard, 1968.

24 G. SACCHERI, Euclides ab omni naevo vindicatus, Milan, 1733 ; rééd. et tr. anglaise Halsted, Chicago, 1920 ; rééd. American Mathematical Society, 1986.

25 P. TANNERY, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Bulletin des Sciences Mathématiques (2), t.8 1884, 162-175.

Pour en savoir plus :

Sur les preuves mathématiques :

N. EFIMOV, Géométrie supérieure, 1978 ; trad. fr. éd. Mir, Moscou, 1981.

Sur les détails de la préhistoire des géométries non euclidiennes :

J-C. PONT, L'aventure des parallèles, Ed. Lang, Berne, 1986.

REMARQUES SUR L'ESSAI DE BAYES EN VUE DE RESOUDRE UN PROBLEME DE LA DOCTRINE DES CHANCES

Jean Pierre CLERO

I.R.E.M. de Rouen

Le nom de Bayes n'est pas seulement associé aujourd'hui à un théorème que tous les probabilistes connaissent comme *"théorème ou principe de Bayes"* -qui d'ailleurs, sous la forme où il est présenté, est plutôt un principe de Laplace[1]- ; il est sous l'aspect d'un adjectif (*"bayesien"*, *"bayesienne"*) souvent lié à une façon d'envisager les probabilités et les statistiques ; et même, plus généralement, selon l'expression de Mme Fagot-Largeault à *"une philosophie de l'entreprise humaine de rationalité (théorique et pratique)"*[2]. C'est ainsi que M. Granger consacre les dernières pages de son livre La Philosophie du Style, qui examine diverses façons fondamentales de faire la science, à la conception bayesienne dans laquelle il voit *"une interprétation de la connaissance comme travail, en nous écartant de l'interprétation qui en ferait le dévoilement d'un être-en-soi caché"*[3].

On assiste depuis l'entre-deux guerres à une sorte de réhabilitation de la méthode bayesienne en calcul des probabilités et en statistiques, après un rejet presque unanime au début du siècle, faisant suite à une mise en doute commencée cinquante ans auparavant. Le nom de Bayes est devenu une sorte de lieu de ralliement des positions dites *"subjectivistes"* en statistiques et en probabilités ; la probabilité devant être regardée comme une *opinion*, comme une *croyance* -dont on peut calculer et discuter le bien-fondé- mais non comme de d'une quelconque forme d'existence objective[4]. On découvre -ou plutôt : on redécouvre- des domaines de prédilection de la conception bayesienne de l'activité pratique et théorique en matière de diagnostic médical, de prévisions en litique, en économie, d'apprentissage par expérience en psychologie, ... bref dans tous les domaines où l'on se trouve devant l'évaluation de cas ou d'événements singuliers -dont on nous répète depuis Aristote qu'il n'y a pas de science[5]-.

Ce mouvement qui s'est peut-être amplifié récemment est assez important (sur le plan quantitatif du volume des publications et sur celui des enjeux idéologiques) pour que la curiosité du philosophe et de l'historien soit alertée, donnant l'envie de regarder l'Essai que Bayes a écrit et qui semble devoir jouer un rôle dans un courant qui se réclame d'un presbytérien du XVIII ème siècle.

Mon propos est très délimité : il consiste à essayer de situer l'origine du problème de Bayes et de sa solution mathématique par rapport à divers courants de pensée du XVIII ème siècle -je veux parler d'un courant nominaliste, d'un courant sceptique, de courants newtoniens et anti-newtoniens, de prises de positions théistes ou déistes concernant la Providence- tous venant confluer dans cette oeuvre mathématique. Mais ce n'est pas parce qu'une oeuvre est mathématique et qu'elle ne contient explicitement aucune ligne de philosophie qu'elle échappe aux conflits idéologiques du temps. Nous voudrions -situant l'Essai de Bayes sur un axe défini, à une extrémité par la philosophie de Berkeley que notre auteur n'ignorait peut-être pas, à l'autre par la philosophie critique de Kant qui a radicalement ignoré l'oeuvre de Bayes- mener notre réflexion sur quatre points :

- la définition de la probabilité et, de manière plus générale, les problèmes du langage posés par l'Essai.
- la prise en compte du temps par les mathématiques bayesiennes.
- ce qu'il en résulte pour la conception de la cause qui se trouve au centre de polémiques au XVIII ème siècle.
- Nous terminerons enfin par la conception de l'activité scientifique que la trentaine de pages de l'Essai semblent supposer.

I. QUESTIONS BIOGRAPHIQUES ET BIBLIOGRAPHIQUES ; PRESENTATION ET EXPLICATION DU PROBLEME DE L'ESSAI DE BAYES.

Il nous faut présenter tout d'abord le personnage de Bayes -ce qui sera vite fait, puisque nous n'en connaissons pas grand chose- ; le problème de l'Essai et le style de sa solution.

Lorsqu'on veut remonter aux origines du courant dit *"bayesien"*, on aboutit à l'Essai en vue de résoudre un problème de la Doctrine des Chances publié en 1763 (alors que son auteur est mort depuis deux ans le 17 avril 1761) dans les Philosophical Transactions de la Royal Society par les soins de Richard Price qui était l'ami de Bayes et qu'il nous faudra également présenter en raison de son implantation, explicite cette fois, dans les courants philosophiques du temps. Cette publication de 1763 a été complétée, toujours grâce à Price et dans les mêmes Philosophical Transactions en 1765, par quelques précisions concernant la démonstration d'une des Règles qui terminent l'Essai[6]. Bayes n'a donc rien publié par lui-même sur la question qui nous intéresse ; cette décision ou indécision de l'auteur ne nous semble pas fortuite : nous essayerons d'en déceler les raisons par l'examen même de l'oeuvre.

Disons tout de suite que, si certains auteurs probabilistes contemporains traitent Bayes en véritable pionnier d'une nouvelle rationalité, la publication des Philosophical Transactions, en dépit des efforts de Price pour souli-

gner l'intérêt du texte en mathématiques, en physique et en philosophie, n'a suscité immédiatement aucune espèce d'attention ; il faut attendre plus d'une quinzaine d'années pour voir les recherches de Bayes prises en compte par Condorcet qui les cite en 1781 dans un texte de l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris[7] et par D'Alembert en 1780[8]. Laplace, qui publie en 1774 son Mémoire sur la Probabilité des Causes par les Evénements, ne semble pas les avoir connues. Il est donc arrivé à ce texte mathématique à peu près la même mésaventure que celle qui est survenue, dans le même courant de pensée d'ailleurs, au philosophe David Hume, une trentaine d'années auparavant[9]. Si l'on prend l'oeuvre de Kant, à la fin du XVIII ème siècle, comme une sorte de lieu de vigilance où viennent se réfléchir les diverses attitudes scientifiques -car l'attitude kantienne se veut critique et, à tort ou à raison, la moins dogmatique possible à l'égard des sciences-, on s'aperçoit qu'il y a en elle une connaissance au moins pratique de la loi des grands nombres de Jacques Bernoulli[10], mais rien sur l'attitude bayesienne pourtant si originale à l'égard du temps, de la cause et plus généralement de la raison dans son activité de connaissance. Kant n'a certainement pas connu le travail de Bayes ou l'a estimé indigne de l'investigation critique.

Mais qui était Bayes ?

Il est né en 1702 ; il reçut une éducation privée, comme il était ordinaire chez les non-conformistes de l'époque. Il n'est pas impossible qu'il ait appris les mathématiques par l'un des fondateurs de la théorie des probabilités, A. de Moivre. Fils d'un Ministre de l'Eglise Presbytérienne à Leather Lane, près de Holborne, il devint lui-même l'un des six Ministres non-conformistes publiquement ordonnés comme tels en Angleterre. En 1742, Bayes a été élu Membre de la Société Royale, soutenu par Stanhope, Martin Folkes, J. Burrow, Cromwell Mortimer et John Eames.

On sait peu de chose sur son amitié avec Price. Les deux hommes se sont probablement rencontrés grâce à John Eames, ami de Newton par lequel il avait été introduit à la Royal Society, qui enseigna les mathématiques à Price à Moorfields ; Bayes avait aussi probablement étudié par ses soins les mathématiques à l'Académie dissidente de Tenter Alley.

On sait presque aussi peu de chose sur son oeuvre.

Il est peut-être l'auteur d'une Défense des Mathématiciens contre les objections de l'auteur de l'Analyste publiée anonymement en 1736 sous le titre Une Introduction à la Doctrine des Fluxions ; du moins la Bodleian Library d'Oxford l'assure-t-elle. Il s'agit d'une réponse aux attaques du philosophe Berkeley qui en 1734, avait rudement mis en cause, non pas la vérité des résultats obtenus par Newton dans son Traité de la Quadrature des Courbes (de 1676, publié en 1704), mais la rigueur des méthodes qui y mènent[11]. La Défense, présentant une argumentation originale qui met en avant les droits du temps et du devenir en mathématiques, nous semblerait bien porter pour cette raison la marque de Bayes dont nous verrons le souci particulier du temps dans l'Essai.

Il est aussi possible qu'il soit l'auteur, à moins que ce ne soit son père Joshua Bayes, d'un essai sur la Providence intitulé De la Divine Bienveillance ou un Essai de prouver que la fin principale de la divine Providence et du Gouvernement divin est le Bonheur de ses Créatures (publié en 1731). En dépit de l'anonymat de la publication, la Bodleian Library assure que Thomas Bayes en est l'auteur.

Il est, cette fois certainement, l'auteur d'une lettre à John Canton (Secrétaire de la Royal Society) sur les séries asymptotiques, publiée après sa mort en 1763 dans les Philosophical Transactions, l'année même de la parution de l'Essai.

Quant à Price, né en 1723, mort en 1791, il fut Ministre presbytérien à Newington Green et partagea son temps entre ses obligations de prêcheur et ses études de théologie, de mathématiques et de philosophie. En chacun de ces domaines, il marquera la vie intellectuelle de son temps. Il entrera en polémique avec Hume sur des questions liées au fondement de la morale qu'il envisage dans un intuitionnisme rationnel -alors que Hume cherchait à évacuer la raison des principes de la morale ; sur des questions liées d'une part à la Providence, d'autre part aux miracles -dont Hume avait contesté la possibilité, arguant du petit degré de probabilité de leur existence comparé à celui des lois de la philosophie naturelle-. Donc Price connaît les idées de Hume sur la cause et en apprécie la valeur polémique.

De plus, Price est un grand connaisseur du calcul des probabilités, assez pour être expert des questions d'assurances, conseiller d'une grande société ; et même pour être expert des questions financières, en particulier des problèmes d'annuité, sur lesquels il écrivit et qui l'amenèrent à conseiller des gouvernants (Shelburne et Pitt) sur les moyens de rembourser la Dette Nationale.

Il n'est pas impossible que son élection comme Fellow of the Royal Society fut liée à son travail d'édition de l'Essai de Bayes.

Il est temps de présenter le problème de Bayes et de l'expliquer.

L'Essai en vue de résoudre un problème de la Doctrine des Chances s'ouvre sur la demande suivante :

"Etant donné le nombre de fois qu'un événement inconnu s'est réalisé ou a fait défaut (has happened or failed), on demande la chance (chance) que la probabilité (probability) de sa réalisation lors d'une seule épreuve (in a single trial) soit comprise entre deux degrés quelconques (between any two degrees of probability) que l'on puisse assigner (that can be named)".

Avant d'expliquer quelques termes de ce problème, je voudrais prendre un exemple pour faire comprendre la question proposée.

Je joue à un jeu de hasard avec un adversaire qui gagne 8 parties sur 10 qu'on a réellement jouées. Ai-je affaire à un tricheur ? Dois-je continuer à jouer s'il me le propose ? Y a-t-il plus de chances pour que j'aie affaire à un tricheur plutôt que non, sachant que s'il ne triche pas j'ai, comme lui, 1 chance sur 2 de gagner, et que, s'il triche, il a 9 chances sur 10 de gagner ?

En d'autres termes, tout se passe comme si nous disposions de deux urnes remplies chacune de boules noires et de boules blanches, mais en proportions différentes.

Dans la première, la proportion de boules blanches est de 50/100.
Dans la seconde, elle est de 90/100.

On tire de l'une des urnes (on ne sait pas laquelle) un échantillon de 10 boules, dont on examine la composition : 8 sont blanches. Quelle est la probabilité pour que l'échantillon ait été tiré de la première urne, c'est-à-dire de celle qui contient autant de boules de chaque couleur ?

La règle de Bayes donne cette probabilité.

(Plus exactement, car les choses sont un peu plus fines : je me dis que si mon adversaire triche, sa probabilité de gagner doit se situer entre 8/10 et 10/10. Il vient de gagner 8 parties sur 10 réellement effectuées ; quelles sont les chances pour que son score soit compris entre ces deux valeurs lors des parties suivantes ?).

Revenons à l'explication des termes de notre problème.

Un *"événement inconnu"* est un événement dont on ne sait s'il va se produire ou non, ou dont on ne sait s'il s'est produit ou non ; la méconnaissance ne portant pas sur la nature de l'événement, mais sur son éventualité, sur son advenir. Le problème prend donc son sens, non pas du point de vue des événements eux-mêmes, mais du point de vue de ce que l'on sait d'eux. La notion de *"to fail"* (faire défaut) engage à faire la même remarque : Bayes définit "to fail" comme ne pas pouvoir se produire parce que la place est prise par l'événement contraire ; on voit que cette notion n'a de sens que du point de vue d'un sujet qui attend ou suppute (moyennant des indices suffisants) l'existence ou l'inexistence d'un événement dont on fixe mentalement l'essence.

Désormais, c'est en opposition au problème de Bernoulli tel qu'il est traité dans la fin de la IV ème partie de l'Ars Conjectandi (publié en 1713) que nous pouvons éclairer le problème de Bayes. Bernoulli avait établi qu'en multipliant indéfiniment les observations ou les expériences d'événements de même nature, le rapport du nombre des événements favorables au nombre total des événements (favorables et manquants) approche de leur probabilité dans des limites dont l'intervalle se resserre de plus en plus et devient moindre qu'aucune quantité assignable. Le problème traité par Bayes apparaît nettement par différences : tenons-nous en à trois principales.

La première engage une conséquence majeure sur laquelle nous reviendrons. Bayes parle de *"la probabilité de la réalisation d'un événement inconnu lors d'une seule épreuve"*, qu'elle soit la première, la seconde, la troisième ou la n ème. Certes, c'est bien en conséquence du nombre de fois qu'on a vu un événement se passer ou ne pas se passer que l'on calcule cette probabilité, mais elle porte sur la réalisation (ou le manque) d'un événement à venir ou passé qui m'est inconnu. Dès lors, si la probabilité est probabilité d'un événement, elle ne peut plus sans incohérence être définie comme le rapport des cas favorables au nombre total de cas (ce qui est, sinon la définition, du moins la pratique bernoullienne de la probabilité).

La seconde différence tient à ce que le problème de Bayes garde un sens quel que soit le nombre d'informations dont on dispose sur les événements passés semblables à celui dont on examine la probabilité. Simplement, le degré de cette probabilité varie en fonction de ce nombre.

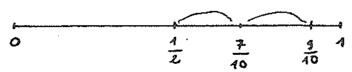
Enfin, si l'on regarde l'exact intitulé de la *"demande"* de Bayes, on remarque que l'objet du problème n'est pas la probabilité même de la réalisation d'un événement, mais *"la chance que la probabilité de sa réalisation soit comprise entre (quelques) deux degrés que l'on puisse assigner"*. Certes, la définition 6 établit que la *"chance"* et la *"probabilité"* veulent dire la même chose ; il n'en demeure pas moins que la recherche porte sur la probabilité pour que la probabilité d'un événement soit comprise entre deux valeurs.

Avant de nous lancer dans les analyses de la *probabilité*, du *temps mathématique* et de la *cause* qui nécessitent une prise en compte presque exclusive de

la I ère Section de l'ouvrage, donnons tout de même un aperçu de la solution du problème qui est proposée dans la II ème Section.

L'idée de la solution est la suivante :

1) Quand on ne sait absolument rien sur la probabilité de réalisation d'un événement, on doit supposer que la chance pour que cette probabilité se trouve entre deux valeurs quelconques est la même pourvu que l'écart entre ces deux valeurs soit conservé.



2) Mais dès que l'on a des informations, la chance n'est évidemment plus la même ; et tout le problème de Bayes consiste à calculer *"ma chance d'avoir raison lorsque, un événement s'étant produit p fois et ne s'étant pas produit q fois, en n épreuves* ($n = p + q$), *je conjecture que la probabilité de sa production en une seule épreuve soit comprise entre deux degrés de probabilité X et x"*.

L'estimation de cette chance (d'avoir raison) est donnée par le binôme de Newton qui permet de dénombrer les combinaisons des événements réels ou manquants connus, de constituer à partir de là la fonction binomiale $y = Ea^pb^q$ (E représentant le coefficient du terme en a^pb^q du binôme $(a + b)^{p+q}$, a signifiant la probabilité que l'événement se produise, b celle que l'événement ne se produise pas) et de raisonner géométriquement sur des rapports déterminés de surfaces délimitées par la courbe qui correspond à cette fonction.

Ces généralités étant posées, nous voudrions en venir à nos analyses de détail, en commençant par celle de la *"probabilité"*.

II. UNE ETRANGE DEFINITION DE LA PROBABILITE.

Nous avons déjà remarqué que, pour que le problème de Bayes ait un sens et une solution recevable, il fallait recourir à une définition que Price, qui assure la présentation philosophique du texte de son ami, qualifie de *"peculiar"* (d'étrange) ; je lis la 5 ème définition de la I ère Section de l'Essai :

"La probabilité d'un événement quelconque est le rapport entre la valeur (value) à laquelle on devrait estimer une espérance (at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed) dépendant de la réalisation de cet événement et la valeur (value) de la chose espérée s'il se réalise (upon it's happening)".

La probabilité n'est donc pas un rapport de nombres de cas ; elle est un rapport de valeurs (qui n'ont de sens, même si elles peuvent s'exprimer numériquement, que par l'estimation d'un sujet) : d'une part, de la valeur d'une espérance, c'est-à-dire d'un contrat qui accorde un prix si un événement se produit ; d'autre part, de la valeur du prix attaché à cet événement. Ainsi, dans l'ordre des raisons, si l'on ose dire, la notion d'*espérance* précède celle de *probabilité* qui la suppose.

On pourrait voir dans cette définition un héritage de Huygens, de la Logique de Port-Royal, de Pascal peut-être ; mais pour qu'elle soit jugée *"peculiar"* par un spécialiste des probabilités, il faut considérer les choses autrement et se souvenir de l'éventuelle polémique avec Berkeley. Nous verrons tout à l'heure que la façon de répondre à Berkeley consiste moins à rejeter l'objection qu'à infléchir l'activité scientifique de telle sorte qu'elle ne soit plus vulnérable aux attaques de l'évêque de Cloyne : ainsi Bayes voudra-t-il sauver des contradictions la méthode des fluxions par une certaine considération du temps. Bayes -si du moins il est l'auteur du texte- revendiquera la possibilité de faire de la science en tenant compte des objections berkeleyennes. Pourquoi n'en ferait-il pas de même avec le nominalisme de Berkeley ?

Plutôt que de condamner la science qui fait usage d'idées abstraites dont Berkeley montre qu'elles sont contradictoires et impensables[12], ne pourrions-nous tourner l'obstacle en essayant de faire une science qui ait un fondement nominaliste ou du moins qui sache tenir compte des objections nominalistes ? Le danger de l'attaque nominaliste, c'est le *scepticisme*, c'est la condamnation des sciences, même des plus efficaces d'entre elles comme l'est la science de Newton (dont on voit mal comment elle pourrait se passer de l'usage d'idées générales). Or la tentative de Bayes est peut-être de trouver le moyen de faire une science, donc d'éviter l'écueil sceptique, tout en prévenant l'attaque nominaliste.

Sans doute doit-on avouer que la définition bayesienne de la probabilité n'est pas des plus claires ; elle semble même enfermer quelque circularité (quel contenu donner au mot "devrait" de la définition ? Ne faudrait-il pas déjà connaître la règle que veut établir Bayes pour donner un sens à la définition de la probabilité ?). Mais c'est peut-être trop demander à une définition que d'exiger de se la pouvoir représenter[13]. De plus, que l'on réfléchisse un instant à la définition de la probabilité comme rapport du nombre des cas favorables et de celui de l'ensemble des cas quand ces nombres deviennent très grands et inaccessibles à l'expérience : ne forgeons-nous pas pour le coup une idée abstraite susceptible de tomber sous les attaques de Berkeley ? Or il semble que le postulat -à la fois philosophique et de pratique mathématique- de

Bayes soit que *seul existe l'événement singulier* et que si la probabilité doit avoir un sens, ce ne soit pas en prenant en compte un nombre immense d'événements semblables, inatteignable par l'expérience, mais que ce soit en concernant un événement à venir ou passé. *La probabilité n'a de sens qu'en assignant une valeur numérique singulière*[14] *à un événement singulier*. Sa définition comme rapport de deux valeurs singulières permet d'échapper au reproche d'abstraction.

L'idée d'un fondement nominaliste de la science peut être menée beaucoup plus loin qu'au niveau des définitions. Qu'une définition puisse être nominale n'est évidemment pas une découverte du XVIII ème siècle ! Ce qui en revanche est peut-être caractéristique d'une science qui a pris au sérieux les objections berkeleyennes du début du siècle et qui a tenté de les transformer positivement, c'est la promotion du *verbe*, avec ses divers *modes* et ses *temps grammaticaux* particuliers. Le traducteur de l'Essai de Bayes est immédiatement frappé par la richesse grammaticale et sémantique des verbes tout à fait inhabituelle dans un texte mathématique, même lorsqu'il est rédigé -ce qui est très souvent le cas au XVIII ème siècle- avec très peu de formalisme et dans la langue vernaculaire. Nous en verrons un échantillon tout à l'heure lorsque nous étudierons le temps. Sans la grammaire et son subtil système des temps, le texte mathématique s'effondrerait.

Comprenons bien ce dernier point dans ses racines berkeleyennes. La langue mathématique est classiquement formée des noms et du verbe "être" qui semblent travailler ensemble[15] ; si chez Bayes le clavier sémantique et grammatical des verbes, par lesquels on saisit les temps et les rapports de temps, est plus riche que le seul auxiliaire "être" et que le seul présent de l'indicatif, c'est peut-être une conséquence du nominalisme berkeleyen mené au bout de sa logique. La critique des idées abstraites rend très problématique le signifié des mots ; si les mots ne représentent plus les idées générales (en dépit de l'illusion que nous avons de leur existence), que deviennent les signifiés ? Ils ne sont pas autre chose que l'*usage* que nous faisons des mots[16] ; du coup, la représentation perd son caractère fondamental et n'est plus que l'un des usages -d'ailleurs ambigu- que nous faisons des mots. La contestation de la représentation est inévitablement une remise en question de la suprématie du nom dont on imagine, plus facilement que pour tout autre mot, qu'il *représente* quelque chose ; dès lors des mots qu'on ne voyait guère agir dans le discours mathématique, comme les verbes par exemple, semblent désormais pouvoir jouer un rôle capital.

Un temps de verbe ne représente rien à proprement parler ; il constitue plutôt un rapport de situations des événements entre eux et de l'observateur à l'égard de ces événements. Il constitue un univers où le calcul, la prévision etc.

peuvent prendre sens. D'autres fonctions interviennent que la stricte représentation : tous les mots ne sont plus traités comme des noms. Cela est si vrai que le nom même de "probabilité" ne se définit que par le détour d'un verbe au conditionnel[17] et que la fonction du nom est souvent occupée par des gérondifs[18].

La libération du verbe et de ses fonctions est le versant positif d'un nominalisme dont le versant négatif est le scepticisme. Nous allons, dans un instant considérer concrètement ce travail des verbes au niveau de deux propositions et de leurs démonstrations ; mais nous voudrions au préalable inscrire ces considérations dans une recherche sur le temps car une science qui cherche à faire travailler les verbes devient tout naturellement une science du temps.

III. LA PRISE EN COMPTE DU TEMPS DANS L'ESSAI DE BAYES.

Nous voudrions montrer que le temps est pris en compte par l'Essai de Bayes d'une façon très originale par rapport à son traitement newtonien en mathématiques et en mécanique. Nous trouverons plus tard le fondement de cette singulière prise en compte du temps dans une attitude -que nous pourrons qualifier de "dialectique"- du **calculateur de probabilités** devant la science de son époque.

Nous savons déjà que Bayes a probablement défendu les droits du temps en mathématiques contre les accusations de contradictions lancées par Berkeley à l'égard de la méthode newtonienne des fluxions.

Il faudrait -sur ce point- pénétrer brièvement quelques éléments de la querelle du calcul infinitésimal.

L'idée -brièvement rapportée- du De Quadratura Curvarum, c'est de faire décrire une surface sous une courbe dont on connaît l'équation $y = x^n$ par une ordonnée -c'est-à-dire une ligne- qui se déplace à une vitesse uniforme et de calculer à chaque instant l'accroissement de cette surface par unité de temps. Il faut que cet instant soit de grandeur suffisante pour que, x s'étant accru d'une petite quantité o, y ait à son tour changé ; le rapport des deux accroissements pouvant s'effectuer de telle façon que la simplification par o au numérateur et au dénominateur soit possible. Mais il faut aussi que ce o soit assez petit pour qu'on puisse négliger toutes ses puissances. Cela fait donc un double rôle joué consécutivement par la quantité notée "zéro" : d'une part, elle témoigne du temps nécessaire pour passer d'une étape de la description de la figure à une autre et, à ce titre, elle donne lieu à des

rapports d'accroissements naissants ; mais d'autre part, on lui demande, pour simplifier le rapport d'accroissements, de disparaître et de devenir un zéro et elle peut, à ce titre, donner lieu à des rapports de quantités évanouissantes.

Mêlé à la querelle du calcul infinitésimal, Berkeley a attaqué -c'est du moins un des arguments de l'Analyst- au nom du principe de contradiction, ce double usage de la quantité "zéro" par laquelle il est possible de simplifier le rapport d'une part, et par laquelle il est possible d'autre part, quand la quantité devient égale à zéro, de tenir les termes indésirables dans le développement du résultat de ce rapport pour nuls[19]. Les critiques berkeleyennes à l'encontre du De Quadratura Curvarum ne sont pas sans fondements logiques dès lors qu'elles refusent les deux descriptions dans le sens naissant, puis dans le sens évanouissant, et le découpage du traitement mathématique en deux moments qui permet de faire dans le second une opération contraire à celle qui est produite dans le premier. Or, parmi les défenseurs des droits du temps et du devenir en mathématiques, il n'est pas impossible que l'on trouve Th. Bayes, s'il est l'auteur -comme l'affirme la Bodleian Library- d'une Introduction to the Doctrine of Fluxions sous-titrée Defence of the Mathematicians against the objections of the Author of the Analyst.

"Supposer que deux grandeurs soient égales et inégales en même temps eût été une inconséquence ; mais les supposer d'abord égales et puis, ensuite les supposer devenir inégales[20] ne présente pas l'ombre d'une difficulté. Et il n'y a rien d'extraordinaire à ce que, à partir de la supposition que ces deux choses se passent l'une après l'autre, je puisse déduire une conclusion qui ne dérive pas de l'une ou de l'autre supposition prise séparément ; la justesse de la conclusion que j'ai tirée apparaîtra à quiconque considèrera ce qui est distinctement établi à chaque étape de la démonstration"[21].

Là où Berkeley dénonce un usage du temps qui permet les paralogismes nécessaires à la production de résultats dont il ne conteste que la rigueur, l'auteur de la Defence accepte dans une démonstration mathématique des étapes, un devenir mettant en scène des grandeurs qui changent de valeur au cours du temps. La vérité qu'elle établit n'est pas indépendante du cheminement qu'elle a suivi pour se poser. Le temps de l'épanouissement (de la figure, de la fluente) n'est pas celui de l'évanouissement ; et la contradiction n'apparaît qu'à celui qui refuse le temps en mathématiques, en particulier ce double passage du temps. Mais il faut reconnaître que cette défense est philosophique et que le statut newtonien du "zéro" est parfaitement contradictoire[22].

L'idée de Bayes est peut-être de donner un statut plus méthodologique, plus mathématique, à un temps qu'il a philosophiquement défendu vingt cinq ans plus tôt. Mais alors que chez Newton le temps *"vrai et mathématique""coule uniformément"*, que la distinction d'un avenir et d'un passé est radicalement inutile, que seule est prise en compte la *"durée"*, Bayes ose dans l'Essai un discours mathématique qui comprenne la distinction du futur, du présent et du passé.

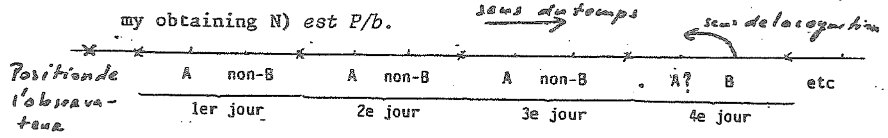
Il nous faut, pour nous en convaincre, lire trois propositions fondamentales de la I ère Section. Elles traitent toutes les trois des probabilités conditionnelles (ou "suppositionnelles").

Proposition 3 : La probabilité pour que deux événements subséquents se produisent tous les deux dans l'avenir (will both happen) *est en rapport composé de la probabilité du premier et de la probabilité du second en supposant que le premier se produise.*

$$P\ (A\ \&\ B) = P\ (A) \times P\ (B \text{ si } A).$$

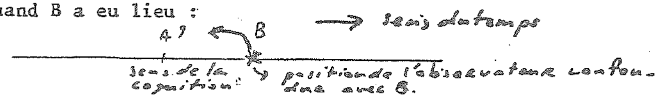
Le corollaire se contente de remarquer que $P\ (B \text{ si } A) = \dfrac{P\ (A\ \&\ B)}{P\ (A)}$

Proposition 4 : Si deux événements subséquents sont de telle sorte qu' ils puissent être déterminés chaque jour (c'est-à-dire sont tels que chaque jour, chacun ne puisse échapper à cette alternative : il a eu lieu ou il n'a pas eu lieu), *si pour chaque jour la probabilité du second est b/N et celle des deux ensemble P/N, et si je dois recevoir N à condition que les événements arrivent tous les deux dès le jour où le second événement se produit, je dis que, dans ces conditions, la probabilité que j'ai d'obtenir N* (the probability of my obtaining N) *est P/b.*



$$P(A \text{ si } B) = \frac{P(A\ \&\ B)}{P(B)}$$

Le corollaire se contente de souligner que la probabilité ne change pas quand B a eu lieu :



Proposition 5 (qui n'est autre que la conclusion de la démonstration du corollaire) : *Soient deux événements consécutifs, soit b/N la probabilité du second et soit P/N la probabilité des deux ensemble ; lors de la découverte en premier lieu du second événement, je conjecture à partir de là que le premier événement s'est aussi produit avec une probabilité que je suis en droit d'évaluer à P/b.*

Cette lecture appelle plusieurs remarques.

Le temps n'est pas la simple forme intuitive -qu'elle sera chez Kant- qui permettrait de loger de diverses façons, et pour lui donner divers sens, la même forme logique -à savoir : la formule de la probabilité conditionnelle-. En ce cas, le temps ne serait qu'une sorte d'habillage philosophique (et sans grand intérêt, avouons-le) d'une condition traitée logiquement ; le texte deviendrait un essai philosophique déguisé en caractères mathématiques.

Le temps fait intimement partie de la structure de la probabilité conditionnelle. Dans l'esprit de Bayes, cette formule n'est en aucune façon une définition comme elle est prise par exemple dans le traité de Kolmogorov sur les probabilités[23] ; elle fait l'objet de théorèmes différents qui la démontrent dans diverses orientations (de l'observateur et des événements) par rapport au temps. Kolmogorov n'a plus aucun égard à l'orientation temporelle dans laquelle on procède pour définir et calculer une probabilité conditionnelle. Du coup, ce formalisme logique peut indifféremment accompagner un intuitionnisme philosophique du temps qui prétendrait lui donner sens ; cet intuitionnisme n'intéresse en aucune façon le mathématicien comme tel.

Telle n'est pas la position bayesienne qui est plus proche, quoique étant parfaitement mathématique, de la pensée empirique du temps. Ce paradoxe, rarement souligné, que les mathématiques qui ne sont pas elles-mêmes empiriques peuvent servir la cause de l'empirisme doit être rendu parfaitement clair.

Le temps chez Bayes n'est pas détachable des événements autrement que par abstraction ; raisonner sur le passé, ce n'est pas raisonner sur un continu homogène, c'est opérer sur des événements passés. Et la démonstration de la valeur de la probabilité conditionnelle d'événements liés dans le passé ne s'effectue pas de la même façon que celle concernant les événements présents ou à venir. Il ne s'agit nullement de détacher une forme logique d'une intuition temporelle -ce qui fait à la fois le lit d'un intuitionnisme, d'un formalisme et de tous les conflits qui peuvent résulter de cette séparation- ; il s'agit de montrer au contraire que la forme des raisonnements par laquelle on établit la valeur de P (A si B) ou de P (B si A) est inséparable des événements en position d'être passés, présents ou à venir. La formule établie par Bayes est une sorte de schème du temps.

D'une certaine façon, nous pourrions dire que l'irréversibilité du temps -qui n'est aucunement prise en compte par Newton et qui sera chez Kant un caractère de la forme a priori du temps[24] (que seule donc la philosophie peut considérer)- est à l'oeuvre dans l'argumentation de cette première Section. Nous verrons tout à l'heure l'importance de cette remarque pour l'expression mathématique de la cause -que le kantisme rejette par principe-.

Voyons dans leur principe simplement les façons différentes de démontrer en direction de l'avenir et en direction du passé.

Commençons par la démonstration de la Proposition 3.

"Supposons que si deux événements se produisent ensemble, je doive recevoir N (I am to receive N), *que la probabilité pour que les deux événements se produisent à l'avenir ensemble soit P/N* (that the probability both will happen is P/N), *que la probabilité du premier événement futur soit a/N* (l'anglais dit simplement : that the first will is a/N), *(et par conséquent (N - a)/N celle de sa non-existence future), et que celle que le second arrivera en supposant que le premier arrive soit b/N. Alors (par la déf.5) P sera la valeur de mon espérance qui deviendra égale à b si le premier événement se produit.* (Deux remarques : 1) Nous sommes au coeur de la démonstration : il s'agit de regarder comment croît l'espérance que les deux événements se produisent quand A se produit. 2) "the value of the expectation" dont il est parlé dans le texte est un condensé de l'expression consignée dans la définition 5 : "the value at which an expectation depending upon the happening of the event ought to be computed". Autrement dit, le nom ici vaut pour une formule entière qui contient un verbe au mode conditionnel). *Par conséquent, si le premier se produit, le gain que j'obtiens par son moyen est b - P, et s'il ne se produit pas, ma perte est P. C'est pourquoi, par la précédente proposition, a/N est à (N - a)/N, autrement dit a est à N - a comme P est à b - P.* (Le reste de la démonstration nous amène par un simple calcul au résultat : P (B si A) = P (A & B) / P (A).)

La Proposition 3 utilise une propriété démontrée précédemment (en Proposition 2) selon laquelle :

$$\frac{P\ (A)}{P\ (-A)} = \frac{\text{Perte en cas de } -A}{\text{Gain en cas de } A}$$

soit : P (A) x Gain (en cas de A) = P (-A) x Perte (en cas de -A).

(On retrouve une équation qui est dans la Logique de Port-Royal).

L'idée de la démonstration est la suivante : gain et perte sont gain et perte d'espérance (liés à la production des événements A et B).

Dans la situation où je dois calculer P (B si A),

observateur A B

j'utilise l'équation ainsi :

Probabilité que A se produise	x	Quantité d'espérance que j'ai gagnée (que B se produise si A se produit)	=	Probabilité que A ne se produise pas	x	Espérance que je risque de perdre (espérance de voir les événements A & B subséquents se produire)
$\frac{a}{N}$	x	(b - P)	=	$\frac{N - a}{N}$	x	P

De ce raisonnement, Bayes tire la valeur de P (B si A).
Le sens de cette démonstration est que mon espérance de voir B arriver si A est arrivé grandit quand A est arrivé.

Il eût été facile à Bayes de traiter uniformément le cas de la Prop.3 et ceux de la Prop.4, de son corollaire et de la Prop.5. Il a été pris d'un scrupule dont nous avons trop souvent perdu la clé aujourd'hui lorsque la définition des probabilités conditionnelles nous semble indépendante du fait que le temps cognitif s'écoule dans le sens du temps ou à contresens du temps réel. Certes Bayes ne donne aucune explication à ce sujet ; mais ce qui est sûr, c'est qu'il change de démonstration selon que le temps est considéré en prédiction ou en rétrodiction ; et que la Prop.4 est un effort pour ménager une médiation entre la Prop.3 et le corollaire de la Prop.4, dont la Prop.5 n'est qu'une conclusion. (Dans la Prop.4, l'observateur regarde vers le passé, mais A et B sont encore à venir, comme dans la Prop.3. Cette situation, fort étrange quand on cherche à lui donner un contenu empirique, est un intermédiaire entre la situation temporelle de la Prop.3 et la situation de la Prop.5, plus "naturelle").

Voyons de plus près la Proposition 4 qui aboutit au résultat symétrique de celui de la Proposition 3, cette fois pour le calcul de P (A si B). Lisons-la et dévoilons son principe.

"En effet, si ce n'est pas le cas, soit x/N la probabilité que j'obtienne N et soit le rapport de y à x comme celui de N - b à N. Alors, puisque x/N est la probabilité que j'obtienne N (par la définition 5), x est la valeur de mon espérance. De plus, parce que, compte tenu des conditions précédentes, j'ai, dès le premier jour l'espérance d'obtenir N si les deux événements se produisent ensemble, ce dont la probabilité est P/N, la valeur de cette espérance est P. De la même façon, si la coïncidence ne se produisait pas, j'aurais l'espérance de retourner à ma situation initiale ("Likewise, if this coincident should not happen I have an expectation of being reinstated in my former circumstances") *; en d'autres termes, j'aurais l'espérance de recevoir ce qui a x pour valeur et dépend de la non-réalisation du second événement dont la probabilité (par le corollaire de la Proposition 1) est (N - b)/N ou y/x, parce que y est à x comme N - b à N. Par conséquent, puisque x est la chose espérée et y/x la probabilité de l'obtenir, la valeur de cette espérance est y. Mais ces deux dernières espérances réunies sont évidemment identiques à mon espérance originelle, dont la valeur est x, et par conséquent, P + y = x. Mais y est à x ce que N - b est à N. De là, x est à P ce que N est à b, et x/N (la probabilité que j'ai d'obtenir N) est égal à P/b".*

L'idée est que, dès le premier jour et avant de savoir si B s'est produit, je puis analyser la situation ainsi : trois cas peuvent se présenter. Ou : A et B se réalisent tous les deux et je gagnerai N. Ou : B ne se réalise pas et je conserverai l'espérance de gagner N, dont la valeur est x. Ou : B se réalisera, mais non A, auquel cas je perdrai mon enjeu x.

Pour effectuer le calcul d'espérance de A si B, il faut se rapporter d'abord à la Prop. 1 qui suppose l'additivité de l'espérance liée à des événements incompatibles. En effet, l'espérance d'obtenir N par B ou par non-B est égale à la somme de ces espérances. L'espérance d'obtenir N (ou ce qui revient au même, celle que l'événement A se soit produit) si B a eu lieu -et l'on ne tient compte de A que s'il a eu lieu conjointement à B- est donc égale à la somme de l'espérance d'avoir A et B et à celle d'avoir A quand non-B a eu lieu. Cela donne :

$$\text{Esp.}_{(A\ si\ B)} = \text{Esp.}_{(A\ et\ B)} + \text{Esp.}_{(A\ si\ non\text{-}B)}$$
$$x = P + y$$

Le calcul de y est celui de l'espérance que je puis avoir (de la réalisation de A ou de l'obtention de N) quand B ne s'est pas produit. y est une partie de x (qui représente l'espérance que j'ai de constater que A s'est réalisé quand B s'est produit) obtenue par la multiplication de x et de la probabilité d'obtenir cet x (ou de sauvegarder cet x). Cette probabilité de la non-réalisation de B est $1 - \frac{b}{N}$.

Donc : $x = P + x(1 - \frac{b}{N})$.

$$x = \frac{PN}{b}$$

D'où :

$$\frac{x}{N} = \frac{\frac{P}{N}}{\frac{b}{N}} \qquad \text{CQFD.}$$

Il y aurait beaucoup à dire sur les stratagèmes de ces démonstrations. Ainsi les schèmes grammaticaux permettent-ils des médiations entre des situations qui apparaissent fort discontinues. Par exemple, la démonstration obtenue dans le sens de l'avenir (A et B étant futurs, le sens de la cognition allant dans celui du cours du temps) joue-t-elle un rôle dans la démonstration prise dans le sens du passé, en ce que la grammaire nous rend possible de projeter un regard rétrospectif dans l'avenir (A et B étant tous deux futurs, mais la cognition allant à contresens du cours du temps). La grammaire permet des glissements que ne permettrait pas la considération abrupte des cas.

Il n'est pas impossible même que quelques particularités de la langue anglaise permettent des glissements que d'autres langues (en particulier le français) ne permettent pas. La concordance des temps ne fonctionne pas en anglais comme elle fonctionne en français ; il n'est pas impossible par exemple que le retour toujours plus prompt en anglais, après un futur ou après un conditionnel au présent de l'indicatif favorise l'embrayage du discours mathématique sur la structure grammaticale. Nous trouvons le cas dans la démonstration de la Proposition 4 ; nous pourrions en montrer de semblables dans celle de la Proposition 5.

Mais sur le point où nous commençons à voir avec intérêt des arguments chez Bayes qui permettent à l'empirisme de résister victorieusement, avec intelligence, et en sauvegardant l'accord avec les mathématiques, contre la critique qui sera celle de Kant[25] quelques années plus tard, il nous faut convenir de graves lacunes de l'Essai, probablement à l'origine de sa non-publication par l'auteur. Price n'a peut-être pas vu les points faibles de l'ouvrage ; si faibles pourtant qu'on se voit rejeté, sans l'avoir voulu, du côté de la théorie a priori et non-mathématique de la cause que l'on trouve chez Kant.

Les faiblesses tiennent à la topique du temps lorsqu'on cherche à la restituer dans sa totalité. Sur l'ensemble des cas possibles de configurations du I guess, de A et de B (soit 10 cas)[26], Bayes n'en envisage que 3, voire 4 (car la prise en compte, dans les démonstrations, d'étapes intermédiaires peut faire office d'une inspection de cas) ; laissant implicitement à chacun le soin de raisonner sur les autres cas pour trouver soit des formules identiques, soit des formules symétriques[27]. Mais le jeu de situations qu'il étudie suffit à nous laisser soupçonner que l'intention qu'il poursuit ne semble pas aboutir. Ce qu'il veut très honnêtement et très courageusement obtenir, c'est l'identité ou la symétrie des formules des probabilités conditionnelles, quel que soit le sens temporel dans lequel elles sont prises; cela non par la voie courte et arbitraire de la définition, mais par démonstrations. Or si chacune des démonstrations de la Prop.3, de la Prop.4 et de son corollaire, de la Prop.5, peut être acceptée séparément, elles sont inacceptables quand on les rapproche car elles supposent la considération de cas intermédiaires qui donnent des valeurs d'espérance et de probabilité fort différentes de celles des cas envisagés en leur entier. Le double statut de certaines étapes intermédiaires compromet le caractère exhaustif du "schématisme" bayesien. L'auteur n'a pas pu ne pas s'apercevoir de ces paralogismes ; il est vraisemblable qu'il ait abandonné l'idée de publier un essai aussi *fondamental* dans ses vues qu'*incertain dans ses résultats*.

IV. LA CAUSE ET LA LOI.

Une rapide incursion dans l'idée de cause achèvera de nous convaincre que l'Essai aurait pu être fondamental si Bayes était allé au bout de sa tâche et avait tenté de redresser les paralogismes qui barrent l'accès au but qu'il s'était fixé. L'échec bayesien devrait être médité autrement qu'en le fuyant -soit à la façon formaliste de Kolmogorov, soit par la transformation, à la manière de Kant, du principe de causalité en un *dogma* (c'est-à-dire en un principe non-mathématique)-.

Kant a distingué la causalité des principes mathématiques (issus des catégories de l'unité, de la pluralité, de la totalité, de la limite,...) ; et là encore, il nous permet paradoxalement de remarquer que les mathématiques peuvent -jusqu'à un certain point- être en affinité avec une conception empiriste de la cause. S'il est par principe impossible de mathématiser la causalité kantienne, on peut trouver chez Bayes, dans certaines limites, un équivalent mathématique de la conception humienne de la cause. Montrons-le.

Hume, quelques décennies plus tôt, avait critiqué l'idée de cause -traditionnellement envisagée comme connexion nécessaire entre les événements- dans le Traité de la Nature Humaine (1739) et dans l'Enquête sur l'Entendement Humain (1748). Price souligne d'ailleurs que le texte de Bayes *"concerne de très près la Philosophie Expérimentale par le sujet qu'il développe"* et qu'il *"doit nécessairement être considéré par quiconque voudrait clairement rendre compte de la force du raisonnement par analogie ou inductif"*. Quels sont les points com-

muns de l'Essai avec l'analyse humienne de la cause ?

L'analyse de la cause avait mené Hume à distinguer en elle l'antécédence, la contiguïté et la conjonction constante (plus ou moins parfaite) d'événements semblables (la perfection tenant au nombre de cas observés et, dans ce nombre de cas, aux cas favorables ou défavorables). La probabilité d'une subséquence, compte tenu des subséquences semblables déjà passées, ne remplit-elle pas exactement le même rôle qu'une causalité ainsi analysée ?

La causalité humienne ne prend son sens que par l'appréhension subjective des événements ressemblants ou, plus exactement, des conjonctions d'événements ressemblantes. Il en va de même dans l'Essai, les événements et leurs subséquences n'ayant de sens que *du point de vue du sujet* (du *"I guess"*) qui, moyennant ses expériences, s'efforce de conjecturer sur le compte de cas semblables. Certes, on pourra toujours objecter que Bayes ne parle jamais de *cause* ; toutefois, nous devons constater qu'il met un soin particulier dans sa Première Section à donner au problème qu'il veut résoudre une ampleur qui lui permette de valoir non seulement pour des événements singuliers semblables, mais encore pour des subséquences semblables d'événements ; ce qui donne évidemment un intérêt expérimental à son problème.

Même si la causalité s'applique à des cas singuliers (encore inédits ou dont je n'ai pas été témoin de l'édition), elle ne prend son sens que si l'on sort d'une conjonction unique pour considérer la constance de cette conjonction dans d'autres cas semblables. Le geste bayesien qui calcule la probabilité d'avoir raison en conjecturant un événement à venir (ou passé) à partir d'événements (ou de subséquences d'événements) semblables est analogue.

Nous pourrions aller jusqu'à dire que, par bien des côtés, Bayes accomplit un voeu humien, celui de transformer en nombres ces fameux coups de crayon qui à chaque nouvelle expérience, viennent conférer une vivacité supplémentaire à ton de l'idée (d'une subséquence). L'exemple des bateaux dans le Traité de la Nature Humaine n'est pas sans analogie avec l'approche bayesienne de la probabilité[28].

Enfin -et c'est sur ce point que nous envisageons pleinement l'enjeu de cette conception de la cause-, Hume attaquait, en un sens sceptique, l'universalité et la nécessité de la loi physique (newtonienne), insistant sur le fait q la raison ne pouvait pas prouver, ni l'expérience nous assurer, que l'événement qui allait venir serait conforme aux événements semblables passés. De la même façon, rien ne garantit plus chez Bayes que l'événement futur (ou l'événement passé dont on n'a pas été témoin) sera certainement conforme aux événements semblables du passé ; il ne l'est plus qu'avec un degré de probabilité seulement, c'est-à-dire qu'avec un certain degré de croyance (sans tomber dans la crédulité d'une part, dans le dogmatisme de la loi d'autre part).

Lorsque Price écrit à Canton que la question de Bayes et sa résolution permettent d'établir *"la raison que nous avons de croire* (reason we have for believing) *qu'il y a dans la constitution des choses des lois fixes selon lesquelles les événements se produisent, et que, par conséquent, la structure du monde doit être l'effet de la Sagesse et de la Puissance d'une cause intelligente ; l'argument téléologique en faveur de l'existence de la Divinité se trouvant ainsi confirmé"*[29], il faut bien peser cette affirmation ; en particulier l'expression *"raison de croire"*.

Si la démarche de Bayes est la moins dogmatique possible et la seule réellement convaincante pour montrer qu'il y a des lois, puisqu'elle n'en présuppose pas l'existence (formant ses inductions des cas particuliers à un cas particulier, mais jamais à la loi générale), il faut dire aussi -comme s'en est bien aperçu Price- que nous ne saurons jamais par ce moyen s'il y a des lois et que nous n'aurons jamais que des *"raisons d'espérer"*[30] qu'il y en a ou que l'événement suivant existera plutôt qu'il n'existera pas.

C'est pourtant paradoxalement là que le point de rupture devient manifeste avec Hume. Price voyait dans le texte de Bayes une réponse à la conception humienne de l'induction[31]. Chez Hume, le mouvement qui me porte, à partir de la mémoire des événements semblables passés et de leur proportion de réussites et d'échecs, à inférer l'existence d'un événement semblable pour l'avenir n'est pas *rationnel*. Il est *naturel*. Il ne saurait y avoir au sens strict de *raison de croire*[32], mais une habitude qui, assumant le poids de l'expérience passée, s'ouvre vers l'avenir en influant sur notre esprit.

Or le calcul bayesien est un calcul des *raisons* de croire ou d'espérer. Du décompte des réussites et des échecs passés, je prétends tirer des raisons de croire pour l'avenir. On voit aussitôt que cette façon de penser tombe sous les coups de la critique humienne au même titre que la conception rationaliste traditionnelle de la cause ; car il n'y a pas de raison de croire, mais simple croyance que l'avenir sera conforme au passé dans sa répartition déjà expérimentée des réussites et des échecs. Certes, la rationalité humienne est en affinité avec celle du calcul des probabilités, mais la notion de *"raison de croire"* sonne comme une opposition à Hume sur le terrain de la causalité et devrait, si l'on voulait à tout prix lui donner un sens humien, au moins recevoir une interprétation *"naturelle"* (même s'il y a, dans le Traité de la Nature Humaine, des règles qui limitent l'usage du principe de causalité). Hume ne s'est nullement laissé séduire par la rationalité des probabilités qui est pourtant très proche de sa représentation du monde ; de son point de vue, les

mathématiques bayesiennes ne concernent en aucune façon le monde à venir, mais décrivent simplement notre façon de l'envisager, compte tenu de son passé; leur valeur est plus psychologique que transcendantale.

Traçons en guise de conclusion plus positivement la conception du savoir qui semble à l'oeuvre dans l'Essai.

V. UN STYLE DE RATIONALITE.

Le nominalisme qui pousse Bayes à calculer le degré de probabilité d'un cas individuel, la conception empiriste de la cause sont peut-être des efforts pour répondre positivement au scepticisme. Il ne paraît pas impossible de faire une science sans être obligé de croire aux idées générales ; on peut traiter la cause comme une subséquence et en faire tout de même un usage à la façon de Hume dans le domaine politique ou économique.

Bien entendu, on nous rappellera qu'il s'agit d'un texte mathématique auquel le présentateur seul (et non l'auteur) s'avise de donner un sens philosophique. Mais le texte de Bayes ne relève-t-il pas, par la nature de son problème et par la rédaction de sa solution, d'une science plus *réfléchissante* que déterminante ?

Les mathématiques bayesiennes ne fournissent aucun instrument pour mettre en forme des phénomènes selon des lois, comme le font les mathématiques newtoniennes dont les quadratures de courbes, par exemple, peuvent directement servir en mécanique. Bayes calcule des raisons de croire à la reproduction d'une conjonction d'événements à partir d'une certaine quantité de répétitions. Ce n'est pas une science qui infléchit la représentation que l'on se fait des choses ; elle agit au niveau de l'évaluation, de la supputation, de la pondération de la représentation. Connaître une chose, c'est savoir évaluer les raisons de croire en un jugement la concernant. Si la science de Newton relève d'une conception conquérante et déterminante à l'égard du réel (des phénomènes), la science de Bayes est une réflexion "en retrait" de la détermination. Elle tend à substituer à la loi objective la règle du croire, susceptible d'une objectivité d'ailleurs, mais qui n'est pas celle des choses.

M. I. Hacking, dans The Emergence of Probability, a montré l'existence d'un courant permanent situé en marge de la *high science* qui découvre les lois depuis la Renaissance. La *low science*, qui prend en compte les probabilités, vit en rapport de réflexion, voire d'attaque sceptique, à l'égard de la haute science qui triomphe en physique notamment et elle amplit les terrains qui échappent à l'activité législatrice de cette haute science (la médecine, la biologie, l'économie, la politique).

Cette science bayesienne qui fait sienne l'inquiétude du XVIII ème siècle à l'égard des lois, de leur portée de détermination des phénomènes, de leur égale stabilité dans le passé et dans l'avenir, se fait aussi beaucoup plus *"dialectique"* que la science des lois. Nous entendons ici *"dialectique"* en un sens très voisin de son acception aristotélicienne d'activité de recherche préalable à la science ou par laquelle il est possible de discuter les thèses de cette science. La dialectique est une activité intermédiaire entre la simple opinion et la science. La science bayesienne est dialectique en ce qu'elle s'efforce de saisir des réalités que la haute science ne parvient pas à exprimer. Donnons en exemple l'irréversibilité du temps que la science bayesienne prend au moins davantage en compte que la science newtonienne qui la traite comme une sorte d'illusion. De façon plus générale, le caractère "dialectique" de cette recherche est très visible en ce qu'il serait bien difficile de citer une découverte qui ait été faite par la méthode bayesienne. Ne vit-elle pas d'une activité de médiation entre la *high science* qui parle universellement des phénomènes et le cas singulier (ou la conduite singulière à tenir) qui seul(e) intéresse le médecin, l'économiste, le politique ?

C'est pourquoi si le philosophe est un moment satisfait de voir des notions philosophiques recevoir une sorte de fonctionnement à l'intérieur de la science, il doit se demander si la science n'a pas plus à gagner d'une séparation plus nette avec la philosophie. Bayes a échoué dans sa tentative de schématisme (temporel) de la probabilité conditionnelle, peut-être pour avoir cru qu'une science réfléchissante était possible en mathématiques, soit en dehors de la philosophie.

NOTES

(1) Ce principe donne la probabilité pour que, un événement B s'étant produit et pouvant se produire de plusieurs manières différentes (s'excluant mutuellement) par la cause A_1, A_2, ... A_n, ce soit précisément à cause de A_1 qu'il s'est produit :

$$P\ (A_1 \text{ si } B) = \frac{P\ (B \text{ si } A_1) \times P\ (A_1)}{\sum_1^n P\ (B \text{ si } A) \times P\ (A)}$$

Le §2 du Mémoire sur la Probabilité des causes par les événements de 1774 énonce le "Principe" en ces termes : *"Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes".*

(2) Actes de la journée d'études du 15 décembre 1979, Médecine et Probabilités, Institut de Recherche universitaire d'Histoire de la Connaissance, Université Paris-Val de Marne, Paris, Didier-Erudition, 1982, p.79.

(3) op. cit., A. Colin, Paris, 1968, p.294.

(4) Dans la préface de son ouvrage sur la Théorie des probabilités (Theory of probability, trad. par A. Machi et A. Smith, New York, Wiley, 1974), De Finetti écrit : "LA PROBABILITE N'EXISTE PAS" et ajoute que *"la probabilité, si on la regarde comme quelque chose de douée d'une certaine forme d'existence objective, est ... un concept erroné, une tentative illusoire d'extérioriser ou de matérialiser nos véritables croyances probabilistes"*

(5) *"Il n'y a de science que du général, d'existence que du particulier"*, selon la célèbre formule d'Aristote ; il n'en demeure pas moins que *"ce n'est pas la santé que considère le médecin, mais la santé de l'homme, et peut-être même plutôt la santé de tel homme, car c'est l'individu qu'il soigne"* (Ethique à Nicomaque, I, 6, 1097 a 10).

(6) Il est difficile de dire ce que le texte publié par R. Price en 1765 (Philosophical Transactions, 54, pp.296-325) sous le titre *"A demonstration of the second rule in the Essay towards the solution of a problem in the Doctrine of Chances"* doit à Bayes.

(7) op. cit., pour 1778 (1781), pp.43-6.

(8) Opuscules mathématiques, T.VII, 1780, p.60.

(9) Hume écrit dans une de ses lettres que *"l'ouvrage tomba mort-né des mains de la presse"*.

(10) Comme en témoigne l'alinéa introductif de l'Idée d'une Histoire Universelle au point de vue cosmopolitique (1784).

(11) The Analyst ; or a discourse addressed to an infidel mathematician (1734), § 20 : *"I have no controversy about your conclusions, but only about your logic and method...... I consider the geometrical analyst as a logician, i.e. so far forth as he reasons and argues ; and his mathematical conclusions, not in themselves, but in their premises ; not as true or false, useful or insignificant, but as derived from such principles, and by such inferences".*

(12) Pour le montrer, Berkeley, dans ses Principes de la Connaissance Humaine, (Int., § 13), s'était appuyé sur un texte célèbre de Locke dans lequel le philosophe montrait que l'idée de "triangle" était impensable psychologiquement (quand je pense au triangle, il faut bien qu'il ait quelques caractéristiques : qu'il soit obliquangle, ou rectangle, ou équilatéral, ou

isocèle etc... mais pas tout cela à la fois) et monstrueuse sur le plan logique (il faut qu'un triangle soit ou rectangle ou équilatéral, par exemple, mais pas les deux à la fois). Locke avait écrit en effet dans l'Essai sur l'entendement humain (L. IV, Ch.VII, §9) : *"Ne faut-il pas de la peine et de l'habileté pour former l'idée générale de triangle : car elle ne doit être ni obliquangle, ni rectangle, ni équilatérale, ni isocèle, ni scalène ; mais à la fois tout cela et rien de tout cela ? En réalité, c'est quelque chose d'imparfait qui ne peut exister : c'est une idée où sont rassemblés des éléments de plusieurs idées différentes et incompatibles".* Mais de façon extrêmement contradictoire, Locke n'en continuait pas moins à soutenir la thèse du rapport de représentation entre les mots et les idées générales. Berkeley va faire éclater cette contradiction et en tirer toutes les conséquences.

(13) Berkeley avait très bien dit dans les Principes de la Connaissance Humaine (Intr., §18, 1710) : *"C'est une chose que de garder constamment à un mot la même définition, autre chose que d'en faire le représentant d'une même idée : l'une est nécessaire, l'autre est inutile et irréalisable".*

(14) Kant indique bien la synthèse singulière effectuée par le nombre quoique son usage soit général (Critique de la Raison Pure, PUF, Paris, 1963, p. 166).

(15) La théorie du verbe se trouve dans la II ème Partie de la Logique de Port Royal, au ch.II (qui reproduit le ch.XIII de la Grammaire Générale). Il s'agit de ramener tous les verbes à un seul : le verbe "être" qui relie entre eux des mots ayant fonction d'être des noms.

(16) Comme l'a montré Mme Brykman dans sa thèse, Berkeley, Philosophie et Apologétique, (Vrin, Paris, 1984).

(17) Voir la définition de la "probabilité" au début du §II.

(18) idem. Le français escamote fatalement ce mode verbal de désignation dans la langue anglaise.

(19) The Analyst, §§ 13-16.

(20) Ce qui est le cas pour la surface à laquelle on ajoute une petite quantité qui va ensuite devenir égale à zéro ; en toute rigueur, cela fait deux surfaces, tantôt égales, tantôt inégales.

(21) Op. cit., (London, J. Noon, 1736), pp.39-40.

(22) Notre sujet n'est pas ici de montrer comment sous l'impulsion de D'Alembert, ce statut sera dépassé par l'idée de "limite".

(23) Nous parlons bien entendu des Grundbegriffe des Wahrscheinlichkeitrechnung de 1933. Dans la traduction de N. Morisson, Foundations of the Theory of Probability, 2d edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1956, voir I, §4, (5), pp.6-7.
De Finetti s'insurgera contre ce statut de définition donné à la formule des probabilités conditionnelles et pensera, comme Bayes, qu'elle doit être l'objet de théorèmes. (Voir : Probability, Induction and Statistics - The Art of Guessing-, (John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1972), p.81).

(24) Kant distingue par ce caractère le temps de l'espace -par ailleurs deux formes a priori de la sensibilité susceptibles de la même analyse-. Le philosophe critique même l'usage spatial que la physique (ou même déjà la phoronomie) fait du temps. (Voir la Critique de la Raison Pure, op. cit., p.63).

(25) Très dangereuse sous ses apparences de prudence par ses coupures du concept et de l'intuition, de la forme et de la matière ; très exclusive aussi sous ses apparences d'accueil du travail scientifique.

(26) On peut faire le diagramme suivant des configurations possibles :

A	B	B si A	A si B
Futur	Futur	A B cas de la Prop.3	A B cas de la Prop.4
Présent	Futur	A B moment de la Prop.3	A B
Passé	Futur	A B	A B
Passé	Présent	A B	A B Cas du corollaire de la Prop.4 et Prop.5.
Passé	Passé	A B	A B

Nota : La croix représente la position présente de l'observateur.

(27) Du moins avons-nous cherché à le montrer dans un article intitulé Temps et Langage dans la Première Section de l'Essai en vue de résoudre un Problème de la Doctrine des Chances de T. Bayes qui sera peut-être bientôt publié par le Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales de l'Ecole des Hautes Etudes.

(28) *"Supposez par exemple que j'aie trouvé à la suite d'une longue observation que, de vingt bateaux qui prennent la mer, dix-neuf seulement reviennent. Supposez que je voie actuellement vingt bateaux qui sortent du port : je transfère à l'avenir mon expérience passée et me représente dix-neuf de ces bateaux comme revenant sans dommages et l'un d'eux comme périssant".* (Traité de la Nature Humaine, trad. Leroy, Aubier-Montaigne, Paris, 1946, p.218).

(29) Pearson & Kendall, Studies in the History of Statistics and Probability, (Griffin, London, 1970, p.135).

(30) Bayes parle aussi de *"reason to reckon"*, de *"reason for thinking"*.

(31) Du moins M. Hacking l'affirme-t-il dans The Emergence of Probability (Cambridge, 1975).

(32) Ces deux mots de *"reason"* et de *"believe"* sont constamment écartés l'un de l'autre par Hume dans le domaine de la réflexion sur la cause.

LA PREMIERE FORMULATION MATHEMATIQUE DE LA THEORIE DES FORCES CENTRALES CHEZ NEWTON

François De Gandt

CNRS, Paris

LES DISCUSSIONS DANS LE MILIEU ANGLAIS VERS 1680

La découverte de la gravitation universelle présupposait un ensemble de techniques mathématiques nouvelles, qui traduisent en termes mathématiques précis et rigoureux l'idée d'une force "centripéte". Il fallait pouvoir représenter et mesurer l'action de cette force sur les planètes -ou sur n'importe quel mobile-et étudier la manière dont cette force varie en fonction de la distance.

L'idée même d'une force dirigée vers le soleil, et diminuant selon une loi déterminée, était activement discutée à l'époque. En 1680-1683 plusieurs savants anglais s'intéressaient à une dérivation possible des mouvements planétaires à partir de la force solaire. A Londres en particulier,Wren, Hooke et Halley cherchaient une démonstration qui permît de passer d'une loi de décroissance de la force à la description des mouvements célestes.

L'idée première était que les planètes accomplissent leur trajet sous l'action d'une certaine force qui les entraîne vers le soleil.

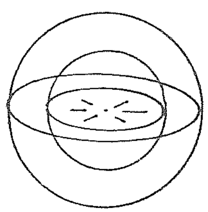
De quelle nature était cette force ? On ne savait pas trop. Elle pouvait "attirer" les planètes ou les "pousser". Dans le premier cas le soleil lui-même serait la cause, la source de la force ; dans l'autre cas il serait simplement, par hasard, au centre géométrique du mécanisme, sans être cause du mouvement.

Certains tentaient d'expliquer cette tendance dirigée vers le soleil par l'action d'un fluide ou d'un éther qui occuperait l'espace : par exemple il pourrait y avoir une matière invisible qui tourne à grande vitesse autour du soleil et repousse certains corps au milieu du tourbillon, comme les particules de thé qui se rassemblent au fond de la tasse. Ou encore les différences de pression du milieu interplanétaire pousseraient les corps vers le centre. C'est surtout sur le continent qu'on s'intéressait à ces fluides invisibles.

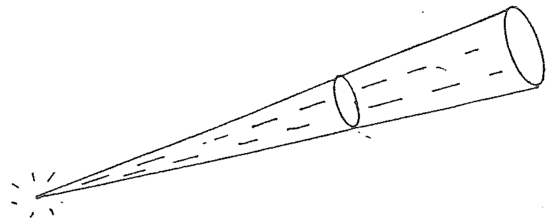
Le milieu anglais était plus ouvert à des théories "attractionnistes"; le soleil agirait à distance sur les planètes et les attirerait vers lui comme un grand aimant. Cette conception avait reçu le nom de Philosophie Magnétique et s'inspirait d'ouvrages déjà anciens : le De Magnete de William Gilbert (1600), les oeuvres de Kepler (Astronomie Nouvelle 1609, Epitome d'Astronomie Copernicienne, 1618_ 1621).

Cette force qui dirige les planètes vers le soleil pourrait n'être pas la même aux différents points de l'espace, diminuant avec la distance selon une loi bien déterminée. Par exemple on pouvait imaginer que cette force décroit lorsqu'on s'éloigne du soleil dans la même proportion que le carré de la distance au soleil.

C'est assez plausible puisque la lumière elle-même diminue selon cette loi. Si à partir d'une source lumineuse ponctuelle les rayons se diffusent en ligne droite dans toutes les directions, sans aucune perte ni modification, une surface sphérique entourant la source recevra autant de lumière, qu'elle soit très proche ou très éloignée de la source située au centre :



Si l'on veut comparer deux morceaux de surface appartenant à deux sphères concentriques de rayon différent, à quelle condition recevront-ils la même quantité de lumière ? Il suffit que leurs contours appartiennent à un même cône issu de la source lumineuse :



Dans la partie initiale du cône les rayons sont plus serrés, ils sont plus espacés dans la portion plus distante de la source, mais il y en a toujours "autant" . Une même quantité de lumière se répartit ainsi sur des surfaces de plus en plus larges, proportionnelles au carré des rayons des sphères concentriques (puisque les surfaces croissent comme le carré des rayons).

Un élément de surface reçoit donc une quantité de lumière inversement proportionnelle au carré de sa distance à la source. Si la force qui pousse ou attire les planètes vers le soleil est analogue à la lumière, elle devrait diminuer selon cette même loi. Kepler lui-même avait envisagé cette hypothèse pour la rejeter. (1).

Le pas décisif, celui que nos trois Londoniens voudraient accomplir, consisterait à relier la trajectoire précise des planètes à cette loi de diffusion. L'affaiblissement de la force proportionnel au carré de la distance permet-il d'expliquer les particularités des mouvements célestes, notamment la forme elliptique des orbites ou les rapports des périodes des planètes ? On avait observé que les planètes marchaient d'autant plus lentement

---

(1) Astronomie Nouvelle chap. 36 (G.W. 3,250)
Epitome, IV, 3 (G.W. 7,304)

qu'elles étaient plus loin du soleil, et Kepler avait même donné une loi précise pour cette dépendance : la vitesse des différentes planètes varie avec leur distance au soleil de telle manière que le cube du rayon de l'orbite est proportionnel au carré de la période. Ces propriétés des mouvements célestes pouvaient-elles résulter de l'action d'une force variant comme $1/R^2$?

Finalement, comme on le sait, c'est un quatrième personnage qui résolut l'énigme.

Newton s'était fait connaître par ses idées sur la lumière, soulevant une polémique avec Hooke (déja !). Il avait aussi fait circuler de manière plus ou moins privée des lettres et des manuscrits mathématiques très novateurs, particulièrement à propos du développement en série infinie de certaines quantités algébriques. (1)

Lorsque Halley et la Royal Society apprirent que Newton possédait la solution, on l'engagea à la faire connaître par un livre. Mais Robert Hooke, informé des prétentions de Newton, se jugea frustré de sa part dans la découverte. Newton demanda alors l'avis de Halley. Sa réponse est un précieux récit des essais infructueux qui ont précédé les Principia :

" J'ai été reçu par Sir Christopher Wren et lui ai demandé si c'est M.Hooke qui lui avait donné l'idée de la proportion en inverse carré ; il me répondit que lui-même, il y avait bien des années, avait pensé à réaliser les mouvements des planètes en composant une descente

---

(1) Voici par exemple l'appréciation de Leibniz en 1976, onze ans avant les Principia : "Les découvertes de Newton sont dignes de son génie, que les expériences d'optique et le Tube Catadioptrique /-le télescope Newton-/ ont manifesté abondamment. Sa méthode pour obtenir les racines des équations et les aires des figures par des séries infinies diffère complètement de la mienne..." (The correspondence of Isaac Newton, Cambridge 1960, Vol 2, 57, 58)

vers le soleil et un mouvement imprimé ; mais à la longue il avait abandonné, ne trouvant pas le moyen de le faire. Depuis ce temps, M. Hooke lui avait fréquemment dit qu'il l'avait fait, mais ne l'avait jamais convaincu au point que ses démonstrations fussent contraignantes.

Effectivement je puis dire qu'en janvier 1683-1684, comme j'avais conclu moi-même, à partir de la proportion entre le cube et le carré, que la force centripète décroissait inversement en proportion du carré des distances, je vins en ville un mercredi, où je rencontrai Sir Christopher Wren et M. Hooke ; comme la conversation tomba là-dessus, M.Hooke affirma que sur ce principe toutes les lois des mouvements célestes pouvaient se démontrer, et que lui-même l'avait fait ; je déclarai l'insuccès de mes tentatives ; et Sir Christopher, pour encourager cette recherche, dit qu'il donnait à M.Hooke et moi-même deux mois pour lui en apporter une démonstration convaincante, et qu'outre l'honneur, celui d'entre nous qui y parviendrait recevrait de lui en cadeau un livre de 40 shillings.

M. Hooke dit alors qu'il y était parvenu, mais qu'il désirait tenir cela caché pendant quelque temps, pour que les autres, à force d'essayer et d'échouer, vinssent à en reconnaître la valeur lorsque lui même rendrait cela public.

Pourtant je me souviens que Sir Christopher était fort peu convaincu qu'il pût le faire, et bien que M.Hooke lui promît alors de le lui montrer, je ne trouve pas que dans cette circonstance il ait tenu sa parole.

Au moins d'août suivant, lorsque j'eus l'honneur de vous faire visite, j'appris cette bonne nouvelle que vous aviez mené cette démonstration à sa perfection, et il vous plut de m'en promettre une copie, qu'en novembre suivant je reçus de M.Paget avec une très grande satisfaction." (1)

---

(1) Lettre de Halley à Newton, 29 juin 1686, Corresp., 2,441-442.

Les échecs, les promesses non tenues témoignent combien il était difficile d'élaborer l'intuition première jusque dans le détail, difficile de transformer l'idée générale d'une force variant comme $1/R^2$ en une théorie aux conséquences déterminées.

Wren exige de véritables démonstrations contraignantes et ce que lui propose Hooke ne le convainct pas. Mais à quoi pourrait ressembler une démonstration en ces matières ? Sur quels exemples se guider ?

En géométrie on sait ce que c'est que prouver, grâce à toute une culture nourrie des livres des Anciens et cultivée par des discussions, des cours, des défis, des découvertes. Que pourrait être une preuve touchant des questions relatives aux forces et aux mouvements ? Quels principes indubitables adopter comme fondements ? A quels outils mathématiques recourir ?

Cette intuition première n'est pas encore celle d'une "gravitation universelle", si l'on s'en tient à ce texte. La force agit sur les planètes et les dirige vers le soleil. Mais il n'est pas question de la lune, ni de la pesanteur terrestre, à moins que ce ne soit compris par Hooke dans sa mention de "tous les mouvements célestes".

Quels cas Hooke embrassait-il effectivement dans son hypothèse ? Il est difficile de le préciser. Hooke joue dans ce récit le personnage d'un vantard, craignant qu'on ne l'estime pas à sa juste valeur, promettant plus qu'il ne peut tenir et proposant des raisonnements qui ne convainquent pas. Newton le lui fera cruellement sentir plus tard et minimisera son rôle dans le cheminement vers la découverte .

Wren, quant à lui, semble avoir d'abord posé la question dans un cadre moins strict : les mouvements des planètes peuvent-ils s'expliquer en combinant le mouvement inertial et un mouvement dirigé vers le soleil ? (peut-être à partir de l'idée de Galilée que les planètes, au commencement du monde, auraient d'abord été lancées en ligne droite selon un mouvement

acceleré de chute, puis détournées sur leur orbite circulaire) (1)

LA VISITE DE HALLEY

La fin de la lettre indique le dénouement de l'intrigue : Halley fit une visite à Newton dans sa retraite de Cambridge, et eut la surprise d'apprendre que celui-ci possédait la solution. Cette visite est l'impulsion première qui donna naissance aux Principia.

Le récit en a été transmis quarante ans plus tard, grâce aux souvenirs du mathématicien Abraham de Moivre :

" En 1684, le docteur Halley lui fit une visite à Cambridge. Après qu'ils furent restés quelque temps ensemble, le docteur lui demanda quelle serait à son avis la courbe qui serait décrite par les planètes en supposant que la force d'attraction vers le soleil est inversement comme le carré de leur distance à celui-ci.

Sir Isaac répondit immédiatement que ce serait une ellipse ;

le docteur, frappé de joie et d'étonnement, lui demanda comment il le savait ;

eh bien, dit-il je l'ai calculé ;

sur quoi le docteur Halley lui demanda son calcul sans autre délai ;

---

(1) Gf.Galilée, Discorsi, 4e Journée, Edizione Nazionale, VIII. 283-284. Le rapprochement est suggéré par J.A. Bennett, d'aprés les annotations personnelles de Wren à son exemplaire des Discorsi : J.A. Bennett, The mathematical science of Christopher Wren, Cambridge U.P.,1982, p.61.

Sir Isaac regarda parmi ses papiers, mais ne put le trouver ; mais il promit de le recommencer et alors de le lui envoyer." (1)

La date de la visite n'est pas certaine. La plupart des experts la situent dans le milieu de l'été 84, selon les termes de Halley lui-même ("août 84"), mais certains arguments pousseraient à la dater plutôt du mois de mai environ (2). Peu importe. Le délai de la réponse de Newton s'en trouverait allongé.

Car Newton a attendu plusieurs mois avant de tenir sa promesse. Et finalement ce n'est pas une démonstration que reçut Halley, mais un petit traité. L'exemplaire effectivement envoyé en novembre 84 n'a pas été retrouvé, mais il en existe plusieurs copies ou versions plus ou moins enrichies, à la Bibliothèque de Cambridge et à Londres. Leur titre commun est "De Motu" ("sur le mouvement") (3)

---

1. Récit de Moivre, traduit d'aprés le texte reproduit dans Cohen : Introduction to Newton's Principia, Harvard UP. 1971 . 50 et 297-298.

2. Cf. Hall and Hall, Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton, Cambridge, 1962, 239 et Math Papers of Isaac Newton, ed by I.T. Whiterid Cambridge Vol VI.

3. Il en existe au moins quatre textes manuscrits :

- De motu corporum in gyrum (ULC Add. 3965, fol .55-62 v; publié comme manuscrit B par Hall 237-267 . aussi in Math. P.VI,I §1,30-75 ; et in Herivel, The Bachground of Newton Principia, oxford, 1965.
- (sans titre) ULC Add. 3965, fol 63-70 (manuscrit C de Hall)
- De motu sphaericorum corporum in fluidis (ULC Add. 3965, fol 40-54. manuscrit D de Hall, extraits in Math P.VI,74-80)
- Isaaci Newtoni propositiones de motu (Royal Society Register, vol .VI. p.218-234 ; édité par Rouse Ball An essay on Newton's Principia London 1893, 35-51)

Ce sont des versions très simplifiées et encore très grossières des Principia. Newton les corrige, les réécrit, les enrichit, y insère des pièces d'une autre provenance. Ses cours à Cambridge, deux années de suite, sont faits de ces matériaux (1).

Le petit écrit De Motu est donc le noyau initial de l'énorme ouvrage. Les premiers manuscrits que nous possédions dans cette série qui aboutit aux Principia, et qui ressemblent certainement de très près au texte envoyé à Halley en novembre 84, contiennent seulement quatre théorèmes et quatre problèmes, en une dizaine de pages, alors que les Principia contiendront près de deux cents propositions, en plus de cinq cents pages. Le texte a grossi dans des proportions incroyables, au fil des rédactions successives, entre novembre 84 et janvier 87, date de la publication des Principia. La visite de Halley (2) avait déclenché une tempête créatrice.

---

(1) Si l'on en croit le texte qu'il a déposé à la Bibliothéque de Cambridge, comme trace officielle de son enseignement des semestres d'automne 1684 et 1685. Ce manuscrit, intitulé "Lucasian Lectures de Motu Corporum", représente une étape intermédiaire entre les manuscrits De Motu et le manuscrit final des Principia, déposé à la Royal Society pour publication. (Voir Math.P. VI,229-408.)

(2) Remarquons la question posée par Halley à Newton :
si on admet que la force varie en $1/R^2$, quelle sera la trajectoire qui en résulte ? En réalité les Principia répondront principalement à une autre question : si la trajectoire est une ellipse, quelle doit être la loi de variation de la force ?

LES ELEMENTS DE LA SOLUTION

DE NEWTON

Venons à la démonstration qui fut effectivement donnée par Newton fin 1684, dans ce petit écrit qui réjouit tant le docteur Halley.

Comment passer de l'idée vague d'une force attractive à sa traduction géométrique ? a son évaluation le long d'une trajectoire ? Newton verra dans l'élaboration mathématique du problème toute la différence qui le sépare de Hooke. C'est une chose de proposer une conjecture sur la variation de la force, c'en est une autre d'entrer dans le détail de la détermination géométrique, des observations et des calculs. Hooke a fait comme si tout cela n'était qu'un travail subalterne, une simple corvée (drudgery) (1) qu'il n'avait pas le temps d'accomplir.

En fait pour venir à bout de la tâche, il fallait construire l'édifice entier d'une théorie des forces centrales, à partir des matériaux épars dans les recherches du 17ème siècle.

Si nous prenons une vue schématique du texte du <u>De Motu</u>, les éléments de la solution de Newton sont les suivants :

- laissées à elles-même, les planètes suivraient un mouvement rectiligne uniforme (c'est ce qu'on appelle le principe d'inertie, qui sera la loi I des <u>Principia</u> (2)

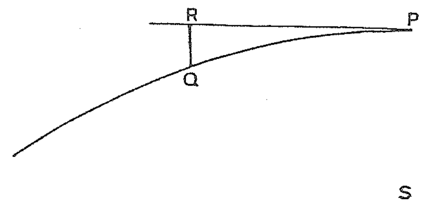
---

(1) Lettre de Newton à Halley du 20 Juin 1686 (<u>Corresp.</u> 2, 438).

(2) Dans la théorie de Newton, le mouvement rectiligne uniforme suppose une force, la "force inhérente" (<u>vis insita</u>).

-l'incurvation de leur trajectoire est due à une force extérieure ou ou "centripète" qui les dirige vers le soleil (Newton parle de déviation ou de déflexion) ;

- pour évaluer la force extérieure il faut mesurer l'incurvation, c'est à dire la différence R Q entre la trajectoire rectiligne virtuelle et la trajectoire incurvée réelle.



Cette supposition que la déviation permet d'évaluer la force extérieure, parce qu'elle lui est proportionnelle, reste encore implicite dans les premiers manuscrits de 1684, et deviendra la loi II des <u>Principia</u> :

" Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imp-rimée..."

Le segment QR est donc l'indice et la mesure géométrique de la force qui tire P vers S.

La notion de force centripète est la grande innovation de ce texte. Nexton invente le mot, en une imitation consciente. Huygens avait imaginé la "force centrifuge", Newton lui rend hommage et le corrige en inversant le point de vue. La force qui permet d'expliquer les mouvements curvilignes est dirigée vers le centre, tendant-vers-le-centre (centripeta).

Le mode d'action de cette force est laissé indéterminé : ce peut être une poussée ou une traction -c'est à dire une attraction -("impellitur vel attrahitur"). Diverses explications restent possibles, une analyse dynamique des mouvements tournants n'exige pas que l'on détermine la cause "physique" qui incurve le mobile vers un point central.

Sur le point central lui-même nous savons peu de choses. Ce n'est pas un centre à proprement parler, mais un point quelconque qui peut être considéré conmme centre, parce que la trajectoire s'incurve autour de lui, sans être nécessairement tout à fait circulaire. Y a-t-il une vertu qui émane de ce point privilégié, un flux de magnétisme qui en jaillit ? Nous n'en savons rien.

La seule chose que nous apprenons en lisant le De Motu, c'est que la force centripète ressemble à la pesanteur. L'hypothèse 4 stipule que les effets de la force centripète sont assimilables à ceux de la pesanteur, au moins localement. La force centripète varie selon les points, mais en chaque point son action fait parcourir au corps un trajet proportionnel au carré du temps , comme la pesanteur. La parenté entre pesanteur et force centripète est si essentielle aux yeux de Newton qu'il a remplacé l'une par l'autre dans certaines versions du De Motu.

Les mouvements tournants seront analysés comme résultant de deux forces combinées : la "force inhérente" engendre, ou tend à engendrer un mouvement en ligne droite, et la "force centripète" incurve la trajectoire, continuement ou par à-coups, dans la direction du point qui joue le rôle de centre. Le mouvement curviligne d'un corps suppose ces deux éléments, et

rien d'autre : une force inhérente et une force centripète, celle-ci servant à défléchir le mouvement inertial dû à la première. Comme Newton l'écrit pour le cas du mouvement circulaire :

"Par la seule force inhérente (les corps tournants) décriraient les tangentes .... Les forces centripètes sont celles qui retirent perpétuellement les corps des tangentes vers les circonférences..." (Hall, Unpublished Sc. Papers, p 248 *)*

C'est l'apport fondamental de ce manuscrit : pour la première fois le mouvement curviligne est analysé en détail selon ses deux composantes d'inertie et de déflexion. Galilée avait esquissé une idée assez voisine (Dialogo, EN VII, 242), d'autres encore avaient envisagé cette conception, mais comme en passant et sans en tirer tout le fruit. Newton lui-même, cinq ans plus tôt, était encore attaché à une représentation différente : selon sa deuxième réponse à Hooke, en 1679, la circulation d'un corps autour de son centre d'attraction serait dûe à la combinaison de la force centrifuge et de la pesanteur qui se dépasseraient alternativement (Corresp. 2, 307).

Dans le texte de 1684 la force centrifuge a disparu. Le mouvement tournant n'exige que la force centripète et la force inhérente. C'est probablement Hooke qui l'a fait comprendre à Newton, en lui proposant son hypothèse de "*composer les mouvements célestes des planètes avec un mouvement direct selon la tangente et un mouvement attractif vers le corps central*" (Corresp. 2, 297 et 306).

LA GENERALISATION DE LA LOI DE CHUTE DE GALILEE

Comment mesurer à son tour la déviation QR ? Outre l'intensité de la force, il faut tenir compte d'autres facteurs si l'on veut savoir de combien le mobile s'écarte de la trajectoire rectiligne. L'écart entre la tangente et la courbe APQ est plus grand si par exemple le mobile est plus loin de P , en termes de longueur d'arc. Newton choisit le temps comme variable de base : la déviation dépend du temps écoulé.

Le De Motu pose comme hypothèse que la déviation QR est proportionnelle au carré du temps écoulé . D'ou vient cette relation ? C'est une généralisation de la loi de chute de Galilée (1) : l'espace parcouru par un mobile en chute libre à partir du repos est proportionnel au carré du temps écoulé. Pour pouvoir appliquer cette loi dans le cas présent, il faut admettre plusieurs présuppositions :

- la force qui attire les planètes vers le soleil est analogue à la pesanteur terrestre ;

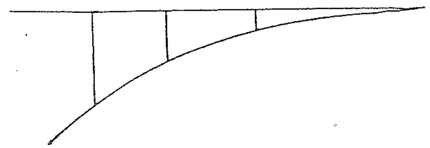
- La longueur QR représente une sorte de trajet de chute.

En d'autres termes la trajectoire courbe PQ doit être considérée comme la combinaison de deux mouvements : l'un rectiligne et uniforme de P vers R, l'autre accéléré de P vers S. La longueur QR représente cette deuxième composante, étudiée pour elle-même et abstraction faite de l'autre mouvement.

---

(1) Discorsi, Troisième Journée , Théor . 2 du mouvement accéléré (Discorsi E.N. VIII 209-210;)

C'est Galilée encore qui avait rendu possible et légitime une telle décomposition. Dans la Quatrième Journée des Discorsi, il avait montré comment la trajectoire des projectiles peut s'analyser en un mouvement rectiligne uniforme (horizontal ou oblique) et un mouvement accéléré vertical.



Dans l'oeuvre de Huygens par exemple, cette opération d'abstraction dans la décomposition des mouvements était devenue un outil très précieux (1).

Le cas des planètes présente pourtant plusieurs différences remarquables avec la pesanteur terrestre. La chute ou quasi-chute n'est pas verticale (à direction constante) mais dirigée vers un point, le centre fixe S. D'autre part l'intensité de la force varie selon les points de l'espace . Dès qu'on change de position, la "pesanteur" n'est plus la même, et le mobile est ainsi soumis à une force variable le long de son parcours, si petit soit -il.

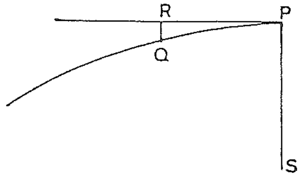
Aussi la loi de Galilée n'est-elle applicable que dans l'infiniment petit, au voisinage du point P. Selon les termes de Newton, la loi de chute est vérifiée ici seulement "au commencement du mouvement". Tout le raisonnement n'est donc valide que si l'arc PQ est très petit ou "naissant". (2)

---

(1) Voir le début du livre II de l'horloge à pendule, Huygens Oeuvres t. 18,123) et l'hypothèse 3 du De Motu Corporum ex percussionne (ibid t. 16,32-33).

(2) voir page suivante

En résumé, si nous reprenons la même figure -inspirée de celles de Newton-la longueur QR, qui est l'indice et la mesure de la force dirigée vers S, est proportionnelle à cette force, proportionnelle aussi au carré du temps, pourvu que P et Q soient très proches.



---

(2) Aucune justification, aucun début de preuve n'est avancé dans notre première version du De Motu pour appuyer l'extension de la loi de Galilée, ni pour fonder de semblables raisonnements infinitésimaux. Que signifie en toute rigueur " Le commencement du mouvement" ? Comment manipuler des entités aussi fuyantes ? Quelle sorte de démonstration ou de calcul peut-on attendre en cette matière ?

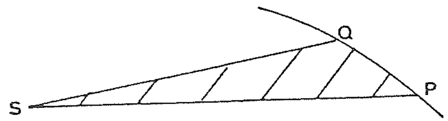
Dans les versions ultérieures du De Motu, dernière étape avant les Principia (manuscrit D de Hall), Newton donnera une démonstration quasi-géométrique, calquée sur celle de Galilée. La figure géométrique correspondant à une force constante sera déformée jusqu'à la disparition de certains éléments. Les relations entre grandeurs évanouissantes (ou naissantes) seront "lues" sur une sorte d'équivalent fini de la figure évanouissante, chaque ligne ou triangle infiniment petit étant reproduit dans le fini grâce à un correspondant fini qui lui reste toujours semblable. Cette démonstration sera progressivement amplifiée et deviendra le germe de toute la section I des Principia, relatives aux "proportions ultimes entre grandeurs naissantes ou évanouissantes" (Principia 3e édition 28-38). La généralisation de la loi de Galilée est ainsi le motif et le noyau initial du petit excursus mathématique que Newton a placé au début des Principia : c'est à l'occasion de l'extension de la loi de force de Galilée que s'est développé l'exposé newtonien sur les proportions ultimes.
(Voir F.De Gandt le style mathématique des Principia de Newton, Revue d'Histoire des sciences, 1986, p 195.222)

LA MESURE DU TEMPS

PAR L'AIRE

Mais que dire du temps lui-même ? Comment le faire entrer dans les diagrammes et les calculs ? La représentation géométrique permet de figurer le trajet accompli, mais non le temps écoulé. Si la longueur du chemin était exactement proportionnelle au temps, on pourrait remplacer ce dernier par le trajet parcouru. Mais le mobile ne va toujours pas à la même allure, et pour évaluer sa vitesse il faudrait connaître sa vitesse initiale et la force aux différents points, la force dépendant à son tour de la position du mobile. Nous voilà au rouet.

La loi des aires de Kepler permet de sortir du cercle vicieux. Elle affirme que le temps de parcours d'une planète sur un arc peut être évalué en mesurant l'aire de secteur balayé par le rayon qui relie la planète au soleil.

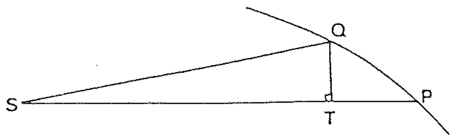


Quelle que soit l'intensité de la force en P, la surface engendrée par le rayon SP est toujours proportionnelle au temps qui s'écoule. Le triangle infiniment petit SPQ est donc une mesure du temps de parcours sur l'arc PQ. (1)

---

(1) Kepler avait formulé cette loi dans son Astronomie Nouvelle de 1609, et l'avait reprise de ses oeuvres ultérieures. La chose n'est donc pas très neuve en apparence : Newton redémontre un principe bien connu.

Il est alors possible de substituer au temps l'aire du triangle SPQ, et si l'on exprime cette aire par la base SP du triangle et sa hauteur QT, on pourra déclarer que la longueur QR est proportionnelle au carré de SP x QT.



(suite 1)

Pourtant, à la situer sous son éclairage correct, la démonstration de Newton est incroyablement nouvelle. Kepler avait proposé sa méthode des aires comme un procédé approximatif pour calculer les temps de parcours des planètes. Il ne l'avait démontré que très imparfaitement (et il devait même s'apercevoir qu'une des conséquences de l'énoncé contredisait l'une des prémisses !)

Enfin personne avant Newton n'avait accepté cette "loi" comme un principe indubitable : pour les astronomes entre Kepler et Newton, c'était à la rigueur un truc de calcul commode, mais on avait avantage à le remplacer par d'autres méthodes d'évaluation plus rapides et tout aussi plausibles.

Or Newton accepte ce principe comme point de départ de sa théorie, l'énonce en toute généralité et le démontre avec une économie de moyens inouïe - du moins si l'on accepte le passage à la limite qui achève la démonstration.

Par sa généralité la proposition de Newton va bien au delà de l'énoncé de Kepler. Ici le principe vaut pour toute force centripète, et non seulement pour le cas des planètes autour du soleil. De plus sa démonstration n'implique aucune loi de force particulière, alors que l'essai de démonstration de Kepler était fondé sur l'atténuation de la force avec la distance. Dans notre texte au contraire, la force peut varier arbitrairement selon les points de l'espace , on suppose seulement qu'elle est toujours dirigée vers S. Le génie de Newton est dans cette sobriété : du premier coup il établit la loi des aires au niveau de généralité qui lui convient.

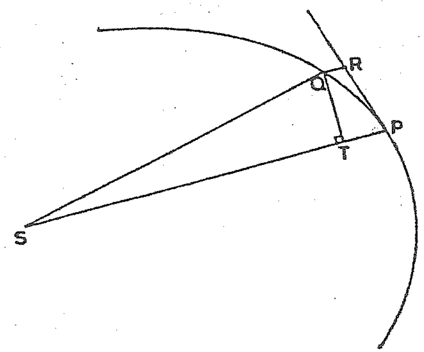
LA FORMULE GENERALE

On obtient ainsi (dans le Théorème 3 du De Motu qui correspond à la proposition 6 des Principia), une relation qui lie la force, la déflexion QR et le temps représenté par l'aire du triangle :

QR est comme la force et comme $(SP \times QT)^2$
ou sous une forme équivalente :

La force est comme la déflexion QR et inversement comme le carré de l'aire SP x QT.

Voilà l'expression entièrement géométrique de la force - du moins si l'on accepte en géométrie des arcs "naissants" et des trajets "très petits". Pour évaluer la force que subit un mobile en un point P d'une trajectoire, il suffira de déterminer la valeur de $QR/SP^2 \times QT^2$.



On pourra ainsi trouver dans différents cas "la loi de la force centripète". Précisons ce que cela signifie. La force centripète varie avec la position du mobile qui la subit.

Ici on compare la force aux différents points d'une même orbite. Sur une ellipse par exemple, une parabole ou une spirale, la distance au centre ou au foyer n'est pas constante, et l'intensité de la force centripète devrait varier.

Le pari de la théorie newtonienne est que cette variation de force obéit à une loi simple lorsque le mobile suit telle ou telle trajectoire déterminée . (Il n'y a aucune raison pour que cela soit possible en général). A chaque point de l'espace est associée une force analogue à la pesanteur ; on conjecture que cette pesanteur généralisée varie uniquement en fonction de la distance à un point central ; on conjecture aussi que la forme déterminée de la trajectoire permettra d'inférer une loi particulière et assez simple qui réglerait la variation d'intensité de la force centripète.

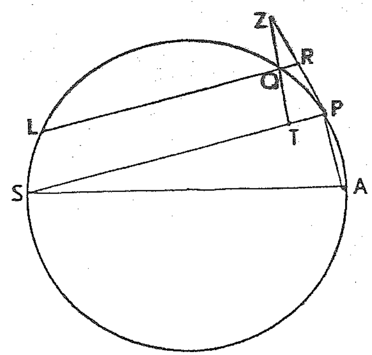
Comment évaluer la variation de la force centripète en fonction de la distance ? il suffit de mettre en oeuvre la formule générale donnée dans le théorème 3 : puisque la force centripète au point P est inversement proportionnelle à $SP^2 . QT^2/QR$, on tâchera d'obtenir une expression égale à ce produit , et réduite à la forme la plus simple possible grâce aux relations qui découlent de la situation (orbite elliptique, ou circulaire, position fixée de S en un point particulier, etc...)

Il faut que les grandeurs QT et QR disparaissent de l'expression finale (ce sont des grandeurs naissantes), et que celle-ci ne contienne plus que des termes en SP (la distance) , mêlés éventuellement à diverses constantes. On verra alors de quelle manière la force centripète dépend de la distance variable SP entre le centre de force et le mobile.

Un exemple permettra de se faire une idée plus précise des procédés qu'utilise Newton pour évaluer la force centripète et déterminer sa loi de variation le long d'une trajectoire déterminée.

UN EXEMPLE D'APPLICATION

Le premier exemple que propose Newton (1), est tout à fait irréel, c'est plutôt un exercice d'application. Dans ce problème 1, Newton étudie un corps tournant sur un cercle sous l'action d'une force qui tend vers un point de la circonférence elle même. Que devient le mobile lorsqu'il parvient à ce point ? Le centre de force est sur la trajectoire et l'attraction près de ce point est considérable, croissant cinq fois plus vite que 1/R . Newton discute brièvement cette question dans le scolie qui suit, et prétend, sans justification, que le corps s'éloignera selon la tangente après être passé par le centre de forces.

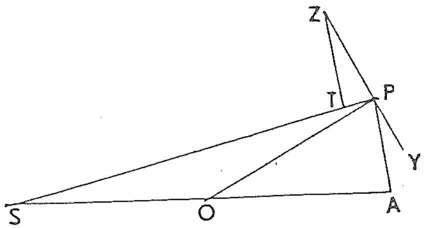


La démonstration suppose en premier lieu la similitude des trois triangles rectangles ZQR, ZTP, SPA. Pour vérifier cette similitude, il suffit

---

(1) Problème 1 du De Motu, in Hall & Hall Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton, Cambridge, 1962, p 250 - 251.

de prouver l'égalité des angles PZT et PSA. Plusieurs voies sont possibles (Newton n'en indique aucune). On peut utiliser la notion d'arc capable, ou recourir à des angles auxiliaires, par exemple en montrant successivement l'égalité des angles PZT, YPA, OPS et OSP :



Alors les côtes homologues des triangles semblables sont proportionnels :

ZP : ZT : : ZR : ZQ : : SA : SP.

La soustraction des rapports préserve la proportionnalité :

(ZP-ZR) : (ZT-ZQ) :: RP : QT :: SA : SP.

D'autre part la puissance du point R par rapport au cercle (Euclide, livre III) permet d'écrire :

$RP^2 = RQ. RL$

et donc (grâce au résultat ci-dessus) :

$RQ.RL : QT^2 :: SA^2 : SP^2$ ou : $QT^2 = RQ.RL.SP^2/SA^2$

On peut obtenir une expression égale à $SP^2. QT^2/QR$.
Cela est possible en multipliant les deux cotés par SP^2/QR.

La dernière étape consiste à remplacer dans l'expression obtenue RL par SP, puisque ces deux grandeurs finies ne diffèrent entre elles que d'une grandeur évanouissante lorque Q et P se rejoignent .

Alors l'expression égale à $SP^2. QT^2/QR$ ne contient plus que de constantes de la trajectoire(le diamètre SA du cercle) et la distance variable SP , élevée à la cinquième puissance (1). La force centripète est donc inversement proportionnelle à R^5.

Cet exemple très simple permet de voir comment l'étude des forces est devenue une branche des mathématiques. L'effet de la force centripète est représenté par la déviation, et le temps représenté par l'aire du secteur balayé. La déviation est déclarée proportionnelle à la force centripète et au carré du temps. D'autre part les relations particulilières à telle ou telle figure - ici les proportionnalités entre diverses grandeurs associées au cercle- permettent de transformer l'expression géométrique de la force. Il faut alors considérer ce que deviennent ces relations lorsque l'arc parcouru devient très petit ou "naissant". Finalement on en tire, si possible, une dépendance entre la force et la distance au centre.

Newton ne procède pas autrement dans sa démonstration capitale sur la force qui produit le mouvement elliptique des planètes (problème 3 du De Motu, prop. 11 des Principia). Le raisonnement est seulement un peu plus riche, utilisant les propriétés géométriques de l'ellipse pour parvenir à montrer que la force centripète varie comme $1/SP^2$.

Ce schéma fondamental de raisonnement du De Motu est repris dans les Principia, mais il y est devenu peu lisible, à cause de tous les compléments, enrichissements, raffinements démonstratifs, annexes philosophiques , dont Newton à progressivement surchargé son premier texte. Entre 1684 et la publication de 1687 l'ouvrage a démesurément grossi, passant de onze propositions à plus de deux cents.

---

(1) Ce résultat et cette démonstration passeront presque sans changement dans la prop. 7 des Principia, puis deviendront le corollaire 1 de la prop. (dans la 2ème édition).

Le De Motu est beaucoup plus modeste de proportions, beaucoup plus accessible aussi. Il y a grand avantage à lire d'abord l'une de ses versions avant de plonger dans les méandres et les raffinements des Principia. Une première orientation est indispensable, un repérage des résultats principaux , des enchaînements et des méthodes, permettant ensuite de suivre les Principia .

Les premières pages des Principia ont été très lues et activement discutées, notamment par les philosophes : lois du mouvement, scolie sur le temps et l'espace absolus. Les débats sur les fondements de la mécanique, sur la nature de l'espace et du temps, se sont nourris de ce préambule des Principia. Dans la perspective que nous adoptons ici, ces textes n'occupent plus une place aussi essentielle. le De Motu , dans ses toutes premières versions, ne contient encore ni les fameuses trois lois du mouvement, ni la mention du temps et de l'espace absolus. Il apporte avant tout le premier témoignage d'une traduction géométrique de la force centrale. C'est ce qui nous intéresse au premier chef : comment la force a pu recevoir une expression géométrique , et comment les mathématiques sont devenues aptes à traduire la dynamique.

Désormais la dynamique est intégrée au discours mathémathique. Les formes particulières pourront évoluer : Newton proposait l'étude de configurations géométriques naissantes ou ultimes, alors qu'après lui les Bernoulli ou Euler exprimeront les mêmes énoncés dans le langage nouveau du calcul différentiel. La science du mouvement se trouvera "exposée analytiquement" (selon le titre de la Mechanica d'Euler), mais son noyau essentiel restera identique à ce que Newton proposait dès 1684 dans les manuscrits De Motu.

LA RIGUEUR MATHEMATIQUE
EULER ET LE XVIIIe siècle

Jean DHOMBRES
IREM de Nantes

La rigueur mathématique
Euler et le XVIIIème siècle

Jean Dhombres

LA RIGUEUR MATHÉMATIQUE :

Euler et le XVIIIème siècle

Jean DHOMBRES

(Irem de Nantes)

1. L'enjeu de la rigueur.

La présente étude fut préparée en vue de l'Université d'été d'histoire des mathématiques, tenue dans la première moitié de Juillet 1986: il s'agissait de mieux cerner ce qu'on appelle la **rigueur**. A priori, le choix de l'exposé oral était de partir de textes originaux, et non de quelques extraits de textes, et de les commenter au fur et à mesure de leur déroulement, en les serrant au plus près de leur logique, avec juste quelques mises en situation historique sur le plan conceptuel. Par une sorte de démonstration a contrario, les textes retenus provenaient tous d'Euler, ou furent écrits dans son entourage intellectuel, précisément parce que cet auteur prolifique est souvent considéré par les historiens comme le prototype du mathématicien de grande qualité qui ne s'embarrasse pas des soucis de la rigueur mathématique. Morris Kline, dans **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times** (Oxford University Press, 1972) exprime un sentiment largement partagé (p.466): "*It is fair to say that in the eighteenth- century works on infinite series the formal view dominated. On the whole, the mathematicians even resented any limitations, such as the need to think about convergence. Their work produced useful results, and they were satisfied with this pragmatic sanction*" On ajoute souvent, en guise d'explication, que le génie inventif

joint à son sens des choses mettait Euler de toutes façons dans le bon chemin.

Dès lors, sauf à minimiser à tort le rôle d'Euler, une telle explication poussée en ses recoins extrêmes n'envisage-t-elle pas la rigueur mathématique comme l'apanage de tâcherons peinant à vérifier laborieusement les idées éclatantes de certains génies? " *The spirit of Euler's methods should be clear. He is the great manipulator and pointed the way to thousands of results later established rigorously*"(op.cité, p.453). Autrement dit, la rigueur ainsi conçue serait une catégorie secondaire dans le domaine mathématique, au mieux une exigence réduite à l'ordre pédagogique destinée à faciliter tant l'apprentissage que la transmission des informations entre mathématiciens et utilisateurs à divers titres des mathématiques. Mais une telle attitude contredit toute la tradition par laquelle les mathématiques sont promues comme le domaine propre où se déploie la rigueur, tandis que bien des auteurs philosophiques s'essoufflent (ou nous essoufflent) à écrire "*more geometrico*". S' il n'est pas mauvais, éventuellement, de contredire une tradition, il convient au minimum de ne pas se contenter d'arguments rhétoriques a priori, et il est donc indispensable d'apporter des éléments de justification.

Mais au fond ce n'est pas cette polémique qui nous intéresse vraiment et il vaut mieux dire tout de suite que le lecteur ne trouvera pas dans ce qui va suivre une défense passionnée des méthodes éducatives en mathématiques suivant l'esprit de Bourbaki ou à l'opposé une écoute forcenée des démarches "intuitives", qu'elles soient qualifiées de géométriques ou autres. Non que ces problèmes éducatifs ne nous concernent pas, ne serait-ce que par la pratique journalière de l'enseignement des mathématiques , mais parce que nous avons choisi de faire acte d'historien . A partir des documents traduits du Latin et éventuellement de notre commentaire , nous entendons laisser au lecteur le soin de faire jouer son jugement et de prendre parti si besoin était. Mais notre propos d'historien des mathématiques n'est pas passif , même s' il faut entendre cette épithète dans son sens positif, puisque nous tentons ici de reconstituer les logiques internes du raisonnement eulérien . Précisément nous voulons mesurer la rigueur des démarches d'Euler, disons plutôt de certaines d'entre elles, à l'aune que lui-même se donna.

L'exposé oral nous évitait d'entrer dans des considérations méthodologiques sur la rigueur. Mais nous ne pouvons guère les éviter en couchant ici quelques remarques sur le papier , à la demande des organisateurs de l'Université d'été. Aussi retardons-nous encore un peu l'intervention d'Euler.

2. Rigueur et architecture des mathématiques.

Une critique de nature épistémologique viendrait tout de suite bloquer notre propos en exprimant que nous reconstruisons, ou pire que nous mettons de la rigueur a posteriori , là où il n'y aurait que l'effet d'entrainement de la pensée mathématique. Cette pensée serait comme portée vers la découverte par la logique impérieuse des objets de l'étude elle-même . Cavaillès indique que l'histoire des mathématiques obéit à un

cheminement quasi obligatoire car les objets à exhiber ont une telle existence propre que la mise à jour de leurs propriétés est contraignante. Cette remarque fine , et qu'il est impossible de tenir pour l'histoire de la physique ou de la chimie , a quelque chose d'obsédant. Particulièrement lorsque l'on veut parler de rigueur. En effet, comment qualifier une démonstration ou une théorie datée dans le passé , lorsqu'elle présente à nos yeux non pas une faute rédhibitoire mais l'oubli , la lacune , ou l'omission de conditions qu'il suffirait de rajouter pour rendre en rigueur la démonstration valide , du moins à nos yeux contemporains? Autrement dit, l'absence de telle ou telle étape du raisonnement d'Euler , ou même sa faible accentuation, ne relève-t-elle que du travail de mise au point des successeurs , ce que d'aucuns appellent après T.Kuhn, l'activité de "la science normale" , ou bien signe-t-elle par quelque prétérition , une conception de la rigueur à un moment donné de l'histoire?

<u>Pour fixer les choses , nous partons ici de la conception selon laquelle les mathématiques obéissent profondément à des soucis d'architecture, c'est-à-dire que ce n'est pas tel ou tel objet qui est en jeu, malgré tout son intérêt, ni tel ou tel concept , mais bien l'organisation d'un jeu de relations entre des objets et des concepts. Ce complexe relationnel est organisé au point que, pour nous, la mesure de cette cohérence des objets et des concepts entre eux est précisément l'évaluation de la rigueur mathématique</u> . Evidemment , on objectera qu'une théorie peut être très construite, voire un comble de rigueur au sens que nous venons de définir, et pourtant n'avoir que bien peu de valeur mathématique. Cela est vrai, et l' on a même parlé à ce propos de "structures molles" . Voilà qui nous

contraint à préciser que le souci architectural dont nous souhaitons nous occuper est celui qui sait aussi prendre en compte les résultats du passé, du moins la partie d'entre eux relative à l'objet étudié, afin de les insérer dans la construction mise en place . C'est à propos de telles architectures que nous porterons la question de la rigueur, et notre mentor sera Euler. Toutes les mathématiques ne s'élaborent pas ainsi, mais nous aurions tort de croire que seuls les Modernes, à partir de Dedekind ou Hilbert repris par Bourbaki, aient eu une vision d'ensemble d'ordre architectural. Commençons par un exemple concret avec la démonstration de la formule du binôme de Newton.

3. La formule du binôme de Newton: l'approche différentielle controversée.

C'est dans la **Méthode des Fluxions** de Newton que l'on trouve pour la première fois la mention et l'utilisation de la formule du binôme qui fournit l'expression d'une puissance non entière de $(1+x)^\alpha$, à partir d'une série développée selon les puissances entières de la variable x,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots.$$

Newton ne donne aucune démonstration de cette formule , mais s'en sert de façon fréquente dans le cours de son ouvrage, par exemple pour déduire la fluxion d'une puissance quelconque de x. Le livre , composé vers 1671 , parut en latin en 1736 (**Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum**), mais les principes en furent divulgués par Wallis dans sa deuxième édition latine de l'**Algebra**(1693). Une traduction française de

l'ouvrage de Newton fut donnée par Buffon en 1740. N. Bourbaki , dans ses **Eléments d'Histoire des Mathématiques** , décrit fort bien la situation de la formule dans la recherche mathématique de Newton (nouvelle édition, 1974, Hermann, p.234): " *C'est en tout cas l'interpolation effectuée par Wallis des entiers* $\binom{m+n}{n}$ *à des valeurs non entières de m (plus précisément aux valeurs de la forme n = p/2, avec p entier impair, qui sert de point de départ à Newton débutant, l'amenant , d'abord par l'étude du cas particulier* $(1-x^2)^{n/2}$*, à la série du binôme, puis de là à l'introduction de* x^a *(ainsi noté) pour tout a réel, et à la différentiation de* x^a *au moyen de la série du binôme; tout cela sans grand effort pour obtenir des démonstrations ni même des définitions rigoureuses; de plus , innovation remarquable, c'est de la connaissance de la dérivée de* x^a *qu'il déduit* $\int x^a dx$ *pour* $a \neq -1$*. Du reste, et bien qu'il ait été bientôt en possession de méthodes beaucoup plus générales de développement en série de puissances, telles la méthode dite du polygone de Newton (pour les fonctions algébriques) et celle des coefficients indéterminés, il revient maintes fois par la suite, avec une sorte de prédilection, à la série du binôme et à ses généralisations...* "

En 1755, Euler présente une démonstration de cette formule du binôme dans ses **Institutiones Calculi Differentialis**, parus à Saint-Pétersbourg , c'est-à-dire dans un livre qui entend établir le calcul différentiel, sa pratique et ses utilisations. Il conviendra de juger de la pertinence à ce propos de la phrase de N.Bourbaki (op.cité pp.245-246). *"Nous n'avons à nous occuper ici que des travaux qui ont contribué à* *mettre au point, approfondir et consolider les principes mêmes du calcul infinitésimal, en ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle.*

De ce point de vue, les grands traités du milieu du XVIII[e] siècle n'offrent que peu de nouveautés. MacLaurin en Angleterre, Euler sur le continent, restent fidèles aux traditions dont chacun d'eux est l'héritier. Il est vrai que le premier s'efforce de clarifier quelque peu les conceptions newtoniennes tandis que le second, poussant le formalisme leibnizien à l'extrême, se contente, comme Leibniz et Taylor, de faire reposer le calcul différentiel sur un passage à la limite fort obscur à partir du calcul des différences, calcul dont il donne du reste un exposé fort soigné."

Nous donnons des extraits du traité d'Euler en traduction française: on pourra se rapporter, pour des notes complémentaires volontairement omises ici, à mon article: Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, *Sciences et techniques en perspective*, 1985/1986, vol. X, pp. 191-249. On trouvera aussi dans cet article les traductions, réalisées avec l'aide de mes collègues J.L.Gardies et R.Violette de la Faculté des Lettres de Nantes, de deux autres articles d'Euler relatifs à la formule du binôme de Newton. La première démonstration apparaît au chapitre IV de la deuxième partie(*De conversione functionum in series*), une partie où Euler décrit" *ce qui est utilisé du calcul* [différentiel] *en analyse des quantités finies et aussi en théorie des séries*" dans les **Institutions du calcul différentiel**. Cette démonstration part de la formule dite de Taylor et naturellement présuppose la connaissance de la dérivée des puissances .

CAPUT IV

DE CONVERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES

70. In capite superiori iam ex parte ostensus est usus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in investigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x, eius valor, quem induit posito $x=0$, erit cognitus; hicque si ponatur $=A$, erit, uti invenimus,

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2ddy}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{etc.}=A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A, etiamsi in singulis terminis nsit quantitas variabilis x, sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus; erit enim

$$y=A+\frac{xdy}{dx}-\frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2}+\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}-\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+\text{etc.},$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec investigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z, si loco x ubique scribatur $x+\omega$, ita ut z talis sit functio ipsius $x+\omega$, qualis y est ipsius x, atque ostendimus [§ 48] fore

$$z=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2ddy}{1\cdot 2dx^2}+\frac{\omega^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+\text{etc.}$$

Cum igitur huius seriei singuli termini per continuam ipsius y differentiationem ponendo dx constans inveniri simulque valor ipsius z per substitutionem $x+\omega$ in locum ipsius x actu exhiberi queat, hoc modo perpetuo obtinebitur series valori ipsius z aequalis, quae, si ω fuerit quantitas vehementer parva, maxime convergit atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipsius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum uberrimus erit usus.

"**70.** Au chapitre précédent, nous avons déjà en partie montré l'usage que des expressions générales ici trouvées pour des différences finies ont dans l'étude de séries qui fournissent une valeur pour toute fonction de x. En effet, si y est une fonction donnée de x, la valeur qu'elle revêt une fois posé x = 0 sera connue; si l'on pose cette valeur = A, on aura, comme nous l'avons trouvé ,

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2ddy}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{etc.}=A.$$

Donc à partir de là, non seulement nous avons une série qui généralement se développe à l'infini, et dont la somme est égale à une quantité constante A, quand bien même ces termes pris isolément contiennent une quantité variable x, mais encore nous pourrons exprimer la fonction elle-même par une série; on aura en effet

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} - \frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \text{etc.},$$

ce dont nous avons déjà donné quelques exemples.

71. Mais pour élargir le champ de notre recherche, admettons que la fonction y se transforme en z, si à la place de x on écrit partout $x+\omega$, en sorte que z soit fonction de $x+\omega$ de la même manière que y l'est de x(4). Nous avons montré (§48) qu'on aura

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1\cdot 2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \text{etc.}$$

Donc, puisqu'on peut obtenir effectivement les différents termes de cette série par différentiations successives de y pour un même dx , et qu'on peut obtenir en même temps la valeur de z en substituant $x+\omega$ à la place de x, de cette manière on obtiendra toujours une série égale à la valeur de z. Si ω est une quantité extrêmement petite, cette série converge très rapidement et il suffira de prendre un nombre assez réduit de termes pour qu'elle fournisse une valeur de z très proche de sa vraie valeur. C'est pourquoi on fera un usage très fréquent de cette formule quand on aura besoin d'approximations.

72. Donc , pour procéder par ordre en montrant l'usage remarquable de cette formule, substituons d'abord à la place de y des fonctions algébriques de x. Et d'abord ,soit $y = x^n$. On aura, si l'on met $x+\omega$ à la place de x, $z = (x+\omega)^n$,. Donc, puisqu'on a

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \quad \text{etc.},$$

on obtiendra par substitution de ces valeurs

$$(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\omega^3 + \text{etc.},$$

ce qui est la fameuse expression de Newton servant à convertir en série la puissance du binôme $(x+\omega)^n$. Le nombre des termes de cette série est toujours fini, si n est un nombre entier positif ".

Ceci fait , qui paraît écrit pour les seules puissances entières, a valeur au-delà de ces puissances comme nous allons en avoir la confirmation. Euler déduit d'abord une formule voisine pour le cas de puissances entières négatives, n'utilisant que la démonstration précédente dans le cas des puissances entières. L'avantage de la nouvelle formule réside , comme Euler va le montrer, dans la rapidité de sa convergence en certains cas, ce qui montre combien Euler , même dans un exposé théorique , est soucieux des calculs effectifs. Mais, pour le moment il prétend que les deux formules donnent le même résultat dans le cas d'une puissance entière négative, ce qui revient à attribuer sans prévenir à la première formule une validité pour de telles puissances.

" 73. A partir de là, nous pourrons aussi trouver la progression qui exprime la valeur de la puissance du binôme en passant au dénominateur chaque fois que l'exposant de la puissance est un nombre négatif. Posons en effet

$$\omega = \frac{-ux}{x+u};$$

On aura

$$z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

et par le fait même

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^nu}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^nu^2}{1\cdot 2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^nu^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.}$$

En divisant partout par x^{2n} on aura

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1\cdot 2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.}$$

Si nous posons maintenant $-n = m$, ceci deviendra

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^mu}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^mu^2}{1\cdot 2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^mu^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3} + \text{etc.},$$

série qui , chaque fois que m est un nombre entier négatif, consiste en un nombre fini de termes. Cette série est donc égale à celle que nous avions d'abord trouvée , à la condition d'écrire u et m à la place de ω et n ; on aura en effet

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc."}$$

Conscient qu'il est passé du cas entier positif au cas entier négatif sans preuve pour la formule à proprement du binôme, Euler éprouve le besoin, inutile en rigueur, de montrer que la nouvelle formule obtenue peut directement se déduire d'une formule qui lui servit à exhiber la formule de Taylor. Cette dernière formule, pour un lecteur moderne, revient à écrire la formule de Taylor développant f(0) = f(x - x) en fonction des puissances de -x, naturellement sans aucun souci explicite des problèmes de convergence.

"74. Cette même série peut aussi se déduire de l'expression donnée au début du §70. En effet, puisque une fois posé x = 0, y se transforme en A, soit

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{xxddy}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{etc.}=A,$$

en posant $y = (x+a)^n$ on aura $A = a^n$ et puisque

$$\frac{dy}{dx}=n(x+a)^{n-1},\quad \frac{ddy}{dx^2}=n(n-1)(x+a)^{n-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3}\ \text{etc.}$$

on obtiendra

$$(x+a)^n-\frac{n}{1}x(x+a)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2(x+a)^{n-2}-\text{etc.}=a^n;$$

la division par $a^n(x+a)^n$ donnera

$$(x+a)^{-n}=a^{-n}-\frac{na^{-n}x}{1(x+a)}+\frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1\cdot 2(x+a)^2}-\text{etc.},$$

dont on déduit, en remplaçant respectivement x, a et n par u, x et -m, la série précédemment trouvée."

Une fois ces choses dites, Euler compare l'efficacité des deux formules, et le fait cette fois dans le cadre des puissances fractionnaires, alors qu'aucune des deux formules ne fut démontrée sous cette généralité.

"75. Si l'on met à la place de m des nombres fractionnaires, les deux séries se développent à l'infini. Cependant, si u est une quantité très petite par rapport à x, ces deux séries convergent fortement vers la vraie valeur. Si donc $m=\frac{\mu}{\nu}$, $x=a^\nu$, on obtiendra à partir de la série que nous avions d'abord trouvée

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}}=a^\mu\left(1+\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{u}{a^\nu}+\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\cdot 2\nu}\cdot\frac{uu}{a^{2\nu}}+\frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu}\cdot\frac{u^3}{a^{3\nu}}+\text{etc.}\right).$$

Tandis que la série que nous avions trouvée ensuite donnera

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}}=a^\mu\left(1+\frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)}+\frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu\cdot 2\nu(a^\nu+u)^2}+\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu(a^\nu+u)^3}+\text{etc.}\right).$$

Mais cette seconde série converge davantage que la première puisque ses termes décroissent même si on a $u>a^\nu$, auquel cas en revanche la première série diverge.

Si donc on a $\mu=1$, $\nu=2$, on aura

$$\sqrt{(a^2+u)}=a\left(1+\frac{1u}{2(a^2+u)}+\frac{1\cdot 3u^2}{2\cdot 4(a^2+u)^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5u^3}{2\cdot 4\cdot 6(a^2+u)^3}+\text{etc.}\right).$$

De façon semblable, en mettant à la place de ν les nombres 3, 4, 5 etc., tout en gardant μ = 1, on aura

$$\sqrt[3]{(a^3+u)}=a\left(1+\frac{1u}{3(a^3+u)}+\frac{1\cdot 4u^2}{3\cdot 6(a^3+u)^2}+\frac{1\cdot 4\cdot 7u^3}{3\cdot 6\cdot 9(a^3+u)^3}+\text{etc.}\right)$$
$$\sqrt[4]{(a^4+u)}=a\left(1+\frac{1u}{4(a^4+u)}+\frac{1\cdot 5u^2}{4\cdot 8(a^4+u)^2}+\frac{1\cdot 5\cdot 9u^3}{4\cdot 8\cdot 12(a^4+u)^3}+\text{etc.}\right)$$
$$\sqrt[5]{(a^5+u)}=a\left(1+\frac{1u}{5(a^5+u)}+\frac{1\cdot 6u^2}{5\cdot 10(a^5+u)^2}+\frac{1\cdot 6\cdot 11u^3}{5\cdot 10\cdot 15(a^5+u)^3}+\text{etc.}\right)$$

etc."

Résumons : la démonstration de la formule du binôme de Newton, moyennant la formule de Taylor, est obtenue pour toutes les puissances pour lesquelles la dérivation a été prouvée. Il est clair que tel est le cas des puissances entières positives. Une autre formule voisine est déduite, selon deux procédés distincts, pour le cas de toutes les puissances négatives. Euler se considère ensuite en droit d'examiner le cas de toutes les puissances fractionnaires du point de vue du calcul: lorsque la série converge, il ne fait aucun doute pour lui que la convergence donne le résultat attendu. Mais remarquons bien que la divergence est dûment signalée.

On pourrait prétendre qu' Euler n'aurait examiné dans la formule du binôme , du point de vue théorique , que le cas des puissances entières, et on pourrait argumenter que dans sa démonstration de la dérivation des fonctions puissances, seules de telles puissances entières interviennent. C'est au chapitre V de la première partie des **Institutions du calcul différentiel** que la différentielle $d.x^n = n\,x^{n-1}\,d.x$ est déduite . Comme Euler le fait en utilisant la formule du binôme de Newton sur $(x + d.x)^n$, en éliminant ensuite toutes les puissances de d.x supérieures à l'unité, et comme dans cette première partie de l'ouvrage didactique d'Euler la formule générale de Newton n'a pas encore été produite, si l'on veut qu'il n'y ait pas de cercle vicieux , il faudrait apparemment se restreindre au seul cas des puissances entières puisque la formule du binôme s'établit par des méthodes combinatoires directes dans ce cas là. Une telle interprétation qui " sauve le texte " se heurte quand même au fait que , bien vite , Euler donne sans sourciller une application de la dérivation d'une puissance fractionnaire (c'est au § 153 de la première partie) et qu'au § 154 , il fournit explicitement la dérivation d'une puissance fractionnaire quelconque sous la forme

$$d.x^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\mu}{\nu}\; x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\, d.x.$$

D'autant que la pétition de principe, si elle se réduisait à ce seul point , serait facilement réparable grâce au théorème de dérivation des fonctions de fonctions dont on sait qu'Euler fait un usage constant et le considère même comme le plus important du calcul. En effet , la dérivée d'une puissance fractionnaire se déduit de celle des puissance entières par la

simple écriture de passage aux puissances $(x^{\frac{\mu}{\nu}})^{\nu} = x^{\mu}$.

Mais nous ne pouvons nous en tirer à si bon compte, car dans la preuve figure en plus l'intervention de la démonstration de la formule de Taylor . Cette formule est évidemment indispensable selon la démarche suivie. Or , pour obtenir cette formule de Taylor, Euler fait usage déjà de la formule du binôme. C'est bien là que réside le vice de la démonstration de 1755.

Il y a incohérence dans l'ordre de l'exposé mathématique, et donc manque de rigueur au sens que nous avions défini en commençant, ce qui est fort gênant dans un Traité didactique.

Cette démonstration fautive est d'autant plus embarrassante que la formule de Newton joue un grand rôle dans l'analyse du XVIIIème siècle. La pétition de principe de la preuve différentielle était pourtant connue depuis longtemps , puisque Castillon l'avait déjà épinglée dans un mémoire à la Royal Society dès 1732.

Pour mieux comprendre l'embarras, il nous faut donc aborder la preuve de la formule de Taylor elle-même. Comment Euler procédait-il dans les **Institutions du calcul différentiel** au sujet de cette formule ? La démonstration est particulièrement instructive , car elle fait à proprement partie de ce que l'on pourrait convenir d'appeler la démarche typique de l' *analyse algébrique* .

4. Le cadre de l'analyse algébrique

Ce cadre est décrit dans l'**Introduction à l'analyse des infinis**, ouvrage qu'Euler fit paraître (en Latin) en 1748. Ce sont les fonctions qui sont l'objet d'étude par excellence de l'analyse et la définition retenue est analytique: une fonction est au fond un procédé de calcul, utilisant les techniques algebriques aussi bien que les moyens "transcendants" fournis par le calcul intégral. L'essentiel est qu'une méthode unique existe qui permette de travailler sur les différents types de fonctions , aussi bien les algébriques que les transcendantes. Cette méthode , qui conduit aux développements en série entière de toutes les fonctions classiques de l'analyse, fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, aussi bien que rationnelles, repose sur trois principes . L'un consiste en une algèbre de l'infini portant sur les écritures polynomiales. A titre d'exemple, un polynôme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, lorsque l'on prend la variable x infinie , est "égal" à x^n. Toute une algèbre est ainsi créée. Le deuxième principe consiste à traiter les séries entières comme des polynômes , c'est-à-dire permettre le remplacement des coefficients par un équivalent, au sens algébrique du premier principe, si ces coefficients dépendent à leur tour d'une variable qui deviendrait "infinie" . Cette procédure d'équivalence n'est malheureusement pas toujours simple , ne serait-ce que parce nous ne pouvons facilement trouver l'équivalent . pour la valeur infinie de la variable , d'une série infinie donnée. Le troisième et dernier principe est encore une utilisation de l'infini : on peut obtenir un nombre réel comme produit d'un infiniment grand par un infiniment petit.

Remarquons que ce principe évite de penser en terme d'approximation des nombres réels par les nombres rationnels.

Un bon exemple de mise en oeuvre de cette procédure est celui de l'obtention du développement de l'exponentielle. D'autant meilleur pour notre propos que c'est la formule du binôme de Newton qui sert. En effet , Euler part (nous simplifions volontairement un peu les notations et certaines constantes) de t, quantité infiniment petite, et écrit

$$e^t = 1 + \omega$$

ou ω est une quantité infiniment petite egalement, proportionnelle à t. Il élève à une puissance n, qui est aussitôt considérée comme une valeur infinie de sorte que sa liaison avec t donne un nombre fixé réel x. C'est à ce moment là que tout ce qui précède prend corps. En effet , $e^x = (1 + \omega)^n$. Le développement suivant la formule du binôme de cette puissance donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)\,\omega^k.$$

Le premier principe consiste a remplacer $f_k(n)$ par $n^k/k!$, le deuxieme est de considérer que cette équivalence passe sous le signe de la sommation et le dernier principe retrouve le lien entre ω et n qui est tel que $n\omega = x$, puisque nous avons choisi l'exponentielle à base neperienne , de sorte que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! \ .$$

La juxtaposition de ces trois principes est encore typiquement à l'oeuvre dans la démonstration de la formule de Taylor que donne Euler et que nous reprenons sous forme résumée pour gagner de la place (On pourra se reporter à l'original dans les **Institutions du calcul différentiel**, §44-50)

En désignant un accroissement dx (pour le moment non précisé, mais qui va bientôt être pris infiniment petit) de la variable x, Euler écrit la dépendance fonctionnelle relative à une fonction f selon

$$f(x + dx) = (1 + d)f(x).$$

Il itère cette dépendance n fois de sorte que

$$f(x + ndx) = (1 + d)^n f(x).$$

Intervient alors la formule du binôme pour agir sur l'écriture "opérationnelle" précédente, donnant le développement de $(1 + d)^n$.

$$(1 + d)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n) d^k$$

Mais cette formule ne sera pas employée dans le seul cas d'une valeur entière de n: au contraire, Euler va prendre pour n un infiniment grand, en liaison avec dx de sorte que le produit des deux donne un nombre réel fixé ω. Sous le signe de sommation Σ précédent, $f_k(n)$ est équivalent à $n^k/k!$ selon les règles de l'algèbre polynomiale des infiniment grands (premier principe). Le deuxième principe consiste à estimer que cette équivalence passe sous le signe Σ. Dès lors, Euler dispose de

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Cette fois, il reste à interpreter les quotients de $d^k f$ par dx^k comme des quotients différentiels, donc des quantités finies.. Finalement, la formule de Taylor est obtenue.

On a volontiers caractérisé la démarche décrite d'Euler en la qualifiant de formaliste. Ce faisant, une fois encore, l'historien critique joue habilement sur deux registres. D'une part, le registre qui fait référence à une évolution bien postérieure des mathématiques, celle des séries formelles en l'occurrence, d'autre part l'opposition entre une théorie déductive(formelle par essence) et le calcul numérique.

La première référence est tendancieuse et il suffirait de dire que c'est le préjugé polynomial qui est exercé, avec l'existence et l'unicité d'une écriture en série entière. Cela se constate d'autant mieux qu'Euler obtient à partir de l'écriture $e^x = (1+x/n)^n$ où n est un infiniment grand, la factorisation de $e^x - e^{-x} = (1+x/n)^n - (1-x/n)^n$ à partir de laquelle, en négligeant les termes en $1/n^2$, il obtient la factorisation

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2\pi^2).$$

Et la force polynomiale est telle qu'Euler déduit ainsi de la somme (infinie) des puissances n-emes des racines de ce "polynôme", la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{2n} = a_n \pi^{2n}$, exprimant ensuite les a_n à partir de nombres de Bernoulli. Euler poursuit ainsi superbement le fondement de la théorie analytique d es nombres.

La deuxième référence est nettement plus significative. Il y a divorce apparent entre le calcul explicite des valeurs à partir d'un développement en serie et la manipulation des séries. Le calcul numérique est pourtant omniprésent chez Euler, avec un souci maniaque de la précision, par exemple dans le nombre de décimales traînées pour toutes les constantes inventoriées: nous l'avons noté avec la première démonstration de la formule du binôme dans les **Institutions du calcul différentiel**. Mais , simultanément , le constat d'une divergence du numérique n'entraîne aucune remarque d'ordre théorique. Entendu en ce sens , il y a formalisme.

Il est tout à fait vrai que c'est la volonté "réaliste" d'un Lagrange dans sa **Résolution numérique des équations algébriques**, d'un Gauss dans son traitement de la série hypergéométrique , qui permettra à un Cauchy d'aboutir à la liaison entre le point de vue "analytique" de l'analyse algébrique et le calcul sur les nombres réels. Il en sortira une <u>théorie de la convergence</u>, laquelle devra laisser tomber dans sa construction certains pans intéressants de l'analyse algébrique (analyse asymptotique pourtant développée considérablement par Laplace dans son étude du comportement pour des grands indices du module des polynômes de Legendre , aussi bien dans le plan complexe que sur l'intervalle [-1, +1]), pans repris beaucoup plus tard. Là-aussi une rigueur est à l'oeuvre et si nous ne l'avons pas évoquée, c'est faute de place et surtout parce qu'elle nous paraissait mieux connue tant sur le plan des concepts que sur celui de son évolution historique. Nous reviendrons sur le système de l'analyse algébrique au chapitre sur la rigueur comme moteur de la construction architecturale mathématique.

Auparavant, il est sain de revenir aux textes pour donner les démonstrations d'Aepinus, d'Euler et de Cauchy.

5. Deux exemples de rigueur

La pétition de principe sur la démonstration différentielle de la formule du binôme suscita de nombreuses réactions, beaucoup plus qu'on ne s'y attendrait si on se contentait de reprendre le point de vue classique sur le formalisme des mathématiciens du siècle des Lumières. Ces réactions sont décrites dans la thèse à paraître de M.Pensivy (voir un des volumes de *Sciences et Techniques en perspective*, 1987). Nous retiendrons ici deux essais de mise en rigueur de la démonstration , parce que ces deux tentatives ont pour but de respecter l'architecture de l'analyse algébrique et donc de fournir une démonstration qui pourrait venir dès les premiers éléments.

La première tentative est dûe à Aepinus, un proche d'Euler pendant tout une période berlinoise et comme l'indique une courte mention à Rostock, l'origine de sa démonstration doit remonter aux années 1752, celles précisément qui virent la préparation des **Institutions du calcul différentiel** . L'essai latin parut en 1763 dans les *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (8, 1760/61, pp.169-180, introduction pp. 27-29). La deuxième tentative que nous examinerons est un travail tout à fait remarquable d'Euler, écrit en latin en 1774. Il s'agit de la **Démonstration du théorème de Newton sur le développement des puissances du binôme pour les cas où les exposants ne sont pas des entiers** , publiée dans les *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (19, (1774), 1775, pp.103-114).

Euler en 1774, presque vingt ans après sa première preuve , indique explicitement:

" *Sans doute jadis , j'avais enseigné une démonstration tirée de l'analyse des infinis. Mais parce que cette analyse s'appuie elle-même sur notre théorème, je reconnais maintenant qu'il faut la rejeter comme entachée d'une pétition de principe .*"

Aepinus est encore plus clair puisqu'il mentionne l'ordre d'exposition de l'Analyse:

" *Il n'est pas suffisant que les vérités mathématiques, dont la certitude est donnée couramment en exemple aux autres disciplines, soient exemptes de tout risque d'équivoque ; il est nécessaire également que toute objection concernant ces vérités , auxquelles adhèrent des esprits exercés à l'étude et dotés d'une intelligence suffisamment pénétrante, soit complètement réfutée et que soient rejetées en particulier les subtilités des Sophistes....Ces critiques concernent surtout le théorème de Newton , selon lequel on tient generalement pour établi que la puissance du binôme* $(x+y)^m$ *est donnée par le développement en série,*

$$x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} y + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3} y^3 + \text{etc}$$

bien que cette égalité ne soit pas démontrée, sauf dans le cas où l'exposant m *est un nombre entier. Or , dans les autres cas où* m *est soit un nombre fractionnaire, soit un nombre irrationnel, soit un nombre transcendant, soit même un nombre imaginaire, on est loin de douter de sa vérité. Au contraire, une fois ce théorème accepté en son sens le plus large, on a établi sur cette base une Analyse universelle de l'infini .... Ce n'est donc pas sans raison que l'Auteur s'est fixé la tâche de construire une démonstration des principes qui fondent l'ensemble de cette Analyse, et ce par les seuls éléments de l'Algèbre commune.*

5.1 Une démonstration d'Aepinus

Si Aepinus conserve encore quelque renom aujourd'hui, il ne le doit guere a ses travaux purement mathematiques - une dizaine de publications en tout - mais a un ouvrage de 1759, **Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi**. Il y tentait une premiere en offrant un expose raisonne de phenomenes electriques, expose base mathematiquement sur les actions a distance. Son nom reste aussi associe a l'electrophore et au condensateur. Or le cas d'Aepinus nous offre une belle occasion inedite.

Mathematicien ripuaire, Aepinus est toutefois au fait de toutes les questions debattues, puisqu'il est membre ordinaire dans la classe de mathematiques et d'astronomie de l'Academie de Berlin des 1755, alors qu'il vient juste d'atteindre la trentaine. Deux ans plus tard, en pleine guerre de Sept Ans, Aepinus gagne Saint-Petersbourg, lasse de la mentalite francaise de Berlin, et lit presque aussitot a l'Academie de sa nouvelle ville un papier consacre a la formule du binome de Newton. Il s'agit du **Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando**. C'est ce travail que nous voudrions analyser - il parait seulement en 1763 - car s'il suit de pres les **Institutiones calculi differentialis** qu'Euler faisait publier a Saint-Petersbourg en 1755, il n'en temoigne pas moins d'un souci particulier de rigueur. Une rigueur qu'on pourrait qualifier d'algebrique - notre propos est de peser cet aspect des choses - en tout cas une rigueur qui n'entend pas se laisser entrainer par la magie du calcul des infiniment petits

Cet esprit particulier de rigueur est d'autant plus interessant qu'on connait les liens unissant vers cette epoque Aepinus et Euler. Par son amitie avec le fils aine d'Euler, Johann Albrecht, lui-meme recemment admis comme membre de l'Academie de Berlin sur proposition de Maupertuis Franz Ulrich Aepinus, propulse par Euler a la meme Academie, faisait partie du groupe de jeunes espoirs et de talents moins jeunes, mais affirmes, qu'Euler reunissait familierement dans sa maison de Berlin. Les autres ont nom Louis Bertrand, qui publiera plus tard un gros manuel destine a expliquer intuitivement les mathematiques, Johann Gottlob Lehmann le mineralogiste, Johan Carl Wilcke le specialiste de l'electricite, le futur academicien Stepan Rumovskii, etc. Et faisant vraisemblement reference aux *Abendrede* de Luther lui-même, Aepinus n'hesitera pas a parler de *Tischgesellschaft* pour marquer la variete des sujets scientifiques evoques a la table d'Euler, et rendre l'enthousiasme des partenaires de ces conversations a bâtons rompus. La formule du binome fit vraisemblablement partie des propos echanges, ainsi que la rigueur necessaire pour en obtenir une demonstration convaincante.

Contentons-nous ici de quelques traits de la vie mathematique d'Aepinus, alors que l'essentiel de sa carriere scientifique se situe ailleurs. Il naquit a Rostock le 13 Decembre1724 et mourut a Dorpat actuellement Tartu en Estonie) le 10 Aout 1802. Son grand-père avait hellénisé son nom (Hoch). Enseignant les mathématiques à Rostock, Aepinus publia d'abord divers articles de mathématiques: sur les équations aux dérivées partielles, sur les logarithmes, sur l'intégration des fonctions trinômes, sur les

équations polynomiales, et sur les quantites négatives. Il annonça aussi une preuve nouvelle de la formule du binôme de Newton en 1752. Il avait été essentiellement forme en mathématiques par un professeur de l'Université de Iéna, G.E. Hamberger. C'est au contact de son eleve, le Suédois Wilcke, qu'Aepinus s'intéressa a l'électricité, domaine qui sera son centre d'activité privilégié apres son installation a Saint-Pétersbourg. Le livre d'Aepinus sur l'électricité, qui fut influent pendant longtemps, possède une armature mathematique nettement plus importante que celle en usage dans les manuels de physique du XVIIIeme siecle. Mais Aepinus ne reviendra qu'occasionnellement a des travaux mathématiques et le texte que nous allons étudier, qui fut publie a Saint-Pétersbourg en 1763, représente plutot la tardive mise au point de travaux effectués pendant son séjour a Berlin, notamment dans l'environnement d'Euler. Apres 1767, Aepinus ne se livra plus a des recherches scientifiques, etant de plus en plus implique à la Cour, d'abord comme précepteur du prince impérial, le futur tsar Paul, puis de plus en plus par des fonctions politiques ou diplomatiques. L'impératrice Catherine II, sensible a la reputation d'excellent professeur de notre héros, lui avait demandé , en 1783 , un projet de réforme du système éducatif, comme elle l'avait fait auprès de Diderot. Des deux projets, il ne fut guère tenu compte , il faut noter qu'Aepinus insistait sur les Normalschulen afin de former au préalable des enseignants.

Aepinus part donc , dans son article , de ce que nous ecririons aujoud'hui sous la forme :

(1) $(x+1)^m = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(m)\, x^{m-k}$

où la sommation s'étend de 0 à l'infini en k. Implicitement, il suppose l'unicité de ce développement, une unicité indispensable pour la bonne conduite de la démonstration.

La variable x, apparemment, est réelle tandis que m désigne une variable quelconque, éventuellement complexe. Il s'agit bien, pour chaque entier positif ou nul k, de déterminer ces coefficients $A_k(m)$ qui sont des fonctions de m. La détermination est obtenue au terme de l'établissement de relations fonctionnelles entre les différents coefficients $A_k(m)$, relations déduites de certaines identités particulières satisfaites par $(x+1)^m$.

Ces identités sont les suivantes. D'une part, il y a la double écriture :

(2) $((2x+1)+1)^m = 2^m (x+1)^m$,

et d'autre part, il y a la relation des puissances

(3) $(x+1)^{r+s} = (x+1)^r (x+1)^s$.

Cette relation (3) grâce à l'unicité du développement (1), induit en effet une relation fonctionnelle pour le coefficient $A_1(m)$:

(4) $A_1(r+s) = A_1(r) + A_1(s)$,

une équation fonctionnelle valable pour toutes les valeurs complexes de r et de s. Au cours des § 9 et 16, Aepinus s'ingénie à montrer que cette équation (4), jointe à la condition $A_1(1) = 1$, implique :

(5) $A_1(r) = r$

Plus tôt, lors des § 5 à 8, Aepinus tient seulement compte de (2) pour écrire, grâce encore à l'unicité de (1), un système infini d'équations fonctionnelles plus mélangées que l'équation (4), et dont il déduit (par une récurrence explicitée seulement aux § 20 à 23) que

(6) $A_0(m) = 1$

et

(7) $A_k(m) = \frac{1}{k!} A_1(m) A_1(m-1) \ldots A_1(m-k+1)$.

La forme des coefficients du binôme est donc trouvée, sous la plus grande généralité envisageable quant aux valeurs de l'exposant m. Il ne fait aucun doute que c'est la <u>méthode fonctionnelle</u> qui oriente la preuve, c'est-à-dire la détermination de fonctions a priori inconnues - ici les coefficients - au moyen d'équations portant sur ces fonctions, équations valables pour toutes les valeurs possibles des variables. Le programme est conforme à celui des deux **Traités** d'Euler déjà mentionnés.

Le programme ne manque pas ni de cohérence, ni d'ambition, mais sa réalisation présente des difficultés sérieuses, des entorses à la rigueur pourtant dûment recherchée et proclamée. Nous ne les examinerons pas toutes, nous contentant de quelques exemples significatifs. Auparavant, il importe de signaler qu'Aepinus mène rondement et complètement une difficile récurrence combinatoire, pour déduire l'expression des coefficients $A_k(m)$ à partir de $A_1(m)$. On est très loin des soi-disant preuves inductives de telles recurrences dont on accuse trop souvent le XVIIIeme siecle mathematique. Mais nous n'avons pas la place de donner le texte d'Aepinus dans sa totalite, ni tous les commentaires. Aussi nous en venons aux "taches" de la demonstration.

La plus notable est dans la resolution de l'equation fonctionnelle satisfaite par le coefficient $A_1(m)$ de la serie (1), coefficient qu'Aepinus note avec originalite B^m pour indiquer la dependance fonctionnelle de B en m. Il a obtenu

(8) $\quad B^{r+s} = B^r + B^s$.

Son vocabulaire est adapte, et renoue avec une tradition des debuts fonctionnels les plus porteurs. Aepinus parle de reponse B^s a la variable s et constate qu'une progression arithmetique de raison s est transformee par B en une progression, egalement arithmetique, dont la raison cette fois est B^s. Il retrouve naturellement ainsi l'accent des mathematiciens du XVIIeme siecle travaillant avec les logarithmes et les caracterisant : la fonction logarithme est celle qui permet de passer d'une progression geometrique a une progression arithmetique (voir Grégoire de Saint-Vincent et de Sarasa, mais aussi Napier ou Briggs). De ce premier resultat d'Aepinus, il faut sauter a la constance du rapport de B^s a s. C'est la que l'embrouille apparaît. Partant de la constance de $B^{n\,s}/ns$ lorsque la seule variable entiere n varie, pour s fixée, Aepinus veut en déduire celle du rapport B^s/s par rapport a la variable s elle-meme. Cette faute d'homogénéité où l'on passe des entiers a tous les nombres réels , sera maintes fois répétée au

XVIIIeme siecle, au déboire de quelques mathématiciens , comme Legendre , qui mit trop d'ardeur à vouloir prouver l'axiome des parallèles d'Euclide a partir des équations fonctionnelles. L'erreur est crûment en évidence dans le present texte et l'intérêt réside dans la justification fournie. Celle-ci, on s'en doute bien, deniche quelque part de l'infiniment petit et de la continuite. Puisque le nombre s peut etre pris aussi petit qu'on le desire, ns parcourerait tous les nombres reels lorsque n varie selon les entiers relatifs. Aepinus dit explicitement:

En passant de facon continue, elle prendra toutes les valeurs reelles de m

Autrement dit, $\mathbb{Z}s$ coinciderait avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des reels lorsque s est un infiniment petit ! Ne sursautons pas trop ! Dans l'**Introductio in analysin infinitorum** d'Euler, le moteur veritable des infinis - et celui de l'analyse algebrique par consequent- consiste a ecrire tout reel x comme produit d'un infiniment petit par un infiniment grand. Aepinus a l'impression vraisemblablement de s'inscrire dans le cadre meme de l'analyse algebrique avec son identification des ensembles $\mathbb{Z}s$ et $\mathbb{R}$. Malheureusement, ce faisant , il passe du point de vue ponctuel d'Euler qui est l'ecriture d'un seul nombre réel x avec n et ω , a celui de tout nombre reel , mais a partir d'un même infiniment petit ω. En allant au-dela de la représentation d'Euler, Aepinus doit seulement avoir l'impression d'en tirer tous les fruits (§ 10 et 11).

Cette erreur d'Aepinus met, selon nous, en lumiere crue l'ambiguité de la méthode fonctionnelle d'Euler. Sans risques chez le maitre, la formule $x = \lim_{n\to\infty} n(x/n)$ qu'Euler note seulement $x = n\,\omega$, où n est un infiniment grand et ω un infiniment petit, en présente de grands chez les disciples car le calcul sur les limites n'est pas suffisamment précisé. L'algébrisation de ce calcul est encore sommaire, car trop liée au comportement algébrique des polynômes, lorsque par exemple on ne prend que le terme de plus haut degre si la variable devient infiniment grande.

On notera effectivement dans le cas present que le resultat qu'Aepinus cherche à obtenir à l'occasion des § 10 et 11 est facile, sinon evident, si l'on sait a priori que B^m est fonction polynomiale de m. En effet, le raisonnement par homogeneite est validable, si pour un nombre λ, on a $B^{ns} = \lambda ns$ pour tout entier relatif n, grâce au nombre fini de racines d'un polynôme tel que la fonction B, on déduit $B^{xs} = \lambda xs$ pour tout réel x, et donc, comme souhaité, que B^x est fonction linéaire de x. Mais en fait λ dépend de s. Toutefois, on constate aisément l'égalité $\lambda(ns) = \lambda(s)$, valable pour tout entier n. Si donc λ présente un comportement polynomial, ce qui se déduirait du même comportement supposé de B, la seule solution possible est bien la constance de λ, ce qui nous conduit au cas deja réglé. Un tel raisonnement d'homogénéite, portant sur une fonction analogue λ, fut effectivement exposé par Legendre dans sa **Géométrie** en 1794, mais de Foncenex l'utilisait bien avant.

Mais Aepinus ne presente pas explicitement l'argument polynomial argument que l'on verra nettement mieux evoque chez Euler. Il est surtout vrai qu'Aepinus fait intervenir, avec s, non pas une variable, mais un infiniment petit, et qu'il se trompe sur l'independance de cet

infiniment petit par rapport à x.

En tout cas, comme il a constaté que pour x = 1, B prend la valeur 1, il déduit $B^m = m$ pour toute valeur m. Notons bien que le raisonnement par identification avec un comportement polynomial n'a pas besoin d'utiliser le passage intermédiaire, d'ailleurs facile, par un quotient d'entiers (nombres rationnels). Aepinus ne suggère pas un tel passage et il n'est pas le seul auteur du XVIIIème siècle à sauter allègrement des entiers aux réels, sans l'intervention explicite des rationnels. Nous tenons que le passage possible par les rationnels pouvait apparaitre inutile à ceux des auteurs soucieux d'économie. Ce passage n'a de sens que si, comme Cauchy, l'on dispose à la fois d'une vue "topologique" des réels par densité des rationnels, et d'une régularite, comme la continuité, supposée sur la fonction inconnue B. Le procédé est bien plus simple si la "régularité" présupposee, voire inconsciente, relative à une fonction est un comportement polynomial. De $P(x)/Q(x) = 1$, égalité supposée vraie pour une infinité de valeurs de x, par exemple tous les entiers, lorsque P et Q sont des polynômes, on déduit aussitôt l'identité $P/Q = 1$. <u>Voila un moteur de démonstration au XVIIIème siècle.</u> Donnons maintenant les § 10 et 11 d'Aepinus.

Extrait du texte d'Aepinus traduit en français(§10,11 et 12)

10 - Donc, comme on a toujours $B^{r+s} = B^r + B^s$, on aura également $B^{r+s} - B^r = B^s$. C'est pourquoi, si m croît d'une quantité quelconque s, B^m augmentera également, d'une quantité toujours constante, quelle qu'ait été la valeur de m. $B^{r+s} - B^r$ désigne bien sûr un accroissement qui touche B quand on ajoute à r une quantité s. Mais comme cette différence vaut B^s, il apparait que cet accroissement ne dépend que de s, et nullement de r. C'est pourquoi il doit rester le même, tant que s garde la même valeur, quelle que soit la variation de r.

A l'opposé, on en déduit facilement que, si m décroît d'une quantité s, B^m diminuera en conséquence d'une quantité constante également, et égale à B^s.

11 - C'est pourquoi, posant successivement :

$$m = \ldots -3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s, \ldots$$

B prendra les valeurs correspondantes

$$\ldots -3B^s, -2B^s, -B^s, 0, +B^s, +2B^s, +3B^s, \ldots .$$

Si donc m est pris dans une progression arithmétique de raison s, les réponses B seront aussi dans une progression de ce genre, de raison B^s. C'est pourquoi, quel que soit B, m et sa réponse auront un rapport constant.

Soit s un infiniment petit, et une progression ... -3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s ... prolongée de part et d'autre à l'infini. En passant de façon continue, elle prendra toutes les valeurs réelles de m. On peut en déduire que si le nombre m a été pris comme réel quelconque, le rapport de B^m à m sera constant.

12 - C'est pourquoi on peut toujours remplacer B^m par λm, le nombre λ étant constant, ce qui pour une solution complète du problème, permet maintenant de réduire la recherche à la seule détermination de λ. Mais il suffit, puisque ce nombre est constant, de le déterminer dans un seul cas. Ce qui peut se faire facilement par le calcul suivant. Comme, dans le cas où m = 1, la série $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} \ldots = x + B^1 + \frac{C}{x} + \ldots$

doit donner x+1, on aura $B^1 = 1$. Pour cette raison, et puisque $B^m = \lambda m$ ce cas donnera $\lambda = 1$. L'égalité $B^m = m$ est donc un fait établi, pour n'importe quel nombre réel.

Il est tout à fait remarquable qu'Aepinus passe ensuite à la démonstration du cas des valeurs complexes de l'exposant m et ne déduise pas automatiquement $B^m = m$ pour m complexe , de la même relation établie dans le cas réel. Il précise quant au raisonnement qui servit pour le cas réel: " *Il n'est pas cependant possible de l'appliquer à des valeurs imaginaires comme on pourrait le supposer imprudemment* ". Ce souci n'est pas commun au XVIIIème siècle, loin de là , car on considérait généralement, en vertu d'une définition formelle et non causale des fonctions, qu'une identité sur les réels passait telle quelle aux nombres complexes. Ce passage prendra ultérieurement nom de permanence des formes, mais au XVIIIème siècle, il tient seulement à une définition possible des fonctions. Nous y reviendrons en décrivant un texte d'Euler sur les fonctions discontinues. Aepinus est donc en veine de rigueur et son propos annonce celui de Cauchy, plus de cinquante ans plus tard, une fois adoptée la définition causale d'une fonction :

" *Il est vrai que pour rester constamment fidèle à ces principes [de rigueur], je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce ... dans le chapitre IX que, si des constantes ou des variables comprises dans une fonction , après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la relation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse* " .

La naïveté analytique

Un défaut de la démonstration d'Aepinus est d'ordre architectural. Aepinus part, pour un nombre m quelconque, de la série

(9) $(x+1)^m = A x^m + B x^m + C x^{m-2} + D x^{m-3} + \ldots$

Certes, il est le seul au XVIIIème siècle à ne pas écrire plutôt une série entière en $1/x$

(10) $(x+1)^m = x^m(1+1/x)^m = x^m(A + B/x + C/x^2 + D/x^3 + \ldots)$

Apparaît alors l'étonnant (au sens fort compte -tenu des habitudes de l'époque) besoin de justifier l'écriture (9), car Aepinus accepte l'objection selon laquelle rien ne prouve a priori l'existence d'un tel développement pour toute valeur de m. Il contourne toutefois la difficulté par un argument qui est intéresssant.

" *S'il était impossible en effet que* $(x+1)^m$ *soit développé en une série de cette forme, les calculs effectués pour chercher une solution conduiraient à une impossibilité*" (§3)

Ainsi toute l'affaire pour Aepinus se réduit donc <u>seulement</u> à montrer que le calcul effectif des coefficients A, B, ..., est possible ! Il introduit même l'idée, un peu biscornue, selon laquelle le critère de réussite serait de ne pas tomber au bout du comte sur un coefficient explicitement imaginaire. Cette remarque indique peut-être que x désigne une variable réelle dans (9), mais comme m est a priori complexe, on voit mal où serait la gêne dans l'obtention d'une valeur imaginaire. Le mot " imaginaire" est vraisemblablement pris ici dans le sens premier, non mathématisé, de quantité impossible qui invaliderait le calcul.

Mais l'essentiel est dans le credo "positiviste" : un calcul, s'il est possible de l'achever, permet à lui seul d'affirmer l'existence de l'objet sur lequel porte le calcul. L'unicité de l'objet calculé se déduirait de même de l'unicité du résultat calculé. Ce credo d'existence, et d'unicité, est porté par le programme de la méthode fonctionnelle. Cette méthode est entendue en effet comme une extension de la résolution des équations de l'algèbre ordinaire. On pose en fonction inconnue ce que l'on cherche ; on établit les équations que cette fonction satisfait. Leur possible résolution affirmerait l'existence de ce qui est cherché. On oublie malheureusement la vérification que ce qui vient d'être trouvé convient exactement au problème posé. Certes, on saisit que l'objection logique à cette démarche paraît inutile si, à chaque étape, on a pris soin de vérifier que l'on procède par équivalences logiques, allant d'équations en équations puis aux solutions, sans rien ajouter ou perdre. Outre que nous verrons que ces équivalences sont rien moins qu'assurées dans la pratique, il faut de toutes façons d'abord montrer la <u>validité</u> de la mise en équation initiale. On ne peut donc pas éviter le problème du sens à donner a priori à une expression comme (9) quand bien même un " calcul" permettrait de déterminer la valeur des coefficients A_k. Aepinus écarte la difficulté et superpose à son calcul l'hypothèse implicite de l'unicité du développement (9), unicité indispensable à sa démarche.

Il nous semble que la "foi" d'Aepinus en ce credo du calcul fonctionnel-roi est largement partagée en son siècle et qu'elle signe une catégorie de rigueur, à laquelle il serait vain de demander plus. Mais s'arrêter à ce constat serait manquer un aspect essentiel. De fait, la seule mesure que l'on puisse prendre d'un auteur à l'autre, au sujet de la rigueur du XVIIIème siècle, est dans la hardiesse de la généralité avec laquelle ce principe "positiviste" est utilisé.

Aepinus a la naïveté de lui donner une extension générale, d'en faire le moteur de l'analyse, démarche où l'on pose au départ ce qui est cherché.

5.1 Une démonstration d'Aepinus

Si Aepinus conserve encore quelque renom aujourd'hui, il ne le doit guere à ses travaux purement mathématiques -une dizaine de publications en tout- mais a un ouvrage de 1759, **Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi.** Il y tentait une première en offrant un exposé raisonne de phenomenes électriques, exposé base mathematiquement sur les actions à distance. Son nom reste aussi associé à l'électrophore et au condensateur. Or le cas d'Aepinus nous offre une belle occasion inédite.

Mathématicien ripuaire, Aepinus est toutefois au fait de toutes les questions débattues, puisqu'il est membre ordinaire dans la classe de mathématiques et d'astronomie de l'Académie de Berlin dès 1755, alors qu'il vient juste d'atteindre la trentaine. Deux ans plus tard, en pleine guerre de Sept Ans, Aepinus gagne Saint-Pétersbourg, lassé de la mentalité "francaise" de Berlin, et lit presque aussitôt à l'Académie de sa nouvelle ville un papier consacré à la formule du binôme de Newton. Il s'agit du **Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando.** C'est ce travail que nous voudrions analyser -il paraît seulement en 1763- car s'il suit de près les **Institutiones calculi differentialis** qu'Euler faisait publier à Saint-Pétersbourg en 1755, il n'en témoigne pas moins d'un souci particulier de rigueur. Une rigueur qu'on pourrait qualifier d'algébrique -notre propos est de peser cet aspect des choses- en tout cas une rigueur qui n'entend

"Il y a une voye aux Mathématiques pour enquérir et rechercher la vérité, laquelle est dite avoir esté premièrement trouvée par Platon, et par Théon appelée Analyse ; et d'icelles définie l'Assumption du requis comme concédé, par les conséquences au vray concédé" comme dit Viète dans l'**Introduction en l'art analytic** (traduit par Vaulézard). Aepinus est oublieux de la précautionneuse remarque de Pappus au livre VIII de la Collection Mathématique

"En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution".

Sur le plan épistémologique, il est essentiel de rappeler que la démarche analytique, justement prônée par Viète, ne fait jouer en pratique, par la mise en équation ; que le domaine qualifié plus tard d'"algèbre commune". Ce vocable désigne tout ce qui concerne la manipulation et la théorie des équations polynomiales. Or un tel domaine, plus ou moins bien maîtrisé car il fait nécessairement entrer les nombres complexes, est quand même nettement délimité. Et comme l'on ne doute pas que tout polynôme ait au moins une racine, au moins complexe, comme l'énonçait Girard dès 1629, les considérations d'existence pour une solution à un problème sont occultées par la seule démonstration d'un calcul effectivement possible.

Avec l'extension de la méthode fonctionnelle, qui de la détermination d'une inconnue par des équations polynomiales, passe à la caractérisation de fonctions par des équations fonctionnelles, le cadre algébrique éclate complètement. Et les précautions relatives à l'existence des objets posés devraient intervenir à nouveau. Aepinus n'y prend pas garde. Pas plus qu'il ne prend garde à l'hypothèse d'unicité du développement, qui est indispensable pour pouvoir écrire les équations fonctionnelles sur lesquelles reposent la solution du problème posé.

Comparons donc cette démonstration d'Aepinus à celle présentée par Euler en 1774 sur le même sujet du théorème du binôme de Newton. Nous expliquerons d'abord le contenu mathématique du travail d'Euler avant de fournir la traduction du texte complet. Nous ne donnerons un commentaire que sur un point particulier , et le ferons juste avant de décrire la méthode suivie par Cauchy pour ce même théorème du binôme de Newton.

La démonstration phare d'Euler

Cette démonstration est typiquement fonctionnelle et analytique . Euler part (avec d'autres notations) de la série entière cherchée

(11) $$F(n,x) = \sum_{k=0}^{\infty} [n(n-1)...(n-k+1)/k!]\, x^k.$$

Il prouve- c'est là qu'il y a une difficulté en bonne rigueur- l'équation fonctionnelle satisfaite par F pour toutes les valeurs réelles m et n, et toutes les valeurs x

(12) $$F(n+m,x) = F(n,x)\, F(m,x).$$

Il constate par ailleurs que pour toutes les valeurs entières positives de n

(13) $$F(n,x) = (1+x)^n.$$

Par suite si a = p/q, ou p et q sont des nombres entiers positifs, Euler déduit $F(p,x) = F(qp/q,x) = (F(p/q,x))^q$ tandis que $F(p,x) = (1+x)^p$. D'où

(14) $$F(p/q,x) = (1+x)^{p/q}$$

$$F(a,x) = (1+x)^a$$

Euler deduit le cas d'un exposant fractionnaire negatif , grace une fois de plus à l'équation fonctionelle satisfaite par F. Il conclut donc à la validité de la formule du binôme pour tous les exposants fractionnaires.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE DÉVELOPPEMENT DES PUISSANCES DU BINÔME POUR LES CAS OÙ LES EXPOSANTS NE SONT PAS DES ENTIERS

(Exposé n: 465 de l'index ENESTRÖMIEN : Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 19 (1774), 1775, p 103-111 Résumé, même référence , p 17-19)

RÉSUMÉ

Le théorème du binôme, qui donne le développement de la quantité $(a+b)^n$ constitue la base de toute l'Analyse sublime et, pour cette raison, a d'autant plus de prix que sa vérité est démontrée solidement pour toute valeur, quelle qu'elle soit, de l'exposant. Mais la manière dont le grand NEWTON a été conduit à ce théorème, l'a seulement rendu évident pour un exposant n entier. Par conséquent , la validité de ce même théorème reste douteuse pour un exposant fractionnaire, négatif ou même irrationnel . On trouve, en effet, des cas de ce genre, où une formule quelconque est vraie toutes les fois que l'exposant n est supposé être un entier positif, mais qui s'écarte beaucoup de la vérité, si on prend pour n un nombre fractionnaire .Fait dont l'illustre EULER a fourni, ici , un exemple notable. Examinant donc cet inconvénient, il avait jadis donné une démonstration de ce théorème tirée de l'Analyse infinitésimale . Mais il reconnaît maintenant que cette démonstration n'est pas totalement exempte du défaut de la pétition de principe, puisque que l'Analyse infinitésimale elle-même s'appuie sur le théorème du binôme . Et, quoique cette démonstration puisse être raffinée au plus haut point, même en partant de l'Analyse infinitésimale , de telle sorte que sa vérité soit postulée seulement pour le seul cas d'un exposant n entier, cependant on ne peut pas nier qu'une démonstration tirée des purs principes de l'Analyse des quantités finies ne doive être préférée . L'illustre membre de notre Académie AEPINUS a donné une démonstration de ce genre au tome VIII des Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg , démonstration à laquelle on ne peut presque rien reprocher, si ce n'est peut-être que , pour obtenir les valeurs des coefficients pour la série, à laquelle $(1+x)^n$ est supposé égale, on ne doive beaucoup faire appel à l'induction .

Quant à la démonstration ici proposée par l'illustre Euler, elle procède de telle manière qu'elle ne demande pas tant comment la quantité $(1+x)^n$ doit être développée, mais plutôt quelle peut bien être la valeur de la série

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \text{etc.},$$

série que l'on sait être égale à $(1+x)^n$, dans le cas de l'entier n. Mais, en général, l'illustre auteur juge qu'il faut indiquer la valeur de cette série par le signe $[n]$. Supposons maintenant que deux signes de cette espèce $[m]$ et $[n]$ aient un produit qui soit représenté par la série

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.},$$

il est évident que les coefficients A, B, C, etc sont déterminés par les lettres m et n et il est patent que la manière par laquelle se fait la détermination ne dépend pas de la nature des lettres m et n et, par conséquent reste la même, que l'on suppose m et n entiers ou fractionnaires. Mais si m et n sont des entiers, on a de toute façon

$$[m][n] = (1+x)^{m+n} = [m+n],$$

et, en généralisant, de même

$$[m][n] = [m+n], \quad [m][n][p] = [m+n+p] \quad \text{et} \quad [n]^i = [in].$$

De là, on déduit que $[n] = [in]^{1/i}$, ce qui fait connaître la vérité du théorème pour le cas d'un nombre fractionnaire, en choisissant i de telle sorte que in donne un nombre entier. En effet

$$[in] = (1+x)^{in}$$

d'ou

$$[in]^{\frac{1}{i}} = (1+x)^n = [n].$$

Si n représente un nombre négatif, soit n = -m, alors à cause de

$$[m][n] = [m+n] = [m-m] = [0] = 1,$$

il vient

$$[n] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m} = (1+x)^n.$$

1. Le théorème que l'on habitude de représenter ainsi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.}$$

constitue la base de toute l'Analyse sublime dans la mesure où il est censé s'étendre de la manière la plus large et embrasser sous l'exposant n absolument tous les nombres possibles. C'est pourquoi sa vérité doit nécessairement être démontrée très solidement. Mais la manière dont on est parvenu à ce théorème, en multipliant habituellement la quantité

(a+b) un certain nombre de fois par elle-même, est telle que des nombres différents de nombres entiers positifs ne conviennent pas pour l'exposant n. En effet, les autres puissances ne peuvent provenir d'une multiplication répétée de la quantité (a+b), à l'exception de celles dont les exposants indiquent un nombre de facteurs qui ne peut pas du tout ne pas être un nombre entier. Cependant, dans le même temps, presque personne n'a douté que, si cette formule était vraie pour tous les entiers mis à la place de n, cette même formule devait aussi être vraie pour tous les nombres sans exception, soit fractionnaires, soit même irrationnels. Et, bien que cette conclusion s'applique dans ce cas, sa justesse provient d'autres raisons, puisque des cas peuvent se présenter où une formule quelconque est trouvée vraie chaque fois que l'exposant n est un entier positif, mais ne peut nullement être employée lorsqu'on attribue à l'exposant des valeurs fractionnaires.

2. Pour illustrer ceci d'un exemple, qu'on se donne la série suivante dont la valeur, chaque fois que l'exposant n est un entier positif, est toujours trouvée égale à l'exposant n, sans que, pour autant, on puisse licitement en conclure que cette égalité subsiste si l'on choisit d'autres nombres pour n.

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})}{1-a^4} + \text{etc.},$$

Cette même propriété est valable quand on prend n = 0. Alors, en effet, avec $a^n = 1$, le premier terme s'annule immediatement, en même temps que tous les suivants, puisque ils ont $1-a^n = 0$ en facteur. De telle sorte que dans ce cas notre série devient = 0, c'est à dire égale à l'exposant lui même n = 0. Mais si l'on prend n = 1, le premier terme devient

$$\frac{1-a}{1-a} = 1,$$

, tandis que le deuxième terme s'annule en même temps que les termes suivants grâce à $1-a^{n-1} = 0$, de telle sorte que dans ce cas la série devient = 1 . Considérons en outre le cas n = 2, pour lequel le premier terme devient

$$\frac{1-a^2}{1-a} = 1 + a,$$

alors que le deuxième terme donne

$$\frac{(1-a^2)(1-a)}{1-a^2} = 1 - a,$$

tandis que le troisième ainsi que les suivants s'annulent, à cause du facteur $1-a^{n-2} = 0$. La somme de notre série sera donc = 2 , c'est à dire égale à n. Prenons encore n = 3 de sorte que le premier terme donnera

$$\frac{1-a^3}{1-a} = 1 + a + a^2,$$

et le second donnera

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)}{1-a^2} = 1 - a^3$$

et le troisième

$$\frac{(1-a^3)(1-a^2)(1-a)}{1-a^3} = 1 - a - aa + a^3,$$

Quant au quatrième terme et tous les suivants, ils s'annulent puisqu'il contiennent le facteur $1-a^{n-3} = 0$. Donc notre série , dans le cas où n = 3, aboutit à 3 . De la même manière, on peut montrer que quel que soit le nombre entier mis à la place de n, notre série deviendra égale à ce même nombre. Mais n'importe qui comprendra facilement que , si l'on prenait n=1/2, cette série serait très différente de la valeur 1/2 .

3. Ainsi donc puisque l'on peut affirmer que la formule

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

est toujours vraie lorsque n est un entier positif, mais que cette égalité n'est pas valable pour les autres nombres, on pourra de même douter à bon droit que notre théorème

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \text{etc.}$$

soit conforme à la vérité de la manière la plus générale, même si nous sommes certains de son exactitude dans tous les cas où n est un entier positif . C'est pourquoi il est d'autant plus nécessaire de toute façon que cette vérité soit appuyée sur une démonstration rigoureuse . Sans doute jadis j'avais enseigné une démonstration tirée de l'analyse infinitésimale. Mais, parce que cette Analyse s'appuie elle-même sur notre théorème, je reconnais maintenant qu'il faut la rejeter comme entachée d'une pétition de principe . Notre illustre collègue AEPINUS a donné une démonstration vierge de ce défaut au tome VIII des Nouveaux Commentaires , où , prenant à la place de la formule $(x+1)^n$ la série générale

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc},$$

il a obtenu par une méthode fort ingénieuse les valeurs d'un certain nombre des coefficients A, B, C, etc . De leur concordance avec la série de NEWTON , sans doute aucun , il a pu conclure justement que tous les autres coefficients seraient aussi conforme à cette règle. Il faut bien voir que cette belle démonstration s'appuie beaucoup sur l'induction. D'autre part, il convient de noter que le second coefficient B n'est pas déterminé par cette méthode, mais le devient grâce à d'autres conditions qui sont fort absconses et obscures . C'est pourquoi je pense que ma démonstration sera d'autant mieux accueillie par les géomètres qu'elle n'est en rien tributaire de l'induction .

4. Avant tout, puisqu'on a

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

on aura aussi

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n,$$

et ainsi toute l'affaire repose sur le développement de cette puissance

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n,$$

Si l'on pose, d'autre part b/a=x , elle devient $(1 + x)^n$ et nous savons que chaque fois que l'exposant n est un nombre entier positif , cette expression est égale à la série

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^4+\text{etc.}$$

Mais si n n'était pas un entier positif, regardons la valeur de cette série comme inconnue et, pour la remplacer servons-nous du signe [n] de telle sorte que nous ayons alors en général

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.}$$

Sur cette formule, nous n'en savons maintenant pas plus que ceci : lorsque n est un entier positif, on a

$$[n]=(1+x)^n.$$

Quant aux autres cas, quelles peuvent être les valeurs qui conviennent au signe [n] ? C'est ce que nous allons chercher et , finalement, il deviendra évident qu'en général , également , on aura $[n] = (1+x)^n$. Du même coup nous réaliserons complètement notre dessin.

5. Pour mener cette recherche, multiplions deux séries de ce genre ,ou deux signes de ce genre [n] et [m] , de façon à obtenir une série égale au produit [n].[m], série dont il est évident que la forme sera exprimée par

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.}$$

Pour voir clairement comment les coefficients A, B, C, etc sont déterminés par le couple de lettres m et n, commençons au moins la multiplication

$$[m]=1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2+\text{etc.},$$

$$[n]=1+\frac{n}{1}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.},$$

$$\begin{aligned}[m]\cdot[n]=1&+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2+\text{etc.}\\ &+\frac{n}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}x^2+\text{etc.}\\ &+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2+\text{etc.}\end{aligned}$$

Abb. 60
Altersbildnis Leonhard Eulers. Stich von S. G. Küt(t)ner nach dem Ölportrait von J. Darbes (1778).

Leonhard EULER 1707-1783
Beiträge zu Leben und Werk
Birkhäuser Verlag 1983 p. 488

$$[m] = (1+x)^m \quad \text{et} \quad [n] = (1+x)^n,$$

et par suite, le produit de ces formules donnera

$$[m]\cdot[n] = (1+x)^{m+n},$$

puissance qui se développe en cette série

$$1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}x^2 + \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

Si donc nous considérons maintenant les lettres m et n en général, il conviendra d'indiquer cette série par le signe suivant [m+n] . D'ou nous apprenons qu'existe toujours cette vérité essentielle

$$[m].[n]= [m+n],$$

quels que soient les nombres qu'on mette à la place de ces lettres .

8. Comme ce couple de formules [m] et [n] par multiplication de l'une par l'autre donne une formule simple de même nature , de même plusieurs formules de ce genre , multipliée mutuellement ,reviennent à une formule simple . Nous aurons précisément les réductions suivantes

$$[m]\cdot[n] = [m+n],$$

$$[m]\cdot[n]\cdot[p] = [m+n+p],$$

$$[m]\cdot[n]\cdot[p]\cdot[q] = [m+n+p+q]$$

etc.

De là, si tous ces nombres m, n, p, q, etc sont pris égaux entre eux - exactement égaux à n - nous obtiendrons les simplifications des puissances suivantes

$$[m]^2 = [2m], \quad [m]^3 = [3m], \quad [m]^4 = [4m] \quad \text{etc.}$$

D'ou il viendra en général lorsque a désigne un nombre entier quelconque

$$[m]^a = [am].$$

9. Posons à l'avance que la lettre i désigne un entier positif quelconque et prenons en premier 2m = i, pour avoir m = i/2. La première des

dernières formules donnera

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = [i],$$

mais comme i est un entier , on aura

$$[i]=(1+x)^i$$

(cf §4) et ainsi

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1+x)^i,$$

.D'ou , en extrayant la racine carrée , il vient

$$\left[\frac{i}{2}\right] = (1+x)^{\frac{i}{2}}.$$

Nous sommes enfin arrivés maintenant à ce que le théorème de NEWTON soit également vrai dans les cas où l'exposant n est une fraction du type i/2.

10. De la même façon, si nous posons 3m = i, pour avoir m = i/3, la seconde des formules ci dessus devient

$$\left[\frac{i}{3}\right]^3 = [i] = (1+x)^i.$$

Si l'on en extrait la racine, on trouve

$$\left[\frac{i}{3}\right] = (1+x)^{\frac{i}{3}}.$$

Ainsi notre théorème est encore vrai lorsque l'exposant n est une fraction du type i/3 . D'une façon générale, il sera donc évident que

$$\left[\frac{i}{a}\right] = (1+x)^{\frac{i}{a}}.$$

En sorte que , maintenant, il a été démontré que notre théorème est vrai si une fraction quelconque i/a est mise à la place de l'exposant n .La vérité est maintenant établie pour tous les nombres positifs mis à la place de l'exposant n .

11. Il n'y a plus qu'à démontrer aussi cette vérité pour les cas où l'exposant n est un nombre négatif. A cette fin , nous appellerons à la rescousse ce qui a été prouvé

$$[m].[n] = [m+n],$$

où m désigne un nombre positif, soit entier , soit fractionnaire , en sorte que l'on ait , comme nous l'avons montré à l'instant

$$[m] = (1+x)^m.$$

Posons maintenant $n = -m$, de sorte que $m + n = 0$ et par conséquent

$$[0] = (1 + x)^0 = 1 .$$

En faisant cette substitution, la formule ci-dessus donnera

$$(1 + x)^m \cdot [- m] = 1,$$

d'où nous concluons

$$[- m] = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m} .$$

Ainsi, la vérité du théorème de Newton est aussi établie dans le cas où l'exposant n est un nombre négatif quelconque. Qui plus est, ce théorème est confirmé par les preuves vraiment les plus solides.

---

6 Démonstration de Cauchy

En 1821, Cauchy publie son **Cours d'analyse**, du moins la première partie intitulée **Analyse algébrique**. Cette rédaction est tardive par rapport au cours effectué à l'Ecole poytechnique, car quelques témoignages (notamment des notes d'un élève fameux, Auguste Comte, notes qui demanderaient a être précisées) semblent prouver que l'architecture du cours était à peu près établie dès les premières leçons, en tout cas vers 1816.

Cauchy reprend la méthode d'Euler de 1774 pour la démonstration de la formule du binôme, mais surtout l'insère dans un habillage qui peut alors servir à toute l'analyse. Nous n'avons pas la place ici de montrer en détail combien <u>tout</u> le cours de Cauchy est tendu par la démonstration de cette formule pour le cas d'un exposant réel quelconque et pour des valeurs aussi bien reelles que complexes de la variable dans $(1+x)^\alpha$

Il nous suffira ici d'examiner comment Cauchy s'y prend pour éviter le piège de la démonstration d'Euler, et pour sauter des rationnels à toutes les valeurs réelles de l'exposant. Le cas complexe, bien que situé dans la même lignée, exige une démonstration autrement délicate car Cauchy éprouve le besoin -enfin- de préciser ce que signifie une expression comme $(1+x)^\alpha$ lorsque α est réel mais x complexe.

En effet la partie delicate de la démonstration d'Euler est celle par laquelle l'équation fonctionnelle est établie : c'est la fin du § 6 du texte d'Euler qui commence par ces mots" *Il convient d'observer que le mode de cette composition ne dépend pas de la nature des lettres m et n*..." Nous avons là effectivement un raisonnement formaliste en ce sens que la forme de la dépendance est considérée comme étant sans relation avec la nature des variables en jeu. Remarque d'autant plus surprenante qu'Euler a pris soin, dans son introduction, de nous avertir par un contre-exemple que de tels passages des entiers à des nombres quelconques n'étaient pas admissibles (§1, 2 et 3).

Euler part donc de la série entière que nous avons notée F (n,x) et qu'il écrit [n], car ses coefficients dépendent de n. Aucune remarque de convergence n'intervient ici, comme à l'accoutumée en analyse algébrique. Ensuite, Euler considère comme une évidence que le produit [n] [m] soit encore une série entière en x. C'est évidemment la généralisation de la multiplication de deux polynômes qui passe ainsi aux séries entières. Notons :

(15) $[n]\,[m] = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k x^k$,

là où Euler utilise l'ordre alphabétique A, B, C, D, etc, à la place de A_1, A_2, A_3, ... A_k. Euler explique la dépendance du coefficient A_k par rapport à la variable n, et nous reviendrons un peu plus loin sur son argumentation, notant ici $A_k(n,m)$ pour les besoins de l'exposé.

La deuxième étape entend établir que pour toutes les valeurs réelles des variables m et n, les coefficients introduits satisfont les relations

(16) $A_k(n,m) = f_k(n+m)$.

Dans cette formule, $f_k(p)$ désigne, pour toute valeur réelle de p, l'expression du coefficient général du binôme de Newton :

(17) $f_k(p) = \dfrac{p(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\ldots(p-k)}{k!}$

Dès lors, la deuxième étape s'effectue en deux temps. Un premier temps (c'est le paragraphe 5) introduit une démarche inductive. Euler vérifie (16), d'abord pour k = 1, puisque l'on a les deux égalités :

(18) $A_1(n,m) = f_1(n) + f_1(m)$

et

(19) $f_1(n+m) = f_1(n) + f_1(m)$.

Pour le cas où k est nul, Euler a dès le début posé sans discuter $A_0(n,m) = 1$, ce qui est justifié puisque les fonctions [n] et [m] valent 1 lorsque la variable x s'annule.

Euler vérifie ensuite la relation (16) pour k = 2, en se servant des deux égalités simultanées :

(20) $A_2(n,m) = f_2(n) + f_1(n)f_1(m) + f_2(m)$,

et

(21) $f_2(n+m) = f_2(n) + f_1(n)f_1(m) + f_2(m)$.

Et il indique que l'on pourrait -au prix d'un grand labeur- avoir de la même façon (16) en toute généralité, c'est-à-dire pour tout entier k, puisqu'ici m et n sont bien des variables réelles quelconques. Voire ! Cette démonstration ne peut suffire, car elle tombe bien entendu sous le coup du reproche de trop grande **induction** qu'Euler faisait au début de son article à la preuve antérieurement due à Aepinus.

Aussi, en un deuxième temps (§6), Euler change de fusil d'épaule et introduit une démonstration dont il souligne la profondeur

" *Ce raisonnement ne doit pas être considéré comme anodin puisque toute la force de la démonstration repose sur lui*".

L'argument repose sur la permanence d'une forme fonctionnelle, une permanence destinée à valider la méthode fonctionnelle. Au §7, en effet, Euler établit (16), pour les seules valeurs n et m entières, et pour tous les entiers k, ce qui est facile puisque pour ces valeurs particulières de la variable on a

$$[n] = (1 + x)^n.$$

Donc

$$[n]\,[m] = (1 + x)^{n+m},$$

c'est-à-dire

$$[n]\,[m] = \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(n + m)x^k.$$

Soit la déduction de la relation (16), grâce à la définition de A_k dans (15) et en vertu de l'identification terme à terme de deux séries entières, selon la règle usuelle pour les polynômes. La relation (16) obtenue, on déduit grâce à l'unicité d'écriture d'une fonction en série entière, prolongement naturel du cas polynomial, et pour tous n et m entiers, l'égalité des séries (15) et [n + m], ce qui donne la relation fonctionnelle :

(20) $[n]\,[m] = [n + m].$

Pour passer à la validité de la relation fonctionnelle (20), cette fois avec des variables n et m réelles quelconques, Euler revient sur son explication précédente des coefficients A_k (n,m), qui les " *définissait* " comme fonctions

de deux variables, afin cette fois de mieux les " *déterminer*". Il fournit l'argument suivant : puisque la forme finale de ce calcul de *détermination* est indépendante de la nature des variables n et m d'une part, et puisque d'autre part on a la relation (16) pour tous les nombres n et m entiers, on doit nécessairement disposer de la relation (16) en toute généralité, pour des valeurs quelconques de n et m, c'est-à-dire valider (20) partout.

Pourtant, à bien y réfléchir, le calcul explicitement indiqué pour prouver que A_k (n,m) est fonction de n et m, assurerait facilement par récurrence sur k qu'il s'agit d'une fonction polynomiale à deux variables n et m. Tout comme f_k (n + m) est- cette fois par construction- une fonction polynomiale de n et m. Par suite, l'identité prouvée de ces deux polynômes pour toutes les valeurs entières de n et m, établit à coup sûr leur identité pour toutes les variables réelles n et m, et même d'ailleurs pour les valeurs complexes. Selon ce que nous avons déjà dit à propos d'une démonstration particulière d'Aepinus, tout repose sur la considération du degré d'un polynôme (n ou m pouvant être fixés) et donc sur la détermination d'un nombre fini de racines, laquelle s'oppose à cette infinité a priori de racines, à savoir tous les entiers.

Euler serait-il tellement obnubilé par le cas polynomial qu'il en oublierait de mentionner cette circonstance, pourtant indispensable au bien-fondé de sa preuve ? Ou bien estimerait-il, inconsciemment, que les fonctions se comportent, pour la permanence de certaines formes, comme des polynômes et par conséquent appliquerait-il, consciemment, l'argument polynomial ? Comme souvent en mathématiques, quand la démarche pèche par absence, et non par vice fondamental, on ne peut trancher à coup sûr. Mais on aura pris conscience sur cet exemple du jeu assez délicat entre la **généralité nécessaire** du concept fonctionnel afin de pouvoir "définir" A_k (n,m) et la **spécification particulière** de cette même fonction, ou "détermination", qui permet de conclure à la validité générale de l'équation fonctionnelle (22). Euler ne maîtrise pas complètement ce jeu là, et, apparemment, utilise deux registres : la généralité d'une part, et la permanence particulière d'autre part. Tout mathématicien sent bien qu'il se trouve en présence d'une situation exploitable, mais à clarifier : Cauchy s'y emploiera.

Allons plus loin pour nous étonner, si l'on suit notre façon de voir, qu'Euler n'indique pas la validité de la relation (22) pour des valeurs éventuellement complexes des variables. Ce que nous croyons être son présupposé polynomial devrait l'y conduire aussitôt, par le principe de permanence des formes ou par utilisation de l'argument sur le degré, argument valable aussi bien dans le champ complexe que dans le champ réel.

Toutefois, nous sommes vite arrêtés, car que gagnerait-il à passer aux nombres complexes ? L'exploitation pratique de (22) en vue de la formule du binôme, et sous cette généralité des variables, nécessiterait une étape supplémentaire et non des moindres. Il s'agirait en fait de résoudre l'équation fonctionnelle (22) en fournissant les seules solutions exponentielles. Or rien n'indique qu'Euler ait songé à agir de la sorte, puisqu'il termine son article en exploitant (22) de la façon la plus

rudimentaire. Cette manière suffit à lui procurer la formule du binôme dans le cas d'un exposant rationnel, positif ou négatif, mais, sans aménagement sérieux, elle n'est susceptible d'aucune extension à des exposants quelconques, tant réels que complexes.

Examinons maintenant la démonstration de Cauchy de 1821, en ne donnant que quelques extraits, faute de place. Le commentaire est peu utile, tant l'écriture de Cauchy est claire. Il faut remarquer l'intervention explicite de considérations numériques : nous sommes dans le cadre d'une théorie de la convergence .

Pour la bonne intelligence des extraits cités, il faut signaler que Cauchy indique par série (1) celle dont le terme général est $a_n x^n$:

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2 \ldots, a_4 x^4, \ldots \quad .$$

Il a fourni (au théorème I) le rayon de convergence à partir de la racine n-ème du module du coefficient général a_n (ou du rapport de a_n à a_{n+1}) et (au corollaire III théorème II) vérifié que 1 est le rayon de convergence de la série du binôme.

Nous avons donné aussi le calcul explicite de e selon Cauchy car il suit la formule du binôme, et fourni sa manière de donner le développement en série entière de e^x , tant nous voulons montrer les similitudes et les différences avec le traitement analogue d'Euler dans le cadre de l'analyse algébrique.

On repérera tout de suite une difficulté dans le texte de Cauchy avec l'appel fait , lors de la résolution du problème I , au théorème I (§I) du chapitre VI . Ce théorème assure qu'une série convergente composée de fonctions continues converge vers une fonction continue. Il y a là une erreur célèbre d'uniformité de Cauchy, erreur qui a exercé beaucoup l'attention des historiens et des épistémologues ces vingt dernières années. Nous n'en parlerons pas ici.

COURS D'ANALYSE. CAUCHY PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE VI.

THÉORÈME III. — *Supposons que les deux séries*

$$(10)\qquad \begin{cases} a_0, & a_1x, & a_2x^2, & \ldots, & a_nx^n, & \ldots, \\ b_0, & b_1x, & b_2x^2, & \ldots, & b_nx^n, & \ldots, \end{cases}$$

étant à la fois convergentes, lorsqu'on attribue à la variable x une certaine valeur, aient alors pour sommes respectives s et s',

$$(11)\qquad a_0+b_0,\quad (a_1+b_1)x,\quad (a_2+b_2)x^2,\quad \ldots,\quad (a_n+b_n)x^n,\quad \ldots$$

sera, dans le même cas, une nouvelle série convergente, qui aura pour somme $s+s'$. [...]

THÉORÈME IV. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si de plus chacune des séries (10) reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,*

$$(12)\qquad \begin{cases} a_0b_0, \quad (a_0b_1+a_1b_0)x, \quad (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2, \quad \ldots, \\ \ldots, \quad (a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n, \quad \ldots \end{cases}$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.
[...]

Corollaire I. — Le théorème précédent se trouve compris dans la formule

$$(13)\qquad \begin{cases} (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots) \\ \quad = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots, \end{cases}$$

qui subsiste dans le cas où chacune des séries (10) reste convergente lors même qu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques, et qui sert à développer dans cette hypothèse le produit des sommes des deux séries en une nouvelle série de même forme.

Corollaire IV. — Si l'on prend pour termes généraux des séries (10)

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

et

$$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,$$

μ, μ' désignant deux quantités quelconques, et la variable x étant renfermée entre les limites $x=-1$, $x=+1$, chacune des séries (10) restera convergente, même lorsqu'on réduira ses différents termes à leurs valeurs numériques, et le terme général de la série (12) deviendra

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\mu'}{1}+\ldots\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\mu}{1}\frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n\\ &=\frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)(\mu+\mu'-2)\ldots(\mu+\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n.\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on appelle $\varphi(\mu)$ la somme de la première des séries (10) dans l'hypothèse que l'on vient de faire, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(15)\qquad \varphi(\mu)=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots,$$

les sommes des séries (10) et (12) seront respectivement désignées, dans la même hypothèse, par $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu')$ et $\varphi(\mu+\mu')$; en sorte que l'équation (13) deviendra

$$(16)\qquad \varphi(\mu)\varphi(\mu')=\varphi(\mu+\mu').$$

[...]

Concevons maintenant que dans la série (1) on fasse varier la valeur de x par degrés insensibles. Tant que la série restera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de x demeurera comprise entre les limites

$$-\frac{1}{A},\quad +\frac{1}{A},$$

la somme de la série sera (en vertu du théorème I, § I) une fonction continue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction continue. L'équation

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{A}$, $+\frac{1}{A}$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

$$(19)\qquad \varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\qquad \left(x=-\frac{1}{A},\ x=+\frac{1}{A}\right).$$

Lorsque la série est supposée connue, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varphi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle *sommer* la série. Mais le plus souvent la fonction $\varphi(x)$ est donnée, et l'on se propose de revenir de cette fonction à la série, ou, en d'autres termes, de *développer* la fonction en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. Il est facile d'établir à ce sujet la proposition que je vais énoncer :

Théorème VI. — *Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.*

Démonstration. — En effet, supposons qu'on ait développé par deux méthodes différentes la fonction $\varphi(x)$, et soient

$$\begin{array}{llllll} a_0, & a_1 x, & a_2 x^2, & \ldots, & a_n x^n, & \ldots, \\ b_0, & b_1 x, & b_2 x^2, & \ldots, & b_n x^n, & \ldots \end{array}$$

les deux développements, c'est-à-dire deux séries dont chacune, étant convergente pour des valeurs de x différentes de zéro, ait pour somme, tant qu'elle demeure convergente, la fonction $\varphi(x)$. Ces deux séries étant constamment convergentes pour de très petites valeurs numériques de x, on aura, pour de semblables valeurs,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Comme, en faisant évanouir x, on tire de l'équation précédente

$$a_0 = b_0,$$

il en résulte qu'on peut la réduire généralement à

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

ou, ce qui revient au même, à

$$x(a_1 + a_2 x + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + \ldots).$$

Si l'on multiplie par $\frac{1}{x}$ les deux membres de cette dernière équation, on obtiendra la suivante

$$a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots,$$

qui devra encore subsister pour de très petites valeurs numériques de la variable x, et de laquelle on conclura, en posant $x = 0$,

$$a_1 = b_1.$$

En continuant de même, on ferait voir que les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont respectivement égales aux constantes $b_0, b_1, b_2, \ldots$; d'où il suit que les deux développements de la fonction $\varphi(x)$ sont identiques.

Le Calcul différentiel fournit des méthodes très expéditives pour développer les fonctions en séries. Nous exposerons plus tard ces

méthodes, et nous nous bornerons pour l'instant à faire connaître, avec le développement de la fonction $(1+x)^\mu$, dans laquelle μ désigne une quantité quelconque, deux autres développements que l'on ramène facilement au premier, savoir, ceux des fonctions

$$A^x \quad \text{et} \quad L(1+x),$$

A désignant une constante positive, et L la caractéristique des logarithmes dans un système choisi à volonté. En conséquence, nous allons résoudre l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent :

Problème I. — *Développer, lorsque cela se peut, la fonction*

$$(1+x)^\mu$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Si d'abord on suppose $\mu = m$, m désignant un nombre entier quelconque, on aura, par la formule de Newton,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

La série dont la somme constitue le second membre de cette formule est toujours composée d'un nombre fini de termes; mais, si l'on y remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, la nouvelle série que l'on obtiendra, savoir

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{\mu}{1} x, \quad \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2, \quad \ldots,$$

se trouvera composée en général d'un nombre indéfini de termes, et sera convergente seulement pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Soit, dans cette hypothèse, $\varphi(\mu)$ la somme de la nouvelle série, en sorte qu'on ait

$$(15) \qquad \varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \ldots \qquad (x = -1, \; x = +1).$$

En vertu du théorème I (§ I), $\varphi(\mu)$ sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura (*voir* le théorème IV, corollaire IV)

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu'). \tag{16}$$

Cette dernière équation étant entièrement semblable à l'équation (2) du Chapitre V (§ I) se résoudra de la même manière, et l'on en conclura

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^{\mu} = (1+x)^{\mu}.$$

La valeur de $\varphi(\mu)$ étant ainsi déterminée, si on la substitue dans la formule (15), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=-1$, $x=+1$,

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \qquad (x=-1,\ x=+1). \tag{20}$$

Lorsque la valeur numérique de x devient supérieure à l'unité, la série (5), n'étant plus convergente, cesse d'avoir une somme, en sorte que l'équation (20) ne subsiste plus. Dans la même hypothèse, il devient impossible, ainsi qu'on le prouvera plus tard à l'aide du Calcul infinitésimal, de développer la fonction $(1+x)^{\mu}$ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire I. — Si dans l'équation (20) on remplace μ par $\frac{1}{\alpha}$ et x par αx, α désignant une quantité infiniment petite, on aura, pour toutes les valeurs de αx renfermées entre les limites -1, $+1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots$$
$$\left(x=-\frac{1}{\alpha},\ x=+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation lim placée devant une expression qui renferme la variable α, la

limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \qquad (x=-\infty,\ x=+\infty). \tag{21}$$

Il reste à chercher la limite de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$. Or, en premier lieu, on tirera de la formule précédente

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

ou, en d'autres termes,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \tag{22}$$

e désignant la base des logarithmes népériens [*voir* le § I, équat. (6)]. On en conclura immédiatement

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e,$$

et, par suite,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x = e^x.$$

Si maintenant on remet la valeur de $\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation (21), on obtiendra la suivante :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \qquad (x=-\infty,\ x=+\infty). \tag{23}$$

On pourrait arriver directement à l'équation (23) en observant que la série

$$1,\quad \frac{x}{1},\quad \frac{x^2}{1\cdot 2},\quad \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \ldots \tag{6}$$

est convergente pour toutes les valeurs possibles de la variable x, et cherchant la fonction de x qui représente la somme de cette même série. En effet, soit $\varphi(x)$ la somme de la série (6) qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n},$$

$\varphi(y)$ sera la somme de la série qui a pour terme général

$$\frac{y^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n};$$

et (en vertu du théorème VI, § III) le produit de ces deux sommes sera la somme d'une nouvelle série qui aura pour terme général

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\frac{y}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{x}{1}\frac{y^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} + \frac{y^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{(x+y)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Ce produit sera donc égal à $\varphi(x+y)$, et par suite, si l'on fait

$$\varphi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots,$$

la fonction $\varphi(x)$ vérifiera l'équation

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(x+y).$$

En résolvant cette équation, on en tirera

$$\varphi(x)=[\varphi(1)]^x=\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\right)^x,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x)=e^x.$$

Nous arrêtons là ces extraits de l'**Analyse algébrique** de Cauchy. On trouvera en appendice la table des matières du cours d'analyse en entier, et il n'est pas inutile de s'y reporter. Nous nous contenterons de noter que la démonstration de la formule du binôme utilise l'essentiel des résultats de ce cours, ce qui fait fortement penser que l'architecture elle-même du cours fut conçue en vue de la démonstration de cette formule qui se termine au chapitre IX. Il y a douze chapitres en tout et les trois derniers étaient indispensables dans un cours tel que celui de l'Ecole polytechnique, mais ne concernent pas la formule du binôme: Cauchy était souvent accusé par le Conseil de Perfectionnement de l'Ecole de ne pas respecter les programmes (cf introduction de l'**Histoire de l'Ecole Polytechnique**, par A. Fourcy, Belin 1987).

Le binôme réel est résolu au chapitre VI. Pour avoir $\phi(\mu) = 1 + \mu x + \ldots$ comme une fonction, Cauchy utilise sa définition du chapitre I et $\phi(\mu)$ est une série entière en x. Tout le chapitre VI est mis à contribution afin de calculer le rayon de convergence de cette série entière, ainsi que le terme général du produit $\phi(\mu)\,\phi(\mu')$. Le chapitre III entier permet de calculer effectivement ce coefficient général comme étant celui de $\phi(\mu+\mu')$. Le chapitre II et le chapitre VI fournissent la continuité de $\phi(\mu)$ et le chapitre IV permet de résoudre finalement $\phi(\mu)\,\phi(\mu') = \phi(\mu+\mu')$.

Le binôme complexe est résolu de la même façon grâce aux chapitres VII, VIII et IX utilisés dans leur intégralité.

7. Rigueur et méthode analytique

Le cadre de l'analyse algébrique étant fixé, la méthode suivie pour résoudre les problèmes en jeu n'est pas a priori spécifiée. Une des méthodes favorites, sinon la seule recommandée au cours du XVIIIème siècle, est la méthode analytique étendue au cadre fonctionnel. Nous l'appelerons ici la méthode fonctionnelle, parce que souvent la voie analytique reste restreinte au cadre polynomial issu de Viète et de Descartes.

Cette méthode fonctionnelle consiste à résumer analytiquement un problème donné en introduisant une ou des fonctions inconnues (1ère phase), puis à relier fonctions et données du problème par une ou des équations les concernant (2 ème phase), à résoudre ces équations, d'ailleurs de manière indépendante du problème posé (3ème phase) pour aboutir en définitive à l'application au problème originel (4ème phase) . Les équations liant la ou les fonctions introduites lors de la première phase sont des équations fonctionnelles, et ce vocable inclut les équations différentielles, les équations aux différences finies ou les équations aux dérivées partielles, par exemple.

Il importe de prendre conscience que ces quatre étapes sont conçues comme un tout, dirigé vers un but(la résolution d'un problème), mais qu'une fois ce tout constitué, chaque étape " vit " indépendamment des autres. Il est sûr que le choix des fonctions inconnues de la 1ère étape n'est effectué par le mathémticien conscient que lorsqu'il dispose de la possibilité de trouver une solution des équations lors de la troisième étape. De même, le retour au problème posé qui se fait à la 4ème étape consiste souvent en un inventaire des conditions initiales et aux limites , et force donc la pensée, par feed-back, lors de la mise en équation à la 2eme étape. Mais tout ceci figure dans l'organisation architecturale préalable du mathématicien qui conduit sa démonstration, et se fige ensuite.

Soyons plus concret en revenant à notre exemple de la formule du binôme de Newton. Aepinus prend comme fonctions inconnues les $f_k(\alpha)$, coefficients du développemen,t en série entière de $(1 + x)^\alpha$. Euler prend comme fonction inconnue la série $[\alpha] = 1 + \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)x^2 + \ldots$ Telle est dans chaque cas la première étape de la méthode fonctionnelle. On ne peut nier que dans chaque cas l'auteur fait un choix crucial. La deuxième étape consiste à exhiber les équations servant à règler les fonctions inconnues. Chez Aepinus, plusieurs équations fonctionnelles interviennent, dont les dépendances logiques a priori ne sont pas inventoriées. Euler se contente d'une seule équation , caractéristique pour lui de l'exponentielle

$$[\alpha]\,[\beta] = [\,\alpha + \beta\,].$$

Dans chaque cas des conditions aux limites viennent préciser les choses, mais on n'en aura besoin que plus loin. Ni Aepinus. ni Euler ne dise quelque chose de la nature a priori des fonctions inconnues dont ils ont donné des équations qu'elles satisfont. Seul Aepinus veut montrer à la première étape qu'il s'agit effectivement de fonctions, et il utilise pour cela une definition "causale" des fonctions. definition en un sens tres moderne comme nous le montrerons plus loin. Une correspondance est " fonctionnelle" lorsque la variation de la variable entraîne une variation de l'autre variable. Hélas, sa preuve de la "variabilité" des coefficients $A_k(m)$ en m est illusoire , car il

utilise un raisonnement par l'absurde fautif: il suppose que tous les coefficients soient constants , disons pour m et pour m+1, et aboutit alors facilement à l'écriture contradictoire

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1}.$$

Il est manifeste qu'Aepinus avance avec précaution dans le formalisme des fonctions, notamment dans l'ecriture de la dependance par rapport à la variable: au début du texte, s'il introduit avec bonheur la dépendance des coefficients en la variable m, selon B^m ou C^m etc. Aepinus éprouve le besoin, une fois trouvée la forme de C^m , d'écrire explicitement ce qu'est C^{m-1}, C^{m-2}, et d'indiquer que l'on procédera de même pour toutes les autres lettres. De tels égards pour le lecteur dans une publication savante (il s'agit , ne l'oublions pas, des actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg), manifestent surtout que nous sommes en terrain mal balisé par la tradition. Euler est nettement plus direct. Il donne un nom a la série du binôme, ne retient que la variable n (et oublie comme paramètre muet la variable x). Ce qui lui fait trouver la notation symbolique astucieuse [n]. Plus loin, au §6, c'est le calcul qui marque la dépendance de certains coefficients A, B en deux variables n et m: " *De même que nous avons pu déterminer les deux premiers coefficients A et B à partir des lettres m et n, ...*". Et si l'on ne peut pas effectuer matériellement le calcul dans le cas général, la possibilité théorique de ce calcul détermine les correspondances fonctionnelles .

La troisième étape est traitée de façon très différente sur le plan de la rigueur chez nos deux auteurs: il faut quand même rappeler qu'Euler vient plus de dix ans après la publication d'Aepinus, dont la démonstration fut vraisemblablement discutée bien des fois à Berlin puisque, dès 1752, Aepinus annonçait une nouvelle démonstration de la formule du binôme. Nous avons vu qu'Aepinus résout de façon fautive aussi bien pour des valeurs réelles que complexes, avec un appareil suspect d'infiniment petits, une équation fonctionnelle $B^{r+s} = B^r + B^s$, plus simple pourtant que celle dont s'occupera Euler.

Notre mesure de la rigueur de telles démarches analytiques porte, nous l'avons explicitement dit, sur la cohérence des concepts élaborés à l'occasion des différentes étapes qui, toutes, doivent s'inscrire dans le cadre général de l'analyse algébrique.

Et le manque de cohérence que nous constatons chez Aepinus se situe précisément par opposition entre la première étape (choix des fonctions inconnues) et la troisième (résolution générale des équations). Il y a contradiction entre la généralité nécessaire sur les fonctions inconnues pour la mise en équation de la première étape et la restriction tout autant nécessaire sur ces fonctions pour l'obtention effective des solutions lors de la troisième étape. Car la méthode, dans ce cas précis, exige la prise en compte de toutes les solutions, sans aucune restriction, de l'équation fonctionnelle introduite, quitte à éliminer à la dernière étape celles qui ne relèvent pas du problème posé.

Or nous avons noté qu'Aepinus manifesta au mieux un "présupposé polynomial" sur les fonctions solutions des équations fonctionnelles en jeu. Son erreur dépasse donc une simple "lacune": en tout cas, elle requiert pour être comblée une analyse d'une tout autre amplitude, assurément pas à sa portée. Euler, en 1774, ne commet pas

cette faute de rigueur, à ce niveau de la 3ème étape, puisqu'il résout son équation fonctionnelle sur le corps des rationnels seulement. Il y a là une nuance certaine. On a bien l'impression qu'Euler souhaitait aller jusqu'aux puissances réelles quelconques. En effet, le titre de l'article est significatif par négation: " *pour les cas où les exposants ne sont pas des entiers* ". Mais Euler se restreint volontairement, faute de moyens ad hoc de résolution des équations fonctionnelles dans ce cadre général. Il conclut (§10): " En sorte que maintenant, il a été démontré que notre théorème est vrai si une fraction quelconque i/a est mise à la place de l'exposant ". Il y a arrêt aux puissances fractionnaires, éventuellement négatives. Euler sacrifie donc la généralité de son résultat à l'esprit de rigueur. Cette rigueur est donc au rendez-vous, avec toute la connotation morale qu'elle contient usuellement dans l'usage non mathématique du mot. Certes ultérieurement, en 1776, Euler oubliera toutes ces précautions en faisant jouer à plein le "présupposé polynomial", mais sa démonstration est d'un autre type, et qui n'a pas péché jette la première pierre! De façon très surprenante, dans ce texte ultérieur, Euler choisit un titre restrictif" **Une démonstration nouvelle: le développement newtonien des puissances du binôme est valable même pour les exposants fractionnaires** alors qu'il conclut ce même texte par ces mots: "*le raisonnement universel que nous avons utilisé ici garde toute sa force, même si on va jusqu'à faire de l'exposant n un nombre imaginaire*". L'inconscient des mathématiciens se ferait- il souci de rigueur lui-aussi?

C'est seulement dans la mise en équation (2ème étape) qu'Euler commet la même erreur de nature qu'Aepinus, en supposant un comportement polynomial a priori comme nous l'avons indiqué. Toutefois, il faut reconnaître que le comportement polynomial est facile à déduire dans ce cas-là. Ces manques, tant chez Aepinus que chez Euler, ne sont pas justifiables dans le cadre de l'analyse algébrique, mais ils ne dérogent pas de la même façon, chez ces deux auteur, à la rigueur. Aepinus ne se résout pas à un effort de restriction: il fait trop de voltige, sans filet.

Cauchy, en 1821, efface de tels manques grâce à son concept de fonction continue. Il se fourvoit cependant dans la preuve que les fonctions inconnues sont continues, faute de savoir mettre en évidence une uniformité. Mais au moins tente-t-il de donner une telle preuve, ce qui est le signe net d'une volonté de rigueur en éveil. Ce faisant, il est symptomatique que Cauchy fasse disparaître ainsi l'intérêt du vieux cadre de l'analyse algébrique et que, dans un net mouvement architectural, il introduise ainsi l'analyse tout court. Remarquons en passant que Cauchy ne propose rien pour le cas d'un exposant complexe, et qu'il ne prétend pas du tout avoir résolu l'équation fonctionnelle correspondante sous une telle généralité. Abel parviendra à le faire en 1826, en poursuivant systématiquement la démarche fonctionnelle de Cauchy. Ainsi, Cauchy lui-aussi sacrifie la généralité du résultat à l'esprit de rigueur.

La méthode fonctionnelle que nous venons d'illustrer dans le cas du binôme de Newton fut en fait largement utilisée au XVIIIème siècle et dans des circonstances assez variables. Il importe de procéder à un classement pour ne pas donner l'impression que la démarche de rigueur ne s'attaque qu'à des problèmes déjà résolus et qu'il importerait seulement de bien présenter pour le seul plaisir de l'esthète. On serait au fond bien près

d'une tautologie en affirmant que pour les problèmes sur lesquels on dispose d'une solution simple, une autre solution doit se poser en rigueur. Par contre, si la démarche de mise au point en rigueur d'un problème déjà résolu est celle-là même suivie pour résoudre un problème a priori nouveau et inconnu, il devient difficile alors de nier la volonté explicite de rigueur.

La démarche analytique utilisant les fonctions figure au moins dans trois autres directions que la seule vérification d'un résultat déjà connu.

(1) On la trouve dès l'origine pour le traitement des équations aux dérivées partielles, notamment dans le problème des cordes vibrantes que soulevait d'Alembert à partir de 1747.

(2) On la trouve ensuite dans la démarche de type axiomatique, qui offre au XVIIIème siècle des occurrences plus nombreuses qu'on ne le dit, bien que ne comportant pas l'enchaînement de définitions et de théorèmes auquel nous sommes habitués par la lecture d'Euclide ... ou de Bourbaki. On peut mentionner à ce propos l'addition "vectorielle" des forces que tenta Daniel Bernoulli à partir de 1726 et que reprit d'Alembert en suivant une voie fonctionnelle. Cette même démarche se trouve dans l'axiomatisation de la géométrie telle qu'entreprise par Legendre à partir de 1794, notamment dans le but de se débarrasser de l'axiome euclidien des parallèles.

(3) Elle est au coeur de la présentation de certains manuels mathématiques, manuels qui ont pris une importance plus grande quant à l'organisation des mathématiques à partir de 1750. Certes, il ne faut pas

confondre cette présentation avec une démarche axiomatique. Ainsi, dans les traités d'Euler, on ne dispose pas d' une déduction à partir de données réunies de façon axiomatique, mais il figure une appropriation progressive de propriétés et de méthodes par un mouvement d'induction généralisatrice. Toutefois, des définitions assez précises viennent ponctuer le balisage du champ couvert. Bien des définitions ainsi étendues ne modifient pas le vocabulaire précédemment utilisé, ce qui est contraire à la démarche axiomatique, mais a le gros avantage de ne pas désarçonner le mathématicien pratiquant.

Il est donc difficile de maintenir l'idée d'une absence de rigueur uniforme dans les mathématiques du XVIIIème siècle. Dans bien des cas, on note la volonté de faire "rigoureusement", et mieux, on constate la recherche d'affinements sur la méthode analytique privilégiée, de façon à permettre de réussir cette rigueur. Parce que le succès ne vint pas nécessairement à temps au rendez-vous, il ne faudrait pas oublier que ces efforts de rigueur ~~débouchèrent~~ au siècle suivant, et la réussite s'inscrivit comme la suite naturelle de la méthode analytique.

Le XVIIIème siècle cherche très souvent à rivaliser avec l'exposé considéré comme celui de la rigueur par excellence, à savoir la rigueur géométrique qui semble représentée de façon paradigmatique dans les **Eléments** d'Euclide. L'objet, puisque l'on ne parvenait pas à réaliser une presentation satisfaisante de l'analytique, en algèbre aussi bien qu'en analyse, était de montrer que l'analytique, très riche par les développements déjà obtenus et étendus sans arrêt, parvenait aux mêmes résultats que la géométrie, ni plus ni moins, dans les domaines communs.

Aussi ces preuves accumulées, par le jeu d' une sorte de méthode Coué, devraient conduire à considerer que l'analytique procède de la même rigueur que la géométrie.

8. Rigueur, économie et élégance

D'ailleurs la geométrie fournit à la rigueur analytique qui se cherche certaines exigences de style. La volonté de rigueur n'entraîne pas en effet une démarche univoque; plusieurs pistes sont encore possibles comme les choix d'Euler et d'Aepinus nous permettent de l'illustrer. Ainsi Aepinus entend établir ab ovo la formule du binôme de Newton, sans passer par la connaissance préalable des coefficients du binôme telle que déduite du cas d'un exposant entier. Son choix se porte sur une méthode propre à permettre a priori cette décision : c'est la méthode des coefficients indéterminés dans la série du binôme développé selon les puissances. La méthode, quoique analytique dans son principe, se rapproche de ce que l'on appelait encore au XVIIIème siècle la méthode synthétique, celle qui paraissait propre à la géométrie des Anciens, et qui s'impose de tout établir sans rien presupposer et en partant seulement de ce qui est démontré préalablement en rigueur. Le prix à payer est assez élevé puisqu'Aepinus se croyait contraint de faire intervenir une multitude d'équations fonctionnelles, chacune à résoudre pour des variables réelles ou complexes.

Au contraire, Euler entendait seulement montrer que la formule connue est la bonne. En parfait analyste, il partait de la série en question, et se contentait de montrer qu'elle fournit bien le binôme. La seule vérification etait donc l'établissement de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle pour cette série. Euler était cependant arrêté par la resolution generale de cette equation fonctionnelle pour tous les nombres réels, dont pourtant il ne doutait pas un instant qu'elle ne fut caractéristique.

Dès lors, la démarche analytique d'Euler pouvait se donner le luxe de l'élégance, c'est-à-dire qu'elle réalisait une economie des moyens mis en oeuvre. Et comme Euler venait après Aepinus, il pouvait reprocher à ce dernier la multiplicité des équations fonctionnelles utilisées dans la démonstration, ou plutôt se demander quel était le critère qui permettait à Aepinus de retenir telle ou telle propriété fonctionnelle de la puissance $(1+x)^m$.

" *Il* [Aepinus] *a obtenu par une méthode fort ingénieuse les valeurs d'un certain nombre de coefficients A, B, C etc....De leur concordance avec la série de Newton, sans doute aucun, il a pu conclure justement que tous les coefficients seraient conformes à cette règle, mais il faut bien voir que cette belle démonstraton s'appuie beaucoup sur l'induction. D'autre part, il convient de noter que le coefficient B n'est pas déterminé par cette méthode, mais le devient grâce à d'autres conditions qui sont fort absconses et obscures*".

La volonté d'économie sur les équations fonctionnelles fut reprise par de nombreux auteurs, notamment par S.F.Lacroix, qui tenta, en 1797, le même essai qu'Aepinus: prouver la formule du binôme ab ovo. Il entendait utiliser une seule équation fonctionnelle, suffisamment générale pour tenir la caractérisation de l'exponentielle.

" *J'aurais pu parler aussi d'une propriété plus simple pour déterminer le*

développement de a^x, *employer, par exemple, l'equation* $a^{2x} = a^x a^x$; *mais l'équation* $a^x a^u = a^{x+u}$, *qui comprend la précédente, est plus générale, et renferme toutes les propriétés dont la fonction* a^x *est susceptible, parce qu'elle en exprime la définition la plus étendue, et la seule qui présente un sens lorsque la variable x est imaginaire*".

La difficulté que rencontra Lacroix, après Aepinus, est résolue en faisant d'abord longuement intervenir le développement en série de l'exponentielle et celui du logarithme, avant d'en arriver à une preuve de la formule du binôme valable pour tous les nombres réels. Mais à se restreindre aux nombres rationnels, comme Euler le fit, Lacroix réalisa la preuve à partir d'une seule équation fonctionnelle.

L'élégance est aussi le fruit de la longue patience, de la fréquente remise de l'ouvrage sur le métier. Les mathématiques ressemblent par certains côtés à une course de relais.

Un point doit retenir notre curiosite: aucun des auteurs mentionnés n'éprouve le besoin d'expliquer ce qu'est une fonction puissance telle que $(1+x)^m$ pour une valeur réelle voire même complexe de l'exposant m. Dans cette perspective de rigueur qui est celle aussi bien d' Euler que d'Aepinus, la démarche ne correspond pas à ce que nous mettons aujourd'hui sous le nom de cheminement axiomatique. Il n'est pas besoin d'exprimer une définition sur certains objets mathématiques dont il suffit de donner une description. Cauchy lui-même ne cherche pas à le faire dans son texte de 1821 (encore qu'une note apporte en annexe une précision constructive par densité à partir des puissances d'exposant rationnel, et que le cas de la puissance réelle d'un nombre complexe fasse l'objet d'un developpement très précis et d'ailleurs passablement long et compliqué).

Ne pourrait-on pas avancer que la démarche de la rigueur au XVIIIème siècle, que nous espérons avoir suffisamment mise en évidence, est avant tout une recherche de la rigueur dans les méthodes , plus que dans le déroulement d'une théorie. Enthousiasme du formalisme, disait Kline cité au début de cet exposé pour décrire le propos analytique des mathématiciens des Lumières! Nous voyons pourtant que l'analytique est questionné face à ses performances: en le mettant dans tous ses états. N'espérait-on pas en avoir une maîtrise suffisante pour qu'il livre finalement ses secrets, c'est-à-dire que l'on puisse l'inscrire sous la forme de l'exposé euclidien. Tel etait bien le vrai problème: comment fonder la méthode analytique?

Fallait-il adopter la forte remarque de Leibniz sur l'obligation de poursuivre les "pensées aveugles"? Etait-il possible , au contraire , de changer radicalement de doctrine, et de songer à une justification possible de l'analyse par l'induction à la Condillac , allant "naturellement" de généralisation en généralisation au nom d' une sorte d'épistémologie génétique. Le débat, non résolu, pourrait expliquer certaines variations dans les explications d'Euler, tenté par Condillac et revenant à Leibniz. Mais si les" pensées aveugles" fournissaient une ligne de conduite en accord avec la démarche analytique, le point de vue inductiviste restait flou pour un mathématicien, car il n'indiquait pas la raison du succès ou de l'échec d'une généralisation. Autant il était acceptable pour la présentation des résultats

une fois trouvés , voire pour les incorporer au corpus mathématique, le condillacisme n'offrait aucune methode d'invention : que se passait-il par exemple lorsque l'on changeait , dans une fonction , l'argument réel en un argument complexe.

Le XIXème siècle permet effectivement de mesurer les difficultés qui se présentaient et que la généralisaton inductive à la Condillac masquait a priori. Il fallait penser les quantités algébriques abstraites comme susceptibles de comportements différents des quantités réelles ; il fallait chercher à déduire le continu du discret contrairement à la réussite analytique qui permettait d'obtenir des résultats brillants en théorie des nombres par le biais du continu sous la forme des fonctions analytiques; il fallait imaginer que le passage indécis de la définition analytique , et quasi polynomiale , des fonctions à une définition causale , entrainerait l'intervention de pathologies comme les fonctions continues sans dérivée en aucune point ; il fallait se rendre compte que les propriétés du développement en série entière d'une fonction ne sont pas de même nature que celles du développement en série de polynômes (comme ceux de Legendre) ou du développement en serie de cosinus et sinus multiples entiers d'un même angle, etc .

La meilleure démarche, celle-là même soucieuse de rigueur et d'architecture des mathématiques, ne passait-elle donc pas par l'exploration systématique des possibilités analytiques, en particulier pour établir les formules clefs de l'analyse , plutôt que de s'escrimer sur ses fondements alors que les choses ne paraissaient pas mûres. La formule du binôme de Newton faisait partie de ces formules importantes.

9. La rigueur comme moteur de la construction architecturale mathématique

La voie de la méthode fonctionnelle était déjà en partie à l'oeuvre dans l'Art Analytique de Viète qui a lancé la méthode analytique. Nous pensons que la méthode fonctionnelle est un prolongement conscient de la méthode analytique , et que la gêne de la première moûture s'est amplifiée pour la seconde. Dans la méthode analytique de Viète, les quatre phases ou étapes signalées de la méthode fonctionnelle sont effectivement présentes. Mais les équations qui portent sur des nombres ne sont que des équations polynomiales. De toutes façons, la détermination de toutes les racines de ces polynômes, positives ou non, réelles ou non , est nécessaire. Certes l'origine du problème posé permet quelquefois de trancher en ne considérant que telle catégorie de racines parmi toutes les racines. Ceci dit, la méthode dispose d'un garant, à savoir le théorème de Girard, c'est-à-dire le théorème qualifié de théorème fondamental de l'algébre. Son énoncé dans l'**Invention nouvelle en algèbre**, parue en 1629, commence par "*toutes les équations d'algébre recoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre*". Ainsi ce théorème de dénombrement permet de vérifier qu'aucune racine n'est oubliée, puisqu'il en donne le nombre en relation avec le degré du polynôme considéré. Certes, tous les auteurs utilisant la méthode analytique n'auront pas le scrupule de vérifier la bonne obtention de toutes les racines, même si Decartes, dans un contexte philosophique plus général, dans son **Discours de la méthode** dont la **Géométrie** est l'illustration, énonce qu'il convient de " *faire partout des dénombrements si entiers , et des rev ues si générales, que je fusse assuré de ne rien ometre*". Le même Descartes, tout le premier dans la **Géométrie** , laisse tomber des racines à propos du problème de Pappus lors d'un lieu à quatre droites.

Le passage à des fonctions non polynomiales, avec l'extension fonctionnelle de la methode analytique, fait disparaitre le garant de l'énoncé de Girard. Il faut trouver autre chose.

On ne trouve pas vraiment cette autre chose au XVIIIème siècle. L'analyse algébrique d'Euler constitue un essai pour délimiter un cadre general, en introduction prealable au calcul differentiel et integral. Cet essai tourne autour de l'extension polynomiale des fonctions, c'est-à-dire autour de l'outil central des séries entières de puissances. Quand bien même cet essai nous paraîtrait naïf en ce qui concerne la manipulation des infiniment petits et des fonctions , le grand avantage de la simplicité des trois principes évoqués plus haut pour la démarche eulérienne est de fournir un cadre architectural limité, mais relativiement précis. C'est aussi un moyen de renvoyer tout problème d'existence, "l'ontologie" si délicate en mathématiques , à la vérification de la cohérence de ce même cadre . Dans sa pratique, le mathématicien actif est ainsi libéré des doutes et des incertitudes sur le bien-fondé de sa démarche. S'il entend fonder en rigueur, il suffit qu'il parvienne à justifier l'analyse algébrique. Formalisme? Bien sûr , si l'on appelle ainsi la démarche qui consiste a exposer le plus simplement et économiquement possible un cadre.

Ce cadre prépare l'avenir sur deux plans au moins. Si le cadre apparaît cohérent, il n'yaura qu'à poursuivre dans cette voie. Mais si le cadre ne se maintient pas, si sa coherence perd de sa rigueur appparente, lorsque les temps seront mûrs et qu'on disposera des moyens de la rigueur tant souhaitée, il suffira de recueillir et de démontrer les propriétés vraiment utilisées de l'analyse algébrique, proprietés dont Euler ne doute pas un instant qu'elles ne soient vraies. N'est-ce pas précisément ce qu'entreprit de faire Cauchy. Sa demarche réussie , lue à rebours , paraît justifier Euler et sa conception de la rigueur.

Aepinus , au contraire d'Euler, manque d'une telle vision architecturale en essayant de faire feu de tout bois.

Euler lui-même entreprend de temps à autre de justifier , ou de modifier , certains aspects de son analyse algébrique. On pourrait notamment envisager quelques modifications qui porterent sur les fonctions, car au cours de cet effort un changement important va être réalisé par Euler. De fait , Euler est progressivement passé d'une définition "analytique" ou par calcul des fonctions à une définition "causale", c'est-à-dire faisant jouer la seule relation de dépendance. Sa démarche ne fut pas linéaire , mais nous n'avons pas du tout la place ici de retracer ses différentes perspectives.Contentons-nous de remarquer que dans l'article donné sur la formule du binôme les fonctions sont traitées sur ce double registre. Ainsi , lorsqu'il s'est agi de verifier que les coefficients A_k qui figurent dans le developpement du produit [n+m] sont des fonctions des variables n et m. c'est bien la possibilité effective du calcul qui est retenue comme critère satisfaisant. Mais ce calcul ne conduit pas d'abord à la determination de la nature (polynomiale?) qui régit la dépendance du coefficient A_k par rapport aux deux variables quelconques a priori, n et m.

On peut quand même s'étonner du fait que le mot fonction ne soit pas utilisé par Euler, et qu'à sa place, on trouve le vocabulaire suivant :

... *comment les coefficients. A, B, C, D, E etc. sont* ***déterminés*** *par le couple des lettres m et n ...*

Mais en étudiant plus précisément, on constate qu'Euler hésite dans cet article entre deux vocabulaires. D'une part, un vocabulaire de la **détermination** (par le calcul) d'une variable par une autre, et d'autre part une autre terminologie, conceptuellement plus large, qui est celle de la **définition** d'une variable par une autre :

"Quedmadmodum hic duos primos coefficientes A et B per litteras m et n ***determinare*** *licuit, ita manifestum est, si superior multiplicatio ulterius continuaretur, inde etiam sequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem litteras m et n* ***definiri*** *posse, quamvis calculus mox ita fieret molestus ut maximum laborem requireret."*

"De même que nous avons pu ***déterminer*** *les deux premiers coefficients A et B, à partir des lettres m et n, il est manifeste qu'en continuant la muliplication ci-dessus, on pourrait à partir de là* ***définir*** *aussi les coefficients C, D, E, etc grâce aux mêmes lettres m et n, mais le calcul deviendrait très vite épineux dans la mesure où il nécessiterait un immense travail".*

Dans la phrase suivante, la même hésitation, un pareil balancement stylistique a lieu entre une "**détermination**" et une "**définition**". C'est une autre mesure, indirecte, des préjugés à l'oeuvre dans la méthode fonctionnelle. Nous avons développé ailleurs les difficultés et les raisons qui firent passer d'un concept calculatoire pour les fonctions à un concept marquant la seule relation de dépendance.

10 CONCLUSION

En 1740, lorsque Buffon traduisit (de l'anglais) **la méthode des fluxions et des séries infinies**, il indiquait :

" *La plupart de nos erreurs en Métaphysique viennent de la réalité que nous donnons aux idées de privation ; nous connaissons le fini, nous y voyons des propriétés réelles, nous l'en dépouillons, et en considérant après ce dépouillement , nous ne le reconnaissons plus, et nous croyons avoir créé un être nouveau, tant que nous n'avons fait que détruire quelque partie de celui qui nous était anciennement connu".*

Il espérait bien , en procédant de cette manière, éviter la suspicion sur le calcul différentiel et intégral, mais ainsi, il mettait l'accent sur " *le mérite*" qui " *est donc dans l'application, en un mot dans l'emploi qu'on en fait*". Tous les mathématiciens n'agissaient pas de la sorte au XVIIIème siècle, par un volontarisme basé sur les seuls résultats escomptés, et beaucoup tentèrent de démontrer rigoureusement, non certes tout le calcul, mais des formules ou des théorèmes centraux de l'analyse des fonctions. Nous avons voulu décrire ici les attitudes d'Euler et d'Aepinus à propos du théorème du binôme de Newton, et il nous semble tout à fait possible de décrire ces démarches comme des démarches de rigueur. En outre, ces démarches les obligèrent à inventer des notations originales et surtout leur permirent de prendre la mesure exacte des difficultés.

Le point de vue des fondements du calcul n'est certainement pas traité à cette époque selon les canons de la rigueur euclidienne qui n'ont pas été remis en question-on le reconnaît volontiers- mais Euler, avec l'analyse algébrique, proposa un cadre minimal, vraisemblablement provisoire, mais qui permit de se raccrocher à quelques règles.

La rigueur pouvait alors se développer selon deux directions : celle qui consistait à justifier le cadre de l'analyse algébrique et qui requérait longue patience ou génie, et celle qui s'attaquait à une déduction "rigoureuse" de tous les résultats connus de l'analyse, à partir de ce cadre et de ce cadre seulement. Les démonstrations de la formule du binôme au XVIIIème siècle suivirent cette deuxième voie.

C'est parce qu'il a réussi à pousser à son terme la démarche

débutée par Euler en 1774, lui-même partant d'une critique sérieuse d'Aepinus, que Cauchy , en 1821, tout à la fois prouva la formule du binôme dans le cas d'un exposant réel quelconque pour une variable aussi bien réelle que complexe, et offrit une fondation rigoureuse de l'analyse algébrique, en fait de l'analyse tout entière. L'architecture globalement obtenue résultait bien de la résolution d'un problème, somme toute particulier. C'est une leçon historique à méditer sur le rôle de la rigueur mathématique.

Lagrange s'essaya de la même façon, à partir de la formule de Taylor, à tout à la fois prouver rigoureusement une formule de base et fonder en rigueur l'analyse. On connaît son échec. Il n'y a donc pas de voie assurée pour bénéficier de la rigueur mathématique.

Références et orientation bibliographique

Nous n'entendons pas sacrifier ici à l'érudition, ni donner toutes les références destinées à appuyer telle ou telle remarque. D'autant que nous avons publié plusieurs articles munis de l'apparat critique usuel sur les textes d'Euler et d'Aepinus analysés. Autant que faire se pouvait, nous avons voulu maintenir le caractère primesautier d'un exposé oral, au cours duquel un certain ton permettait de corriger des assertions trop abruptes. L'écrit gomme malheureusement de tels indices, mais on aura quand même remarqué l'absence volontaire d'appel de notes, et les citations données directement en français.

Nous avons utilisé les traductions françaises disponibles. Lorsqu'aucune n'existait, nous avons fourni une traduction qui fut revue par différents latinistes, selon les cas J.L.Gardies, C.Dugal et surtout R.Violette. Nous remercions vivement ces collègues de leur aide.

Textes originaux utilisés

N.H. Abel 1826 Recherche sur la série $1 + (m/1)x + (m(m-1)/2)x^2 + \dots$, *Journal de Crelle*, 1, **Oeuvres complètes**, tome I, Christiania, Grøndal, 1881, pp 221-250.

Aepinus F.U.T. 1751 Au lösung einer Aufgabe von den Logarithmen, *Mecklemburgische Gelehrte Zeitungen auf das Jahr 1751*. Rostock und Wismar, St. XIX, 12 Mai 1751, pp. 151-152.

1752 Demonstratio theorematis binomialis, *Gelehrte Nachrichten auf das Jahr 1752*, Rostock und Wismar, 31 Mars 1752, pp. 136.

1755/1757 De la figure des supports d'une voûte, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin 1755*, *(Mém. de l'Acad* tome XI, 1757).

1758/1765 Démonstra tion du théorème de Harriot, avec une méthode de chercher, si une équation algébrique a toutes les racines possibles, ou non ? *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1758, (tome XIV, Mém. de l'Acad., 1765).

1760/1763 Demonstratio generalis theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando, *Nov. commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop*, tome VIII (1760-1761), (Petropoli 1763), pp.169-180.

1758/1760 De functionum algebraicarum integrarum. factoribus trinomialibus realibus commentatio, *Novi comm. Acad. Scient. Imp. Petrop*, tome VIII (1760-1761), (Petropoli 1763), pp. 181-188. Sommaire pp 29-30, soumis le 21 Décembre 1758, lu le 24 Mai 1759.

1754 **Commentatio de notione quantitatis negativae**, Rostock.

1755 **De integratione et separatione variabilium in aequationibus differentialibus**, Rostock.

J. d'Alembert 1767 Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal, in **Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie**, vol. 5, Amsterdam, Chatelan.

1789 **Dictionnaire encyclopédique des mathématiques**, Paris : articles signés d'Alembert, Bossut, Lalande, Condorcet, etc.

L.F.A. Arbogast 1791 Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles. Saint-Pétersbourg, Acad. Imp. Sc.

Bernoulli D. 1726 Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium, *Comm. Sc. Imp. Petr.*, tome 1, pp.126-142 (**Die Werke von Daniel Bernoulli**, Bd 3, Birkhäuser Verlag, St 9, à paraître).

Bertrand L. 1778 **Développement nouveau de la partie élementaire des Mathématiques prise dans toute son étendue**. Genève (2 volumes).

B. Bolzano 1816 **Die binomische Lehrsatz**, Prague, Enders.

Cauchy A.L. 1843 Dei methodi analitici, Roma.

1821 **Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique** première partie, Analyse algébrique, Paris (Voir aussi **Oeuvres complètes**, 2ème série, volume 14, Paris, Gauthier-Villars).

Daviet de Foncenex 1760 Sur les principes fondamentaux de la mécanique, *Miscellanea Taurinensis*, t11, pp.299-325.

L. Euler 1748 **Introductio in analysin infinitorum**, Lausanne, voir aussi dans **Opera Omnia**, première série, volumes 8 et 9, A. Speiser (ed) Birkhäuser Verlag, 1913. Il y eut des rééditions (1783, 1797). Traduction française J.B. Labey, **Introduction à l'analyse infinitésimale**, Paris, 1ère édition 1796. Cette traduction est très bonne et très fidèle (réédition 1835). Une autre édition française parut en 1786.

1755 **Institutiones calculi differentialis**, Saint-Pétersbourg dans **Opera Omnia**, première série, volume 10, G. Kowalewski (éd.) Birkhäuser Verlag. Pas de traduction française disponible.

1768-1794 **Institutiones calculi integralis**, Saint-Pétersbourg dans **Opera Omnia**, 4 parties, première série, volumes 11, 12 et 13, F. Engel, L. Schlesinger (éd.), Birkhäuser Verlag. Pas de traduction française disponible. Il existe une traduction allemande.

1774 Demonstratio therorematis neutoniani de evolutione potestatum binomi pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 19 (1774), 1775,

pp 103-111. (**Opera Omnia**, première série, volume 15, pp.207-216).
1776 Nova demonstratio quod evolutio potestatum binomi newtoniani etiam pro exponentibus fracti valeat, *Nova acta acad Sc. Petrop.* (1787), 1789, pp. 52-58, présenté en 1776 (**Opera Omnia**, première série, vol. 16, pp.112-121).

K.F. **Gauss** 1813 Disquisitio generales circa seriem infinitam.

Comm. Soc. Reg. Sc. Gott. pp 1-46 (in Gauss, **Werke**, vol. 3, Göttingen).

Grégoire de Saint-Vincent 1647 **Opus geometricum**, Antverpiae (prop. 109 et prop. 130).

Lacroix S.F. 1797/1810-1816 **Traité de calcul différentiel et intégral**, 1ère édition Paris, 2ème édition Paris.

J.L. **Lagrange** 1806 **Leçons sur le calcul des fonctions**, Paris, Coucier **Oeuvres**, vol. 10, Paris, Gauthier-Villars (Voir aussi **Séances des Ecoles Normales**, éd. 1800-1801, vol. 10, Cercle Social, Paris).
1797 **Théorie des fonctions analytiques**, Imprimerie de la République, Paris.

A.M. **Legendre** 1794 **Géométrie**, 1ère édition, 1794, Paris, F. Didot.

G.W. **Leibniz** 1701 Mémoire touchant son sentiment sur le calcul différentiel, *Journal de Trévoux*, pp 270-272 in **Mathematische Schriften** éd. G.I. Gerhardt, vol. 1, pp 350.

S. **L'Huilier** 1795 **Principiorum calculi diffferentialis et integralis**, Tübingen.

A de **Sarasa** 1649 **Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno minie propositi**, Antverpiae.

B. **Taylor** 1717, **Methodus incrementorum directa et inversa**, Londres.

Bibliographie succincte autour d'Euler

Euler L. 1959 **Die Berliner und die Petersburger Akademie des Wissenschaften in Briefwechsel Leonhard Eulers. I. Der Briefwechsel L. Euler mit G.F. Müller** (éd. A.P. Juškevič, E. Winter, avec la collaboration de P. Hoffmann), Berlin.
1983 **Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk**, Birkhäuser Verlag, Basel.

1984 **Zum Werk Leonhard Eulers Vorträge des Euler-Kolloquiums in Mai 1983 in Berlin**, Birkhäuser Verlag, Basel.
1986 **Correspondance, Opera Omnia**, Series quarta A, vol. 6, éd. Costabel, Winter, Grigorijan, Juškevič, Bâle.
Series quarta A, vol. 5, éd. Juškevič, Taton, Bâle.

Demidov S.S. 1980 Le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles du 1er ordre aux 18è et 19è siècles (en russe) *Istoriko-matematiceskie issledovnija*, 25, pp. 71-103.

Dhombres J. 1984/1985 Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle: Archaïsme, pédagogie et style d'écriture. *Sciences et techniques en perspective*, vol 8, pp 1-55
1986a Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle, *Sciences et techniques en perspective*, vol 10, pp 192-249
1986b Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Archives Hist. of exact sciences*, vol 36, n°2, pp.91-181.
1987a Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18ème siècle, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, P. Dugac, R. Taton, à paraître.

Houzel C. 1976 Euler et l'apparition du formalisme pp 123-156 in **Philosophie et calcul de l'infini**, Paris, Maspéro.

Juškevič A.P. 1971 Leonhard Euler, **Dictionary of Scientific Biography**, vol IV, New York, Scribners and sons, pp.467-484.
1959 Euler and Lagrange über die GrundLagen der Analysis Sammelband Schröder pp.224-246.

D. **Laugwitz** 1978 Unendlich Grosses und unendlich Kleines bei L. Euler, Tech. Hochschule Darmstadt, Prepint 407.

J. **Lützen** 1978 The development of the concept of function from Euler to Dirichlet (en danois) Nord. Mat. Tidsskrift 25-26, pp. 5-32.

N. **Mathe** 1984 **Les méthodes de démonstration dans les écrits de théorie des nombres d'Euler**, thèse de troisième cycle, Toulouse, 1984.

J.F. **Montucla** 1802, **Histoire des mathématiques**, vol. 3 et 4, Paris (réédition Blanchard).

N.T. Simonov 1968 Sur les recherches d'Euler dans le domaine des équations différentielles, *Revue Histoire Sc* 21, pp.131-156.

A. Speiser 1939 Die Basler Mathematiker, 117, *Neujahrsblatt* pp. 1-51.
1941 Leonhard Euler, Grosse Schweizer Forscher, 133 p.

O. Spiess 1929 **Leonhard Euler**, Huber, 228 p.

C.A. Truesdell 1981 The role of mathematics in science as exemplified by the work of the Bernoullis and Euler, *Verhandl. Naturforsch. Gesellschaft in Basel*, 91, pp. 5-22.

G. Vivanti 1909 Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari, *Biblioth. Mathematica* (3), 10 pp.244-249.

Bibliographie autour d'Aepinus

Dhombres J. Pensivy M. Notes et traduction d'un texte d'Aepinus sur le binôme de Newton, *Sciences et techniques en perspective*, vol 11, pp. 92-130.

Home R.W. 1977 **Aepinus 's essay in the theory of electricity and magnetism.**

Rigueur et fondations de l'Analyse

Baron M. 1969 **Origins of the infinitesimal calculus**, Pergamon Press.

Berkeley G. 1735 **A defence of freethinking in mathematics**, London.
1734 **The analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician**, en traduction française, **l'Analyste**, Paris, Aubier.

Boyer C. 1959 **History of the calculus and its conceptual development** New York, Dover reprint.

Dhombres J. 1978 **Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire**, Paris, Nathan/Cédic.
1982/1983 La langue des calculs de Condillac, ou comment propager les Lumières, *Sciences et Techniques en perspective*, vol 2, pp. 187-230.
1987b Un style axiomatique dans l'écriture de la physique mathématique au 18ème siècle. Daniel Bernoulli et la composition des forces. Traduction, notes et commentaires, *Sciences et techniques en perspective*, vol 11, pp.23-91.

Dieudonné J. 1978 **Abrégé d'histoire des mathématiques**, Paris, Hermann, 2 volumes.

Dugac P. 1976 **Richard Dedekind et les fondements des mathématiques**, Vrin, Paris.
1973 Elements d'analyse de Karl Weierstrass, *Arch. Hist. Exact Sc*, 10, pp.41-176.

Grabiner J. 1981 **The origins of Cauchy's rigorous calculus**, M.I.T. Press, Boston.

Grattan-Guiness I. 1970 **The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann**, M.I.T. Press.

Gillispie C.C. (éd) 1979 **Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique**, Vrin, Paris.

C. Houzel, J.L. Ovaert, P. Raymond, J.J. Sansuc 1976 **Philosophie et calcul de l'infini**, Paris, Maspero.

Jourdain P.E.B. 1905 The theory of functions with Cauchy and Gauss *Bibliotheca math* (3), 6, pp. 190-207.

Kitcher P. 1975 Bolzano's ideal of algebraical analysis, *Studies in Hist. and Phil. of Science*, 6, pp.229-269.

Pensivy M. 1986/1987 **Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme**, thèse de troisième cycle, Université de Nantes, Octobre 1986. A paraître dans *Sciences et techniques en perspectives* en 1987.

Scriba C.J. 1981 Von Pascal Dreieck zu Eulers Gamma Funktion Zur Entwicklung der Methodik der Interpolation, **Mathematical Perspectives**, éd J. Dauben, Academic Press, pp. 221-235.

Tropfke J. 1980 **Geschichte der Elemantarmathematik** (4 Aufläge, Bd 1 Arithmetik und Algebra (K. Vogel, K. Reich, H. Gericke, W. de Gruyter), Berlin.

Truesdell C.F. 1960 **The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788, L. Euleri Opera Omnia**, 2ème série, 112, 435p. .

Verley J.L. 1975 La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, *Bulletin de l'APM, n°34*.
1978 Les fonctions analytiques, pp 129-163 in J. Dieudonné

(1978) **Eléments d'histoire des mathématiques.**

Weierstrass K. 1870 Ueber das sogenannte Dirichletsche Princip, gelesen in des Königl. Akad. des Wiss. (4 Juli 1870), **Werke,** t.2, pp 49-54, Mayer und Müller, Berlin , 1894-1927.

Rigueur mathématique

Bourbaki N. 1969 **Eléments d'histoire des Mathématiques,** Paris, Hermann.

F.E. **Browder** 1975 The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics. Proc. Amer. Workshop on the evolution of modern math. *Hist. Math* 2.

L. **Brunschwicg** 1912 **Les étapes de la philosophie mathématique** (réédition Blanchard, Paris).
1927 **Les progrès de la conscience dans la philosophie occidentale**, Paris.
1911 La notion moderne d'intuition et la philosophie des mathématiques, *Revue Métaphy. Morale*, 19, pp.145-176.

Cavaillès J. 1938 **Méthode axiomatique et formalisme,** Paris, Hermann.
1962 **Philosophie mathématique,** Paris, Hermann.

A. Cournot 1922 **Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique,** 3ème édition, Paris.

L. **Couturat** 1905 Définitions et démonstrations mathématiques *Enseignement Math* 7, pp.104-121.

J. **Dieudonné** 1939 Les méthodes axiomatiques et les fondements des mathématiques. *Revue Sc.* 77, pp.224-232.

Frege G. 1969 **Les fondements de l'arithmétique,** Paris, traduction française de C. Imbert (**Grundgesetze der Arithmetik**),

Goldstine K. 1977 **A history of numerical analysis from the 16th through the 19th cenrury,** New-York, Springer Verlag.

Hilbert D. 1930 Problem der Grundlegung der Mathematik , *Math. Annalen*,102, pp 1- ,

J. **Gergonne** 1818-1819 Essai sur la théorie des définitions , *Annales de mathématiques*, 9, pp 1-3.

G. **Israel** 1981 "Rigor" and "axiomatics" in modern mathematics, *Fund. Scient*, vol. 2, n°2 pp 205-219.

A.P. **Juškevič** 1977 The concept of function up to the middle of the nineteenth century. *Arch. Hist. Ex. Sc.* 16, pp 37-85, traduit par J.M. Bellemin, *Fragments d'histoire des mathématiques*, Paris 1981 pp 7-68.

M. **Kline** 1972 **Mathematical thought from ancient to modern time,** New-York, Oxford University Press.

F. **Le Lionnais** (éd) **Les grands courants de la pensée mathématique** Paris (réédition Blanchard).

Leray J. 1967 L'invention en mathématiques, in **Logique et connaissance scientifique**, la Pléiade, Paris, Gallimard, pp 465-473.

J. **Pierpont** 1928 Mathematical rigor, past and present , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 34, pp. 23-53.

H. **Poincaré** 1902 **La science et l'hypothèse**, Paris.

Russell B. 1952 **Introduction à la philosophie mathématique** (trad. française), Payot, Paris.

M. **Winter** 1911 **La méthode dans la philosophie des mathématiques**, Paris.

APPENDICE

Table des matières : Analyse Algébrique
A.L. CAUCHY (1821)

PREMIÈRE PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

QUELQUES ASPECTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE (IXe - XVe s.)

Ahmed DJEBBAR
Université de Paris-Sud Orsay

(1)

QUELQUES ASPECTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE (IX^{e} - XV^{e} s.)

A. DJEBBAR
Université de Paris-Sud, Orsay.

I. INTRODUCTION.

Parmi toutes les disciplines mathématiques qui ont fait l'objet d'enseignement et de recherches dans le cadre de la civilisation arabo-islamique, entre le IX^{e} et le XV^{e} siècle, l'algèbre est celle qui a bénéficié du plus grand nombre d'études de la part des historiens des sciences.

Ces études, parfois très documentées et très minutieuses, ont porté tour à tour sur les origines de l'algèbre arabe(1), sur ses débuts, sur son contenu et sa terminologie, sur les différents aspects de son développement, en relation avec d'autres disciplines mathématiques ou avec son environnement, et enfin sur sa transmission à l'Europe médiévale, soit directement, soit par l'intermédiaire des traductions hébraïques et latines.

Grâce aux résultats de ces recherches (dont certaines sont très récentes), nous allons tenter de faire le point sur ce qui est connu aujourd'hui du contenu de l'algèbre arabe, de ses grandes orientations et des obstacles auxquels elle s'est heurtés au cours de son développement.

Certains points précis de l'histoire de cette algèbre, comme ceux qui sont relatifs à ses origines et à ses débuts, continuent de susciter des interrogations et des débats et font encore l'objet de recherche. Dans cet exposé, nous nous contenterons de résumer les différentes hypothèses émises à leur sujet, en nous attardant beaucoup plus sur les aspects plus tangibles de cette algèbre (avec leurs éléments de continuité et d'innovation), tels que nous les révèle le discours algébrique lui-même à travers les ouvrages de recherche et les manuels d'enseignement qui ont été produits, au centre, à l'est et à l'ouest de l'empire musulman, entre le IX^{e} et le XV^{e} siècle.

II. LES DEBUTS DE L'ALGEBRE DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE.

II.1. Le traité d'al-Khwārizmī.

Il est admis par tous les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec, à la fois, un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application), a été la publication du petit traité de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850), intitulé <u>al-Mukhtaṣar fī Ḥisāb al-Jabr wa l-Muqābala</u> (L'abrégé du calcul <par les procédés> du Jabr et de la Muqabala[2]) qui a été rédigé avant 833 et dédié au khalife al-Ma'mūn (813-833) qui s'était rendu célèbre par son mécénat en faveur des sciences et de la philosophie.

Il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin, et pour mieux suivre l'évolution ultérieure de l'algèbre, de présenter brièvement le contenu de ce livre tel qu'il nous a été transmis à travers les copies arabes manuscrites qui nous sont parvenues.[3]

Le livre d'al-Khwārizmī est divisé en deux grandes parties, précédées d'une introduction consacrée à la traditionnelle doxologie, à la dédicace et à un exposé très clair de la nature et des buts de l'ouvrage. Voici d'ailleurs en quels termes l'auteur y présente son contenu :
[C'est un abrégé] "englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux, relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects" [Dhombres,...,Guillemot 1987, p.96].

La première partie évoquée rapidement dans l'introduction par l'expression *"opérations du calcul "* et qui est, en fait, la partie la plus importante, au regard de l'histoire de l'algèbre, se subdivise elle-même en plusieurs chapitres :

Dans le premier, al-Khwārizmī, après avoir rappelé brièvement la définition du système décimal, définit les

objets de l'algèbre : les nombres (entiers et rationnel positifs), l'inconnue (*Jidhr* = racine) et son carré (*Māl* = bien), et il donne les six équations canoniques selon l'ordre suivant et en les accompagnant d'exemples :

I. $ax = b\sqrt{x}$; II. $ax = c$; III. $b\sqrt{x} = c$

IV. $ax + b\sqrt{x} = c$; V. $ax + c = b\sqrt{x}$; VI. $b\sqrt{x} + c = ax$

avec a, b, c des entiers, des rationnels et parfois même des irrationnels quadratiques, tous strictement positifs[4].

Dans le second chapitre, il fournit, pour chacun des six types précédents son algorithme de résolution. Chaque étape de cet algorithme est exprimée une première fois, d'une manière générale, puis explicitée à l'aide des coefficients numériques de l'équation qui illustre le type étudié. Ces équations à coefficients numériques déterminés deviendront elles-mêmes canoniques et, pendant des siècles, serviront d modèles dans l'enseignement de l'algèbre.[5]
Puis, il expose leurs algorithmes de résolution et l justifications (géométriques) de l'existence de leu solutions (positives).

Dans le troisième chapitre, al-Khwārizmī explique procédé "d'algébrisation" d'un problème donné afin de ramener à l'une des équations canoniques précédentes.

Dans le quatrième, il expose l'extension des opératic arithmétiques classiques (addition, soustractior multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre d'alors que sont les nombres (entiers, rationnels ou irrationnels quadratiques positifs), les monômes binômes et les trinômes, en tentant, parfois sans succès, justifier géométriquement certaines de ces opérati arithmétiques.[6] Il y formule également ce qui correspond plus tard à la règle des signes, mais sans en donner une justification[7].

Le cinquième et dernier chapitre de cette première partie est constitué d'une quarantaine de probl d'applications, groupés en trois thèmes (problèmes dizaines, des biens et des hommes), et résolus à l'aide de outils des chapitres précédents.[8]

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et répartition des héritages (selon la législation islamique), à l'aide des outils de l'algèbre exposés dans la première partie.

Compte tenu de ce que nous savons aujourd'hui du contenu des procédés algébriques babyloniens, grecs et indiens, nous pouvons constater, à la seule lecture de cette table des matières du livre d'al-Khwārizmī, que, pour la première fois, nous trouvons rassemblés dans un même ouvrage, un ensemble d'éléments (définitions, opérations, algorithmes, démonstrations) qui étaient soit éparpillés et sans lien entre eux, soit non formulés explicitement et indépendamment des problèmes d'application.
De plus, tous ces éléments sont assemblés selon une logique qui vise à distinguer clairement ce chapitre des autres chapitres de la "Science du calcul".

L'importance du saut qualitatif que représente le contenu de ce livre et surtout ses formulations et son agencement, n'ont pas échappé aux contemporains d'al-Khwārizmī et à leurs successeurs et n'ont pas manqué de susciter deux questions au moins : celle de sa priorité et celle de son originalité.

II.2. La question de la priorité du traité d'al-Khwārizmī.

Dès le X[e] siècle, cette question semble avoir fait l'objet d'un débat au sein même de la communauté mathématique de l'époque : dans son livre intitulé *al-Fihrist* (Le Catalogue), le bio-bibliographe bagdadien Ibn al-Nadīm (m. 990) nous apprend en effet que deux autres mathématiciens contemporains d'al-Khwārizmī ont publié des ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre et portant tous les deux le titre de *Kitāb al-Jabr* [Ibn an-Nadīm 1971, pp.334,339]. Il s'agit de Sanad Ibn ʿAli et d'Ibn Turk. Le petit fils de ce dernier, connu sous le nom d'Abū Barza (m. 910) et qui était également mathématicien, aurait affirmé que, dans ce domaine, la priorité revenait à son grand-père. Mais, c'est l'opinion d'autres algébristes, comme Abū Kāmil, qui a finalement prévalu puisqu'à partir du X[e] siècle, la priorité d'al-Khwārizmī était semble-t-il admise par la communauté scientifique, à la fois en Orient et en Occident, comme le confirme Ibn Khaldūn au XIV[e] siècle [Ibn Khaldūn 1967, p.899].[(9)]

Quant à nous, il nous est difficile de trancher car l'ouvrage de Sanad Ibn ʿAli est encore perdu et, de celui d'Ibn Turk, il ne nous est parvenu qu'un seul chapitre [Sayili 1962]. Cela dit, l'existence même de cette polémique,

ajoutée au caratère très élaboré de la première partie du livre d'al-Khwārizmī, comme du chapitre existant de celui d'Ibn Turk, nous autorisent à penser que les premiers traités d'algèbre produits au sein de la tradition mathématique arabe sont vraisemblablement le résultat de synthèses précédées et préparées par une activité algébrique et arithmétique antérieure au IX[e] siècle mais dont les historiens et les bio-bibliographes arabes n'ont pas retenu les étapes de maturation. Il est alors possible que la synthèse d'al-Khwārizmī ait été préférée à celles de ses contemporains pour des qualités et des nouveautés qu'elle était la seule à renfermer, comme il est possible que d'autres considérations, non scientifiques celles-là, aient prévalu à un moment ou à autre[(10)].

II.3. La question des origines du livre d'al-Khwārizmī.

Les hypothèses précédentes qui ne diminuent en rien l'importance du livre d'al-Khwārizmī et n'entament pas son originalité, permettent d'aborder tout naturellement la question des différentes traditions algébriques pré-islamiques et de leurs rôles éventuels dans l'avènement de la nouvelle discipline.

Il faut tout d'abord signaler que, lorsqu'il s'agit de géométrie, d'arithmétique ou d'astronomie, les bio-bibliographes arabes n'hésitent pas à nous fournir des détails sur les ouvrages fondamentaux, essentiellement grecs et indiens, qui ont nourri les premières recherches de la tradition arabo-islamique. Pour l'algèbre c'est, a contraire, le silence total. Les chercheurs sont donc réduits à interroger les textes algébriques eux-mêmes en comparant leurs contenus (terminologie, définitions, algorithmes, démonstrations) au contenu des documents algébriques babyloniens, grecs et indiens qui nous sont accessibles aujourd'hui. Ce travail qui a commencé il y a quelques décennies et qui se poursuit encore a débouché sur un certain nombre d'hypothèses que nous allons tenter de rappeler brièvement :

La première est favorable à une origine grecque. Elle a été avancée et défendue au XIX[e], en particulier par L. Rodet (1878). Mais elle s'est avérée très fragile, après la découverte des tablettes mathématiques babyloniennes. En effet, les deux seuls ouvrages grecs qui étaient susceptibles d'inspirer les premiers algébristes arabes sont <u>Les Eléments</u> d'Euclide (III[e] s.) (plus particulièrement certaines propositions des Livres II et VI) et Les Arithmétiques de Diophante (IVe s.). Or, le second ouvrage qui contient en particulier l'algorithme de résolution d'une équation du second degré, ne sera traduit en arabe qu'à la fin du IXe siècle ou au début du Xe, c'est à dire plus d'un demi-siècle après la rédaction du livre d'al-Khwārizmī.

Quant aux Eléments d'Euclide, dont une des traductions arabes au moins, celle d'al-Ḥajjāj (m. 833), a précédé la parution des premiers livres d'algèbre, la nature et la formulation de ses propositions sont géométriques et l'on ne peut y lire des problèmes algébriques qu'après avoir été sensibilisé au contenu de l'algèbre "réthorique". Il faut d'ailleurs remarquer qu'aucun mathématicien connu du IXe siècle n'a pensé algébriser les propositions des Eléments qui étaient susceptibles de l'être, comme le feront certains d'entre eux, par exemple pour le fameux lemme de la proposition 4 du Livre II de la Sphère et du cylindre d'Archimède.

Restent les procédés de démonstration de l'existence des solutions des trois dernières équations d'al-Khwārizmī : quand on les compare à ceux qui interviennent dans certaines propositions du Livre VI des Eléments, on relève des différences notables, non seulement dans la forme mais également dans la démarche. cela peut s'expliquer par une volonté délibérée de proposer à ses futurs lecteurs, non spécialisés en géométrie euclidienne, des démonstrations "directes sans intervention des propositions 5 et 6 du Livre II des Eléments (comme le fera, quelques années plus tard, Thābit Ibn Qurra (m. 901)). N'oublions pas en effet que le livre d'al-Khwārizmī était, dans l'esprit de son auteur, un abrégé destiné aux utilisateurs, et non un ouvrage théorique pour des étudiants en mathématique rompus aux subtilités de la géométrie des Eléments.

A cela, il faudrait ajouter le silence d'al-Khwārizmī à propos des sources grecques en général, alors que, dans son traité d'algèbre, il n'hésite pas à se référer aux sources indiennes [Anbouba 1978, pp.67] et que son manuel d'arithmétique était intitulé "Le livre de l'agrégation et de la désagrégation à l'aide du calcul indien [Youschkevitch 1976, pp.16]. (11)

Ce dernier élément rendrait plus vraisemblable une éventuelle influence indienne, surtout lorsqu'on sait que dès la fin du VIIIe siècle une mission de l'Inde, envoyée à la cour du calife abbasside al-Manṣūr (754-775), avait mis à la disposition des savants de Bagdad un Siddhanta, ouvrage astronomique renfermant habituellement un chapitre sur les

procédés de calcul (arithmétiques et algébriques) nécessaires à la résolution de problèmes astronomiques. Il n'est pas exclu d'ailleurs que l'ouvrage offert (et qui sera traduit en arabe) soit le célèbre Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta (VIIe s.) dont le chapitre XVIII expose, entre autre, les algorithmes algébriques de résolution des équations quadratiques [Colebrooke 1817, pp.325-372].

Mais cette influence indienne, si elle se confirmait un jour (grâce en particulier à une analyse comparative des textes des deux traditions) n'exclurait pas une seconde influence que ni les mathématiciens ni les bio-bibliographes arabes n'ont évoquée explicitement et qui pourrait être pourtant la plus importante. Il s'agit de la tradition algébrique babylonienne dont les découvertes archéologiques du début du XXe siècle et les analyses qui les ont suivies ont révélé l'importance.

Comme il est raisonnable d'admettre que des survivances de cette tradition se sont perpétuées dans certaines communautés d'initiés, comme les arpenteurs ou les spécialistes des héritages, il n'est pas absurde de penser que durant la période de maturation qui a préparé l'avènement des savants du début du IXe siècle, l'une des activités des premiers enseignants de mathématiques a été précisément consacrée à la collecte de ces procédés algébriques à leur assimilation et à leur enseignement, aux côtés des autres techniques de la science du calcul.

On peut même admettre que les matériaux empruntés à la tradition mathématique babylonienne par al-Khwārizmī et par ses contemporains ne se sont pas limités aux algorithmes algébriques mais qu'ils ont compris également des constructions géométriques dont certaines vont intervenir d'une manière ou d'une autre, dans les justifications de l'existence des solutions des équations quadratiques [Hyr. 1986, pp.445-484].

III. LA TRADITION D'AL-KHWĀRIZMĪ.

Le caractère très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IXe siècle, ne nous permet pas de dater les contributions nouvelles qui s'inscrivent dans ce que l'on pourrait appeler la tradition d'al-Khwārizmī (pour la distinguer des traditions algébriques postérieures). Nous nous contenterons donc d'évoquer les travaux connus, mais plus tardifs, dans lesquels ils se manifestent à nous pour la première fois.

(8)

Il faut tout d'abord noter la publication, au cours de la seconde moitié du IX^{e} siècle et du début du X^{e}, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre et dont certains portent le titre de Commentaire du livre d'algèbre d'al-Khwārizmī. (12) Malheureusement, aucun de ces traités n'a encore été retrouvé. Mais, à la lumière des écrits ultérieurs, il n'est pas interdit de penser que leur contenu intégrait les progrès internes à l'algèbre et les améliorations suscitées par des recherches extérieures à cette discipline, comme ceux qui étaient réalisés par les astronomes en géométrie et en trigonométrie et que nous évoquerons plus loin.

A côté de ces commentaires, on remarque la production de deux types d'écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'algèbre et la géométrie grecque, reflétant par la même occasion les progrès enregistrés dans l'assimilation du corpus euclidien. C'est ainsi que Thābit Ibn Qurra (m. 901) rédige un opuscule intitulé La justification des problèmes de l'algèbre par les preuves géométriques dans lequel il utilise les propositions 5 et 6 du Livre II des Eléments, pour justifier l'existence des solutions des trois équations quadratiques canoniques [Ms. Istanbul Aya Sofya 2457/3^{e}, ff.39a-41a].

Avec al-Ahwazi (X^{e} s.), c'est plutôt la démarche inverse puisque c'est l'algèbre qui est utilisée dans son commentaire du Livre X de ces mêmes Eléments pour expliciter la racine carrée de certaines grandeurs irrationnelles [Ms. Tunis 16167, ff.61b-65a].

A l'extérieur du domaine de l'algèbre, les innovations suscitées par elles voient également le jour à partir du IX^{e} siècle :

1. Lecture "algébrisée" de certaines propositions du Livre II des Eléments d'Euclide et "arithmétisation" des propositions du Livre X qui définissent certaines grandeurs incommensurables (les "rationnels en puissance", les "médiales", les "binômes", les "apotomes" ainsi que leurs racines carrées) et qui deviendront chez le mathématicien al-Māhānī et chez ses successeurs, une sous-classe de nombres (celle des irrationnels quadratiques et biquadratiques). Ces nouveaux nombres, qui généralisaient les irrationnels quadratiques empruntés aux indiens et aux survivances mathématiques babyloniennes, étaient eux mêmes enrichis par une classe de nombres d'un genre différent (selon le point de vue euclidien), puisqu'ils ne s'obtiennent pas par les techniques géométriques des Eléments ; il s'agit des nombres de la forme :

(9)

$$n^{1/2^{p}}, \quad m^{1/2^{k}} . n^{1/2^{p}}$$

et de leurs combinaisons par addition et soustraction [Ms. Paris 2457, ff.180b-181b].

2. Mise en équation de certains problèmes de géométrie et de trigonométrie : c'est ainsi que le même al-Māhānī, en voulant démontrer le célèbre lemme du problème d'Archimède de la division d'une sphère en deux parties dont le rapport des volumes est donné (Proposition 4 du Livre II du traité de la Sphère et du cylindre), aboutira à une équation du 3^{e} degré qu'il ne parviendra pas à résoudre et qu'il finira par considérer comme impossible [Rashed et Djebbar 1981]. Cela ouvrira la voie à un ensemble de recherches géométriques qui aboutiront à l'étude de certaines équations de degré supérieur ou égal à trois (et toujours à coefficients positifs).

Plus tard, des mathématiciens-astronomes, comme al-Bīrūnī (m. 1048) ou son contemporain Abu l-Jūd, préoccupés par la détermination exacte puis approchée de la trisection d'un angle et de la longueur des côtés de certains polygone non constructibles (comme l'heptagone et l'ennéagone) aboutiront eux-aussi à des équations du 3^{e} degré [Youshkevitch 1976, pp.93-94].

IV.- LA TRADITION D'ABŪ KĀMIL

Cette tradition des IX^{e}-X^{e} siècles englobe un ensemble de mathématiciens dont les contributions vont concerner deux domaines déjà présents dans le Mukhtaṣar d'al-Khwārizmī : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées.

On voit ainsi apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui sont irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abū Kāmil dans son important traité al-Kāmil fi l-Jabr wa l-Muqābala (Le <livre> complet sur le Jabr et la Muqaba[la]) [Levey 1966], [Sezgin 1986].
Cela a été rendu possible par les travaux de la période antérieure, relatifs au livre X des Eléments, et qui seront enrichis et systématisés au X^{e} et au XI^{e} siècle. C'est ainsi que le mathématicien al-Baghdādī (XI^{e} s.) consacre toute une épître à l'exposé de nombreuses règles permettant de simplifier les opérations arithmétiques (en particulier la

division) appliquées aux irrationnels qui sont combinaisons de racines carrées et de racines quatrièmes [Matvievskaïa 1972].

Cette orientation sera poursuivie au XI^{e} siècle par al-Karajī [Anbouba 1964] et au XII^{e} siècle par as-Samaw'al [Ahmad et Rashed 1972] qui justifieront l'extension de certaines opérations arithmétiques aux irrationnels, octroyant ainsi, de fait, un statut de nombre aux grandeurs issues du Livre X des <u>Eléments</u> d'Euclide, ainsi qu'aux autres irrationnels.

Les progrès enregistrés dans ce domaine, et qui ne doivent pas, selon nous, être dissociés des progrès de l'algèbre elle-même, ont ainsi permis une extension importante de la notion de nombre et ont probablement favorisé la réflexion et les recherches qui seront menées jusqu'aux XII^{e} siècle autour de ce qui sera appelé plus tard les nombres réels.

Le second sujet étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de cette école et qui s'avèrera d'une grande fécondité est celui de l'extension de la notion de monôme et de polynôme et son application à l'étude des équations. Si l'on en croit Sinān Ibn al-Fatḥ (X^{e} s.), plusieurs mathématiciens, avant lui, avaient été amenés à considérer des monômes de degré supérieur à 2 et à les nommer, mais il dit être le premier à en avoir rédigé un exposé systématique et à s'en servir pour étendre le domaine des équations résolubles par radicaux.

Son étude, qui nous est heureusement parvenue, contient en effet pour la première fois, à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes, les noms affectés à chaque degré et la généralisation des six équations canoniques de degré inférieur ou égal à 2n+p, obtenues à partir des six équations d'al-Khwarizmi en y remplaÇant les monômes 1, x, x^2, respectivement par x^p, x^{n+p} et x^{2n+p} [Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4e, ff.95a-104a].

V.- LA TRADITION D'AL-KARAJĪ :

V.1- La théorie des polynômes.

Nous n'avons aucun élément d'information sur l'impact immédiat qu'a pu avoir cette extension des monômes et des équations et il faudra attendre la fin du X^{e} siècle ou le début du XI^{e} pour en mesurer l'aboutissement en quelque sorte

à travers les travaux d'al-Karajī (m. 1029). C'est en effet dans ses livres que l'on trouve un exposé des premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec la règle de multiplication et de division des monômes et des inverses de monômes, basée sur l'utilisation explicite de la notion de puissance (en arabe : Uss) et des opérations d'addition et de soustraction de ces puissances associées, respectivement, aux produits et aux rapports de monômes.

On y trouve également une justification partielle de l'extension des quatre opérations arithmétiques aux polynômes de degré quelconque. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'al-Karajī expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme [Anbouba 1964].

Cette étude d'al-Karajī sera poursuivie par as-Samaw'al (m. 1175) qui justifiera la division d'un polynôme par un autre polynôme composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés et qui ajoutera aux quatre opérations arithmétiques classiques un algorithme d'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait.

Toutes ces études vont être facilitées par l'introduction du symbolisme des tableaux qui permettra aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs, comme le montre l'exemple suivant, emprunté au <u>Kitāb al-Bāhir fi l-Jabr</u> (le livre magnifique en algèbre) d'as-Samaw'al : il s'agit de diviser :

$$6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 - 200x^2 + 20x$$

par :

$$2x^5 + 8x^4 - 20x^2$$

L'auteur dispose ainsi les coefficients :

choses	carrés	cubes	carré-carré	carré-cubes	cube-cube	carré-carré-cube	carré-cube-cube
20	moins 200	92	38	moins 80	6	28	6
				moins 20	0	8	6

Puis, il effectue la division en mettant les quotients partiels correspondants à leurs monômes respectifs, dans les cases laissées vides [Ahmad et Rashed 1972, Edition pp. 48-50].

V.2. Les systèmes d'équations.

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwārizmī, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations [al-Khwārizmī 1968, pp.74, 104], il ne semble pas que le livre soit à l'origine de ce chapitre de l'algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux relatifs aux oiseaux, suggèrerait plutôt une origine chinoise ou indienne.(13) Mais, les sources arabes concernant la période des traductions (VIII^{e}-IX^{e} siècles) sont sur ce point silencieuses et les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations n'ont pas encore été retrouvés. Ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du X^{e} ou du XI^{e} siècle, ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure.

Il y a tout d'abord le livre d'algèbre d'Abū Kāmil qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre [Ms. Istanbul, Kara Mustafa Paša 379, ff.95a-101a].

Le second livre d'Abū Kāmil, intitulé <u>at-Ṭarā'if fi l Ḥisāb</u> (Les <choses> rares en calcul), est tout entier consacré aux systèmes d'équations : six problèmes seulement y

sont traités, mais dans une perspective qui dépasse le simple exposé des algorithmes de résolution puisqu'il s'agit, pour l'auteur, de montrer l'existence des systèmes impossibles, de ceux ayant une et une seule solution et, enfin, de ceux qui peuvent avoir plusieurs solutions. Il illustre ce dernier cas par quatre systèmes aboutissant respectivement à 6, 98, 304 et 2676 solutions [Ms. Paris, B.N. 4946, ff.3b-15a].

Après lui, al-Karajī reprendra, dans son ouvrage d'algèbre <u>al-Fakhrī</u>, des problèmes du même type sans toutefois les regrouper dans un chapitre autonome. Il s'agira de problèmes dits "des hommes", "des biens", etc., qui aboutissent à des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 4 [Ms. Paris, B.N. 2459, ff.42b-72b].

Il faut enfin signaler un petit traité encore inédit du mathématicien et physicien Ibn al-Haytham (m. 1039), consacré exclusivement aux systèmes d'équations à n inconnues, n quelconque, qui sont du type :

$$n_i x_i = m_j x_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham tranche avec celle de ses prédécesseurs, à la fois au niveau de l'exposé des différents problèmes et au niveau de leur résolution qui est présentée selon une démarche générale accompagnée de justifications mathématiques. L'auteur précise d'ailleurs qu'il est le premier à avoir donné ces justifications [Wiedemann 1926-27].

nous ne savons pas si ce chapitre a fait l'objet de recherches originales, en pays d'Islam, après le XI^{e} siècle. Cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à l'étude d'Ibn al-Haytham, puiqu'ils ne font que reprendre tel ou tel type de problèmes déjà traités aux X^{e}-XI^{e} siècles. Mais, cette observation n'est pas décisive, compte tenu du caractère très lacunaire de nos connaissances actuelles relatives aux sources orientales et surtout andalouses.

V.3. L'analyse indéterminée.

Contrairement au chapitre précédent sur les systèmes d'équations, celui de l'analyse indéterminée semble devoir beaucoup à la tradition grecque. C'est du moins ce que laisse supposer le contenu des problèmes qui nous sont parvenus et dont les auteurs sont encore Abū Kāmil et al-Karajī.(14)

Le premier expose et résoud, dans son livre d'algèbre

(14)

al-Kāmil, 38 équations ou systèmes d'équations du premier ou du second degré et dont le second membre est toujours un carré [Sesiano 1977a, pp.91-93]. La forme de ces problèmes fait penser naturellement au contenu des Arithmétiques de Diophante. Mais, cette filiation est contrariée par deux éléments importants : le premier est mathématique et concerne l'utilisation par Abū Kāmil de méthodes inexistantes dans les dix livres connus des Arithmétiques, comme celles qui permettent de résoudre les systèmes de la forme :

$$x^2 + ax + b = \square_1$$

$$x^2 + ax + b + c\sqrt{x^2 + ax + b} = \square_2 \quad ; \; a, b, c, \text{ donnés.}$$

ou de la forme :

$$x^2 + a_1 x + b_1 = \square_1$$

$$x^2 + a_2 x + b_2 = \square_2$$

dont le traitement suppose d'ailleurs une grande maîtrise des outils algébriques [Sesiano 1977a, pp.99-102].

On pourrait évidemment penser que ces méthodes ont été empruntées aux trois livres encore perdus de l'ouvrage de Diophante, mais le second élément rend cette dernière hypothèse très improbable : on sait en effet que seuls les livres IV à VII des Arithmétiques ont bénéficié d'une traduction en arabe et que cette traduction a été réalisée par Qusta Ibn Luqa (m. 910), entre la fin du IXe siècle et le début du Xe [Sesiano 1975]. Abū Kāmil était un contemporain de notre traducteur mais n'a pas eu, semble-t-il, connaissance de sa traduction. Il a probablement repris, comme à son habitude, des problèmes anciens en leur ajoutant de nouveaux problèmes et peut-être de nouveaux procédés de résolution. Cette hypothèse est renforcée par les allusions de l'auteur à une tradition vivante dans ce domaine, et par conséquent antérieure à la traduction des arithmétiques, ainsi qu'à l'existence de deux termes pour désigner les problèmes de ce chapitre (problèmes "indéterminés" pour certains mathématiciens et "à plusieurs solutions" pour d'autres).

Cela dit, et quelle que soit la source d'Abū Kāmil et de ses prédécesseurs ou contemporains, on constate que ces problèmes seront appréhendés comme des problèmes d'algèbre et constitueront le troisième chapitre de cette discipline, aux côtés des équations quadratiques et des polynômes.

(15)

Mais, il est indiscutable que c'est la traduction des livres de Diophante, retrouvés à la fin du IXe siècle, qui vont accélérer le développement de ce chapitre. Des mathématiciens prestigieux comme Abu l-Wafā (m. 998) vont d'abord étudier puis commenter les problèmes de Diophante, créant ainsi les conditions d'une double orientation dans ce domaine :

La première, qui ne concerne pas notre sujet, est arithmétique et porte sur l'étude des triplets pythagoriciens, des nombres congruents et de la "conjecture de Fermat" [Anbouba 1979, pp. 134-178], [Rashed 1984, pp.195-225].

La seconde, algébrique, est illustrée par les travaux de la tradition d'al-Karajī. Deux ouvrages de ce dernier s'inscrivent d'ailleurs dans cette tradition diophantienne réactivée. Il s'agit du Fakhrī dont la plus grande partie est consacrée à des problèmes indéterminée, et surtout du Badīc fi l-Ḥisāb (le <livre> merveilleux sur le calcul) [Anbouba 1964] qui comprend une classification des problèmes traités, un exposé des méthodes de résolution et des commentaires sur le champs d'application de chacune de ces méthodes. Le Badīc apparaît ainsi comme le premier ouvrage renfermant une étude systématique de ce chapitre de l'algèbre [Sesiano 1977b].

VI. LA TRADITION D'AL-KHAYYĀM.

Parallèlement aux recherches entreprises par les mathématiciens des deux traditions d'Abū Kamil et d'al-Karajī, on observe la naissance et la consolidation d'une orientation nouvelle en algèbre, celle de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois. On peut dater cette naissance par l'échec d'al-Māhānī dans sa tentative de résoudre par radicaux l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2 \; ; \quad c > 0,$$

qui découle de la "traduction" algébrique de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède De la Sphère et du Cylindre que nous avons déjà évoquée, à propos des débuts de l'algèbre. Cet échec va stimuler les recherches qui aboutiront à la résolution d'un certain nombre d'équations du 3e ou du 4e degré (à coefficients positifs). C'est ainsi que, d'une manière indépendante, al-Khāzin (Xe s.) et Ibn al-Haytham (m. 1039) établiront l'existence de la solution positive de l'équation d'al-Māhānī à l'aide de l'intersection de deux

(16)

coniques. A peu près à la même époque, le mathématicien al-Kūhī posera et résoudra un nouveau problème géométrique qui aboutit à une équation du troisième degré : il s'agit de trouver une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée [Youschkévitch 1976, pp. 90-94].

Parallèlement, il semble que certains mathématiciens aient poursuivi leurs recherches en vue de résoudre, par radicaux, les équations cubiques. Al-Khayyām est de ceux-là. Il le dit lui-même, reconnaît l'échec de ses tentatives et laisse entendre que c'est bien cette raison qui l'a amené à systématiser les démarches de ses prédecesseurs et à élaborer une théorie géométrique des équations cubiques : dans son ouvrage intitulé <u>Maqāla fi l-Jabr wa l-Muqabala</u> (Traité sur le Jabr et la Muqabala), al-Khayyām donne une classification des 25 équations (à coefficients tous positifs) de degré inférieur ou égal à trois, en distinguant celles dont l'existence des solutions (positives) ne reposent que sur des propositions des <u>Eléments</u> d'Euclide (c'est à dire celles dont les solutions sont constructibles) et celles dont les solutions (positives), lorsqu'elles existent s'obtiennent par intersection de deux coniques (en fait paraboles, hyperbole ou cercle) [Rashed et Djebbar 1981].

Les équations de la seconde classe ont été, à notre avis, étudiées à l'aide de l'analyse et de la synthèse, même si l'auteur n'expose que la moitié de son travail qui correspond à la synthèse. En effet, voici comment il procède avec une des équations cubiques (la 14^{e} dans sa classification) :

$$x^3 + c = bx \qquad (K_{14})$$

Al-Khayyām exhibe les deux coniques suivantes (qui sont exprimées ici analytiquement mais qu'al-Khayyām définit à l'aide de la terminologie des coniques d'Apollonius, sans d'ailleurs préciser la manière de les déterminer)(12) :

$$(P) = \{ (x,y),\ x^2 = b^{1/2}y \}$$

$$(H) = \{ (x,y),\ y^2 = x(x - \frac{c}{b}) \}$$

Puis, il associe une intersection des deux courbes à la solution positive de l'équation (K_{14}) :

(17)

$(H)\cap(P) = \emptyset \implies (K_{14})$ n'a pas de solution (positive).
$(H)\cap(P) = \{ M(x_0,y_0) \} \implies x_0$ est solution de (K_{14}).

Pour montrer cette dernière assertion, il procède ainsi :

$$(x_0,y_0) \in (P) \implies \frac{x_0}{y_0} = \frac{b^{1/2}}{x_0}$$

$$(x_0,y_0) \in (H) \implies \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{(x_0-c/b)}$$

Donc :

$$\frac{b^{1/2}}{x_0} = \frac{b}{x_0^2} = \frac{x_0}{(x_0-c/b)}$$

D'où le résultat :

$$x_0^3 + bx_0 = c$$

Ce travail d'al-Khayyām ne va pas épuiser le sujet puisque, quelques décennies plus tard, le mathématicien Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī va reprendre l'étude des 25 équations de degré inférieur ou égal à trois, mais selon une perspective qui, tout en s'inscrivant dans le projet d'al-Khayyām le complète et le dépasse à la fois. On constate en effet des modifications importantes dans la classification des équations et dans la justification de l'existence des solutions positives .

Tout en conservant la distinction entre équations quadratiques et équations cubiques, aṭ-Ṭūsī ordonne ces dernières en tenant compte du nombre de leurs solutions et non des degrés de leurs monômes.

Pour établir l'existence des solutions, il commence par rechercher la condition que doivent vérifier, dans ce cas, les coefficients de l'équation. Pour ce faire, il utilise la notion de maximum d'un polynôme et, pour déterminer ce maximum, il introduit une équation auxiliaire qui correspond exactement à celle que l'on obtiendrait aujourd'hui en dérivant un polynôme du 3^{e} degré associé à une équation cubique et en annulant cette dérivée. voici d'ailleurs un aperçu de sa méthode à travers l'étude de l'équation (K_{14}) d'al-Khayyām (qui est la 22^{e} dans la classification d'aṭ-Ṭūsī) :

$$x^3 + c = bx \implies c = bx - x^3$$

aṭ-Ṭūsī considère le polynôme :

$$P(x) = bx - x^3$$

associé à (K_{14}) et $x_0 = \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2}$, la solution (positive) de l'équation :

$$3x^2 = b$$

et il montre que : $P(x_0) = \sup_{x>0} P(x)$, d'où :

$c > P(x_0) \Longrightarrow$ pas de solution (positive).
$c = P(x_0) \Longrightarrow$ 1 solution qui est x_0.
$c < P(x_0) \Longrightarrow$ 2 solutions (positives)

Comme : $P(x_0) = \left(\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)^{1/2}$, on voit qu'aṭ-Ṭūsī aboutit à la condition d'existence des solutions positives .

$$c^2 \leqslant \frac{4}{27} b^3.$$

L'auteur conclut son étude en déterminant les solutions, non pas par intersection de deux coniques comme l'avait fait al-Khayyām, mais en établissant une relation entre ces solutions et celles d'une équation cubique déjà étudiée :
En effet, si y_1 est solution de l'équation :

$$x^3 + c' = a'x^2,$$

avec :

$$c' = P(x_0) - c \quad \text{et} \quad a' = 3x_0,$$

alors, $x_1 = x_0 - y_1$ est solution de l'équation (K_{14}) [Rashed 1984, pp. 147-193].

Nous n'avons pas encore trouvé de documents qui puissent nous renseigner sur d'autres contributions dans ce domaine durant la période séparant al-Khayyām d'aṭ-Ṭūsī. Tout ce que nous savons, c'est que la recherche des solutions par radicaux pour les équations cubiques se poursuivront parallèlement aux études de type géométrique et aux résolutions approchées que nous évoquerons plus loin.

Mais si l'on exclut la résolution d'équations

particulières que l'on a pu ramener, par changement d'inconnue à l'extraction d'une racine cubique, il semble qu'aucune tentative n'ait abouti. En tout cas, après le XIIIe siècle, on continuait encore à chercher des procédés de résolution algébriques pour des équations cubiques.

Il faut enfin signaler, dans le cadre de cette tradition "d'algèbre géométrique", représentée par les travaux d'al-Khayyām et d'aṭ-Ṭūsī, une orientation nouvelle inaugurée par Ibn al-Haytham (m.1039) au Caire et par Ibn Sayyid (XIe s.) à Valence. Les travaux de ces deux mathématiciens n'ont pas encore été retrouvés, mais les rares témoignages qui nous en sont parvenus confirment leur importance :

C'est al-Khayyām lui-même qui dit, dans son livre d'algèbre, avoir lu une longue et difficile étude d'Ibn al-Haytham sur la résolution géométrique d'une équation du 5e degré. Il est possible qu'à cette occasion Ibn al-Haytham ait utilisé des courbes de degré supérieur ou égal à trois qui n'avaient pas été étudiées auparavant [Rashed et Djebbar 1981, p. 66].

A peu près à la même époque, le mathématicien andalou Ibn Sayyid, partant probablement du problème de la multisection d'un angle, avait étudié un procédé de génération de courbes de degré supérieur ou égal à trois qui était basé sur l'utilisation de courbes gauches engendrées par intersection de différents cônes de degré supérieur ou égal à 2. La projection orthogonale de ces courbes gauches sur des plans perpendiculaires au plan de base fournissait les courbes planes qui étaient utilisées pour résoudre le problème de la multisection de l'angle.

Le résumé des travaux d'Ibn Sayyid qui vient d'être fait nous a été rapporté par un de ses élèves Ibn Bajja qui n'a malheureusement pas éprouvé le besoin de développer ses informations, promettant seulement de consacrer un livre aux travaux de son maître et aux compléments qu'il leur aurait lui-même apportés. Mais, il semble que la mort prématurée d'Ibn Bajja (qui sera victime d'un assassinat politique) ne permettra pas la réalisation de cet important projet [Djebbar 1984].

VII LA RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS.

C'est vraisemblablement l'échec des tentatives de résolution algébrique de certaines équations polynômiales ou trigonométriques rencontrés par les géomètres et par les astronomes qui ont contraint des mathématiciens à recourir à

(20)

des procédés d'approximation anciens puis, qui les ont amené à améliorer ces procédés ou a en élaborer de nouveaux. Toujours est-il que l'utilisation de l'approximation dans la résolution des équations est attestée dès la première moitié du IX^{e} siècle par un écrit de Habash al-Hasib qui calcule une valeur approchée de l'équation trigonométrique suivante :

$$x = k\sin(x)$$

à l'aide de la suite récurrente :

$$x_n = k\sin(x_{n-1}).$$

Nous n'avons pas d'information sur ce qui a pu se faire dans ce domaine au X^{e} siècle. Mais, on sait qu'au début du XI^{e} siècle, al-Bīrūnī (m. 1050) et son contemporain Abu l-Jūd calculeront des valeurs approchées des solutions positives des équations [Youschkevitch 1976, pp. 93, 162] :

$$x^3 + 1 = x \quad \text{et} \quad x^3 = x + 1$$

Mais, il faudra attendre le traité de Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī pour trouver l'exposé d'un procédé général permettant d'approcher une solution positive d'une équation polynômiale de degré n quelconque. Ce procédé s'apparente à la méthode de Ruffini-Horner [Rashed 1984, pp. 147-193].

VIII L'ALGEBRE APRES LE XII^{e} SIECLE.

Malgré de grands progrès enregistrés ces deux dernières décennies, les recherches sur les mathématiques arabes ne sont pas assez avancées pour permettre de cerner avec précision les aspects essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII^{e} siècle.

Pour ce qui est du centre et de l'est de l'empire musulman, quelques éléments épars nous renseignent sur certaines recherches qui n'ont pas abouti et sur des incursions timides dans des domaines nouveaux. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Khawwām (qui a été l'élève de Sharaf ad-Din aṭ-Ṭūsī et qui a, semble-t-il enseigné à Bagdad au XIII^{e} siècle) conclut son livre <u>al-Bahā'iya fi l-Fawā'id al-Ḥisābiya</u> par l'énoncé de 36 problèmes que ses prédecesseurs et lui-même ont tenté vainement de résoudre. Certains de ces problèmes appartiennent en fait à la théorie des nombres : c'est le cas de ce qu'il est convenu d'appeler la conjecture

(21)

de Fermat :

$$x^n + y^n = z^n \quad , \quad n = 3 \text{ ou } 4.$$

D'autres, plus nombreux, sont des équations du 3^{e} et du 4^{e} degrés ou des systèmes d'équations non linéaires [Abdeljaouad et Hadfi 1986].

Quelques décennies plus tard, le mathématicien et physicien al-Fārisī, élève d'Ibn al-Khawwām, n'apportera aucun élément nouveau dans son commentaire du livre de son professeur : le contenu du long chapitre qu'il consacre à l'algèbre est même en deÇa de ce qui avait été produit un siècle auparavant [Mawaldi 1985].

Il faudra attendre le XIV^{e} siècle pour constater que de nouvelles tentatives sont faites en algèbre : al-Kāshī entreprend semble-t-il l'étude des équations de degré supérieur ou égal à 4, sans que l'on sache s'il a abouti à des résultats tangibles [al-Kāshī 1967, pp. 198-199]. De son côté Ibn al-Hā'im s'attaque à nouveau à la résolution algébrique d'une équation cubique, mais en donne une solution fausse [Djebbar 1981, p. 37]. Il faut enfin signaler la résolution par Ibn al-Majdī d'un problème de combinatoire concernant l'algèbre puisqu'il s'agit de dénombrer les équations polynômiales à n monômes additifs:
Dans son livre <u>Ḥāwi l-Lubāb</u>, Ibn al-Majdī donne et justifie une relation de récurrence permettant de déterminer le nombre d'équations à n monômes, lorsque l'on connaît le nombre des équations à (n-1) monômes [Djebbar 1981, pp. 107-111].

En ce qui concerne l'Occident musulman, les recherches récentes permettent, au vu des manuscrits connus et analysés, de faire un bilan provisoire de la contribution, en algèbre, des mathématiciens de l'Espagne musulmane et du Maghreb, bilan que nous avons longuement exposé dans une étude indépendante que le lecteur pourra consulter [Djebbar 1986].

* * * * * * *

(22)

NOTES

(1)- Par "algèbre arabe", nous désignons dans cette étude tous les écrits algébriques produits par des mathématiciens arabes et non-arabes, mais écrits en langue arabe.

(2)- Le sens de chacun de ces deux mots a évolué au sein de la tradition algébrique elle-même [Saliba 1972, pp. 189-204]. Mais, pour al-Khwārizmī, le passage de :

$$x^2 + 3 = 5 - 10x$$

à :

$$x^2 + 3 + 10x = 5$$

se fait par le *Jabr* (= *restauration* de l'équation dans le but de n'avoir que des monômes "ajoutés").
Quant au passage de :

$$x^2 + 3 + 10x = 5$$

à :

$$x^2 + 10x = 2$$

il se fait par la *Muqābala* (= *comparaison* des termes de même espèce se trouvant dans chacun des deux membres, pour pouvoir "simplifier" et aboutir à l'une des six équations canoniques).

(3)- Une édition critique de ce traité, basée sur le seul manuscrit connu à l'époque (ms. Oxford Hunt 214/1, ff. 1a-34a) a été publiée par A.M. Musharrafa et M. Mursi Ahmad (Le Caire 1939, rééditée en 1968) [al-Khwarizmi 1968]. Mais il n'a bénéficié, depuis le XIX^{e} siècle, que de trois traductions : anglaise (par F. Rosen, Londres 1831), russe (par B. Rosenfeld, Tachkent 1964) et persane (par Hidiw Gam, Téhéran 1971). Une nouvelle édition critique (utilisant quatre autres manuscrits récemment identifiés), accompagnée d'une traduction française est actuellement en préparation (par A. Djebbar, N. El Hajjar, K. Jaouiche et N. Mahammed).

(4)- al-Khwārizmī dit exactement : " *j'ai trouvé que les*

(23)

nombres dont on a besoin dans le calcul par le Jabr et la Muqābala, sont de trois sortes qui sont les racines, les māl-s et le nombre seul, qui n'est rapporté ni à la racine ni au mal. La racine est tout ce qui est multiplié par lui-même, comme un, les nombres ‹entiers› qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures. Le māl est tout ce qui résulte de la racine multipliée par elle-même. Le nombre seul est tout ce qui, parmi les nombres, est exprimable et qui n'est rapporté ni à une racine ni à un māl. " [al-Khwārizmī 1968 pp. 17-18].

(5)- On a vu (note (4)) que pour al-Khwārizmī le *māl* (carré) est bien le produit de la racine par elle-même, mais la notion de degré n'apparaît pas dans son traité. Quant aux six équations, elles sont exprimées sous une forme réthorique. Par exemple, l'équation IV est formulée ainsi : " *Quant aux māl-s et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme lorsque tu dis : un māl et dix de ses racines égalent trente neuf dirham-s* " [al-Khwārizmī 1968, p. 18]. Elle s'exprimerait donc aujourd'hui ainsi :

$$x + 10\sqrt{x} = 39.$$

(6)- Il dit, à propos de l'expression :

$$(100+x^2-20x) + (50+10x-2x^2)$$

" *Il n'y a pas de figure ‹géométrique› qui lui convienne car elle est constituée de trois genres différents - des* māl-s *des racines et un nombre - qui ne sont pas égalés à quelque chose qui aurait permis qu'elle soit figurée. Nous avons abouti, pour elle, à une figure; mais, elle n'est pas satisfaisante. Quant à la validité réthorique de ‹l'expression›, elle est évidente* " [al-Khwārizmī 1968, p.34].

(7)- Il s'agit en fait chez al-Khwārizmī d'opérations sur les monômes "ajoutés" ou "retranchés", et non d'opérations sur les signes proprement dits.

(8)- Voici un exemple de chacun de ces trois thèmes [al-Khwārizmī 1968, pp. 42,47,51] :
Problème des dizaines : " *‹Si› tu divises dix en deux parties et ‹que› tu multiplies l'une des deux parties par*

(24)

elle-même, ‹le résultat› est égal à quatre-vingt -et-une-fois *l'autre partie* ".

Problème des biens : " *‹Etant donné› un bien, ‹si› tu lui ôtes son tiers et trois dirhams et que tu multiplies le reste par lui-même, tu retrouves le bien* ".

Problème des hommes : " *‹Si› tu partages un dirham entre des hommes, chacun reçoit une chose; puis, ‹si› tu leur ajoutes un homme et que tu partages entre eux un dirham, chacun reçoit alors ‹une part› inférieure à la première part d'un sixième de dirham* ".

(9)- Dans son livre d'algèbre intitulé al-Kāmil , Abū Kāmil évoque la priorité d'al-Khwārizmī en ces termes : " *Ayant beaucoup étudié les livres des savants ‹relatifs› au calcul et ayant recherché leurs propos et ce qu'il y a de plus précieux dans ce qu'ils ont écrit dans leurs livres, j'ai constaté que le livre de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, qui est connu sous ‹le titre›* du Jabr et de la Muqābala *est celui dont le fondement est le plus juste et dont la démonstration est la plus vraie; ce qui devait nous inciter, nous les spécialistes du calcul, à reconnaître sa science et sa prééminence, puisqu'il a précédé ‹les autres› pour la réalisation du livre* du Jabr et de la Muqābala, *qu'il en a été l'initiateur et qu'il a inventé les fondements qu'il contient*." (Ms. Istanbul Kara Mustafa 317, f. 2a).

Les allusions de ce passage se précisent dans un autre texte dont l'encyclopédiste du XVII^{e} Hājjī Khalīfa cite quelques phrases : " *Abū Kamil dit, dans le* Livre des donations par le Jabr et la Muqābala : *‹‹ J'ai établi, dans mon second ouvrage, la preuve de la prééminence et de la priorité de Muḥammad ibn Mūsā en algèbre et j'ai répondu au fougueux nommé Ibn Barza à propos de ce qu'il attribue à ᶜAbd al-Ḥamīd qu'il dit être son grand-père, en montrant son inexactitude et son peu de connaissance au sujet de ce qu'il attribue à son grand-père.››* ". [Hājjī Khalīfa 1941=1982, Vol.2, pp. 1407-1408].

(10)- On pourrait également évoquer d'autres facteurs, comme le régionalisme, l'idéologie ou le statut social des individus, qui étaient suceptibles de peser sur la diffusion de tel ou tel ouvrage scientifique. Mais, dans l'état actuel de nos connaissances de la cité islamique du IX^{e} siècle et de sa communauté scientifique, ils ne permettent même pas d'avancer des conjectures raisonnables.

(25)

(11)- Le titre arabe étant Kitāb al- Jamᶜ wa l-Tafrīq bi Ḥisāb al-Hind, nous avons préféré traduire "Jamᶜ" par "agrégation" et "Tafriq" par "désagrégation" et non pas par "addition" et "soustraction", comme le fait Youschkevitch, car dans une certaine tradition arithmétique médiévale arabe ces deux concepts englobent respectivement l'addition et la multiplication (pour le premier), la soustraction et la division (pour le second).

(12)- Pour les traités d'algèbre, le bio-bibliographe Ibn an-Nadīm cite le Kitāb al-Jabr wa l-Muqābala) d'ad-Dināwarī (m. 895) et le Kitāb al-Arithmāṭīqī fi l-Aᶜdad wa l-Muqābala) d'as-Sarakhsi (m. 899) [Sezgin 1974, pp.262-263]. Quant aux commentaires du traité d'al-Khwārizmī, les premiers qui sont signalés sont de la première moitié du X^{e} siècle. Il s'agit du commentaire de Sinān Ibn al-Fatḥ et de celui aṣ-Ṣaydanānī [Sezgin 1974, pp.301].

(13)- Voici un exemple de ce type de problèmes : on voudrait acheter, avec 100 dirhams, 100 volatiles de trois espèces différentes : étourneaux, poulets et canards. Sachant que le prix des étourneaux est de 1 dirham les 20, celui des poulets de 1 dirham l'unité et celui des canards de 5 dirhams l'unité, on demande combien peut-on acheter de volatiles de chaque espèce.

(14)- L'essentiel de ce paragraphe repose sur les deux études de J. Sésiano parues en 1977 et portant sur l'analyse indéterminée, respectivement chez Abū Kamil et chez al-Karajī [Sésiano 1977a, 1977b].

* * * * * * *

(26)

R E F E R E N C E S

Abdeljaouad, M. et Hadfi, H. 1986. "Les Problèmes auxquels il n'est pas possible d'apporter une réponse" d'après le livre "al-Fawā'id al-Bahā'iya" d'Ibn al-Khawwām (643-724H/1245-1324). Communication au 1[er] colloque international d'Alger sur les mathématiques arabes. A paraître, en 1988, dans les actes du colloque.
Ahmad, S. et Rashed, R. 1972. Kitab al Bahir fi l-Jabr. Damas.
Anbouba, A. 1964. L'algèbre al-Badī' d'al-Karagī. Edition avec introduction et notes. Beyrouth, Publications de l'Université Libanaise.

-------, A. 1978. Acquisition de l'algèbre par les Arabes et premiers développements. AperÇu général. Journal for the History of Arabic Science. Alep. Vol.2, n°2.

-------, A. 1979. Un traité d'Abū Ja'far [al-Khāzin] sur les triangles rectangles numériques. Journal for the History of Arabic Science, Vol.3, n°1.

Busard, H.L.L. 1968. L'algèbre au moyen-âge : Le "Liber mensurationum" d'Abu Bekr. Journal des savants, Avril-Juin 1968, 65-125.

Colebrooke, H.T. 1817. Algebra with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London, John Murray.

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel, C. et Guillemot, M. 1987. Mathématiques au fil des âges. Gauthiers-Villars. Paris.

Djebbar, A. 1981. Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles. Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02.

----------. 1984. Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne musulmane : al-Mu'taman et Ibn Sayyid. Colloque International de Marseille-Luminy sur *"Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIIe siècle "*.

(27)

----------. 1986. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman. Premier colloque International d'Alger sur l'histoire des mathématiques arabes. 1-3 Décembre 1986. A paraître, en 1988, dans les actes du colloque.

Gandz, S. 1926. The Origin of the Term "Algebra". American Mathematical Monthly, 33, 437-440.

Hajji Khalifa, Mustafa 1941. Kashf aẓ-Ẓunūn 'an Asāmi al-Kutub wa l-Funūn. Istanbul, Maarif Matbaasi. Réédition 1982. 2 Vol. Beyrouth Dar al-Fikr.

Høyrup, J. 1986. Al-Khwārizmī, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum : on the origins of islamic Algebra. Ankara, Atatürk Kültür Merkezi.

Ibn an-Nadīm, Muḥammad 1971. al-Fihrist. Edition de Riḍā Tajaddud, Téhéran.

al-Khwārizmī, Muhammad 1968. Kitāb al-Jabr wa l-Muqābala. Edition de A.M. Musharrafa et M.M. Ahmad. Réédition 1968, Le Caire.

Levey, M. 1966. The Algebra of Abū Kāmil, Kitāb fi l-jabr wa l-muqābala, in a Commentary by Mordechai Finzi. Hebrew Text, translation and Commentary with Special Reference to the Arabic text. Madison, Milwaukee and London, University of Wisconsin Press.

Matvievskaïa, G.P. Matériaux pour l'étude du nombre au Proche Moyen-Orient au Moyen-Age. Dans : Histoire des sciences exactes au Proche et Moyen-Orient au Moyen Age. Tachkent.

Rashed, R. et Djebbar, A. 1981. L'oeuvre algébrique d'al-Khayyam. Alep, I.H.A.S. Université d'Alep.

Rashed, R. 1984. Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur les Mathématiques arabes. Paris, Les Belles Lettres.

Rodet, L. 1878. L'algèbre d'al-Khwārizmī et les méthodes indienne et grecque. Journal Asiatique 7[e] série 11 (1878), pp. 5-98.

Rosen, F. 1831. The Algebra of Muḥammad ben Mūsā. London, The

(28)

Oriental society.

Saliba, G. 1972. The Meaning of al-jabr wa'l-muqabla. Centaurus 17, 189-204.

Sayili, A. 1962. Logical Necessity in mixed equation by ᶜAbd al-Hamid ibn Turk and the algebra of his time. Ankara.

Sesiano, J. 1977a. Les Méthodes d'analyse indéterminées. Centaurus, vol.21, n°2, pp.89-105.

------------. 1977b. Le traitement des équations indéterminées dans le *Badīᶜ fī l-Ḥisāb d'Abū Bakr al-Karajī*. Archive for History of Exact Sciences, vol.17 n°4, pp.297-379.

------------. 1981. The Arabic Text of Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa.

Sezgin, F. 1974. Geschichte des Arabischen Schrifttums. Band V. Leiden, E.J. Brill.

Wiedemann, E. 1926-27. Uber eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al-Haitam. Sitzungsberichte der Physikalisch-medezinischen Societät zu Erlangen, 58-59, pp. 191-196.

Youschkevitch, A.P. 1976. Les Mathématiques arabes (VIIIᵉ-XVᵉ siècles). Vrin, Paris.

* * * * * * *

APERCU HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES

SUMERO BABYLONIENNES

Livia GIACARDI
Université de Turin.

Les études sur les mathématiques babyloniennes sont très nombreuses. Jorän Friberg a récemment édité un volume de plus de cent pages sur la bibliographie consacrée à ces mathématiques (1).

Outre l'aspect strictement mathématique, l'examen de textes babyloniens comporte d'autres problèmes, qui sont surtout d'ordre philologique, de datation, d'interprétation et d'emplacement dans le domaine plus vaste de la culture mésopotamienne. Pour avoir une vision complète, il faudrait donc aussi prendre en considération ces aspects culturels qui, bien qu'en marge des mathématiques, interfèrent sous certains aspects avec celle-ci et parfois la déterminent comme par exemple, l'art, l'astronomie, l'urbanisme et la technique.

Compte tenu du temps dont nous disposons, je me limiterai à traiter rapidement certains facteurs géographiques et historiques qui ont joué un rôle important quant au développement et aux caractéristiques des mathématiques babyloniennes. J'examinerai ensuite certains textes dont je ferai un commentaire et donnerai une interprétation.

Je chercherai, de plus, à mettre en évidence, à travers ces textes, les caractéristiques de la mathématique mésopotamienne en m'arrêtant plus particulièrement sur l'algèbre.

---

1 Voir (6)

J'espère, ainsi, donner aux personnes qui m'écoutent une connaissance de base sur ces mathématiques et fournir aussi des arguments didactiques et des suggestions pour une éventuelle application interdisciplinaire.

I. INTRODUCTION

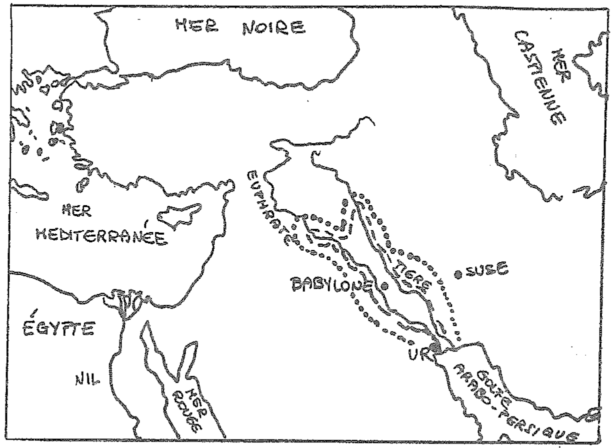
La fertilité du terrain fut l'un des principaux facteurs qui favorisèrent la naissance de communautés stables et, par conséquent, la formation d'une civilisation. Ce n'est pas un hasard si les plus grandes civilisations du passé se sont développées dans les vallées du Nil, du Tigre et de l'Euphrate ainsi que de l'Indus où le débordement naturel des fleuves déposait chaque année une nouvelle couche de terrain fertile.

Les caractéristiques du milieu ambiant de la plaine située entre le Tigre et l'Euphrate et appelée Mésopotamie (étymologiquement : pays entre les fleuves) (v. fig. 1) eurent certainement une forte influence dans la formation de la civilisation mésopotamienne.

Fig. 1

--- Sumer et Akkad

..... Extension du Premier Empire Babylonien



L'origine des Sumériens, qui furent parmi les premiers habitants de la Mésopotamie, est encore aujourd'hui un problème à résoudre. Ils s'étaient installés, depuis la moitié du IVème millénaire av. J.C., dans la partie méridionale de cette région appelée ensuite Babylonie, alors que dans la partie septentrionale, appelée plus tard Assyrie, il y avait des communautés probablement d'origine sémitique : les Akkadiens.

Les Sumériens donnèrent vie à une civilisation très évoluée et élaborée, qui fut accueillie réinterprétée et enrichie par les peuples qui se succédèrent au pouvoir dans cette région. Ce phénomène nous permet de déceler un processus historique plutôt homogène qui peut, dans l'ensemble, être indiqué comme civilisation mésopotamienne. Chacun des peuples qui se succédèrent au pouvoir en Mésopotamie tenta de réaliser un empire solide et unifié mais sans jamais obtenir un résultat définitif. Ce fait est dû à l'emplacement géographique de la région, ouverte dans toute direction et donc continuellement exposée aux invasions. La superposition des peuples et les contacts entre gens de différentes races favorisèrent le développement d'une civilisation plus vive que celle de l'Egypte, moins monolithique mais plus articulée et plus riche de curiosités scientifiques et d'intérêts techniques.

La puissance sumérienne survécut, malgré la parenthèse de la domination akkadienne (2400-2150 av. J.C.), jusqu'en 1850 environ, lorsque les invasions des peuples pour la plupart d'origine sémitique, en déterminèrent la crise et ensuite la ruine.

Durant le IVème millénaire, les Sumériens élaborèrent une écriture rudimentaire. Cette écriture fut peu à peu perfectionnée jusqu'à subir en 2500 av. J.C. un processus de simplification et d'abstration qui eut une certaine importance pour l'élaboration du système de numération sexagésimale en usage dans la mathématique suméro-babylonienne.

Vers 1700 av. J.C., Hammourabi, souverain de Babylone, parvint à étendre son contrôle sur toute la Mésopotamie et fonda ainsi le premier empire babylonien. Son règne fut caractérisé par un programme grandiose d'oeuvres publiques, par une administration correcte de la justice et, par conséquent, par un épanouissement culturel et scientifique remarquable. Des écoles pour l'éducation des fonctionnaires d'état furent fondées en annexe des temples : l'énorme importance donnée à la géométrie, à l'arithmétique et à l'algèbre, ainsi que les surprenants résultats obtenus, sont la conséquence directe des nouvelles exigences culturelles et sociales. Presque tous les textes mathématiques que nous examinerons appartiennent à l'Ancien Age Babylonien, c'est à dire à la période entre 1900 et 1660 av. J.C.

A cette époque, de plus, la nécessité de matières premières dont la Mésopotamie était dépourvue, pierres, bois, métaux et le perfectionnement des moyens de transports favorisèrent la création de voies de communication commerciale (v. Fig. 2) entre cette région et l'Iran actuel, l'Asie Mineure, la Syrie, l'Egypte et l'Inde. La circulation s'effectuait par mer, par fleuve ou sur les nombreux canaux existants. Les contacts commerciaux favorisèrent certainement des échanges culturels entre les différentes civilisations, échanges qui ont aussi une importance considérable pour l'Histoire des Mathématiques.

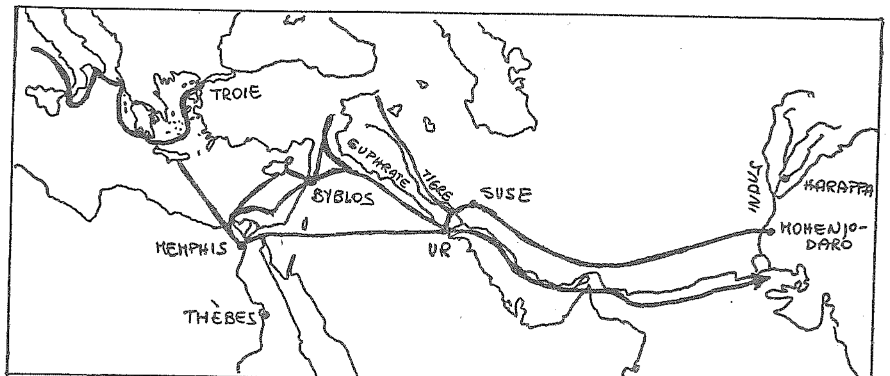


Fig. 2 : Voies de communication commerciale
(IVè - IIè millénaire av. J.C.)

Le déclin de l'empire babylonien commença après le règne d'Hammourabi soit à cause des luttes internes soit sous les pressions externes des Hittites d'abord et des Kassites ensuite. La fin du IIème millénaire voit le début de la domination des Assyriens. Ceux-ci fondèrent un empire très vaste qui durera jusqu'en 612 av. J.C.

II. SOURCES

Les tablettes avec les inscriptions cunéiformes sont la source la plus directe où nous pouvons puiser nos connaissances sur la civilisation mésopotanienne. G.F. Grotefend commença le déchiffrement de l'écriture cunéiforme au début du XIXème siècle et suggéra une clé de lecture qui fut perfectionnée par H.C. Rawlinson en 1847.

Les tablettes ayant un contenu mathématique sont environ au nombre de 300 : certaines remontent à la période sumérienne (3000-2100 av. J.C.), un groupe plus consistant appartient à la période qui va de l'époque d'Hammourabi jusqu'en 1500 av. J.C. et d'autres encore, plutôt à caractère astronomique, remontent à l'époque séleucide (environ 311 - 50 av. J.C.)

Les études de ces tablettes sont principalement dues à O. Neugebauer, F. Thureau-Dangin et E.M. Bruins.

Elles peuvent être essentiellement divisées en deux groupes : tables de calcul et textes de problèmes. Les premières avaient certainement une fonction pratique : ce sont en effet des tables de multiplication et de division à l'intérieur du système sexagésimal, des listes de mesures qui comprennent les passages d'une unité d' ordre inférieur à une unité d'ordre supérieur et vice-versa.

Les textes de problèmes sont des listes d'exercices de mathématiques avec ou sans solution. Il nous semble opportun de remarquer que les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, sans jamais généraliser : en effet, il n'y a aucune formule, aucun théorème, aucune démonstration. Toutefois les Babyloniens connaissaient de nombreuses règles générales, comme nous pourrons le constater en examinant les textes.

III. CARACTERISTIQUES DES MATHEMATIQUES BABYLONIENNES

Les historiens ont souvent affirmé que les mathématiques suméro-babyloniennes sont essentiellement pratiques : cette affirmation n'est que partiellement exacte et mérite d'être précisée. Les mathématiques, auprès des peuples mésopotamiens, ne furent certainement pas conçues comme une activité spéculative et abstraite, avec des exigences de logique et de rigueur. Au contraire, elles furent un produit social, né des besoins d'une société en expansion continuelle. Les Babyloniens n'avaient pas d'idéal démonstratif analogue à celui des Grecs ; la raison de ce fait se trouve dans le contexte dans lequel se développa la science mathématique. A l'origine c'était un instrument de connaissance et de pouvoir. Elle est née et s'est développée dans les temples comme moyen indispensable pour l'administration de la ville (construction d'édifices et de canaux, perception d'impôts, division des héritages, calcul des intérêts, etc...), pour le compte du temps et pour régler les activités agricoles et commerciales (v. Fig. 3, 4, 5).

Centres urbains
Champs
Canaux

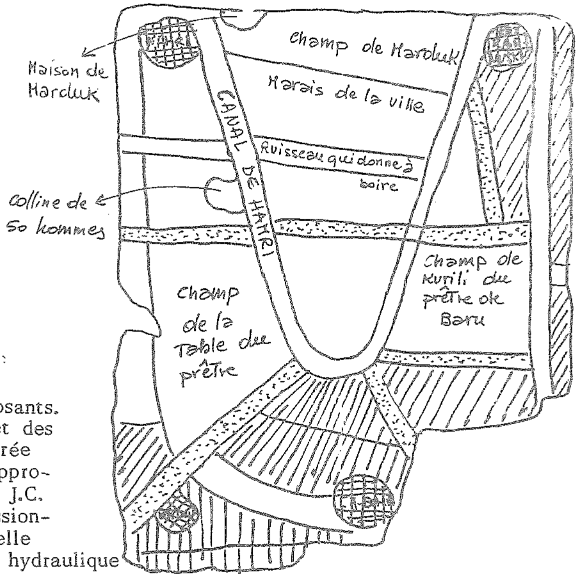


Fig. 3 : les travaux pour l'irrigation en Mésopotamie étaient imposants. Cette carte des champs et des canaux près de Nippur, tirée d'une tablette qui date approximativement de 1300 av. J.C. nous en donne une impressionnante démonstration car elle témoigne d'une technique hydraulique et agricole très évoluée.

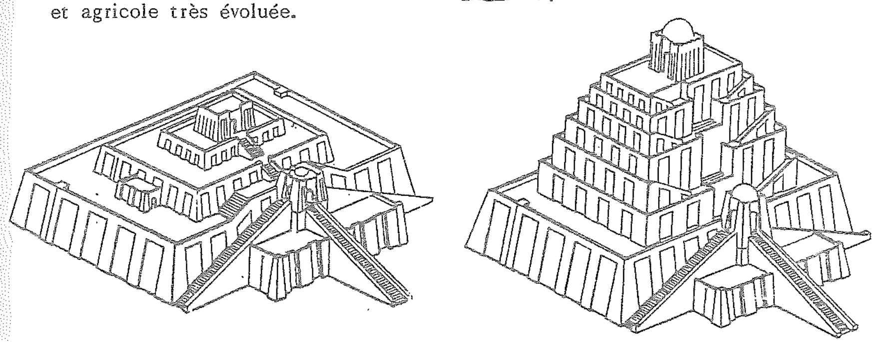
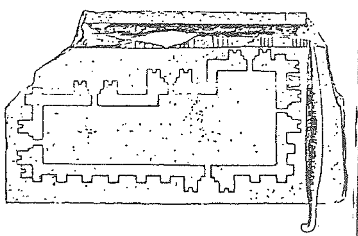
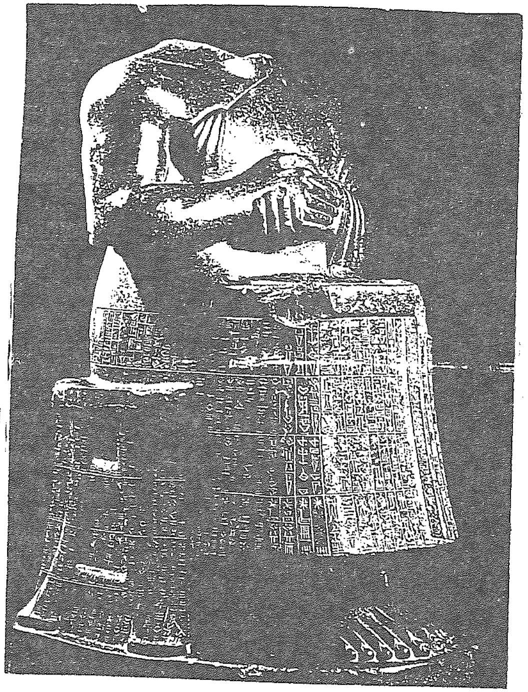


Fig. 4 : Ziggurat de la ville de Ur en deux époques successives. Les Ziggurats, les éléments peut-être les plus caractéristiques de l'architecture babylonienne, sont des tours à 3,4,5 étages ou plus, hautes de 50 à 90 m. Leur but était probablement de faciliter la descente du dieu parmi les hommes durant les cérémonies religieuses.

Fig. 5 a-b





Statue de Gudea qui se trouve au Musée du Louvre, connue comme l'Architecte au plan (2000 av. J.C.). Sur la statue est indiquée l'unité de mesure de l'époque, la coudée sumérienne (495.mm) et sur les genoux du roi se trouve la tablette reproduite sur la figure. Sur la tablette est gravée le plan d'une construction; sur les côtés sont sculptées en relief une baguette recourbée et une règle graduée. Vraisemblablement le dessin se réfère à une construction projetée par Gudea et il est probable que ce dessin soit aussi la représentation à l'échelle de cette construction. On peut consulter à ce propos [13] où il y a une reconstruction du projet du Gudea.

Un autre aspect, qui a joué un rôle non secondaire, est la numérologie.

Les textes mathématiques qui nous sont parvenus ont surtout un but pédagogique : ils servent à former les futurs fonctionnaires de l'état. Dans une telle sorte de transmission des connaissances, qui a des fins politiques de pouvoir, le secret et le ritualisme tendent à prévaloir sur la libre discussion. (V (9) , I, pp 274- 279)

En outre les Babyloniens ne faisaient pas de nette différence entre les trois branches des mathématiques : arithmétique, algèbre et géométrie, même si certains textes nous font penser le contraire comme par exemple la tablette BM 13901 que nous examinerons ensuite.

Malgré tout, il me semble opportun de donner les précisions suivantes :

- la présentation concrète des problèmes est due, le plus souvent, à la fonction didactique de ces textes ,

- le classement des problèmes selon le type de solution dénote une certaine conscience de la généralité,

- très souvent, des problèmes qui semblent, lors d'une première lecture, inspirés de situations pratiques , comprennent des données qui n'auraient aucune utilisation dans la vie réelle. Ce fait peut indiquer tout autant un aspect ludique qu'un intéret théorique.

A mon avis, et en examinant les textes nous pourrons le vérifier, de nombreux résultats des mathématiques babyloniennes ont une portée théorique, même s'il n'existe ni le symbolisme, ni la démonstration des théorèmes, ni la justification théorique des procédés de résolution utilisés.

IV. BREVES NOTICES SUR LE SYSTEME DE NUMERATION ET SUR L'ARITHMETIQUE BABYLONIENNE.

L'évolution du système de numérotation et de l'arithmétique babylonienne est étroitement liée à celle de l'écriture. A partir du IVe millénaire AV. J.C., les Sumériens inventèrent une forme rudimentaire d'écriture qui, à travers les siècles, se transforma de simple pictographie, perfectionnée ensuite par le phonétisme, en un système purement abstrait.

Durant l'époque paléosumérienne le système de numération était sexagésimal fondé sur un compromis entre les bases 10 et 6. Les symboles employés étaient les suivants :

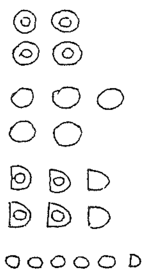
geš	1	
u	10	
geš(ta)	60	

geš-u	600	(60 · 10)
sar	3600	(60^2)
sar-u	36000	($60^2 \cdot 10$).

Ils étaient obtenus en imprimant dans l'argile une canne petite pour les unités et les dizaines ou grande pour les soixantaines, tenue obliquement ou verticalement.

Le système de numérotation était additif : un nombre très élevé de signes était donc nécessaire pour représenter certains nombres ; il fallait, par exemple , utiliser 28 signes pour écrire 3599.

Nous reportons ci-dessous l'écriture du nombre 164.571, comme il apparaît sur une tablette de 2650 av. J.C. :

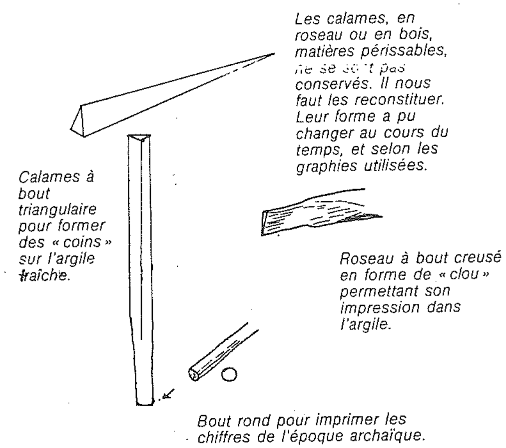


36.000+36.000+36.000+36.000	144.000
3600+3600 +3600+3600+3600	18.000
600+600+600+600+60+60	2 400
	120
10+10+10+10+10+1	50
	1
	164.571

Durant l'époque archaïque il y avait une différence essentielle entre la façon de tracer les signes de l'écriture sumérienne et celle de tracer les symboles numériques. dès le début les derniers étaient obtenus par impression, alors que les signes de l'écriture étaient incisés.

Vers 2700 on passa de l'écriture par incision sur l'argile à celle par impression au moyen d'une petite canne taillée de façon à présenter en section un triangle isocèle (Fig 6)

Fig.6 **Reconstitution de calames pour l'écriture cunéiforme**



Selon la façon dont elle était saisie on obtenait les signes  ou  , c'est à dire les caractères dits cunéiformes..

Evidemment, de cette façon, le dessin des objets perdit son instantanéité et apparut d'une manière géométrique et schématique.

Après l'apparition de l'écriture cunéiforme, les chiffres sumériens prirent un aspect différent, mais la structure mathématique du système ne fut pas modifiée, comme on peut le voir dans l'exemple suivant, tiré d'une tablette de 2000 av. J.C. :

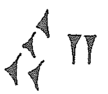
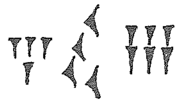
 $= 60 + 20 + 8 = 88,$

ou le symbole  indique 60,  indique 10, indique 1.

Le système de numération sexagésimale de position parut chez les mathématiciens et les astronomes babyloniens probablement au début du II millénaire av J.C. Ce système n'utilise que deux signes (et non 59 comme on pourrait s'y attendre) : le symbole unité  et le symbole  pour indiquer la dizaine.

Les nombres de 1 à 59 étaient écrits de façon additive ; pour les nombres à partir de 60 on employait le système de position.

Exemples:

42 :  , $286=4.60 + 46$:  ,

$4818 = 1.60^2+20.60+18$:  .

L'absence d'un symbole pour le zéro et pour la virgule donnait lieu à une certaine ambiguité ; par exemple,  peut indiquer une infinité de nombres : $2.60 + 2$, $2.60^2 + 2$,.....

Pour ce qui concerne les opérations de calcul les Babyloniens n'effectuaient directement que les additions et les soustractions ; pour la multiplication et la division ils employaient des tables déjà rédigées. La division, en particulier était effectuée en multipliant le dividende par l'inverse du diviseur : des tables d'inverses, exprimés comme fractions sexagésimales , étaient donc rédigées.

Exemples :
$1/2 \rightarrow 0;30$, $1/3 \rightarrow 0;20$, $1/5 \rightarrow 0;12$, $1:24 \rightarrow 0;2,30$
(2)

Naturellement, ce système n'était pas parfait, en effet, sur les tables d'inverses, les espaces pour les fractions comme 1/7, 1/11, 1/13 etc. restaient vides (3). Il y avait également des Tables de racines carrées et de racine cubique.

Je voudrais citer maintenant quelques résultats intéressants obtenus par les Babyloniens dans le domaine de l'arithmétique.

La tablette connue sous le nom de Plimpton 322 (4), de la Plimpton Collection de la Columbia University, est un admirable témoignage de leur habilité de calculateurs. Cette tablette contient une liste bien ordonnée de mesures relatives à 15 triplets pythagoriciens, c'est à dire relatives au longueurs (rationnelles) des côtés a,b et de l'hypoténuse : c d'autant de triangles rectangles. Plus précisement la tablette Plimpton 322 présente des colonnes de nombres $\frac{b^2}{a^2}$, b et c tels que $a^2+b^2= c^2$

---

2 $1/24 = \frac{60 \cdot 1/24}{60} = \frac{5/2}{60} = \frac{2 + 1/2}{60} = \frac{2}{60} + \frac{1/2 \cdot 60}{60^2} = \frac{2}{60} + \frac{30}{60^2}$, donc en notation sexagésimale nous écrivons 1/24 comme 0;2,30 , ou nous marquons le ; pour séparer les puissances de 60 avec exposant positif ou n. de celles avec exposant négatif.
Exemple de division:
$3 : 8 = 3 \cdot 1/8 = 3 \cdot \frac{60 \cdot 1/8}{60} = 3 \cdot \frac{15/2}{60} = 3 \cdot \frac{7 + 1/2}{60} = 3 \cdot \left(\frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}\right)$,que,en notation sexagésimale, nous écrivons 0;22,30 .

3 Le système sexagésimal permet d' exprimer l' inverse de tout nombre régulier,c'est à dire, de tout nombre qui ne contient que les facteurs 2,3,5 avec une fraction sexagésimale finie. 1/7,1/11,1/13,... donnent lieu à fractions sexagésimales infinies périodiques; pour les Babyloniens 7,11,13 .... n'ont pas d'inverse . Par exemple $1/7 \rightarrow 0;8,34,17,8,34,17,8,.....$

4 Cette tablette fut découverte et publiée par O.Neugebauer et A.Sachs (v. (18. pp. 38-41) et remonte à 1900-1600 av.J.C.

où a et b sont choisis de telle sorte que leur rapport $\frac{b}{a}$ soit décroissant de la première à la quinzième ligne. Le scribe ne donne pas d'explications. Un approfondissement des problèmes que cette tablette nous pose serait trop long et, en outre, les hypothèses des historiens concernant le procédé utilisé par le scribe pour obtenir les 15 triplets sont très nombreuses (5).

Les Babyloniens furent aussi très habiles à obtenir les approximations de certains nombres. Nous citons, à titre d'exemple, la tablette YBC 7289 (6) de la Yale Babylonian Collection de la Yale University, sur laquelle est représenté un carré avec ses deux diagonales tracées (fig 7)

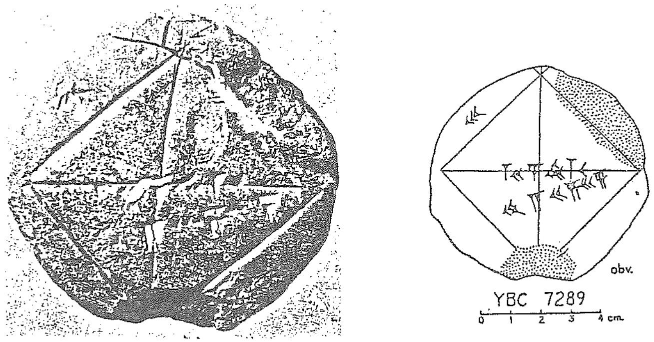


Fig 7 a,b

---

(5) Pour indications bibliographiques voir (6)

(6) v. (18), pp... 42, 43 ; cette tablette remonte à 1900-1600 av. J.C.

Les données reproduites sur la figure amènenent à une approximation très bonne de $\sqrt{2}$, c'est à dire 1; 24, 51, 10 qui, en notation décimale correspond à 1,414213 au lieu du nôtre 1,414214.....

Dans ce cas aussi le procédé qui a amené le scribe à une telle approximation n'est pas indiqué. Ceci est significatif, comme nous l'avons déjà dit plus haut, du fait que le mathématicien babylonien était plus intéressé par les résultats que par les moyens pour les obtenir ou pour les justifier. Naturellement ceci conduit ceux qui s'intéressent aux mathématiquess babyloniennes à avancer des hypothèses pour comprendre les procédes mentaux qui ont amené aux résultats connus dans les tablettes d'argile.

Dans le cas de l'approximation de $\sqrt{2}$ cité ci-dessus, la méthode suivie par les Babyloniens pourrait être la suivante : partant de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ qu'ils connaissaient, pour b petit par rapport à a, nous pouvons écrire

(1) $(a+b)^2 - a^2 \sim 2ab$.

Posons alors

$a+b = \sqrt{2}$

et considérons une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$, soit $a_1=1$.

De (1) on déduit :

$(r_1=)\ 2-1 \sim 2b$ ou $b \sim 1/2$.

Donc nous pouvons considérer une seconde approximation, par excès, de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$a_2=1 + 1/2 = 3/2 = 1;30$.

De (1) on a :

$(r_2=)\ 2 - 9/4 \sim 3b$ ou $b \sim -1/12$.

Une troisième valeur approchée de $\sqrt{2}$, par excès, sera

$a_3 = 3/2 - 1/12 = 17/12 = 1;25$,

valeur que l'on trouve dans d'autres tablettes. Procédant comme ci-dessus on obtiendra une quatrième valeur approchée de $\sqrt{2}$, par défaut,

$$a_4 = 577/408 = 1;24,51,10,.....,$$

qui correspond à la valeur lue sur la tablette. La formule générale d'approximation peut s'exprimer ainsi :

$$a_{n+1} = a_n \pm \frac{r_n}{2a_n}$$

Il est intéressant de faire à ce sujet la remarque suivante. Le scribe s'arrêtera à la valeur a_4 peut-être parce qu'elle est la première à ne pas avoir d'expression sexagésimale finie : en effet 408 contient le facteur 17 , qui n'est pas diviseur de la base 60 (voir note 3)

Les Babyloniens étaient aussi à même de calculer la somme de progressions aussi bien arithmétiques que géométriques et plus encore ; en effet sur la tablette AO 6484 on peut trouver la recette pour calculer la somme des carrés de 1 à 10. Le texte est le suivant :

Carrés depuis 1 fois 1:1 jusqu'au 10 : 1,40. Comme quoi est le nombre ? Tu multiplieras 1 par 0,20 (ou un tiers) : 0;20. Tu multiplieras 10 par 0,40 ou deux tiers : 6;40. 6;40 et 0;20 : 7. Tu multiplieras 7 par 55 : 6,25. Le nombre est 6,25 (7) .

Le problème n'est donc pas résolu en calculant les carrés successifs et en les additionnant ensuite, mais avec le schéma de calcul suivant :

$$(1.\ 1/3 + 10.2/3).55 = 385\ (= 6.60 + 25)$$

qui correspond à : $(1/3 + 2n/3) . n (n+1)/2$ pour $n = 10$

et donc à notre formule :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n\ (n+1)\ (2n+1).$$

---

(7) V. (21), p.76 ; cette tablette se trouve au Louvre et remonte à l'époque Séleucide. Pour avoir une notation uniforme nous avons introduit le point virgule dans l'écriture des nombres .

De nombreux historiens ont avancé des hypothèses à propos du procédé par lequel les Babyloniens ont obtenu ce résultat. Nous aimerions citer celle de S.J. Lurje (8) parce qu'elle est beaucoup plus simple que les autres et peut-être plus conforme à la mentalité babylonienne. Cette hypothèse de reconstruction du raisonnement du scribe est la suivante : compter, en les associant de façon adéquate, les cubes qui forment une construction dans l'espace (on dirait presque un batiment semblable aux Ziggurats typiques de l'architecture babylonienne) formée par un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont n,n, n+1 avec l'adjonction d'un escalier de $1+2+3+4.....+n = \frac{1}{2}$ n (n+1) cubes (v.Fig 8c)
Lurje prend en considération un escalier comme celui de la figure 8a, dont n=5. La plus haute marche de l'escalier est constituée par un petit cube unitaire, la deuxième marche par 4 petits cubes unitaires, la troisième par 9, la quatrième par 16 et pour finir, la cinquième par 25.

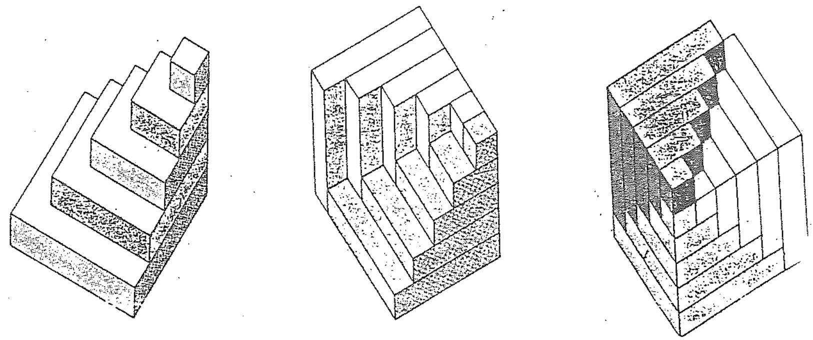


Fig. 8a, b, c

Par conséquent, le nombre total des petits cubes qui forment l'escalier est égal à la somme des carrés des nombres de 1 à 5. En associant trois constructions comme celle qui est décrite, il obtient un parallélépipède rectangle de dimensions n,n,n+1, avec l'adjonction d'un escalier qui, comme on peut voir sur la figure, est la moitié du'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 1,n,n+1. De l'observation d'ensemble de ce solide nous pouvons tirer la formule suivante :

---

(8) V. (12) , pp 72

$$3 \sum_{i=1}^{n} i^2 = n.n.(n+1) + \frac{1}{2} n (n+1),$$

dont suit, avec de très simples passages connus par les Babyloniens, le schéma de calcul qu'ils ont utilisé sur la tablette en question.

Les résultats, que nous venons d'examiner, sont certainement remarquables et intéressants, mais le domaine dans lequel la contribution des Babyloniens fut la plus originale et la plus féconde est celui du calcul algébrique.

5 LE CALCUL ALGEBRIQUE

Le symbolisme algébrique, comme nous l'entendons, est totalement absent dans les textes cunéiformes qui nous sont parvenus. Les inconnues du problème sont indiquées par des termes tirés de la géométrie tels longueur (uš) , largeur (sag), aire (a-šà), volume (sahar). Ces termes sont, cependant, utilisés de façon tout à fait abstraite ; en effet les Babyloniens additionnaient sans aucun scrupule aires et longueurs ou aires et volumes, ils ne se souciaient donc pas du sens géométrique. Il ne faut pas se laisser détourner par la terminologie géométrique des problèmes parce que les procédés mentaux des Babyloniens étaient essentiellement algébriques et la géométrie n'avait qu'un rôle auxiliaire.

Les tablettes qui nous sont parvenues démontrent que les Babyloniens étaient à même de résoudre des problèmes qui, formulés de façon moderne, correspondent aux différentes sortes d'équations qui suivent :

- équations du premier degré,
- équations du second degré,
- certaines équations du troisième degré,
- équations de degré supérieur, mais qui peuvent être ramenées à celles du second ou du troisième degré.

Les solutions se réfèrent toujours à un cas particulier, on ne généralise jamais : Les Babyloniens connaissaient plusieurs règles générales d'algèbre, mais il n'y a aucune formule, aucun théorème, simplement des recettes de calcul.

Ils appliquaient aussi ce qu'on appelle les identités remarquables :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A partir de quelques exemples, voyons de plus près les techniques utilisées.

En paticulier nous allons examiner la tablette BM 13901 (9) sur laquelle se trouvent 24 problèmes qui peuvent être classifiés, selon notre terminologie en trois groupes :

- étude de la méthode de résolution d'une équation du second degré à une inconnue (problèmes 1-7).

- étude de la méthode de résolution des systèmes de deux équations, où la valeur de la somme des carrés des deux inconnues figure dans la première et la somme (ou la différence ou un certain rapport ou le produit) des inconnues figure dans la seconde (problèmes 8-14)

- exercices d'application de ces méthodes à des cas intéressants ayant un nombre quelconque d'inconnues (problèmes 15-24) (10)

---

9 La tablette BM 13901 se trouve au British Museum, elle fut transcrite, traduite en français et commentée en 1936 par F.Thureau-Dangin (v(21) pp. 1-10 En 1937, O.Neugebauer en fit aussi une transcription, une traduction en allemand et un commentaire (v.(17) ,t.III pp.1-14) . Les deux auteurs s'accordent à dater cette tablette du début du II^e millenaire av.J.C. environ.

10 Nous préférons cette classification adopté par M.Caveing (v.(5) , t.I pp .91-95) plutôt que celle de O.Neugebauer ou autres, car elle ne se fonde pas sur des critères de classement qui dérivent de la façon actuelle de raisonner, mais est cohérente avec la mentalité babylonienne.

Les deux premiers groupes nous fournissent un enseignement de base qui comprend deux méthodes fondamentales de résolution : celle de la complétion du carré, dans le cas d'une seule équation, et celle de la demi-somme et la demi-différence des inconnues, dans le cas d'un système de deux équations.

Analyse du Problème, BM 13901 (11)

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 0;45
Tu poseras 1, l'unité.
Tu fractionneras en deux 1 : 0;30
Tu croiseras 0;30 et 0;30 : 0;15
Tu ajouteras 0;15 à 0;45 : 1
Tu soustrairas 0;30, que tu as croisé, de 1 : 0,30, le côté du carré.

L'équation du problème, formulé de façon moderne est :

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \quad (= 0;45)$$

Il s'agit donc de résoudre une équation du type :

$$ax^2 + bx = c, \qquad a,b,c > 0.$$

La méthode utilisée sur la tablette est celle de la complétion du carré, qui, étant dans ce cas a=b=1, amène à :

$$x^2 + x + (1/2)^2 = c + (1/2)^2 .$$

Le scribe alors ne doit plus qu'extraire une racine carrée pour obtenir $x + 1/2$ et effectuer une soustraction pour obtenir x. Les instructions du texte amènent à :

$$x = \sqrt{(0.30)^2 + 0;45} - 0;30 = 0;30$$

ce qui équivaut donc à l'application de la formule :

$$x = \sqrt{(1/2)^2 + c} - 1/2,$$

qui est notre formule pour la racine positive de l'équation

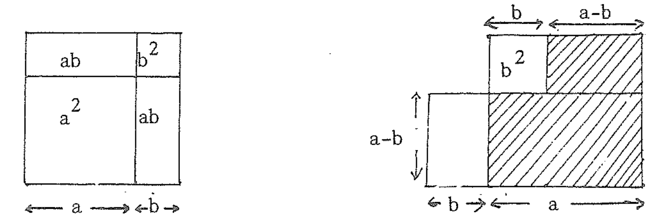
---

(11)
V. (21) ,p.1 ; nous avons introduit, pour uniformité de notation, le point virgule dans la traduction de Thureau -Dangin.

A partir de ce texte, nous pouvons déduire que les Babyloniens devaient connaître l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. D'une manière analogue la résolution d'équation du type $x^2 - x = c$, au moyen de la complétion du carré (Problème 2, BM 13901, par exemple), suppose la connaissance de l'autre identité : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nous ne savons pas comment ils ont pu obtenir ces identités. D'après L.B. van der Waerden (12),leur intuition fut facilitée par l'observation de diagrammes semblables à ceux qui se trouvent dans le second livre des Eléments d'Euclide (v.Fig 9)

Fig.9



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $a^2-b^2 = (a+b)\,(a-b)$

Toutes les équations quadratiques abordées dans ce texte, sont du type suivant :

$$ax^2 \pm bx = c \quad , a,b,c > 0$$

et sont résolues avec un algorithme qui équivaut à l'application de notre formule :

$$x = \frac{\mp\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}}{a}$$

Les Babyloniens ignoraient les nombres négatifs et ne tenaient donc en considération que la racine positive de l'équation. Mais il y a des problèmes, contenus dans d'autres tablettes, qui amènent à la résolution d'une équation quadratique du type : $x^2 + c = bx$ $(c,b > 0)$, qui a deux racines positives, qui sont explicitées.

---

(12) V. (23) p 72

Le Problème III du texte IX des Tablettes de Suse (13) , par exemple, demande la solution de l'équation :

$$x^2 + 2{,}6 = 32;30\ x$$

En notation décimale elle correspond à : $x^2 - 65/2x + 126 = 0$, qui a pour solutions $x_1 = 28$ et $x_2 = 18/4 = 4 + 1/2$. Le scribe résout cette équation par des passages équivalents à l'application de la formule suivante :

$$x = \frac{32;30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{32;30}{2}\right)^2 - 2{,}6}\ ,$$

c'est à dire, $x = 16;15 \pm 11;45$. Il écrit textuellement :

Additionne 11;45 à 16;15 tu trouves 28.
En second lieu soustrais-les : 16.45 - 11.45) - ; tu trouves 4;30 (14)

Analyse du problème 9, BM 13901 (15)

Traduction du texte	Transcription en langage mathématique moderne
1. J'ai additionné la surface de mes deux carrés : 21,40. Le côté de l'un excède le côté de l'autre de 10.	$\begin{cases} x^2+y^2 = 1300\ (=21,40) \\ x-y = 10 \end{cases}$
2. Tu fractionneras en deux 21,40 : tu inscriras 10,50.	$\frac{x^2+y^2}{2} = 650\ (=10,50)$
3. Tu fractionneras en deux 10 :5.	$\frac{x-y}{2} = 5$,
4. Tu croiseras 5 et 5 : 25	$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 25$
5. Tu soustrairas de 10,50 : 10,25.	$\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 625\ (=10,25)$
6. C'est le carré de 25.	$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = 25\ \left(= \frac{x+y}{2}\right)$
7. Tu inscriras 25 deux fois	
8. Tu ajouteras 5, que tu as croisé au premier 25 : 30, le côté du (premier) carré.	$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 30\ (=x)$
9. Tu soustrairas 5 du second 25 : 20 le côté du second carré.	$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 20\ (=y)$

(13) Les Tablettes de Suse datent de la fin de la Première Dynastie Babylonienne c'est à dire aux environs de 1500 av. J.C. E.M.Bruins et M.Rutten les ont étudièes et les ont traduites (v.(4)).
(14) v. (4). Nous avons substitué, pour avoir une notation uniforme, le point du texte par le point virgule.
(15) V.(21) p4

Pour résoudre le problème, le scribe utilise l'identité :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$$

que l' on obtient de : $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.
Puisque le problème lui fournit les valeurs de x^2+y^2 et de x-y, en extrayant la racine, au point 6. il trouve $\frac{x+y}{2} = 25$. Une fois connues les valeurs de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues, on peut en déduire ces dernières (voir points 8. et 9.).Ce n'est pas la méthode de résolution arabe, qui détermine la valeur d'une inconnue par une équation et la substitue dans l'autre. Celle qui est utilisée par le scribe est une méthode dans laquelle la demi-somme et la demi-différence des racines jouent le rôle d'inconnues auxiliaires et permettent d'obtenir simultanément les deux racines.

Une autre caractéristique de l'algébre babylonienne est la réduction en utilisant des moyens adéquats, d'un problème quadratique au problème suivant : trouver deux nombres dont on connaît la somme (ou la différence) et le produit, ce qui équivaut à resoudre le système suivant :

$$\begin{cases} xy = P \\ x+y = S \end{cases}$$

Par exemple, dans le Problème I du Prisme AO 8862 (16) ,qui peut être formalisé comme suit :

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ xy + (x-y) = 3{,}3. \end{cases}$$

Le scribe procède de la façon suivante : il additionne les deux équations : $x(y+2) = 3{,}30$, il opère comme s'il faisait la substitution $y+2=y'$ et obtient le système :

$$\begin{cases} xy' = 3{,}30 \\ x + y' = 29 \end{cases} ;$$

il procède ensuite à la résolution par la méthode de la demi-somme et de la demi-différence des racines. Le schéma de résolution peut être traduit par la formule suivante :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{x + y'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy'},$$

16 Le Prisme AO 8862 se trouve au Musée du Louvre, il date de l' époque d' Hamourabi (environ 1700 av J.C.) et contient 8 problèmes. Il fut étudié par O.Neugebauer (1937) (v. (17),I pp.108-123 et par F.Thureau-Dangin (1938) (v. (21),pp 64-71 . Pour le problème I voir (17),I pp.108-109.

qui utilise l'identité $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab$; on a donc sous le radical $\left(\frac{x-y'}{2}\right)^2$, c'est à dire le carré de la demi-somme et de la demi-différence des inconnues.

La présence de nombreux exemples de ce genre nous conduit à penser que, pour résoudre les problèmes quadratiques plus complexes, les Babyloniens ramenaient ces derniers à cette forme, qui nous venons de le voir, était pour ainsi dire, une forme normale (17).

Schéma récapitulatif des méthodes résolutives des problèmes du second degré des tablettes babyloniennes

1. $x + y = a$, $xy = b$ (1, AO 8862)	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$	Le scribe utilise l'identité
2. $x - y = a$, $xy = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \pm \frac{a}{2}$	$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$
3. $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$	$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\,(x^2+y^2)$ c'est à dire
4. $x - y = a$, $x^2 + y^2 = b$ (9,BM 13901)	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \pm \frac{a}{2}$	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$
5. $x + y = a$, $x^2 - y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \frac{b}{2a}$	
6. $x - y = a$, $x^2 - y^2 = b$	$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{b}{2a} \pm \frac{a}{2}$	$(x+y)\,(x-y) = x^2 - y^2$
7. $x^2 + ax = b$ (1, BM 13901)	$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$	
8. $x^2 - ax = b$	$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$	Complétion du carré
9. $x^2 + b = ax$ (III, IX, Suse)	$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.	

6. CONCLUSION

C'est, sans aucun doute, à l'algèbre que les Babyloniens apportèrent leur contribution la plus considérable et la plus originale. Et, suite aux exemples que nous avons examinés, nous pouvons affirmer comme O. Neugebauer que :

"Nier à l'algèbre babylonienne l'emploi d'une formule générale serait essentiellement faux ! Les séries de problèmes étroitement liés et les règles générales qui accompagnent la solution numérique constituent, en fait, un instrument qui est très proche d'une opération purement algébrique (18)

---

(17) V.16 p.40
(18) V.16 , Traduction par l'auteur pp 42.43

Par rapport aux composantes algébrique et numérique de la mathématique babylonienne, le rôle de la géométrie n'est pas très important . Les Babyloniens savaient calculer l'aire du carré, du rectangle et du triangle rectangle. Ils connaissaient, au moins du point de vue arithmétique, le théorème de Pythagore (voir § 4). Ils connaissaient aussi le triangle équilatéral, l'hexagone, les polygones réguliers et savaient qu'on peut les inscrire dans un cercle. Quant au rapport entre la circonférence et le diamètre, ce qu'aujourd'hui nous appelons π , ils utilisaient en général, pour des usages pratiques, la valeur approximative 3, mais ils connaissaient aussi une approximation meilleure, c'est à dire 3;7,30 qui correspond, en notation décimale, à 3,125 (19). Les Babyloniens savaient aussi calculer correctement le volume de certains solides, des autres ils ne connaissaient que des formules approximatives. Par contre, la géométrie comme science démonstrative ainsi que les notions abstraites, sont totalement absentes du moins dans l'état actuel des données que nous possédons.

Il y a encore sûrement beaucoup de tablettes à découvrir et il y en a de nombreuses dans les Musées d'Europe qui n'ont pas encore été étudiées. D'après nos connaissances actuelles nous pouvons, en suivant M. Caveing, décrire les caractères généraux des mathématiques babyloniennes comme suit:

La distinction que nous faisons depuis les Grecs n'est pas faite à Babylone. Même les distinctions que nous venons de voir vont un peu au-delà des textes. Dans les textes, le scribe fait flèche de tout bois. Il combine des nombres, des procédures algébriques et des données géométriques ; il combine des propriétés qu'il connaît ; il ne les explicite pas. Il donne la marche à suivre à son élève sur des exemples ; la répétition des exemples doit inscrire dans l'esprit de l'élève la marche à suivre. On a des codes, on n'a pas une théorie. Ce qu'on peut dire, c'est que, dans l'usage des codes, il y a un élément de gratuité qui apparaît à certains moments, un élément qu'on pourrait appeler ludique, ou l'on se complique la tâche un peu pour le plaisir, et peut-être aussi pour le plaisir qu'il y a à discuter entre initiés de choses qu'on est seuls à comprendre (20).

---

(19) V.(4) p 33.
(20) V.(1) p 17.

LISTE DES FIGURES

BIBLIOGRAPHIE

1 Auteurs Divers ,Le matin des mathématiciens ,Editions Belin,Paris 1985

2 Auteurs Divers ,Naissance de l'écriture,cunéiformes et hiéroglyphes, Editions de la Réunion des musées nationaux, Paris 1982

3 BENEVOLO L.,Storia della città , Laterza,Bari 1975

4 BRUINS E.M.,RUTTEN M.,Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, Tome XXXIV, Textes mathématiques de Suse, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris 1961

5 CAVEING M.,La constitution du type mathèmatique de l' idéalité dans la pensée Grecque, Atelier National de reproduction des Thèses,I,II,III,Université de Lille III 1982

6 FRIBERG J., A survey of publications on Sumero-Akkadian mathematics,metrology and related matters (1854-1982), Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, Sweden 1982

7 GIACARDI L.,Alle origini dell' algebra.Dalle 'ricette' di calcolo (Egiziani,Babilonesi) al rigore dell' 'algebra geometrica' (Greci),en Atti degl contri di Matematica,Provveditorato agli Studi di Grosseto,Grosseto 1985

8 GIACARDI L. ROERO C.S.,La matematica delle civiltà arcaiche.Egitto ,Mesop mia,Grecia, Stampatori ,Torino 1978.

9 GUILLEMOT M. PLANE H.,L'algèbre au fil des ages,Tolosae IREM 1984

10 IFRAH G.,Histoire universelle des chiffres,Editions Seghers,Paris 1981

11 IFRAH G.,Les chiffres,ou l' histoire d'une grande invention,Robert Laffont, Paris 1985

12 LURJE S.J.,Archimedes,'Neues Österreich,Zeitungs-und Verlagsgesellschaft m.b.H. ,Wien 1948

13 MANZONI M.,Il capolavoro di Gudea,Appendice A.I en T.Viola,S.Manzoni,M. Navale,Problemi geometrici applicati alle tecniche costruttive e rappresentative, con particolare riguardo al Tunnel di Samo (Ipotesi di trian lazione topografica nel VI sec. a.C.), Quaderno n° 80.3, Università di Torino 1980

14 MOSCATI S.,Antichi imperi d'Oriente, Newton Compton, Roma 1978

15 NEUGEBAUER O.,Vorlesungen über Geschichte der antik.en Mathematischen Wi senschaften, I Band, Vorgriechische Mathematik,Verlag von Julius Springer, Berlin 1934

16 NEUGEBAUER O.,The exact sciences in antiquity, Princeton University Pre Princeton 1952

17 NEUGEBAUER O.,Mathematische Keilschrift-Texte, I,II,III,Reprint, Springer Verlag, Berlin 1973

18 NEUGEBAUER O., SACHS A., Mathematical Cuneiform Texts, Publ. American Oriental Society, New Haven 1945

19 OPPENHEIM A. L., Man and nature in mesopotamian civilization in Dictionary of Scientific Biography (Vol XV. suppl.1.) Charles Scribner's sons, New York 1980.

20 PARROT A., Sumer, Librairie Gallimard, Paris 1960 ,Trad. it , I Sumeri , Feltrinelli, Milano 1961

21 THUREAU-DANGIN F., Textes mathématiques babyloniens, E.J.Brill, Leiden 1938.

22 VOGEL K., Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover 1959.

23 WAERDEN VAN DER L.B., Science Awakening, P. Noordhoff, Groningen 1954

24 WAERDEN VAN DER L. B., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer Verlag , Berlin 1983

DIDACTIQUE ET EPISTEMOLOGIE

SUR L'APPROPRIATION DES CONCEPTS

DE SUITE ET LE LIMITE DE SUITE

C. HAUCHART

Université de Louvain

Le texte ci-après est un petit extrait d'une étude sur un enseignement des débuts de l'analyse[1].

1. SUJET DE NOTRE ETUDE, OBJECTIFS PRINCIPAUX

Nous avons étudié la génèse des concepts de suite et de limite et les progrès correspondants de la pensée raisonnante chez des élèves du secondaire (et parfois d'école normale). Cette étude a été faite à partir d'un matériau bien déterminé : un lot de quelque vingt-cinq problèmes posés dans des contextes divers (numérique, géométrique, cinématique, ...).

Par cette étude, nous cherchons à mettre en évidence les raisons épistémologiques de la théorisation, et par là même, le sens de la théorie. Nous essayons d'illustrer un point de vue fréquemment défendu par Polya selon lequel l'acquis théorique directement visé (les suites et les limites) se double d'un acquis "méthodologique" qui le dépasse en importance : il s'agit d'un apprentissage de pratiques heuristiques, de modes de raisonnement et plus généralement de ce qui fonde la capacité de travailler mathématiquement.

> *"Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager; pour savoir résoudre des problèmes, il faut en résoudre.*

---

[1] Voir bibliographie.

Si vous désirez tirer le meilleur parti de votre effort, cherchez dans chaque problème des traits caractéristiques qui puissent vous être utiles dans les problèmes futurs. Une solution que vous avez atteinte (par votre effort personnel ou que vous avez lue ou entendue, et que vous avez suivie avec un intérêt réel et soutenu) peut devenir pour vous un modèle, modèle que vous pourrez imiter avec avantage dans la résolution de problèmes analogues [...] Je m'efforce, par tous les moyens disponibles, d'entraîner le lecteur à faire des problèmes et à réfléchir aux procédures et aux méthodes qu'il utilise. [...]. On devrait inculquer à l'étudiant en même temps qu'une somme d'information, un certain degré de savoir-faire. C'est pourquoi, le premier et principal devoir de l'enseignement des mathématiques dans les lycées est de souligner la méthodologie dans la résolution de problèmes[2]. *C'est ma conviction."*

G. Polya, (1967).

Enfin, sur un autre plan, nous testons l'idée de ne pas attendre qu'ils aient seize ans pour proposer aux élèves une première approche des processus infinis et des limites, mais de leur proposer bien plus tôt des problèmes mettant ces notions en jeu, et traitables sans grande formalisation. De cette manière, les élèves n'auraient pas à affronter en même temps *et* les premières difficultés liées à l'idée d'infini et de limite *et* les difficultés liées à la formalisation de ces notions. Quant à l'éternel problème du temps nécessaire pour parcourir le programme, il faut remarquer que les problèmes traités mettent en jeu non seulement les notions de suite et de limite mais aussi des matières très diverses par le biais par exemple de calculs d'aires, de calculs sur les fractions, de constructions géométriques, de transformations du plan, de la trigonométrie, ...

[2] C'est nous qui soulignons.

Cette idée de ne pas commencer de suite par la formalisation, nous la retrouvons notamment chez Kline et chez Freudenthal.

"Avant qu'on puisse apprécier la formalisation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée y est formulée et quelles exceptions ou quels pièges sa formulation même essayer d'éviter. [...]. Donc, on doit être capable de s'appuyer sur une grande richesse d'expérience acquise avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. [...]. Comment la découverte peut-elle se produire quand on demande aux étudiants de travailler avec des idées déjà surchargées de sophistication et de raffinement ?"

M. Kline, (1977).

"Est-ce parce qu'on y arrive seulement à seize ans, âge où l'on est supposé avoir déjà une certaine maturité mathématique, que l'analyse est abordée sur un mode formalisé dans la plupart des cas ? [...]. La reconstruction mentale n'aucune partie des mathématiques ne peut se passer d'une approche intuitive."

H. Freudenthal, (1973).

2. UN APERCU DES PROBLEMES TRAITES EN CLASSE

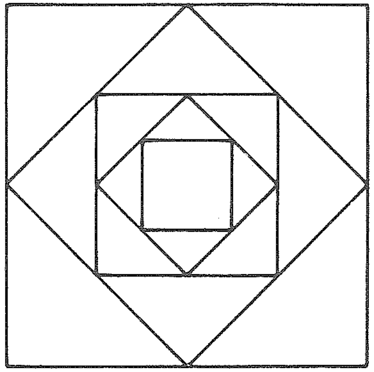
Nous avons reproduit ci-dessous, chacun dans un cadre, quelques-uns des problèmes que nous avons proposés aux élèves.

UN ZOOM DE CARRES[3]

Dans un grand carré, on construit un autre carré en joignant les milieux des côtés, ce qui fait apparaître quatre triangles rectangles.

[3] Il s'agit ici plutôt d'un thème de réflexion (puisé dans E. Castelnuovo (1980) que d'un problème.

On enlève ces quatres triangles du premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré, ce qui en fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite. Que se passe-t-il ?



DES SERIES GEOMETRIQUES DE RAISON 1/K

En travaillant sur les deux premières fiches, nous avons vu que

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 1$$

et

$$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \ldots + 1/3^n + \ldots = 1/2.$$

1) Que pouvez-vous dire de la série
$1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots + 1/4^n + \ldots$?

2) Et après avoir trouvé la limite de la série
$1/k + 1/k^2 + 1/k^3 + \ldots + 1/k^n + \ldots$

Pour k = 2, 3 et 4, explorez d'autres valeurs de k en vous répartissant le travail. Comparez les résultats. Arrivez-vous à une conclusion ?

LA SERIE HARMONIQUE

Après avoir étudié la famille de série $1/k + 1/k^2 + 1/k^3 + \ldots$, nous abordons maintenant une nouvelle série connue sous le nom de série harmonique.

Considérez la suite

1/2
1/2 + 1/3
1/2 + 1/3 + 1/4
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5
1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6
....

Si on continue à additionner ainsi, la somme

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + \ldots$$

dépassera-t-elle 1 ? Et 2 ? Et 10 ? Que vaut cette somme ?

EXERCICE

Vous avez démontré que la série harmonique tend vers l'infini et observé qu'elle croît très lentement. Pouvez-vous estimer un nombre de termes qui vous assure que la somme dépasse 10 ? Et que la somme dépasse 15 ? Et de manière générale, un nombre de termes qui vous assure qu'elle dépasse un nombre r donné ?

Un certain nombre de problèmes rapprochent deux situations à première vue analogues afin de faire émerger des contradictions. Ainsi, même quand les élèves ont déjà rencontré des séries convergentes, à d'autres moments ils restent persuadés que "si on ajoute toujours quelque chose de positif, ça tend nécessairement vers l'infini", c'est-à-dire que toute série à termes positifs tend vers plus l'infini. De la même manière, l'intuition que toute suite positive décroissante tend nécessairement vers zéro reste prégnante, même après que les élèves aient rencontré des contre-exemples.

DEUX SPIRALES DANS UN CARRE

Jusqu'ici, dans chacun de nos problèmes, nous avons étudié une suite à la fois. Nous allons maintenant en étudier deux et les comparer.

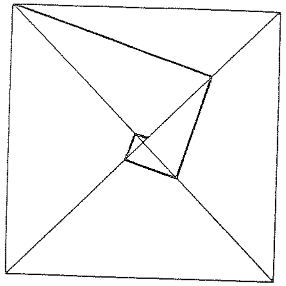
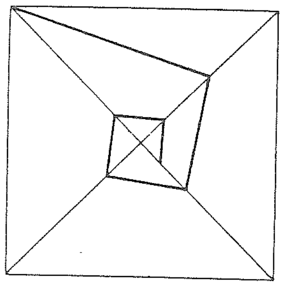


Fig. a.

Dans un carré dont la diagonale mesure 2, on dessine une spirale comme indiqué sur la Fig. a. Les distances de ses sommmets successifs au centre du carré sont 1, 1/2, 1/4, 1/8,...

On dessine de même une deuxième spirale (voir Fig. b), mais cette fois les distances de ses sommets successifs au centre sont 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...



1. Peut-on continuer ces deux spirales ?
2. Quelle est la longueur de chacune ?
3. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

DES POLYGONES EMBOITES

Voici à nouveaux deux processus infinis qui vous feront sans doute penser à notre tout premier problème, celui du zoom de carrés.

a. Premier problème

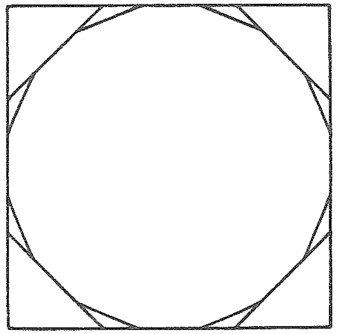


Fig. a.

On part d'un carré, à l'intérieur duquel on construit un octogone régulier, comme indiqué sur le Fig. a. A l'intérieur de cet octogone, on construit un 16-gone régulier, et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de côtés.

Que deviennent, si on continue, les aires des polygones ainsi construits ?

b. Deuxième problème

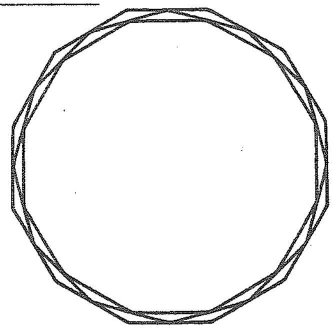


Fig. b.

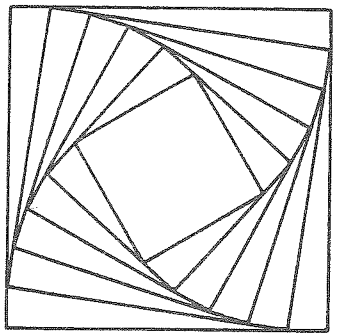
Dans un dodécagone régulier, on en dessine un deuxième en joignant les milieux des côtés du premier, puis un troisième en joignant les milieux des côtés du deuxième et ainsi de suite.

Que deviennent, si on continue, les aires des dodécagones ?

c. Comparez ces deux problèmes et leurs résultats.

DES CARRES TOURNANTS

On part d'un grand carré. On en trace un autre à l'intérieur en plaçant ses sommets comme indiqué sur la figure : chaque sommet est sur un côté du premier carré et à une distance égale à 1 cm d'un sommet de ce dernier. On place de la même façon un troisième carré dans le deuxième, puis un quatrième dans le troisième et ainsi de suite.



a. Jusqu'où va cette construction ?

b. Comparez ce problème des carrés tournants au problème du zoom de carrés et aux deux problèmes des polygones emboîtés.

HOMOTHETIES, SPIRALES ET COQUILLAGES

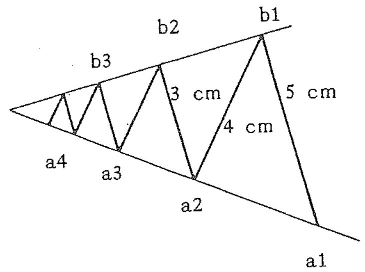
Les problèmes ci-après montrent que les suites et séries géométriques ont un lien naturel, en géométrie avec les homothéties et les similitudes, et dans la nature avec de nombreuses formes spirales telles que celles des coquillages.

1a. Voici une figure constituée d'un triangle et d'un point o.

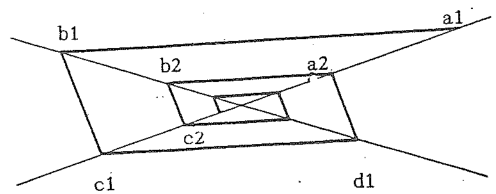
Construisez l'image du triangle par l'homothétie de centre o et de rapport 2/3. Ajoutez juste ce qu'il faut à la figure ainsi obtenue pour qu'elle devienne invariante par l'homothétie.

1b. Le dessin tel que vous l'avez complété cache (s'il est correct!) beaucoup de suites géométriques. Trouvez-les.

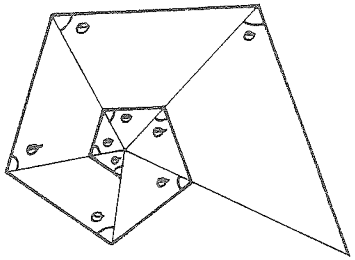
2a. Voici, ci-dessous, un zigzag a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 ... Est-il de longueur infinie ?



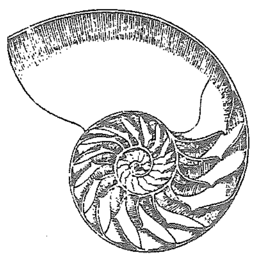
2b. Même question pour la spirale a_1 b_1 c_1 d_1 a_2 b_2 c_2 d_2 ...



3a. On considère 5 demi-droites issues d'un point et dessinant 5 angles égaux autour de ce point comme sommet commun. On trace une spirale comme indiqué sur la figure, tous les angles θ étant égaux. Si on suppose cette spirale prolongée indéfiniment vers l'intérieur, mais aussi vers l'extérieur, quelles sont les transformations affines du plan qui la laissent invariante ?



3b. Quelles sont les transformations affines du plan qui laissent invariante la figure ci-dessous qui est le dessin en coupe d'un coquillage appelé *nautilus pompilius* ?



4a. Considérons à nouveau la spirale de la Question 3a, mais en la supposant cette fois prolongée (indéfiniment) uniquement vers l'intérieur. Comment peut-on, en rajoutant quelque chose à cette figure, la transformer en une figure semblable, mais plus grande ?

4b. Même question pour le coquillage.

5. Nous avons étudié jusqu'ici des suites et des séries géométriques réelles (c'est-à-dire dont les termes sont des nombres réels). Rien n'empêche pourtant d'étendre cette théorie aux nombres complexes. Pourriez-vous par exemple étudier la suite géométrique $1, a, a^2, a^3, \ldots$ où

$$a = \frac{4}{5} i \ ?$$

Et la série géométrique correspondante ?

UNE BALLE REBONDIT

On laisse tomber une balle de ping-pong d'une certaine hauteur sur une table horizontale. Elle rebondit, et ses bonds deviennent de plus en plus petits. Puis elle s'arrête. Combien de fois a-t-elle rebondi?

Est-ce qu'elle s'arrête vraiment ? Puisque ses bonds deviennent de plus en plus petits, est-ce qu'elle n'est pas, quand on la croit arrêtée, en train de faire encore des bonds petits, petits ?

SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

Le problème posé dans cette fiche est celui de la comparaison des comportements de deux suites.

1. Comparez en détail les deux suites ci-dessous (points de départ, vitesses de croissance, l'une est-elle toujours inférieure à l'autre ?, etc.) :

$a_1 = 1.000.000$	$b_1 = 3$
$a_2 = 1.000.000,3$	$b_2 = 3,4$
$a_3 = 1.000.000,6$	$b_3 = 3,8$
$a_4 = 1.000.000,9$	$b_4 = 4,2$
....	......

2. Même question pour les deux suites ci-dessous :

$a_1 = 1.000$	$b_1 = 1{,}01$
$a_2 = 2.000$	$b_2 = (1{,}01)^2$
$a_3 = 3.000$	$b_3 = (1{,}01)^3$
$a_4 = 4.000$	$b_4 = (1{,}01)^4$
....	....

N'importe quelle suite géométrique positive croissante finit-elle par dépasser n'importe quelle suite arithmétique ?

Critiquer la proposition suivante : de deux suites géométriques positives croissantes, celle qui a la plus grande raison finit toujours par dépasser l'autre, ceci quels que soient leurs premiers termes.
Si elle est fausse, donnez-en des contre-exemples, si elle est vraie prouvez-la.

Vous avez établi que a^n tend vers zéro lorque $o < a < 1$. A partir d'un certain indice, les termes a^n de la suite peuvent donc être considérés comme de "bonnes approximations" de la limite o.

Pour la suite $(3/4)^n$, combien de pas faut-il pour que ces approximations passent de la précision 1/100 à la précision 1/1.000 ? Et de $1/10^6$ à $1/10^7$? Et de $1/10^7$ à $1/10^8$?

Même questions pour la suite $(0{,}99)^n$.

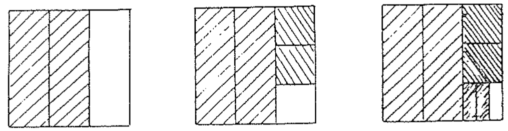
Après avoir décrit le sujet de notre étude et fournit un échantillon des problèmes posés aux élèves, nous consacrons la suite de l'exposé à l'analyse de quelques points épistémologiques particuliers.

3. LA NOTION DE SEUIL EPISTEMOLOGIQUE

Abordons-la par le biais d'un exemple. Cet exemple montre deux manières radicalement différentes de traiter la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2/3^n = 2/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots$$

Une première démarche consiste à construire la série dans un carré (de côté 1) :



2/3   2/3 + 2/9   2/3 + 2/9 + 2/27.

Ceci fournit à vue le résultat

$$2/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots = 1$$

que les élèves débutants énoncent par quelque chose comme "2/3 + 2/9 + 2/27 + etc. sera finalement égal à 1".

Une deuxième démarche est celle qui consiste d'abord à définir le concept de suite réelle comme fonction de $\mathbb{N}^*$ (ou de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, pour celui de série associée à une suite, puis celui de limite d'une suite et d'une série, pour ensuite étudier les propriétés algébriques (limite d'une somme, ...) des limites.
Pour notre exemple, on a donc une application

$$(u_n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} : n \to 2/3^n,$$

une application

$$(s_n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} : n \to \sum_{i=1}^{n} 2/3^i;$$

par ailleurs on a les résultats suivants

$$\sum_{i=1}^{n} 2/3^i = 2/3 \cdot \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 1/3^n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 2/3 \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = 1.$$

Ainsi donc, $2/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots = 1$.

Pour une élève qui aborde l'analyse, il y a une distance énorme entre ces deux voies d'approche. C'est cette distance que nous appellerons *seuil épistémologique*. Plus généralement, nous désignerons ainsi l'écart impressionnant, le seuil, entre une notion relevant de la pratique quotidienne et bien adaptée à cette pratique, et le concept mathématique correspondant, lui-même bien adapté à la pratique du mathématicien. Il est clair que ce n'est pas pour traiter un cas comme celui de la série $\Sigma\ 2/3^n$ que les concepts formalisés de suite, de série et de limite ont été créés.

Envisageons maintenant ce qui se passe pour un élève débutant qui au moment où il rencontre des concepts formalisés pour la première fois, n'a en tête que des exemples semblables à celui de la série $\Sigma\ 2/3^n$. Premièrement, il va vraisemblablement se demander ce qu'on lui veut et de ne pas comprendre les raisons, ni le sens profond de ces définitions. Et deuxièmement, on aura dénaturé complètement l'idée première qu'il peut se faire d'une série (idée première qui, pensons-nous, si elle est censurée avant même de pouvoir s'exprimer, a toutes les chances de resurgir insidieusement à un moment ou l'autre).

4. UNE EVOLUTION DE LA NOTION DE SERIE

Puisque nous parlons de dénaturation de *l'idée première de série*, voyons ce que nous avons observé chez les élèves, à savoir : Qu'est-ce qu'une série pour eux, quand ils en ont rencontré d'abord dans des problèmes, sans définitions préalables ?

Essentiellement, une série est perçue comme une somme. Et en tant que somme, elle possède une valeur, celle qu'on obtiendrait si on continuait à additionner indéfiniment. *Une série est donc un nombre*. Et bien loin de leurs pensées est l'idée qu'il puisse exister des séries divergentes. Dans la mesure où ils y voient un nombre, les élèves penchent du côté de *la facette infini actuel* de la série, envisageant des sommes d'un nombre infini de termes et même souvent possédant un infinième terme, comme semblables aux sommes finies, les seules qu'ils connaissent.

Bien entendu les élèves savent bien qu'ils n'épuiseront jamais tous les termes de cette "somme", qu'il s'agit d'une somme en perpétuel devenir. C'est ici la *facette infini potentiel*[4] de la série qui apparaît.

Les élèves oscillent ainsi sans forcément s'en rendre compte de la facette actuelle de la série à sa facette potentielle. Au passage, signalons les effets de notation et de terminologie : s'il est vrai que l'on écrit parfois

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 1 ,$$

on n'écrit jamais

$$1/2^n = 0$$

ni

$$1/2 , 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, \ldots = 0.$$

[4] Voici comment Hilbert (1926) définit les infinis potentiel et actuel : "En analyse, nous traitons l'infiniment petit et l'infiniment grand seulement comme une notion limite - comme quelque chose qui devient, qui naît, qui est en train d'être produit - c'est-à-dire que nous traitons, comme on dit, *l'infini potentiel*. Mais ce n'est pas l'infini réel lui-même. Celui-ci nous l'avons quand, par exemple, nous considérons la totalité de tous les nombres 1, 2, 3, 4, ... en elle-même comme une entité complète, ou quand nous considérons les points d'un segment de droite comme une totalité d'objets qui est actuellement donnée et complète. Cette sorte d'infini est appelé *l'infini actuel*."

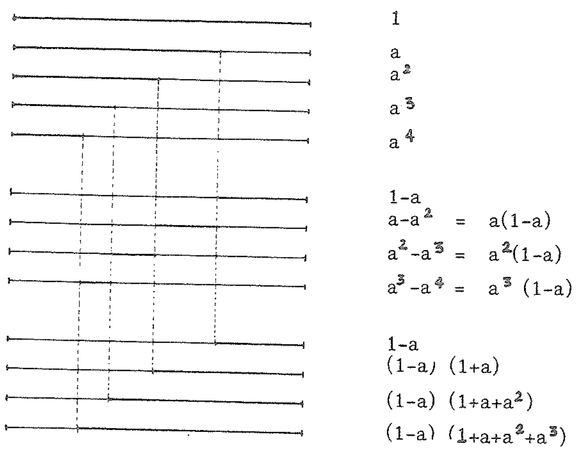
L'écriture dans le cas de la série renforce cette ambiguité ontologique (facette actuelle - facette potentielle) : on la note avec des + et un signe =, comme c'est le cas pour les sommes finies. Par ailleurs les points de suspension rappellent la facette potentielle. Notons aussi l'effet de la terminologie : on appelle *somme de la série* la limite de cette dernière, renvoyant une fois encore l'idée de série à celle de somme.

Malgré cette ambiguité, beaucoup de séries sont traitables. Par exemple, on obtient la valeur limite par un bon emboîtement, un puzzle infini dont nous venons d'avoir un exemple immédiat, mais dont il existe aussi des exemples moins immédiats. Ainsi, $1 + a + a^2 + \ldots = \frac{1}{1-a}$ car, comme le suggère le dessin ci-dessous,

$$(1 - a) + (a - a^2) + (a^2 - a^3) + \ldots = 1,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(1 - a)\ (1 + a + a^2 + \ldots) = 1.$$



Ainsi donc, un bon nombre de séries sont traitables malgré leur ambiguité ontologique. Et s'il est vrai que dans ce traitement par les élèves on voit facilement poindre l'écriture

générale de la $n^{\text{ième}}$ somme partielle, il s'agit bien là d'un outil permettant de voir plus clairement la valeur de la série et *non pas de quelque chose qui remettrait en question l'idée de série comme somme d'un nombre infini de termes*. Il ne s'agit absolument pas encore de la série comme *étant* une suite de sommes partielles mais bien de la série comme *étant approximée par* une suite de sommes partielles. Nous allons voir dans quelles circonstances cette idée primitive de la notion de série s'avèrera insuffisante, provoquant dès lors la définition de série que nous connaissons. Mais par rapport à la perception première, c'est un saut qui dénature ontologiquement leur objet de pensée, en remplaçant ce qui est perçu comme une somme par tout autre chose : une suite de sommes de plus en plus longues.

Venons-en maintenant aux circonstances qui dans notre lot de problèmes ont provoqué cette mise au point de la notion de série. Voici les questions que nous avions posées aux élèves.

UN NOUVEAU REGARD SUR LES NOMBRES

Les questions suivantes vous feront découvrir une parenté cachée entre les séries et les nombres.

1. Combien le développement décimal exact de 13/25 comporte-t-il de décimales ?

2. Même question pour 13/21.

3. La suite

0,3 0,39 0,393 0,3939 0,39393 ...

possède-t-elle une limite ? Si oui, cette limite peut-elle être écrite sous forme de fraction ?

4. Même question pour la suite

0,465 0,465465 0,465465465 ...

5. Même question pour la suite
$0{,}5 \quad 0{,}59 \quad 0{,}599 \quad 0{,}5999 \quad \ldots$

La première question leur rappelle que certaines fractions s'écrivent sous la forme d'un décimal limité. La seconde leur rappelle que pour d'autres fractions, l'algorithme de la division entre en oscillation, engendrant ainsi un décimal illimité périodique. Ainsi écrits, de tels nombres (les illimités périodiques) sont encombrants, mais l'habitude est prise dans la pratique de les limiter à quelques décimales utiles, comme le font les calculatrices. Ils sont ainsi banalisés, ramenés aux dimensions des décimaux limités comme de simples résultats de mesures, et affectés comme ces derniers d'erreurs réputées négligeables. Les questions suivantes vont en refaire des objets insolites.

Les élèves s'aperçoivent d'emblée que la suite de la question 3 amorce le décimal illimité périodique 0,393939 ... Certains ont tendance à donner celui-ci comme limite mais ils hésitent :

- d'une part 0,393939 ... est un nombre; il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il soit une limite;
- d'un autre point de vue, étant donné les points de suspension 0,393939 ... semble bien lui aussi tendre vers quelque chose sans y arriver jamais. Cet objet étrange 0,393939 ... est-il une limite ou une suite ? Et s'il est une suite, laquelle ?

$0{,}3 \quad 0{,}39 \quad 0{,}393 \quad 0{,}3939 \quad \ldots$

ou bien

$0{,}39 \quad 0{,}3939 \quad 0{,}393939 \quad \ldots$

ou encore une autre ?

Les élèves sont comme piégés par l'ambiguité du décimal illimité périodique : ils vont et viennent entre ses deux facettes (la suite et la limite de la suite).

Parfois aidés par nous, des élèves se souviennent d'avoir étudié auparavant les séries $\Sigma\ 1/k^n$ et réécrivent 0,393939... sous la forme

$$39/10^2 + 39/10^4 + 39/10^6 + \ldots$$

ce qui ne résout pas le problème : ils ne savent toujours pas si 0,393939 ... est une suite ou une limite et si oui, laquelle ?

C'est ce moment que nous avons choisi pour lever la confusion et pour ce faire : faire apparaître explicitement la suite des sommes partielles afin de la distinguer de sa limite. Ainsi apparaissent clairement les liens et les distinctions entre les trois notions de *suite, de séries et de limite*. Une série est définie comme une suite de sommes partielles, cette fois de manière significative.

Cette mise au point a d'autres effets que la construction des trois concepts de suite, série et limite. (1) Bien sûr, *l'idée de nombre* (ici de rationnel) *s'approfondit*. On croirait à observer certains élèves, même parmi les plus âgés, qu'ils découvrent soudain un lien qu'ils n'avaient pas soupçonné entre les fractions qui leur sont pourtant familières et les décimaux illimités périodiques, toujours intrigants bien que familiers eux aussi. (2) *Par ailleurs la vision séparée que les élèves avaient de deux domaines des mathématiques s'ébranle* soudain : voilà que les nombres et les séries entretiennent entre eux une relation étroite. Pour beaucoup d'élèves c'est un renversement : les nombres étaient conçus comme le matériau premier et pur à partir duquel on construit des séries; on ne se posait pas de problèmes à leur propos. Or voici que ces objets primitifs s'avèrent eux aussi être des objets mathématiquement construits et donc fort abstraits. Cette expérience mentale des élèves, la découverte inattendue de liens unissant les nombres aux séries nous a ramenés à deux citations. La première, de Bourbaki, montre que cette expérience que nous avons observée chez des élèves ressemble étonnamment à celle du chercheur en mathématiques.

"... chaque structure mentale apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonnances intuitives particulières [...]; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette stucture dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut."

N. Bourbaki, (1948).

La seconde, de B. Brecht, montre l'effet d'une irruption de l'insolite dans le banal, ce qu'il appelle *distanciation* et qui provoque un regard nouveau sur les choses et peut amener une nouvelle compréhension.

"C'est ce que font, et depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer tels phénomènes (les oscillations des pendules, les mouvements des atomes,...). Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne la comprenaient pas; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux; de la sorte, ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié. Ainsi certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour objet de les faire véritablement comprendre[5] [...]. Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience l'expérience quotidienne, s'abolit lorsque son évidence est niée par l'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension. [...]
Car ce qui est depuis longtemps inchangé paraît inchangeable [...]. Pour que toutes ces choses données apparaissent comme douteuses, il faudrait pouvoir porter sur elles ce regard étranger avec lequel Galilée observa

[5] C'est nous qui soulignons.

un lustre qui oscillait. Lui, ces oscillations l'étonnèrent, comme s'il ne pouvait les expliquer, et c'est ainsi qu'il découvrit que le mouvement pendulaire obéissait à des lois. C'est ce regard aussi difficile que productif, que le théâtre[6] doit susciter par ses reproductions de la vie en commun des hommes. Il doit contraindre son public à l'étonnement, et y parvient à l'aide d'un mode de jeu qui distancie le familier[7]."

Extraits de B. Brecht (Le petit Organon, Ecrits sur le théâtre, l'Achat du cuivre), cité par H. Bassis, (1984).

Après ces citations, revenons à ce qui nous occupait, à savoir les conséquences de la mise au point de la notion de série. Nous avons déjà cité deux points : le lien retrouvé entre les fractions et les décimaux illimités périodiques, le lien entre les nombres et les séries. (3) Il y a davantage : *un pas vers la définition abstraite des nombres.*

Il arrive que des dépôts en un certain sens inaccessibles, hors d'atteinte reçoivent une existence par le truchement d'une définition. Par exemple, on ne sait trop quel nombre 0,3939... désigne; on sait qu'on en obtient une meilleure approximation chaque fois qu'on lui ajoute des décimales. Mais cela ne le fournit toujours pas exactement.

Créer des objets par de simples définitions, puis travailler avec eux comme s'ils étaient parfaitement connus est une démarche fréquente pour un mathématicien. Pour un élève,

[6] Bertolt Brecht parle du théâtre. Nous transposons ses réflexions au niveau de l'enseignement.

[7] C'est nous qui soulignons.

c'est une démarche abstraite et difficile : à ses yeux, on ne règle pas par une définition le problème de savoir ce qu'est un nombre perçu comme inaccessible, ni ce à quoi il ressemble. Agir de la sorte lui donne le sentiment de "travailler en l'air", de devoir trop "assumer". Nous reparlerons de ces difficultés et de ce sentiment à propos de l'"hypothético-déductif".

Enfin, la manière dont le concept de série s'est mis au point illustre que ce n'est pas la notion de série, ni celle de limite, ni encore celle de nombre qui évolue chacune dans son coin, mais que toutes ces notions bougent les unes avec les autres et s'adaptent les unes aux autres. (A propos de cette interdépendance, cf I. Lahakos (1976)).

5. A PROPOS DE L'HYPOTHETICO-DEDUCTIF

On trouvera ci-après quelques observations que nous avons faites chez les élèves et qui concernent "l'hypothético-déductif".

Première observation : au moment des premiers problèmes que nous leur avons posés, nous avons souvent observé l'utilisation de conjonctions "donc" ou "parce que" dans un contexte comme celui décrit ci-après. Il s'agissait par exemple du problème des carrés emboîtés (Fig. 1) pour lequel les élèves énoncent "les carrés tendent vers le centre *parce que* les aires sont égales à 1/2, 1/4, 1/8, ...".

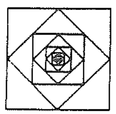


Fig. 1

Et il nous est apparu que ce qui se passait était plutôt ceci : premièrement, ils ont, a priori, le sentiment d'une limite nulle; deuxièmement, ayant ce sentiment en tête, et ne pensant qu'au problème particulier qui les occupe, ils essayent d'argumenter. Ceci les amène à évoquer des propriétés de la figure qui vont dans le sens de ce qu'ils veulent établir (ici la limite nulle). Ainsi, à notre meilleur jugement, ils perçoivent deux faits comme corrects, et l'un renforce l'autre. Ils obtiennent ainsi une sorte de *confirmation* que l'un et l'autre sont corrects, et non vraiment une *déduction* de l'un à l'autre.

Après cette première observation, voyons ce que nous entendons par *hypothético-déductif*. L'hypothético-déductif consiste à envisager des hypothèses et à considérer des enchaînements comme "Si ceci se passe, alors cela se passe" c'est-à-dire des propositions du type "p implique q" indépendamment des valeurs de vérité de p et de q. Cet hypothético-déductif, Piaget (1978), l'appelle aussi "déduction formelle
Et il en dit ceci : "elle consiste à tirer les conséquences, non pas d'un fait d'observation directe, ou d'un jugement auquel on adhère sans réserve (et que l'on incorpore ainsi à la réalité telle qu'on la conçoit), mais d'un jugement <u>*que l'on assume simplement, c'est-à-dire que l'on admet sans y croire, pour voir ce qu'il comporte*</u>[8]". Il faut, dit Piaget, pour raisonner formellement, "que l'on parvienne à rester sur le plan de la pure assomption sans revenir subrepticement au plan de la croyance propre ou de la réalité immédiate. La déduction, pour être formelle, doit donc se détacher du réel et se placer sur le plan du pur possible, qui est par définition, le terrain de l'hypothèse."

[8] C'est nous qui soulignons.

Pour illustrer ce point de vue, Piaget donne encore l'exemple suivant. "Si on dit à un enfant : *Admettons que les chiens aient 6 têtes. Combien y aura-t-il de têtes dans une cour où il y a 15 chiens ?*, il arrive fréquemment que l'enfant se refuse à conclure parce qu'il ne peut "assumer" l'hypothèse. Nous mêmes au contraire, tout en admettant que ces prémisses soient absurdes, nous saurons fort bien raisonner sur elles et conclure combien il y aura de têtes dans la cour. C'est que nous distinguons la nécessité réelle ou empirique (les chiens ne peuvent avoir six têtes) et la nécessité formelle ou logique (si les chiens avaient six têtes, ...)". Voilà donc ce que dit Piaget à propos de l'hypothético-déductif. Nous avons observé qu'il n'est pas nécessaire que les prémisses soient absurdes pour qu'il soit difficile de les assumer et qu'il est déjà difficile d'assumer des prémisses simplement arbitraires et de raisonner sur elles comme si on y croyait.

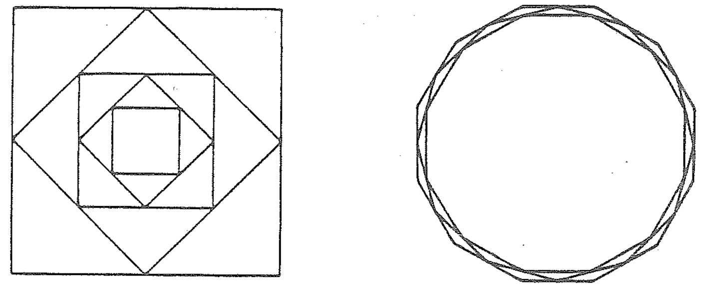
6. UNE ILLUSTRATION DE CET HYPOTHETICO-DEDUCTIF

Nous avons déjà évoqué la difficulté d'"assumer" à propos de la définition des nombres (par exemple, rendre accessible par le truchement d'une définition un nombre qui est perçu comme inaccessible).

Nous allons maintenant retrouver une difficulté de ce type dans le cas d'une démonstration. Celle dont nous allons parler est issue de la situation suivante.

DES MILLION-GONES

Parmi les problèmes que nous avons travaillés jusqu'à présent, souvenez-vous des carrés emboîtés et des dodécagones emboîtés :



Que se passerait-il si nous considérions maintenant des million-gones emboîtés de la même façon ? Et des milliard-gones ?

Une première remarque s'impose : d'un point de vue mathématique les trois suites (celles des carrés, des dodécagones et des million-gones) renvoient à la même situation (une suite géométrique positive décroissante). Par contre, d'un point de vue intuitif elles sont bien différentes. De manière générale si l'on demande à quelqu'un ce qui se passe dans un processus infini si à chaque étape on enlève au moins la moitié de ce qui reste, il vous répondra sans hésiter que la suite tend vers zéro. Par contre, si à chaque étape on enlève moins de la moitié, la perception de la limite nulle est instable selon les individus et selon le contexte dans lequel la question est posée. Ainsi pour les dodécagones et pour les million-gones les élèves hésitent : d'une part ils ont encore en tête l'idée que toute suite positive décroissante tend vers zéro et d'autre part la lenteur de la décroissance leur fait douter de la limite nulle. Si nécessaire, pour accentuer le doute et provoquer la nécessité d'une démonstration, le professeur a joué le jeu suivant : après avoir annoncé qu'il va dessiner un milliard-gone au tableau, il dessine un cercle; puis il annonce qu'il va dessiner un second milliard-gone et ... il repasse sur le cercle. Enfin, il se retourne vers la classe et demande : et alors ?

Pour nous ce problème est immédiat. Il s'agit de montrer que $a^n \to 0$ pour $0 < a < 1$. (On prend $\varepsilon > 0$, quelconque, et on montre que $(1/a)^n > 1/\varepsilon$ à partir d'un certain n en utilisant le fait que $1/a$ est de la forme $1 + r$, avec $r > 0$ et que

$$(1 + r)^n > (1 + nr).$$

Pour les élèves, la démarche à suivre n'est pas si banale que ça.

Une première étape puisqu'ils étaient dans le doute *a été de poser une conjecture* (ici $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ pour $0 < a < 1$). Entrer dans le jeu d'une conjecture à démontrer présente des difficultés pour qui n'en a pas l'habitude. En effet, supposons que A soit la conjecture à démontrer. La démarche est du type suivant :

1°) je crois bien que A est vraie;

2°) je n'en suis pas tout à fait sûr;

3°) donc, je vais essayer de démontrer;

4°) je vais donc me concentrer sur "A est vraie", mon objectif; mais pour démontrer, je ne pourrai utiliser "A est vraie"; donc je dois d'une certaine manière faire abstraction de mon objectif.

A la fois le "je crois bien" et le "je ne suis pas sûr" doivent être assez forts chez l'individu sans quoi il n'éprouve pas le besoin de démontrer. Tout comme il peut être difficile dans une déduction formelle d'assumer simplement l'hypothèse, il peut être difficile ici de considérer simplement de manière neutre la proposition que l'on veut démontrer (en gommant notamment les intuitions, les a priori qui l'ont d'abord constituée mentalement). La difficulté est de les gommer dans le raisonnement formel et en même temps de s'en inspirer pour deviner des pistes de démonstration.

Après la conjecture, considérons la démonstration proprement dite. Partant de la proposition que constitue la conjecture, elle a consisté a essayer de remplacer cette dernière par une autre plus maniable, plus accessible et qui l'entraîne; puis celle-ci par une autre, et ainsi à plusieurs reprises,

de sorte que de la dernière on puisse revenir à la première et la prouver.

Dans notre exemple, on cherche à voir si les aires des million-gones tendent vers zéro c'est-à-dire si la suite $A.(\cos \frac{\pi}{10^6})^n$ tend vers zéro. La démarche rebondit comme suit :

- Trouver une proposition plus facile à démontrer et dont on pourrait déduire la limite nulle de $A.(\cos \pi/10^6)^n$ (la calculatrice n'était pas d'un grand secours car elle affichait 1 pour $\cos(\pi/10^6)$).
- Si on arrive à montrer que $A.a^n$ tend vers zéro quand a est un nombre entre 0 et 1, alors c'est gagné. Cherchons donc à montrer que $A\,a^n$ tend vers zéro dans ces conditions (généraliser pour simplifier).
- Mais si on arrive à montrer que a^n tend vers zéro quand a est entre 0 et 1, alors on arrive à démontrer que $A.a^n$ tend vers zéro
- ...

et ainsi de suite en passant encore par des propositions concernant les suites $(1 - x)^n$, A/b^n, $1/b^n$, b^n ou encore $(1 + x)^n$ où x représente un nombre strictement positif et b un nombre strictement supérieur à 1.

Cette démarche de la recherche, spontanée mais difficile car on travaille à chaque étape sur du non sûr (la conjecture) est analogue à *l'analyse* telle qu'on la trouve définie en tant que méthode chez Euclide. L'analyse qui correspond à la recherche de la démonstration fonctionne *par régressions successives* à partir de la thèse jusqu'au moment où l'on obtient un axiome ou une propriété connue. Elle s'oppose à *la synthèse* qui parcourt le chemin inverse : partant de la propriété à laquelle l'analyse a finalement abouti, elle établit la thèse *par déductions successives*.

7. DES ACQUIS METHODOLOGIQUES

Ainsi donc, les élèves ont reconstruit les premiers éléments de la théorie des suites en partant de problèmes posés dans des contextes divers. Au terme de ce travail, leur acquis ne se borne pas à ces éléments théoriques. Leurs expériences de recherche ont développé chez eux une expérience de la recherche qui déborde les suites et les limites.

Si la théorie avait été enseignée d'abord, les occasions *de progrès méthodologiques* auraient été moins nombreuses. Car alors, il faut moins chercher un chemin, la voie est tracée. L'autoroute théorique peut cacher le paysage, empêcher l'initiative, bloquer l'imagination.

Nous terminons cet exposé en relevant quelques points épistémologiques dont on ne saurait exagérer l'importance. Le prix à payer pour ces acquis méthodologiques est celui d'un effort difficile : il n'est pas aisé de se passer d'une théorie qui serve de guide et de secours. L'essentiel est que les élèves s'y essayent, qu'ils apprennent à discerner ce qui est clair de ce qui ne l'est pas, ce qui est résolu de ce qui ne l'est pas, qu'ils arrivent à ne pas craindre leurs erreurs et à ne pas s'en décourager, mais au contraire à prendre appui sur elles pour en tirer des résultats positifs. Voici donc ce relevé à coup sûr incomplet:

- Evaluer et comparer, selon les nécessités, divers supports de pensée : segments bout-à-bout, carré qu'on remplit progressivement, fractions amenées à la forme la plus suggestive, nombres décimaux traités par calculatrice, symboles littéraux.

- Clarifier certaines choses, les amener dans une zone d'évidence par un changement approprié de point de vue ou d'outil : a) transformer l'espace dans lequel on travaille

(passage de x à 1/x); b) se ramener d'une suite à une autre par une majoration ou une minoration; c) embrayer la structure multiplicative sur une suite se présentant naturellement de manière additive.

- Reconnaître une structure sous un vêtement compliqué, hérissé de symboles qui brouillent la vue.

- Discerner le pouvoir éclairant d'un cas particulier au milieu d'une théorie générale.

- Recourir à bon escient au raisonnement par l'absurde, par récurrence.

- Ajuster un procédé de pensée connu à une situation nouvelle.

- Décentrer sa pensée pour résoudre un problème, viser à côté de la cible pour arriver dedans.

- Devenir attentif, à force d'en avoir découvert par hasard, à de surprenantes parentés de stucture.

- Réaliser que la théorie se structure parfois, sinon souvent, autrement que l'intuition. La théorie est tout autre chose qu'une intuition habillée scientifiquement.

- Apprendre à parcourir mentalement son propre cheminement vers une solution, en y repérant les difficultés, les fausses pistes, les moyens de résolution.

- Etendre l'objet de sa réflexion. "Est-ce toujours comme ça" est une bonne question conduisant à confronter des cas, généraliser, classer.

- Réaliser que les démonstrations ne sont pas des rituels symboliques, et qui de plus se célébreraient nécessairement après l'énoncé. Certaines démonstrations s'expriment bien dans la langue quotidienne, c'est-à-dire sans aucun symbole. Certaines ont été construites en quelque sorte spontanément, au départ d'un exemple, et n'ont conduit à l'énoncé que par après.

- Redonner une identité aux objets qui l'ont perdue par confusion de sens au fil de la recherche, c'est-à-dire apprendre à restructurer une théorie ébranlée. Ce point est essentiel. Il concerne en réalité deux théories (ou deux concepts) et non une. Deux théories se rencontrent et leur conflit menace le statut de chacune. Une théorie englobante est construite sur les ruines des deux autres.

BIBLIOGRAPHIE.

H. Bassis, *Je cherche, donc j'apprends !*, Ed. Sociales, Paris 1984.

N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahier du Sud, 1948.

I. Lakatos, *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge Univ. Press, 1976.

E. Castelnuovo, *La mathématique dans la réalité*, Cedic, Paris, 1980.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

C. Hauchart, *Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite*, dissertation doctorale, 1985.

D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen, 95 (1926), p. 161-190.

M. Kline, *Calculus, an intuitive and physical approach*, J. Wiley, New York, 1977.

J. Piaget, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Paris, 1978.

G. Polya, *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris, 1967.

L'INTERET INTERNATIONAL

D'UN PROBLEME

PROPOSE PAR VIVIANI

Clara Silvia Roero

Université de Turin, Italie

Les études des figures géométriques courbes, comme le cercle, les lunules, la spirale d'Archimède dans le plan, la sphère, le cylindre, les conoïdes et les sphéroïdes dans l'espace ont intéressé un grand nombre de savants au cours des siècles. Dès l'antiquité un des problèmes les plus discutés ou débattus était celui de la quadrature du cercle. A ce sujet nous pouvons citer les tentatives, dès le Vème siècle avant Jésus Christ, de Antiphon, Bryson et Hippocrate de Chio. On attribue à ce dernier la quadrature de plusieurs lunules (1). Archimède (287 -212 avant J.C) a consacré de nombreux écrits aux figures curvilignes. Dans la Mesure du cercle il démontre que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} ,$$

valeur de π qui restera en vigueur jusqu'à la Renaissance. Dans Les spirales il démontre que l'aire décrite par le premier tour de la spirale est le tiers de l'aire du premier cercle. Dans l'espace, Archimède a étudié les propriétés de la sphère, du cylindre, des conoïdes et des sphéroïdes. Plus important est le résultat sur le volume de la sphère et du cylindre circonscrit, qu'il présente dans "De la sphère et du cylindre" où, entr'autres, il exprima le voeu que sa tombe portât la représentation géométrique correspondante, voeu que combla le général Marcellus (2).

Les résultats obtenus par les mathématiciens grecs sur l'aire des lunules, des spirales et des segments de parabole et sur les volumes des paraboloïdes, des cônes, des sphères et des cylindres au moyen de la comparaison le plus souvent avec l'aire ou le volume de figures élémentaires rectilignes et leur expression à l'aide de rapports simples d'entiers, ont conduit les successeurs à penser aussi que le problème de la quadrature du

---

(1) V.Caveing 1982, T.II,pp.586-723.

(2) V.J.Dhombres, Archimède, dans Noël 1985, pp.53-66.

cercle pouvait se résoudre élémentairement. Ce n'est toutefois qu'en 1882 que F.Lindemann (1852-1939) en montra l'impossibilité. Mais ceci dépasse le cadre de notre exposé. Nous voulons seulement rappeler que les études d'Archimède ont été poursuivies et commentées et que l'intérêt pour ces problèmes s'est aussi poursuivi durant la Renaissance avec la traduction et l'étude des oeuvres mathematiques grecques. En particulier, en Italie encore au XVII ème siècle et au début du XVIIIème certains mathématiciens préfèrent continuer l'étude des écrits grecs plutôt que d'envisager de nouvelles méthodes de démonstration. Vincenzo Viviani (1622-1703) est un des représentants les plus importants de cette tendance. Toutefois il ne se limita pas aux études des classiques existants et il essaya de reconstruire les oeuvres perdues (3). Viviani a travaillé toute sa vie dans cette direction et il a négligé les travaux importants d'autres mathématiciens comme Descartes, Fermat et Leibniz. Un des problèmes qu'il a étudié plus particulièrement dès le début de ses recherches, est celui de trouver une portion de surface sphérique quarrable, c'est à dire égale à la surface d'un carré donné (4). C'est justement le problème qu'il a lancé beaucoup plus tard comme défi aux savants étrangers en 1692 : à notre avis, ceci est dû au fait que Viviani avait trouvé une solution à ce problème mais qu'il n'avait pas pu en donner une démonstration selon les canons de la mathématique grecque. S'appuyant sur la solution du problème de la chaînette donnée par Leibniz, lors de son voyage en Italie en 1689-1690, solution que Galilée

---

(3) Citons De maximis et minimis géometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei, adhuc desideratum . 1659 (Divination géométrique sur les maxima et minima dans le cinquième livre des Coniques d'Apollonius de Perge jusqu'a présent recherché ;) De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros iniuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae. 1702 (Deuxième divination géométrique sur les lieux solides dans les cinq livres perdus de Aristee le vieux).

(4) "Car on entend par le mot Quadrature, la manière de faire un quarré égal à une figure proposée. Ainsi la Quadrature de la parabole est la manière de faire un quarré égal à une Parabole terminée" (Ozanam 1691).

avait en vain cherchée André Robinet ajoute une autre interprétation intéressante (5) : Viviani, qui s'enorgueillissait d'être le dernier disciple de Galilée voulait relever le gant et il proposa donc ce défi.

Le 4 Avril 1692, à Florence, par ordre du Grand-duc Cosimo III, un problème de mathématique imprimé en un certain nombre d'exemplaires ayant pour titre Aenigma Geometricum de miro opificio Testudinis Quadrabilis Hemisphaericae c'est à dire Enigme géométrique de la merveilleuse construction de la voûte hémisphèrique quarrable proposé par un dénommé D.Pio Lisci Pusillo Géométra. L'énigme est par la suite envoyée à tous les mathématiciens d'Europe et publiée également dans les revues les plus prestigieuses du XVIIème siècle, c'est à dire dans les Acta Eruditorum (Fig 1.), et dans les Philosophical Transactions (6).

L'auteur de l'énigme était, comme nous avons déjà dit, Vincenzo Viviani, qui voulait cacher son nom derrière un anagramme afin de souligner la circonstance qu'il était le dernier des élèves de Galilée. Car D.Pio Lisci Pusillo Géometra signifie Postremo Galilei Discipulo. Nous vous rappelons briévement qu'aujourd'hui ce problème s'appelle "la fenêtre de Viviani" bien que ceci ne recouvre pas la réalité historique. En effet sous cette locution nous comprenons la recherche de l'aire de la partie de la sphère tracée sur la figure obtenue au moyen de l'intersection de la sphère et d'un cylindre de rayon moitié.

---

(5) V.Robinet 1986 et Leibniz 1692 a.

(6) Acta Eruditorum, Mensis Junii MDCXCII, pp 274-275 ; Philosophical Transactions vol.XVII , N.196, 1692/3 pp.585-586. Voir la traduction de l'énigme dans le Compte rendu de l'Atelier "La fenêtre de Viviani" de D. Lanier. in Commission Inter I.R.E.M. Histoire et Epistemologie des mathématiques. Bulletin de liaison n°4 pages 61-65. I.R.E.M. de Toulouse 1986

ÆNIGMA GEOMETRICUM DE MIRO OPIFIcio *Teſtudinis Quadrabilis Hemisphæricæ*

A D. PIO LISCI POSILLO GEOMETRA propoſitum die 4 April. A. 1692.

Cujus divinatio a ſecretis artibus illuſtrium Analyſtarum vigentis ævi expectatur, quod, in Geometriæ pura Hiſtoriæ tantummodo verſatus, ad tam recondita videatur invalidus.

INter venerabilia eruditæ olim Græciæ Monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum auguſtiſſimum ichnographia circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod, Teſtudine intus perfecte hemisphærica, operitur: Sed in hac feneſtrarum quatuor æquales areæ (circum ac ſupra baſim hemisphæræ ipſius diſpoſitarum) tali configuratione, amplitudine, tantaque induſtria, ac ingenii acumine ſunt extructæ, ut his detractis ſuperſtes curva Teſtudinis ſuperficies, pretioſo opere muſivo ornata, Tetragoniſmi vere geometrici ſit capax.

Quæritur modo, quæ ſit, qua methodo quave arte pars iſta hemiſphæricæ ſuperficiei curvæ quadrabilis, tenſæ ad inſtar carbaſi, vel turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cui demum plano geometrice quadrabili ſit æqualis?

Præſentis ænigmatis enodatio (quod ſpectat ad hujus admirabilis Fornicis tum Conſtructionem expeditiſſimam, tum Quadraturam) *Sereniſſimo FERDINANDO Magno Principi Etruriæ*, ſcientiarum & nobiliorum artium *Cultori ac Patrono Generoſiſſimo*, ab eodem Ænigmatiſta oblata jam eſt; qui quidem ſimul non dubitat, quin hoc ipſum ænigma a ſingulis literario in orbe degentibus hodie præclariſſimis Analyſtis ſit ſtatim divinandum, proprias quadrationes impertiendo ſingularis Teſtudinis hujus tetragoniſmicæ ab hemisphæra diſſectæ, & ipſorum peracutas indagines, multiplicesque induſtrias ad hoc unum, idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometricam jacere audent, ſilere diſcant; vel potius maxima cum voce exclament,

Ob unica verorum ſciſcitabilium Scientia a Divina in hominum *mente* infuſa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, æterna iſta, quæ ſemper & unicuique ſunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum ſcire perquirat.

Fig. 1 Acta Eruditorum, Mensis Junii MDCXCII p.274.

Mais Viviani proposait de disposer opportunément quatre fenêtres égales autour de la base circulaire d'un dôme hémisphérique de telle sorte qu'en les enlevant, la surface restante soit quarrable (7).

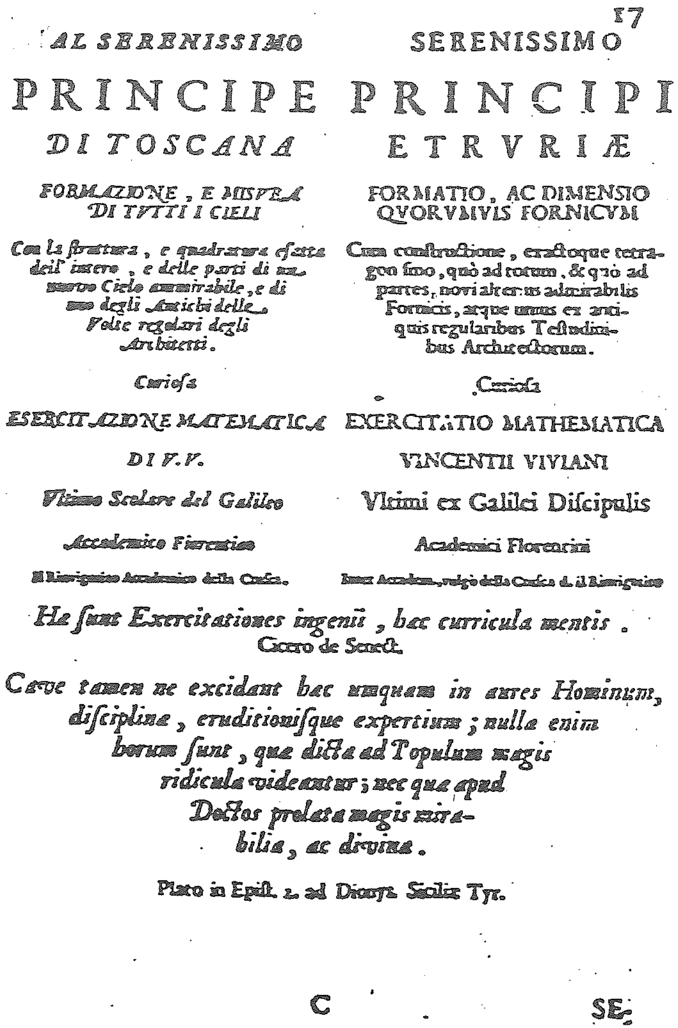
Dans le premier problème de son ouvrage Formazione e misura di tutti i cieli (Formation et mesure de toutes les voutes, Fig 2), publié en mai de la même année, il donne une nouvelle forme à son énigme : "Trouver un hémisphère et découper de sa surface non quarrable une portion égale au carré du segment donné AB". (8)

Viviani donne ici, sans démonstration, une construction pratique à l'aide d'un tour et d'une perceuse. Nous allons voir que cette solution, qui ne sera connue à l'étranger que vers la fin de 1692, se rapproche de celle de Jacob Bernoulli, Aenigmatis Florentini solutiones varie infinitae : (Une infinité de solutions diverses de l'énigme florentine)

---

(7) Ce qui n'est pas pour nous surprendre, "La fenêtre de Viviani" ayant aire $2(\pi - 2)\, r^2$, alors que le domaine envisagé par Viviani à pour aire $4\, r^2$, c'est à dire un multiple entier du carré de rayon de la sphère.

(8) " Trovar una mezza sfera, ed assegnar sulla superficie curva di essa non quadrabile una porzione, che sia uguale al quadrato della data retta AB " (Viviani 1692, p.3).


17

AL SERENISSIMO PRINCIPE DI TOSCANA

FORMAZIONE, E MISURA DI TUTTI I CIELI

Con la struttura, e quadratura esatta dell'intero, e delle parti di un nuovo Cielo ammirabile, e di uno degli Antichi delle Volte regolari degli Architetti.

Curiosa

ESERCITAZIONE MATEMATICA DI V. V.

Ultimo Scolare del Galileo

Accademico Fiorentino

Il Rinvigorito Accademico della Crusca.

SERENISSIMO PRINCIPI ETRURIÆ

FORMATIO, AC DIMENSIO QUORUMVIS FORNICUM

Cum constructione, exactoque tetragonismo, quò ad totum, & quò ad partes, novi alterius admirabilis Fornicis, atque unius ex antiquis regularibus Testudinibus Architectorum.

Curiosa

EXERCITATIO MATHEMATICA VINCENTII VIVIANI

Ultimi ex Galilei Discipulis

Academici Florentini

Inter Academ., vulgò della Crusca d. il Rinvigorito

Hæ sunt Exercitationes ingenii, hæc curricula mentis.
Cicero de Senect.

Cave tamen ne excidant hæc umquam in aures Hominum, disciplinæ, eruditionisque expertium; nulla enim horum sunt, quæ dicta ad Populum magis ridicula videantur; nec quæ apud Doctos prolata magis mirabilia, ac divina.

Plato in Epist. 2. ad Dionys. Siciliæ Tyr.

C SE

Fig.2 G.Grandi, Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum, p.17.
Texte et traduction latine du livre de Viviani.

Viviani considère une sphère dont un diamètre horizontal est AB et le centre E, représentée dans Fig. 3 par l'un de ses plus grands cercles ACBD qu' il suppose sur un plan vertical. Par une perceuse dont le diamètre de la mèche est égal au rayon EA de la sphère, Viviani imagine la percer perpendiculairement au plan du cercle ACBD en F et G, milieux des rayons EA, EB.

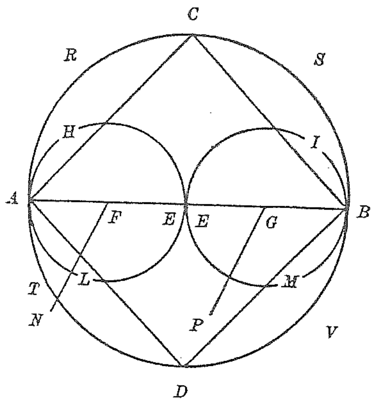


Fig 3.

"Quand vous aurez fait ceci -précise Viviani- Je prétends qu vous aurez rapidement et bien résolu le problème sur chacun de ces deux hémisphères ACB supérieur et ABD inférieur." (9)

---

(9) "Cio fatto dico che avete e presto e bene sciolto il problema su ciascuna di queste mezze palle ACB superiore e ABD inferiore." (Viviani 1692, pp 4-5).

Le dôme quarrable est donc réalisé par Viviani en perçant une sphère moyennant deux cylindres égaux, dont le diamètre est égal au rayon de la sphère. Ces cylindres ont une et une seule génératrice en commun, passant par le centre E de la sphère. Si l'on considère le plan diamétral de la sphère, passant par les axes des deux cylindres, qui est évidemment horizontal, la partie de surface sphérique située au dessus de ce plan et extérieure aux deux cylindres, est le dôme cherché, ayant une aire égale au carré du diamètre de la sphère. Par sa forme et sa propriété, cette portion de surface sphérique fut également appelée Voile Quarrable Florentine (Vela Quadrabile Fiorentina).

N'étant pas entièrement satisfait par la construction proposée sur une sphère en bois façonnée au tour, Viviani donne également, à la fin de son exposition, une deuxième régle pratique pour l'exécution du dôme.

Il part cette fois-ci de deux parallélépipèdes égaux en bois (Fig 4) , ayant hauteur et profondeur doubles de la largeur, qu'il perce dans les centres E et G. Il rabote les faces BR et PS jusqu'à ce que les points F et H apparaissent. Ensuite il colle les deux plans BR et PS, en réalisant ainsi un nouveau parallélépipède, qu'il façonne au tour, jusqu'à ce qu'il devienne une sphère de diamétre LN, percée cependant à l'intérieur de ladite façon.

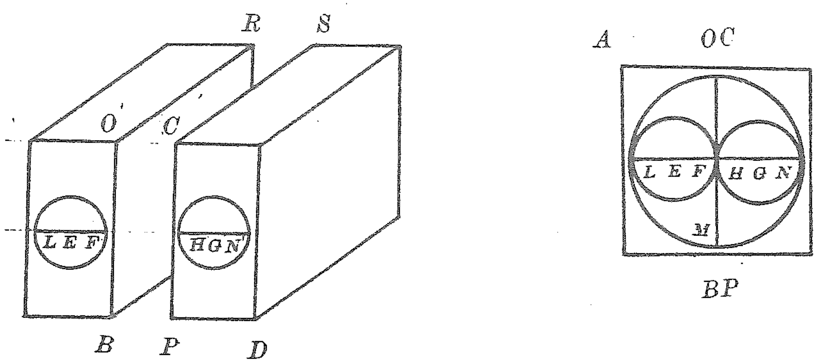


Fig 4

Il obtient par là deux modèles de la Voile Quarrable Florentine. C'est ainsi que Viviani tient sa parole, qu'il avait donné le 4 avril 1692, lorsqu'il avait écrit : "La solution de la présente énigme (...) a déjà été offerte au sérénissime Ferdinand Grand-duc de Toscane."(10).

Dans l'introduction de ce petit traité Formazione e misura di tutti i Cieli qui, comme nous l'avons déjà dit, ne sera connu à l'étranger que vers la fin de 1692, l'auteur déclare entre autres avec orgueil qu'il a été le premier à penser et découvrir une surface de ce genre sur la sphère.

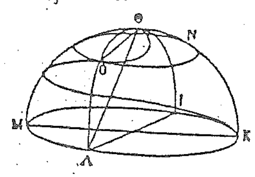
En réalité comme le moine camaldolien Guido Grandi (1671-1742) le remarquera plus tard, le premier qui indiqua une portion quarrable de surface sphérique fut Pappus (III-IV siècle après J.Ch.) dans sa Collection Mathématique (Ver Eecke 1933 , livre IV, prop. 30, pp. 201-206).

Son hélice (11) qui s'étale sur une surface hémisphérique, en partant du pôle pour rejoindre la circonférence de base, après avoir dessiné un tour complet autour de l'axe de l'hémisphère, divise, avec l'arc du plus grand cercle qui en unit les extrêmes, la dite surface en deux parties, dont l'une a une aire équivalente au carré du diamètre de la sphère.

---

(10) "Presentis aenigmatis enodatio (...) Serenissimo Ferdinando Magno Principi Etruriae ... ab eodem Aenigmatista oblata jam est. "

(11) Pappus conçoit une hélice tracée sur une sphère de la manière suivante : "Soit, dans une sphère, le cercle le plus grand K Λ M décri autour du point Θ comme pôle ; décrivons, du point Θ , la quatrième partie Θ NK d'un cercle le plus grand, et que l'arc Θ NK, mu autour du point fixe Θ sur la surface et vers le partie Λ M, s'établisse de nouveau en place, tandis qu'un point mobile sur cet arc s'avance du point Θ au point K. Ce point décrit donc dans la surface une hélice Θ OIK..."
(Ver Eecke 1933 p.202 ; voir aussi D.Lanier, Compte rendu de l'Atelier "La fenêtre de Viviani" déjà cité.



En proposant son Aenigma le 4 avril 1692, V.Viviani avait notamment engagé des analystes de l'époque à résoudre son problème, tout en s'avouant incapable de comprendre leurs méthodes.

Les résolutions qui parviennent à Florence de toutes parts sont très nombreuses, ce que Viviani lui-même déclare dans ses lettres à différents amis. (12). Parmi les premiers et les plus connus mathématiciens répondant à sa question nous trouvons Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital, Wallis et David Gregory. Leurs résolutions singulièrement différentes entre elles paraissent également dans les revues scientifiques citées précédemment, à l'exception de la résolution du Marquis de L'Hôpital, dont nous n'avons par contre aucune trace. Toutefois, nous savons , par ses correspondances, (13), qu'elle a été envoyée à Florence. Mais les recherches que nous avons conduites dans les Archives et les diverses Bibliothèques de Florence n'ont pas permis de la retrouver. Il est très probable que cette solution du Marquis de L'Hôpital ne fût pas différente de celle de Jacob Bernoulli. Dans une lettre de Johann Bernoulli à L'Hôpital du 22 Juillet 1694, il est écrit : *" Vous trouverez aussi dans cet extrait la solution de l'énigme florentine par Mr. Viviani, mais elle est à peu prez la même que celle que je vous avois donné à Paris." (14)*

L'examen des résolutions données est extrêmement intéressant, car il permet de confronter les méthodes et les moeurs des mathématiciens de la fin du XVII ème siècle, tout en révélant l'intérêt qui dominait encore pour les problèmes liés à la quadrature des surfaces circulaires et sphèriques, et, si l'on veut, à la fameuse question de la quadrature du cercle. (15)

---

(12) V.Tenca 1953 et Roero 1982.

(13) V.Gerhardt 1849, pp.218-224 et Huygens 1905, p.329, p.346 et 354.

(14)V.Spiess 1955, p.232.

(15) V.Tenca 1952.

Aussi ces résolutions prouvent-elles la remarquable imagination des mathématiciens s'appliquant à une construction d'architecture.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) résout l'Aenigma le 27 mai 1692, le jour même où il la reçoit, et en envoie au Grand Duc de Toscane le 28 mai la résolution accompagnée d'une lettre ,où il déclare son admiration pour Galilée aussi bien que pour ses élèves. Quant au problème, Leibniz le définit "trés élégant et utile au progrès de la science". Il écrit *"Sa solution me donna l'occasion de trouver non seulement l'aire plane équivalente de portions de surfaces sphériques par d'innombrables moyens, mais également leur quadrabilité". (16)*

La résolution, avec démonstration, de Leibniz, parait également au mois de juin 1692 dans les Acta Eruditorium et est scrupuleusement analysée par Jacob Bernoulli, qui y découvre , entre autres, une faute banale de calcul qu'il signale à l'auteur. (17)

Leibniz commence par énumérer un certain nombre de découvertes concernant des portions de surface de la sphère depuis Archimède. Il rappelle le célèbre théorème d'Archimède qui prouve que la surface de la sphère est l'équivalent d'un cercle ayant le diamètre double de celui de la sphère (De la sphère et du cylindre, I prop 33, Mugler 1970 pp.76.78) ainsi que le théorème plus général qui donne la surface d'une calotte sphérique ou d'une portion de sphère renfermée entre deux parallèles. (De la sphère et du cylindre, I prop.42 et 43, Mugler 1970 pp. 95.97) Leibniz rappelle par la suite qu'on venait de trouver l'aire du triangle sphérique renfermé par trois grands cercles.

---

(16)Aenigma est perelegans,quod mitti curasti, et fructuosum ad augmenta scientiae ; nam solutio ejus occasionem mihi dedit, innumerabilibus modis superficiei sphaericaepartes non in plana tantum, sed et in quadrata redigendi,... " (Gerhardt 1858, P.270).

(17) Leibniz corrigera sa faute dans les Acta Eruditorum du Janvier 1693 (V.Leibniz 169b, Additio...) D'autres écrits de Leibniz sur ce problème sont conservés au Leibniz-Archiv de Hannovre (V.Fig.5).
Ces manuscrits seront publiés dans Roero 1986.

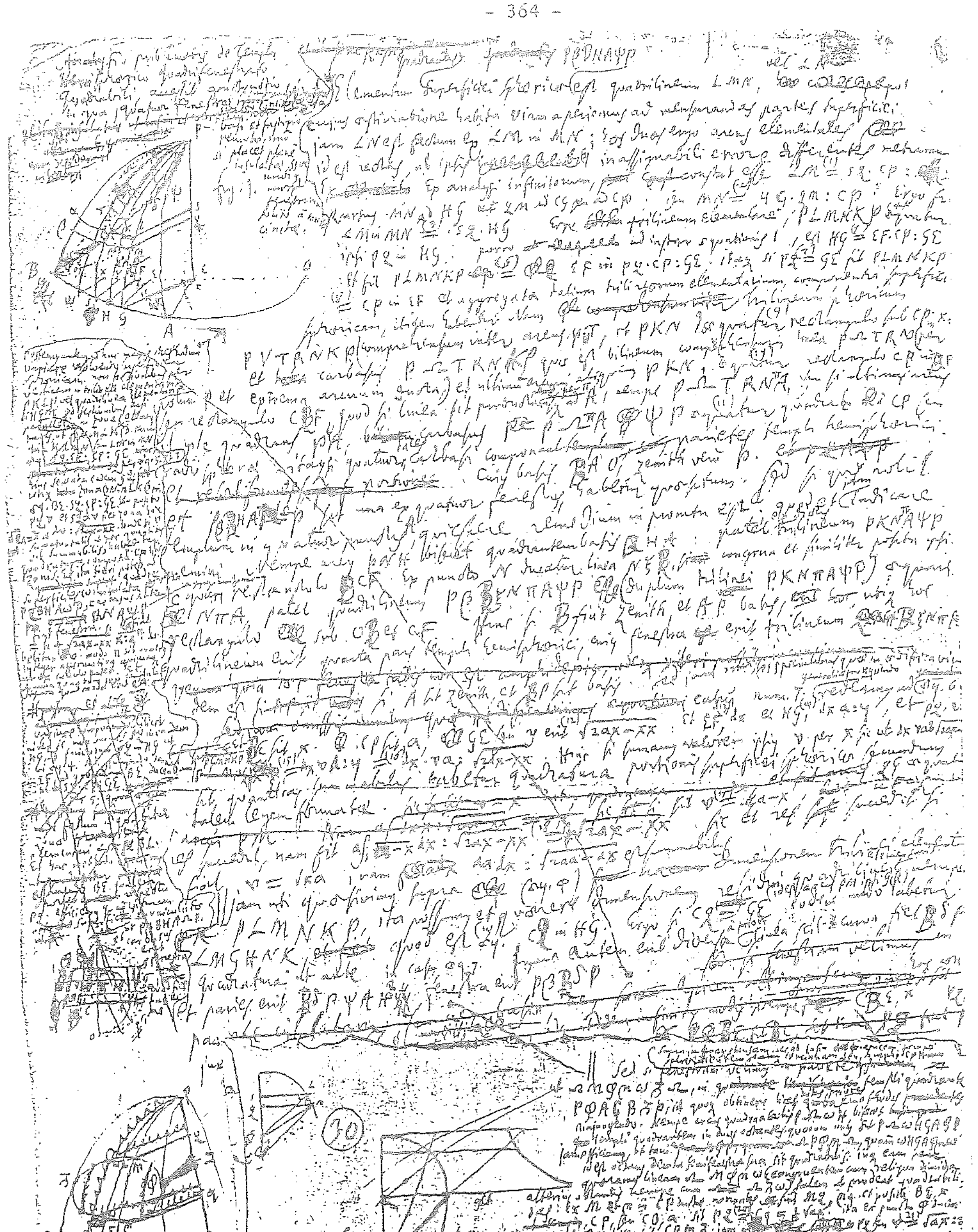
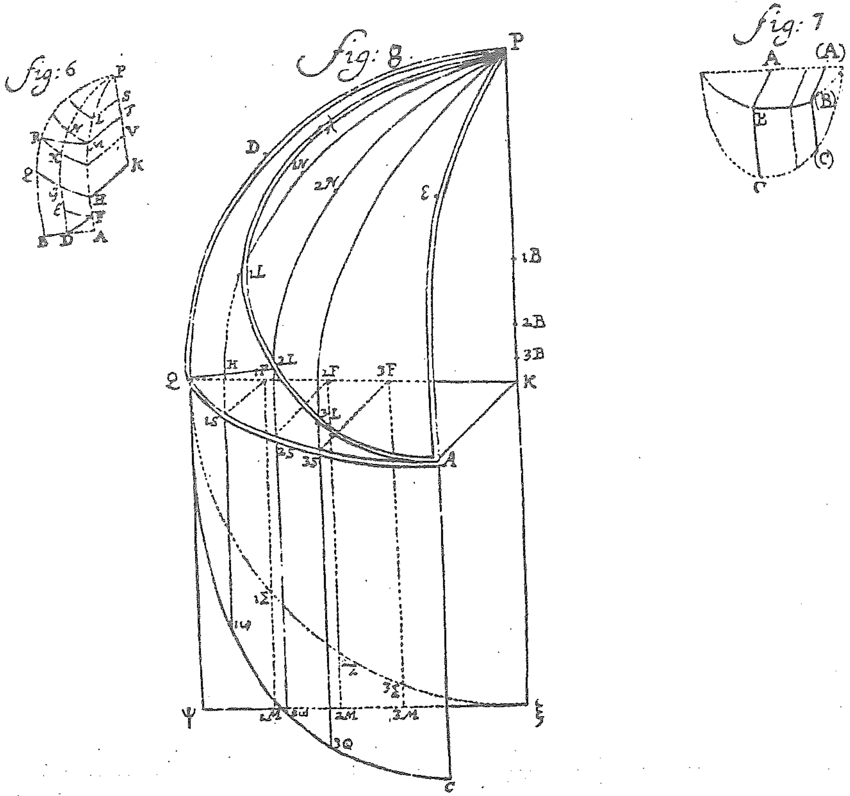


Fig.5 Manuscrit de Leibniz, Niedersachsische Landesbibliothek Hannover.

En partant de ce thèorème, le philisophe et mathématicien allemand généralise le résultat en trouvant également l'aire de triangles sphériques quelconques, c'est à dire renfermés par trois cercles quelconques. Toutes ces prémisses lui servent pour parvenir à la solution du problème florentin , qu'il interprète pratiquement sous cette forme : trouver des portions de surfaces sphériques quarrables .

TAB.V. ad A.1692.pag.276.



Leibniz considère d'abord les petites aires élémentaires renfermées (Fig 6) entre deux méridiens et deux parallèles en utilisant une généralisation du théorème d'Archimède, qui se trouve dans l'édition des oeuvres d'Archimède de Maurolicus(18), satisfaisant à la relation suivante :
aire élémentaire LN : aire élémentaire NR = (HG x ST) : (GQ x TV).
En indiquant les longueurs des segments et des arcs de la façon suivante :
HK = PK = r ; PL = a ; sinusversus PL = r(1-cos PL) = x ; sin PL = LS = y, QH = v et en pensant à considérer, par son calcul infinitésimal, les grandeurs
LM = da ; ST = dx ; GH = dv , il trouve que

$$NM = y \frac{dv}{r} \qquad \text{et } LM = da = r \frac{dx}{y}$$

d'où
aire élémentaire LN = LM x NM =dx dv.

De ces petites aires il passe ensuite aux triangles curvilignes, dont les cotés sont deux méridiens et un parallèle ;
triangle PHNP = PT x GH = sup. Cyl. GHAD = dx.dv = x. dv.

Il considère les triangles curvilignes formés par deux méridiens et une ligne quelconque sous-tendue (arc de cercle, non nécessairement de plus grand cercle) et en trouve l'aire équivalente sur la surface du cylindre circonscrit.

On construit ensuite un cercle et une surface cylindrique qui lui est perpendiculaire, constituée par tous les sinus du cercle, c'est-à-dire que pour chaque point B sur la surface AB est toujours perpendiculaire à BC et AB = BC. (v.Fig 7)

---

(18) V. Maurolico 1685, p.63

Il énonce donc le thèorème , déjà connu par d'autres (Roberval, Huygens), mais sans les citer , affirmant que :
surf. cyl. B (B) (C) C = A (A) x rayon du cercle.

De ces propositions préliminaires, Leibniz passe au problème en question et démontre la quadrabilité d'une partie de surface sphérique. Il prouve particulièrment que la voile ou lunule sphérique, comme il l'appelle, PALP, est équivalente au carré du rayon de la sphère, c'est à dire équivalente au carré $\psi QK \xi$ (v.Fig.8).
AKPQ est la quatrième partie d'un hémisphère.
PALP est la lunule sphérique formée par le quart de cercle PA et par la ligne ALP qui a été tirée sur la surface sphérique de façon que, si l'on conduit par P un méridien quelconque PLS, rencontrant l'équateur en S, on a FS = PB, c'est à dire le sinus de l'arc QS égal au "sinusversus" de l'arc PL. La surface cylindrique formée par les segments $S\omega$ est ensuite tracée perpendiculairement au quart de cercle KQA.

Par le théorème d'Archimède généralisé et par celui qu'on vient de rappeler, on a l'équivalence de la voile ou lunule PALP avec la portion de surface cylindrique ACQA, équivcalente au carré $\psi QK \xi$.

Leibniz démontre ce passage pour une portion de voile $P_1N_1L_2LP$ équivalente à la surface cylindrique ($_1S_1\omega_2\omega_2S$, les deux équivalentes, pour ce qui a été dit,au rectangle $_1F_2F_1M_2M$.)

Ensuite il intègre, c'est à dire il considère l'ensemble de la voile, l'ensemble de la surface cylindrique et le carré tout entier.

Suivent des considérations sur d'autres voiles ou lunules sphériques qui sont dans un rapport donné avec le carré du rayon de la sphère.

Leibniz passe finalement à la construction du dôme florentin qu'il voit simplement formé par quatre voiles égales, du type qui a été décrit et par quatre fenêtres égales qui se rejoignent toutes en P (Fig 9

La quatrième partie d'hémisphère AKPQ est donc tournée trois fois de 90° jusqu'à constituer l'hémisphère entier (Fig.9)

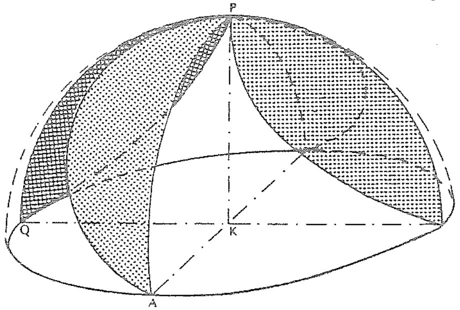


Fig. 9

Les quatre voiles ou lunules sphériques ont donc une surface égale à $4r^2$, ou au carré du diamètre de la sphère.

Si nous prenons maintenant A comme pôle et PQ comme portion d'équateur, on aura -c'est Leibniz qui le dit- un dôme avec les mêmes caractères de surface, mais avec une forme légèrement différente, alors que si l'on prend Q comme pôle et PA comme portion d'équateur, on aura un dôme avec un grand trou au sommet et quatre murs au-dessus de la base.

La solution proposée par le mathématicien et philosophe allemand n'est pas jusque là très satisfaisante si l'on demeure fidèle à l'énoncé de l'énigme florentine c'est à dire trouver le dôme d'un temple hémisphérique à quatre fenêtres égales tel que, en enlevant les fenêtres, ce qui reste de la surface soit quarrable. Car même si au point de vue mathématique le problème est parfaitement résolu, on ne peut pas dire qu'au point de vue de l'architecture la construction de Leibniz soit bien élégante.

Jacob Bernoulli, qui examina soigneusement la contribution de Leibniz, finit, peut être bien pour cette raison, par proposer une autre

résolution, publiée en août 1692, toujours dans les Acta Eruditorum. Jacob Bernoulli cependant ne donne pas la démonstration des résolutions proposées parce qu'il la considère peut-être trop évidente après l'article de Leibniz. Nous estimons que trés probablement Bernoulli aussi a employé le calcul infinitésimal pour la résolution de ce problème. En effet à la fin du 17ème siècle l'analyse infinitésimale est déjà trés développée et Jacob Bernoulli a plusieurs fois démontré qu'il sait s'en servir de façon magistrale.

Ceci est aussi confirmé par Christiaan Huygens (1629-1695), dont nous examinerons les écrits un peu plus loin et par l'auteur du compte-rendu de la brochure de Viviani Formazione e misura di tutti i cieli, dans les Acta Eruditorum. Cet auteur (19) affirme en effet : *"Celui qui proposa le problème florentin que Leibniz aussi bien que Bernoulli ont résolu par le calcul leibnizien dans nos Acta..."*

L'assez court exposé de Bernoulli se compose de cinq paragraphes dont le premier est déjà la résolution du problème. Il considère ici en effet la surface d'un quart d'un hémisphère ABCK (v. Fig 10) borné par les quarts de cercle ABK, ACK, BCK. Les deux pemiers (ABK, ACK) sont d'abord imaginés verticaux et le troisième (BCK) horizontal.

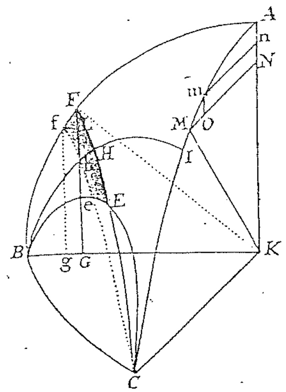


Fig 10

L'on prend un point quelconque F sur l'arc du plus grand cercle AB et l'on trace le plus grand cercle F et C. On détache de ce dernier un arc FE égal à BF."Le point E - affirme Bernoulli - se trouve sur le

---

(19) Acta Eruditorum 1694, pp.206-208 .

contour demandé de la fenêtre BEC" (20)

Aussi, par cette construction, le mathématicien suisse fournit-il une régle pour trouver tous les points du contour de celle qui sera l'une des quatre fenêtres du dôme. Il continue tout de suite après, avec un parallèle intéressant. Si l'on pense au dôme comme à la surface de la terre, où C représente le pôle, BA l'équateur et BC le premier méridien, il suffira de prendre tous les points ayant longitude et latitude égales pour trouver le contour de la fenêtre cherchée.

Les quarts de cercles verticaux sont maintenant BCK et ACK, alors que ABK est horizontal.

Revenons maintenant à la disposition précédente où A est le pôle. La surface ABECA du quart de dôme qui reste en ayant enlevé l'aire BECDB de la fenêtre "sera l'équivalent du carré du rayon et l'ensemble du dôme du carré du diamètre de la sphère".

Dans les quatre paragraphes qui suivent Bernoulli construit des dômes, dont les surfaces sont dans un rapport donné avec le diamètre de la sphère, ou alors l'équivalent des figures quarrables données (par exemple des célèbres lunules d'Hippocrate).

Jacob Bernoulli revient encore sur ce problème en 1696, lorsqu'il répond à la proposition de son frère Johan d'essayer la solution de l'énigme florentine sur la surface de conoïdes ou de sphéroïdes.

Dans un article Jakobi Bernoulli Complanatio Superficierum Conoidicarum et Sphaeroidicarum (Aplanissement de surfaces conoïdales et sphéroïdales) , publié dans les Acta Eruditorum en octobre 1696, Jacob donne la résolution du problème également sur ces solides. Il est ici particulièrement intéressant à notre avis de remarquer la fin de cet article, car Jacob Bernoulli revient à sa première solution de l'énigme de 1692 en prouvant qu'elle s'accorde à celle qui avait été donnée par V.Viviani dans son petit ouvrage.

---

(20) "...eritque punctum E in quaesito margine fenestrae BEC" (Bernoulli 1692, p.370).

Bernoulli déclare en effet (v. Fig 11) :*On tracera dans la base de l'hémisphère BCDE dont le centre est F, le diamètre BD, deux petits cercles BHF, FLD, où les rayons BF et FD sont pris comme diamètres. Chacun de ces deux cercles sera la base d'un cylindre droit quelconque, par lequel, comme par une perceuse, on imaginera de percer la sphère.*

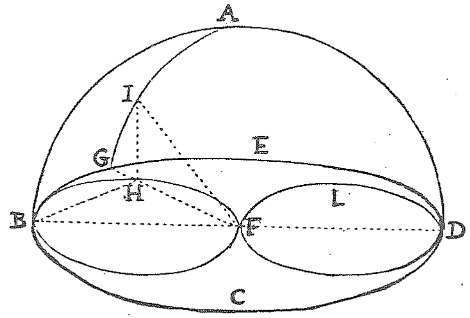


Fig 11

On prendra un point quelconque H sur la circonférence de l'un des deux petits cercles BHF, d'ou l'on tirera HI perpendiculaire au plan de la base BHF. Cette droite rencontrera la surface de la sphère en I qui sera donc l'un des points où les surfaces de la sphère et du cylindre se rencontrent. J'affirme que ce même fait se trouve également avec ma construction. Si l'on trace en effet les segments BH, HF, FI et l'on tire vers le bas le quart de plus grand cercle vertical AIG, il est évident que dans les triangles BHF et FHI, étant BF = FI, le côté HF en commun et les angles BHF et FHI droits, seront égaux aussi les côtés BH et HI. Seront donc aussi égaux les arcs BG et GI dont ces côtés représentent les sinus. Si l'on suppose donc que BCDE est l'équateur, A le pôle, BAD le premier méridien, AIG le méridien du lieu I , la longitude du point I sera égale à sa latitude. Et voilà ce que dit exactement notre construction du premier paragraphe". (21)

---

(21) Bernoulli 1696p . 481, Cramer 1744, p.744.

On pourra remarquer à ce propos qu'une démonstration de la concordance des résolutions de Jacob Bernoulli et de Viviani avait été donnée par Christiaan Huygens en 1692, même s'il ne publia jamais rien à ce propos.

Huygens, ainsi que plusieurs savants de son temps, s'intéressa au problème florentin et en fit des remarques dans ses lettres, surtout en écrivant au marquis de l'Hôpital.(22)

L'occasion lui avait été donnée par la réception du petit traité de Viviani Formazione e misura di tutti cieli en octobre 1692.

De cette époque (27 octobre) datent un certain nombre de ses pages manuscrites portant sur ce problème (23). Huygens y prouve justement la concordance entre la première résolution de Jacob Bernoulli et celle de Viviani et en donne la démonstration mathématique fondée sur l'équivalence, dans le quart d'hémisphère, entre la surface du dôme Florentin GFBCK et celle de l'onglet cylindrique KBH (V.Fig 12). Huygens s'amuse encore à découvrir des propriétés de la courbe qui renferme l'une des fenêtres.

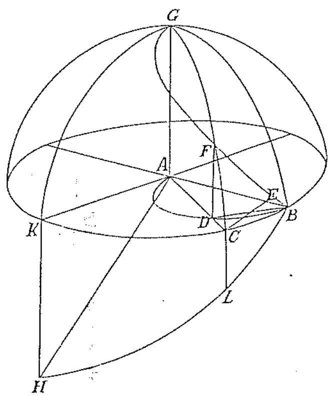


Fig 12

---

(22) Huygens 1905, p.329, p.346, et p.354 .

(23) Huygens 1905, pp. 336-338 .

L'énigme florentine est reçue avec intérêt non seulement en Allemagne, Suisse et Hollande, mais également en Angleterre.

John Wallis (1617-1703) n'en reçoit un exemplaire qu'à la fin août 1692 et se met tout de suite au travail, ignorant les résolutions précitées.

Sa démonstration est envoyée à Florence le 2 septembre 1692 et publiée dans les Philosophical Transactions.

Les considérations du mathématicien anglais sur la forme qui a été donnée à la rédaction de l'énigme sont assez curieuses et d'ailleurs intéressantes au point de vue historique. Wallis saisit immédiatement le lien existant entre ce problème de quadrature et celui de la Grèce ancienne concernant les lunules d'Hippocrate et avance même l'hypothèse de l'existence du temple, lorsqu'il dit : " *J'avais cru que l'on pensait à Sainte Sophie qui est à Constantinople*". (24)

La résolution avec démonstration donnée par Wallis utilise certains théorèmes d'Archimède sur la surface de la sphère et la construction de la première lunule quarrable comme elle nous a été léguée par Simplicius dans son commentaire à la Physique d'Aristote.

Le programme que Wallis veut ici développer est en effet déjà tracé dans les considérations préliminaires suivantes : " Archimède démontra que la surface courbe d'un hémisphère est équivalente à deux plus grands cercles de la même sphère (c'est-à-dire à quatre demi-cercles) et Hippocrate apprit à quarrer une certaine lunule. Si l'on enlève de chacune des quatre parties de cette voûte hémisphérique ce qui manque à la lunule par rapport à son demi-cercle, ce qui reste sera équivalent au carré inscrit

---

(24) ..."putaverim ego, S. Sophia (quod est Costantinopoli) Templum hic insinuatum" (Wallis 1693 p.588).

dans le plus grand cercle de la sphère". (25)

En réalité la résolution proposée par Wallis consiste tout simplement à découper (Fig 13. et 14) de la surface du quart d'hémisphère ADP

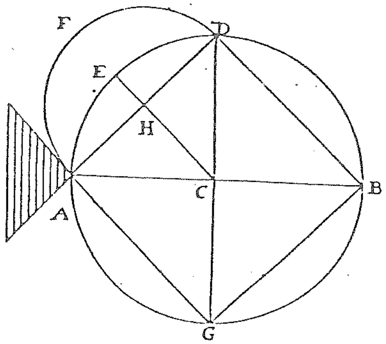


Fig 13

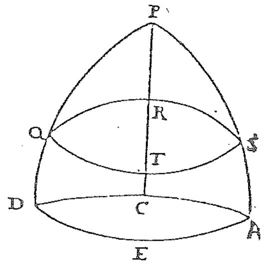


Fig 14

(équivalente du demi-cercle ABD) une portion équivalente du secteur AED additionnée du quart de cercle DBC. Ce qui reste, que Wallis considère au-dessus d'un plan parallèle à celui de la base, sera l'équivalent du triangle ADC Le dôme imaginé par Wallis est donc une calotte sphérique dont la surface est l'équivalent du carré inscrit dans le plus grand cercle. Les quatre fenêtres ne seront donc en ce cas que des portions de surface sphèrique adjacentes entre elles. Dans sa démonstration Wallis rappelle, entre autres, les résultats qu'il avait déjà obtenus dans ses traités De Cycloide et De Motu.

---

(25) "*Quippe cum* Archimedes *demonstravit*, Curvam Hemisphærii superficiem æqualem duobus Circulis ejusdem Spæræ maximis, (*id est* quatuor Semicirculis;) *Docuitque* Hippocrates *Chius* Lunulam quadrare *quandam: Si singulis Hemisphærici hujusce Fornicis quadrantibus, tantundem eximatur, quanto deficit à Semicirculo ea Lunula; Reliquum æquabitur Quadrato, quod Circulo Sphæræ maximo (cui hic insistit Fornix Hemisphæricus) inscribatur.*" (Wallis 1693, p. 587).

Pour terminer cette esquisse historique de la fameuse énigme florentine, nous signalons l'article de David Gregory (1627-1720), Solutio Problematis Florentini de Testitudine Veliformi Quadrabili (Solution du problème florentin sur le dôme quarrable en forme de voile), publié en 1694 dans les Philosophical Transactions. Le propos de l'auteur est de donner simplement une démonstration mathématique de la construction de Viviani, en s'appuyant sur la généralisation du théorème d'Archimède relatif aux surfaces de la sphère et du cylindre circonscrit et sur la méthode des indivisibles.

Cette méthode des indivisibles sera employée par un autre mathématicien dans le même but : G.Grandi. En 1699 il publie le livre Geometrica Demonstratio Vivianeorum Problematum (Demonstration géométrique des problèmes de Viviani) où il traite de l'énigme et d'autres problèmes du même genre en traduisant le texte de Viviani 1692. En particulier il définit la courbe qui délimite la fenêtre de Viviani en utilisant deux mouvements, comme Archimède l'avait fait pour sa spirale et Pappus pour l'hélice. Le point (Fig 15), qui part de I décrit de manière uniforme l'arc IC et en même temps le quart de cercle CEI est rabattu uniformément autour de l'axe EI sur le quart de cercle AEI.

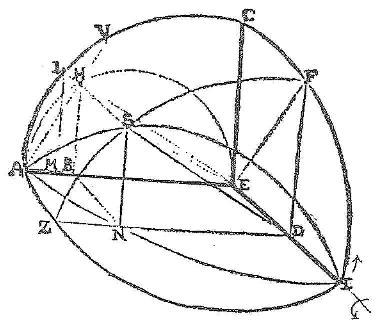


Fig 15

Grandi affirme à ce sujet qu'il aurait pu démontrer la quadrature de la portion ASIC de la voile florentine avec la méthode utilisée par Pappus dans la proposition 30 du livre IV de sa Collection Mathématique. Mais Grandi dit qu'il préfère se servir des autres moyens afin d'offrir au lecteur d'autres spéculations géométriques. Cette affirmation nous semble très importante parce que Grandi exprime ici, de cette manière, la signification fondamentale du problème de Viviani (d'un point de vue historique) : la comparaison des diverses techniques de démonstration relatives aux problèmes de quadrature (méthode d'exhaustion, méthode des indivisibles et calcul intégral de Leibniz). C'est aussi le point de vue de Viviani qui le 24 avril 1692, dans la dédicace au Grand Duc de Toscane de son opuscule Formazione e misura di tutti i cieli, écrit : " ... *en cela je ne voulais provoquer personne en duel, car celui-ci me semble toujours odieux, mais seulement voir la multiplicité des diverses voies employées pour parvenir à découvrir une même et belle Véritable Géométrie*" (26)

Sans aucun doute, au début, l'Enigme a été lancée comme défi de la part des mathématiciens italiens envers leurs collègues étrangers qui étaient beaucoup plus avancés dans ces recherches mathématiques.

L'examen des divers textes et lettres que nous avons conduit nous a en effet montré que pour Leibniz, Huygens, L'Hôpital, les Bernoulli entr'autres cette énigme se ramenait à un problème élémentaire et ne présentait pas de difficulté particulière.

---

(26) ..." io non pretesi di provocare in ciò, né di chiamar, come dir si suole, alcuno a duello ; il che mi fu sempre odiosissimo, ma sol di vedere la moltiplicità delle vie diverse, per le quali sarebbere tutti pervenuti a scoprire uno stesso, e cosi bel Vero Geometrico ..."(Viviani 1692 pp.VII.VIII).

Par contre, en Italie, l'effet de cette énigme fut très bénéfique. Guido Grandi et d'autres de ses contemporains, confondus par la simplicité et l'efficacité des nouvelles méthodes employées dans la résolution du problème de Viviani, commencèrent à s'intéresser aux mathématiques d'au delà les Alpes (comme ils appelaient cette autre mathématique) et à étudier les écrits de Leibniz et de ses élèves, les oeuvres de Descartes et celles de Newton. Le panorama de la mathématique italienne changeait ; délaissant souvent le domaine restreint de la géométrie classique, il dévoilait de vastes et nouveaux horizons.

Bibliographie

Bernoulli Jacob 1692, Aenigmatis Florentini solutionis varie infinitae, Acta Eruditorum ,pp.370-371 (aussi dans Cramer G. 1744, Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, T. I, Genevae,pp.512-515).

Bernoulli Jacob 1696, Complanatio superficierum conoidicarum et sphaeroidicarum, Acta Eruditorum, pp.479-481 (dans Cramer G.1744, T.II, Genevae, pp.739-744).

Caveing M. 1982, La constitution du type mathematique de l'idealité,Thèse Paris X, T.II, Université de Lille.

Favaro A. 1912-13, Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIX Vincenzio Viviani, Atti R. Ist. Ven. di Sci. Lett. Arti, T.LXXII,parte 2^{a}, pp.1-155.

Gerhardt C.I. 1849, Leibnizens mathematische Schriften, Band I, Halle.

Gerhardt C.I. 1858, Leibnizens mathematische Schriften, Band V, Halle.

Grandi G. 1699, Geometrica Demonstratio Vivianeorum Problematum,Firenze.

Gregory D. 1694, Solutio Problematis de Testitudine Veliformi Quadrabili, Philosophical Transactions, pp.25-29.

Huygens Christiaan 1905, Oeuvres complètes de..., T. X, La Haye.

Leibniz G. W.1692a, Solutio Problematis a Galileo primum propositi, de natura, et usu Lineae, in quam Catena, vel Funis extensionem non mutans) se proprio pondere curvat, Giornale de' letterati Modena, pp.128-132.

Leibniz G. W.1692b, Constructio testudinis quadrabilis hemisphaericae, Acta Eruditorum, pp.275-279; Additio ad solutionem problematis in Actis A. 1692, pag.274 propositi, Acta Eruditorum 1693, p.42 (aussi dans Gerhardt 1858, pp.270-278).

Maurolico F. 1685, Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica ..., Panormi.

Montucla J.F.1799, Histoire des Mathématiques, T.II, Paris.

Mugler C 1970-72, Archimède Oeuvres, T.I-IV, Paris.

Noël E. 1985, Le matin des mathématiciens: entretiens sur l'histoire des mathématiques, Paris.

Ozanam J. 1691, Dictionaire mathematique, Amsterdam.

Robinet A. 1986, Les rencontres de G.W.Leibniz avec V.Viviani (Florence, Decembre 1689) et leurs suites, à paraître dans Bollettino di Storia delle Scienze matematiche.

Roero C. S.1982, I matematici italiani e il celebre "Aenigma" di Vincenzo Viviani del 4 aprile 1692, Atti del Convegno "La storia delle matematiche in Italia, Cagliari 29.9.-1.10.1982, pp.367-375.

Roero C.S. 1986, I manoscritti inediti di Leibniz sull' "Aenigma" di Viviani, à paraître dans Bollettino di Storia delle Scienze matematiche.

Spiess O. 1955, Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Band I, Basel.

Tenca L. 1952, Osservazioni sulle lunule circolari regolari e sull'Enigma del Viviani, Bollettino U.M.I., s.3, VII, pp.328-334.

Tenca L. 1953, Sulla risoluzione dell'enigma di Vincenzio Viviani in lettere sue e di suoi contemporanei, Rend. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere vol.LXXXVI, serie III, XVII, pp.113-126.

Viviani V. 1692, Formazione e misura di tutti i cieli ..., Firenze.

Wallis J. 1693, A solution of the Florentine Problem touching the figure of a cupola, whose windows being cut out, the remainder is quadrabl[illegible] Philosophical Transactions, pp.584-592 (aussi dans Wallis Ope[illegible] T.II, Oxoniae, pp.479-482).

L'AFFAIRE LAMBERT

Michel SERFATI
Lycée Raspail. Paris.

C'était un temps naïf où Mulhouse était suisse : mille sept cent soixante et un. L'Académie Royale des Sciences de Berlin publie un texte adressé par John Heinrich Lambert, de Mulhouse, et qui s'intitule : "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques." (*)

Le texte s'ouvre sur cette forte maxime : "démontrer que le diamètre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'est là une chose dont les géomètres ne seront point surpris." : bref, pi est irrationnel, et c'est donc ici l'affaire de Lambert.

Le présent article se propose d'étudier ce mémoire dans son détail, en le replaçant d'abord dans le mouvement de l'histoire des idées en Mathématiques (irrationnels et transcendants), et à la fois aussi dans la production scientifique complexe de son auteur.

(*) John Heinrich Lambert. Oeuvres Complètes. Tome II p. 112 à 159 (et pages 265 à 322 dans le texte original des mémoires de l'Académie des Sciences).

IRRATIONNELS, TRANSCENDANTS

La découverte par le pythagoricien de service que la "longueur de la diagonale n'est pas au côté ce qu'un nombre est à un nombre", a été cause, après un moment de stupeur hystérique (1), d'une crise grave (signant une rupture de l'harmonie du monde) et fondatrice, ce "drame en cinq actes" qu'évoque Scholz (2).

Le second point d'articulation dans l'histoire des idées est celui où on commence de cesser d'écrire les mathématiques comme on les parle, l'avènement du symbolique donc, étape véritablement essentielle, séparatrice du sujet et de l'objet (mathématique).

Dès lors que je n'écris plus : "la raison double de la cause", mais quelque chose comme :

$$x^2$$

il est "légitime" d'écrire aussi et comme en se jouant :

$$- 3x^2 + 7x^5 - x^4$$

-----

(1) Le scoliaste anonyme qui rapporte la chose déclare que, selon la légende, la personne qui l'aurait dévoilée aurait péri dans un naufrage. Selon Proclus, Euclide aurait commenté la nouvelle en ces termes : "les auteurs de la légende ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché, que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir...".

(2) "Pourquoi les grecs n'ont-ils pas inventé les irrationnels" (1928 ; revue : KANT Studien). Ce texte est finement analysé par M. FICHANT ("Sur l'histoire des sciences" p. 117/119. Maspero Editeur).

des sommes, produits de monômes, bref un concept (celui de polynôme) en place d'un lot d'exemples spécifiés. C'est une chose qui n'est pas allée de soi, et qu'a permis ici l'écriture, en vertu de sa forme, comme aurait dit Hilbert.

MILLE SEPT CENT QUARANTE HUIT

Il est plus tard maintenant, l'heure de "l'esprit des Lois", de l'Encyclopédie, mille sept cent quarante huit, donc, où Leonhard Euler rédige la préface à l'"Introduction à l'analyse des infinis". (*)

Euler expose qu'il est des fonctions composées avec "les opérations ordinaires de l'algèbre, et les zéros des dites fonctions sont des quantités rationnelles ou algébriques... Et les autres, qui sont obtenues par les mêmes opérations faites une infinité de fois ou bien d'autres opérations sont appelées transcendantes... Telles sont les séries dont la somme est liée au cercle ou à l'hyperbole."

Bref, il y a d'un côté les polynômes (et les fractions rationnelles) et leurs racines, de l'autre les non-polynômes. Le clivage en ce point là n'allait pas de soi. Cette formulation est d'ailleurs très intuitive et imprécise : faut-il entendre polynômes à coefficients entiers ? Faut-il appeler transcendants ce qui n'est racine d'aucun polynôme ?

(*) [1] Leonhard EULER. Introduction à l'analyse des infinis. Edition française de 1835.

Penser l'algébricité, c'était pouvoir penser la transcendance, production usuelle d'un concept par différenciations successives. Les transcendants sont définis négativement (non algébriques) avec tout ce que ceci suscite de difficultés méthodologiques à venir : c'est donc en cernant le mieux les propriétés des algébriques qu'on fabriquera d'abord des transcendants (Liouville).

Pour Euler, le modèle familier du non-algébrique est la série entière ("les mêmes opérations une infinité de fois") bien qu'il se réserve prudemment l'immense et vague champ des "autres opérations".

Voici en termes modernes ce que ça donne : on dit qu'un réel α est algébrique s'il est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, donc avec $P \in \mathbb{Z}(x)$:

$$P(\alpha) = 0 = \sum_{0 \leqslant s \leqslant d} q_s \alpha^s \qquad \text{et } q_j \in \mathbb{Z}$$

Il est équivalent de supposer les coefficients rationnels (multipliant par un dénominateur convenable) ; il est équivalent de supposer les coefficients premiers entre eux (en prenant le p.g.c.d.) ; il est équivalent de supposer P irréductible (par division euclidienne sur $\mathbb{Z}(x)$), de sorte qu'en décidant que le coefficient du monôme dominant est positif, il existe exactement un P_0 de degré minimum tel que

$$P_0(\alpha) = 0$$

P_0 est appelé le polynôme minimal de α et son degré d est le degré d'algébricité de α : on dit que α est d-algébrique.

Ainsi, tout rationnel est 1-algébrique ; $\sqrt{2}$ est 2-algébrique (ou irrationnel quadratique), $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ est 4-algébrique, puisqu'on montre que son polynôme minimal est x^4-16x^2+16. Est dit transcendant tout réel qui n'est pas algébrique.

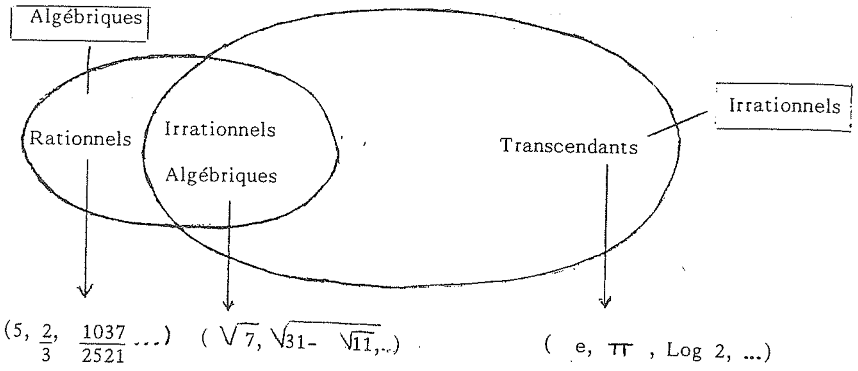
Comparé à l'énoncé "intuitif" d'Euler, ce qui précède n'est compréhensible que pour celui qui sait de quoi il s'agit, traduction moderne aussi nécessaire qu'opaque.

TRANSCENDANTS

La question de savoir s'il existe d'autres nombres que les algébriques (intuitivement vécus comme étranges, étrangers, nombres formés "au hasard" (Lambert)) ne se pose en droit mathématique pur qu'après avoir circonscrit un lieu où les chercher, le corps des réels donc, dont le bulletin de naissance (signé de Cantor et Dedekind) ne date pourtant que de 1872.

Mais comme on sait, ce n'est pas ainsi que les mathématiciens procèdent : l'existence précède ici l'essence, ou encore : ce n'est que dans l'après coup que les mathématiques sont une science déductive.

On a donc le décor suivant :



La question de l'étendue des nombres transcendants se posera par la suite sous le double aspect de la cardinalité (et ils sont très nombreux : de complémentaire dénombrable, ils ont donc la puissance du continu) et de la topologie (et ça fait aussi beaucoup : les transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$; même les nombres de Liouville le sont)

FRACTIONS CONTINUES

"Une fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier joint à une fraction, qui a elle-même pour dénominateur un entier et une fraction formée de la même manière que les précédentes, et ainsi de suite, soit qu'il y ait un nombre infini de fractions, soit qu'il n'y en ait qu'un nombre fini".

Superbe paraphrase d'Euler qui tâche, faute d'une métaphore appropriée, de définir en mots quotidiens une fraction continue (*).

Au début étaient les Grecs qui voulaient savoir si deux nombres avaient une mesure commune, quelque chose à quoi les rapporter conjointement ; alors on prend le plus petit, on voit "combien de fois il rentre dans le plus grand", et on retranche pour obtenir un reste, puis on recommence...).

Prenons $\alpha = \frac{48}{5}$. Je lui fais subir le traitement suivant :

$48 = 5.9 + 3$ ou bien $\frac{48}{5} = 9 + \frac{3}{5}$ (1)

$5 = 3.1 + 2$ ou bien $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ (2)

de sorte que : $\frac{48}{5} = 9 + \cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}$

puis : $3 = 2.1 + 1$, donc :

$$\frac{48}{5} = 9 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}$$

De la sorte, j'associe à $\frac{48}{5}$ la suite $\phi(\frac{48}{5}) = (9,1,1,2)$ Suite presque nulle d'entiers (c'est-à-dire nulle à partir d'un certain rang). Les a_i sont les quotients partiels. Aucun n'est nul, sauf peut-être le premier.

(*) [1] chapitre 18, p. 277.

La donnée de la suite (9,1,1,2) permet de reconstituer α par la suite de rationnels

$$s_1 = a_1 = 9 \; ; \; s_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = 10 \; ; \; s_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{19}{2}$$

et $s_4 = \frac{48}{5} = \alpha$.

chaque s_k est un rationnel $(\frac{p_k}{q_k})$, appelé réduite de rang k.

On prouve :

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_k \; q_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_k \; q_{k+1}}$$

ce qui montre à la fois que p_k et q_k sont premiers entre eux et que la suite des différences entre deux fractions consécutives est de signe alterné.

Chaque quotient a_k est une certaine partie entière, comme le montrent (1) et (2). On appelle aussi quotients incomplets les parties décimales (qui sont donc des troncatures)

$$s'_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} = \frac{3}{5} \qquad s'_2 = \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}} = \frac{2}{3}$$

On montre aussi que numérateur et dénominateur de chaque réduite se fabriquent suivant la même loi de récurrence

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1} \quad \text{et} \quad q_{k+1} = q_{k+1}q_k + q_{k-1}$$

("chaque numérateur est la somme du dernier numérateur multiplié par une nouvelle lettre et de l'avant dernier numérateur

simple. Et la même loi s'observe pour les dénominateurs"(*)).

Et si maintenant α est une "proportion" quelconque ($\alpha = \frac{m}{n}$) on peut encore essayer d'appliquer la procédé précédent.

Soit $a_1 = [\alpha]$ (partie entière de α)

donc $\alpha = a_1 + s'_1$ et la partie décimale : $s'_1 \in [0,1[$.

si $s'_1 = 0$, on s'arrête. Sinon, $\frac{1}{s'_1} > 1$ et soit $a_2 = [\frac{1}{s'_1}]$

de sorte que : $\frac{1}{s'_1} = a_2 + s'_2$ et $\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + s'_2}$

chaque $a_i \in \mathbb{N}^*$. De deux choses l'une et l'une seulement : ou bien il existe k tel que $s'_k = 0$, α est alors un rationnel et c'est l'algorithme précédent.

Ou bien $s'_k \neq 0$, pour tout k ; α est irrationnel ; je lui associe la suite $\phi(\alpha) = (a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots)$ suite d'entiers dont aucun n'est nul sauf peut-être le premier.

Cette suite permet de reconstituer l'irrationnel α puisqu'en prenant :

$$s_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}} \quad ,$$

On exhibe une suite de rationnels qui converge vers α en l'encadrant. Et qui converge vite.

Si S désigne l'ensemble des suites d'entiers, l'application

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S \qquad \alpha \longrightarrow \phi(\alpha)$$

(*) Euler : Chap. 18 de l'Introduction.

est, moyennant certaines précautions, une bijection de $\mathbb{R}$ sur $S_1 = \phi(\mathbb{R})$: la mise en acte de la bijection réciproque s'appelle selon le cas l'algorithme d'Euclide (cas d'une suite presque nulle) ou bien l'algorithme de fraction continue

$$\alpha \in Q \longmapsto \phi(\alpha) \text{ presque nulle}$$
$$\alpha \notin Q \longmapsto \phi(\alpha) \text{ suite infinie}$$

$\phi(\alpha)$ appelée antiphaïrèse de α est une sorte d'éclatement de α, de décomposition spectrale en <u>entiers</u> d'un réel, par un procédé naturel.

Par exemple avec $\alpha = \sqrt{2}$

on a $a_0=1$ et $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}-1)$

Donc $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$ et $\phi(\sqrt{2}) = (1,2,2,2,\dots)$

L'irrationnel est donc ici organiquement lié à l'infini, par la panne du procédé euclidien : il n'y a pas de commune mesure entre m et n.

La théorie antiphaïretique était sans doute connue des Grecs (probablement de Théétète), qui ne voulaient d'ailleurs manipuler que des entiers et Krasner (*) soulève ici une question pertinente qui pourrait s'énoncer "pourquoi les Grecs n'ont pas inventé les nombres réels ?" (à partir de l'antiphaïrèse) et conclure pour une raison profonde que

------

(*) "La pluralité et l'infini dans la philosophie et la mathématique grecque". Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure. Séminaire du 31.01.79 Publication de l'IREM de Paris-Nord.

les Grecs ne pouvaient contourner, même s'ils l'ignoraient : la non continuité de l'application d'antiphaïerèse .

Cardinalement parlant, ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur S_1. Mais, topologiquement, ϕ n'est pas continue en tout α rationnel : pour que ceci prenne sens, il faut avoir muni l'ensemble S d'une distance du type $d(a,b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}$ telle que deux suites sont d'autant plus proches que le premier indice à partir duquel elles diffèrent est plus élevé.

Les fractions continues ont servi de boite à outil aux mathématiciens depuis le dix-septième cercle pour des raisons à la fois pratiques et théoriques :

- elles fournissent des suites effectives de réels qui convergent (rapidement) vers un réel donné, d'où l'idée de tester en premier lieu des propriétés d'approximation diophantienne sur les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ (c'est le cas de Liouville et de sa fabrication de nombres transcendants).

- elles permettent de tester l'irrationalité par un procédé simple.

Un bon moyen pour une suite de n'être pas presque nul est d'être périodique, comme $\phi(\sqrt{2})$. Voici d'autres exemples :

$\phi(\sqrt{7}) = (2,1,1,1,4,1,1,1,4,\dots)$

$\phi(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (1,1,1,1,\longrightarrow \quad)$ (nombre d'or).

Et on montre (*) que pour que $\phi(\alpha)$ soit périodique, il faut et il suffit que α soit irrationnel quadratique.

Ils se sont donc bien amusés, les mathématiciens des siècles derniers, à essayer de développer en fraction continue à peu près n'importe quoi (**), ou bien en sens inverse, à se donner une suite d'entiers et d'essayer de reconnaître le réel α.

Euler, à la fin de l'Introductio, s'occupe du nombre e, et "trouve"

$$\phi(e) = (2.1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots)$$
$$\phi\left(\frac{e-1}{2}\right) = (1,6,10,14,18,\ldots)$$

Pour cela il écrit : $\frac{e-1}{2}$ égale 0,8591409142295, développe ce décimal en fraction continue en prenant suffisamment de termes pour observer une régularité, et "démontre ainsi ce résultat", tout en assurant qu'il y a une preuve par le calcul infinitésimal.

(*) Ce résultat est dû à Lagrange. L'idée était déjà chez Euler ([1] p. 294). On trouvera une démonstration moderne du résultat de Lagrange par exemple dans "An introduction to the theory of numbers" (p. 144/145) HARDY et WRIGHT, Clarendon Press Oxford.

(**)Cf. par exemple la lettre 297 de Stieljes à Hermite (26/02/1891) où il propose de développer en fraction continue

$$n\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right]^2 \text{ ou bien } \left[\frac{\Gamma(x+\frac{1}{4})}{\Gamma(x+\frac{3}{4})}\right]^2$$ (Γ est la fonction eulerienne).

Il tâche d'en faire de même avec π, (page 303) ne trouve rien d'harmonieux (on a pour les premiers quotients partiels : 3,7,15,1,292,1,1). π est-il au nombre plus étranger que e ?).

LAMBERT

C'était donc le temps où Mulhouse était suisse, et il y avait là un compatriote d'Euler qui l'avait sans doute lu (bien que jamais ici il ne le cite), un homme curieux, qui fait penser par certains côtés à Cyrano de Bergerac, (le vrai, pas celui de Rostand), une sorte de touche à tout un peu mégalomane qui s'occupe de mouvement des planètes, de théorie des nombres, de photométrie, de philosophie, du cinquième postulat d'Euclide, etc...

Son éloge funèbre (*) est parfois éloquent par ce qu'on peut y lire de la perplexité de son biographe sur certains aspects de l'oeuvre ou la personne de Lambert, "sorte de Janus à double face... bloc de marbre uni dont le sculpteur n'a pas encore décidé s'il en fera un Dieu ou une cuvette" ([2] page 1). Et cette sorte d'exécution sommaire : "Mr Lambert était étranger dans les trois règnes de la nature".

Lambert avait cet orgueil immense de tout connaître par lui-même, et quand il rencontra à Postdam le roi de Prusse (**) qui lui demanda "que savez-vous, Lambert ?", "Tout !

(*) Eloge funèbre de Mr Lambert par Forney, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Berlin (Oeuvres de Lambert [2]).

(**) Entrevue de Mars 1764 ([2] p. 10).

Sire". "Et de qui le tenez-vous ?", "De moi-même".

Moyennant quoi, Lambert n'attendra plus trop longtemps une position scientifique stable qui lui permette de sortir des expédients : le roi ne lui tint en effet pas rigueur de cette suffisance affichée et l'agrégea (avec pension) à l'académie de Berlin.

Lambert était né dans une famille pauvre, et en porta toute sa vie la marque. Pour gagner sa vie, il commença par être précepteur d'enfants de la noblesse. Plus jeune encore, il passe pour avoir fait de petits dessins qu'il vendait à des camarades, et, avec cet argent avoir acheté des chandelles qui lui permettaient le soir de travailler. Ce trait misérabiliste qu'on trouve dans toute ses biographies décrit sans doute néanmoins assez bien la réalité de son enfance.

La philosophie de Lambert était si obscure qu'on l'a décrite en termes contradictoires par rapport à Kant : ou bien un précurseur, ou bien un étranger. Kant avait cependant projeté de dédier à Lambert la "Critique de la raison pure" entreprise qui fut empêchée par la mort prématurée de Lambert (*)

Il semble que ce soit plutôt à Leibniz qu'il doive une filiation dans une nouvelle tentative chez lui pour créer une philosophie d'architecture mathématique, un ars characteristica combinatoria, un "calcul conceptuel".

(*) [3] John Heinrich LAMBERT, D.S.B. tome 7, pages 595-600. Christoph J. SCRIBA, p. 597.

C'est à partir d'une intéressante question (très "dix huitième" et néanmoins très cartésienne), posée en 1761 par l'Académie des Sciences de Berlin que Lambert rédigea un de ses textes philosophiques (*). "Est-ce que les vérités métaphysiques sont du même ordre que les vérités mathématiques ? Et, dans le cas où elles ne le sont pas, quelle est la nature de cette forme de certitude, quel degré de croyance doit on leur apporter et est-ce suffisant pour entraîner la conviction ?"

MILLE SEPT CENT SOIXANTE ET UN

C'est le temps de la "Nouvelle Héloïse", et aussi de Voltaire à Ferney. C'est pourtant un texte d'une autre facture que reçoit l'Académie Royale des Sciences de Berlin, un "mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques" (**), un mémoire écrit en français (Lambert publie aussi en latin et en allemand), et qui ne sera lu que six ans plus tard.

Ce texte qui fait donc l'objet de la présente étude, s'ouvre donc sur cette maxime "que le rapport de la circonférence au rayon ne soit point ce qu'un nombre est à un nombre, c'est là une chose dont les géomètres ne seront point surpris" : il témoigne ainsi, après des siècles de recherches

-----

(*) Théologie und Moral richtiger zu beweisen (cité dans p. 597).

(**) Oeuvres de Lambert, pages 112/159 [2] de la "vràie valeur" de Π, de l'état de la question à cette époque sur l'irrationalité de ce rapport.

Ce rapport, il l'appelle encore nombre de Ludolph, du nom de ce mathématicien allemand qui fit graver sur sa tombe les 32 décimales de pi qu'il avait trouvées. Lambert tâche sans doute d'effacer Euler et son "pi" (pour periphaeria) qui commence à se répandre.

Que peut faire Lambert pour montrer cette irrationalité, ce qui n'est pas si simple après tout avec les moyens plutôt rudimentaires dont il dispose ?

Lambert commence son mémoire par un curieux argument de simplicité forcée : eh quoi ! dit-il, si Π était une quantité rationnelle, elle aurait donc un dénominateur, et s'agissant d'une quantité aussi essentielle ("une espèce d'unité"), ce ne pourrait être qu'un nombre très simple : "car s'il y fallait une fraction fort composée, pourquoi telle plutôt que telle autre ?" (p. 112).

Et encore : "Mais comme après la fraction $\frac{11}{14}$ trouvée par Archimède (*) qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de Métius $\frac{355}{452}$ qui n'est pas non plus exacte, et dont les nombres sont considérablement plus grands..." (p. 113). Bref, comme ce n'est pas une fraction simple, ce ne peut être une fraction.

(*) Il s'agit ici de $\frac{\Pi}{4}$

Il s'arrête, passe à la ligne, et soupire : "quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas davantage. Mais ces cas ne sont point ceux de la quadrature du cercle".

Tout Lambert est là dedans, dans une affirmation hardie, et le regret à peine voilé que son "intuition" précédente aurait pu suffire, et en même temps la dénégation de ce qui, de toutes façons n'est pas en jeu : la quadrature du cercle (qui n'est pas liée à l'irrationalité de Π, mais à sa transcendance, comme Lambert le dira lui-même très bien à la fin de ce même texte).

Ensuite Lambert pourfend les quadrateurs, qui vont quelquefois jusqu'à "révoquer en doute les vérités les plus fondamentales et les mieux établies de la géométrie". C'est pourtant à ces diables là que Lambert s'adresse :"Pourrait-on croire qu'ils se trouveraient satisfaits par ce que je viens de dire ?" (p. 113).

Lambert en dit long ici, sur son véritable désir : la quadrature du cercle, énigme désirable et millénaire, dont celui qui l'aura résolue sera à nul autre pareil. La quadrature du cercle est bien ici le moteur de l'irrationalité avant d'être celui de la transcendance.

Et pourtant, Lambert, le reconnaît en même temps, il n'y parvient pas, car Π est un nombre vraiment très étrange, étranger : "il faut encore voir jusqu'à quel point les quantités transcendantes sont transcendantes et reculées au-delà de toute commensurabilité". Aveu d'impuissance donc, pour n'avoir pu accéder en profondeur à la vraie nature de Π.

Lambert dit qu'il va montrer que si "l'arc est commensurable au rayon" ($V \in Q$), alors sa tangente ne l'est point ($tgV \notin Q$). Ou encore : $tgV \in Q \Longrightarrow V \notin Q$: bref V et tgV ne peuvent être toutes deux rationnelles: "Voilà de quoi être un peu plus surpris. Cet énoncé paraissait devoir admettre une infinité d'exceptions, et il n'en admet aucune" (*).

Or : $tg\frac{\Pi}{4} = 1$ et 1 est rationnel.

Donc $\frac{\Pi}{4}$ n'est pas rationnel, non plus que Π.

Plus loin, Lambert étendra son propos à la tangente hyperbolique, pour établir de même que si V est rationnel, alors $thV = \frac{e^V - e^{-V}}{e^V + e^{-V}}$ ne l'est pas, non plus que e^V, donc V et e^V ne sont pas tous deux rationnels ($V \neq 0$). Ceci est, à un étage en dessous, la trame du théorème d'Hermite-Lindemann (1887) : si V est algébrique, alors e^V est transcendant.

ANALYSE

Lambert expose (p. 114) qu'il s'inspire de l'algorithme d'Euclide (2e proposition du 7e livre d'Euclide), qui demeure l'idée essentielle, le pivot des démonstrations de rationalité ou d'irrationalité, mais dit-il, ce n'est pas aujourd'hui si simple, et il faudra l'adapter puisque "il convient de

-----

(*) Il fait donc état ici d'une intuition contraire chez lui, mais qu'il n'argumente pas.

remarquer que tandis qu'Euclide ne l'applique qu'à des nombres entiers et rationnels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités dont on ignore encore si elles seront rationnelles ou non".

Or, donc "soit le rayon r = 1, un arc de cercle proposé = V" on a les développements en série ("deux suites infinies fort connues")

$$\text{Sin } V = V - \frac{V^3}{2.3} + \frac{V^5}{2.3.4.5} - \frac{V^7}{2.3.4.5.6.7} + \dots$$

$$\text{Cos } V = 1 - \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} - \dots$$

Le problème est qu'il n'y a pas de moyen simple d'avoir la partie entière du rapport. Lambert va donc s'en tenir à une méthode de "pseudo-division" euclidienne, avec des quotients qu'il se fixe, et qui seront les rapports des termes de plus bas degré, ici donc : $\frac{1}{V}$, si on divise cos V par sin V. On a donc :

$$\text{Cos } V = \frac{1}{V} \sin V + R_1(V) \qquad (1)$$

$\frac{1}{V}$ n'a aucune vocation a être la partie entière de $\frac{\text{Cos } V}{\text{Sin } V}$, mais avec ce choix $R_1(V)$ est lui-même la somme d'une série entière. On a, avec des notations modernes :

$$R_1(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^h V^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{V} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n V^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$R_1(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n V^{2n}.(2n)}{(2n+1)!}$ dont le terme de plus bas degré (n=1) vaut : $\frac{(-1)^1 V^2.2}{3!} = -\frac{V^2}{3}$

La relation (1) donne :

$$\frac{\cos V}{\sin V} = \frac{1}{V} + \frac{R_1(V)}{\sin V}$$

Donc $tgV = \dfrac{1}{(\frac{1}{V})+\frac{R_1(V)}{\sin V}}$

on pseudo-divise : sin V par $R_1(V)$, et le quotient vaut ici

$\dfrac{V}{-V^2/3} = -\dfrac{3}{V}$. On a donc

Sur $V = -\frac{3}{V} R_1(V) + R_2(V)$

donc $tgV = \dfrac{1}{(\frac{1}{V})+\dfrac{1}{(-\frac{3}{V})+\frac{R_2(V)}{R_1(V)}}}$

de sorte qu'il est plausible que la suite des quotients partiels soit $q_n = (-1)^n\frac{(2n+1)}{V}$ (page 115).

Lambert remarque qu'il est équivalent de postuler la forme de $R_n(V)$ et de $R_{n-1}(V)$, puis de montrer que $R_{n+1}(V)$ a bien la forme annoncée, en utilisant la relation :

$$R_{n-1}(V) = [(-1)^n \frac{2n+1}{V}]\ R_n(V) + R_{n+1}(V)$$

Il s'assure aussi que les deux premiers "résidus" ont bien la forme annoncée.

Lambert fait ici une vraie démonstration par récurrence (p. 116 à 118), ne se contente pas d'une "espèce d'induction" (la reconnaissance sans preuve de la forme du terme général). Il est donc tout à fait rigoureux (ce que son préambule ne laissait guère prévoir), même s'il lui faut passer par nombre d'erreurs de calcul (*)généreusement corrigés (mais

-----

(*) Portant essentiellement sur les signes, et l'alternance des signes.

soulignées) dans l'édition actuelle.

A ce stade, il est donc plausible que l'on ait :

$$tgV = \cfrac{1}{(\frac{1}{V})+\cfrac{1}{(-\frac{3}{V})+\cfrac{1}{(\frac{5}{V})+\ldots}}} = \frac{1}{(\frac{1}{V})}{}_{+}\frac{1}{(-\frac{3}{V})}{}_{+}\frac{1}{(\frac{5}{V})}+\ldots \qquad (*)$$

Mais ceci n'est pas assuré, compte tenu en particulier du caractère arbitraire des quotients.

SYNTHESE

Lambert ne se contente pas de trouver la fraction. Posant $W = \frac{1}{V}$, il considère donc la fraction continue

$$\cfrac{1}{W+\cfrac{1}{-3W+\cfrac{1}{5W-\ldots}}}$$

et montre :

a) la convergence

b) la convergence vers tgV

c) la convergence vers un irrationnel (V étant lui-même rationnel).

Lambert note d'abord à regret (p. 121) que tout ça serait bien plus simple si "V est une partie aliquote du rayon" ($\frac{1}{V}$ est un entier : c'est l'algorithme usuel de fractions continues). "La tangente $\frac{A}{B}$ sera une quantité irration-

----

(*) Ce résultat est d'autant plus remarquable que le développement en série de tgV n'est pas de forme simple.

nelle toutes les fois que l'arc V sera une partie aliquote du rayon. Voilà à quoi se borne l'usage de la proposition d'Euclide. Il s'agit maintenant de l'étendre à tous les cas où V est commensurable au rayon".

CONVERGENCE

Lambert utilise deux arguments :

- le télescopage
- la vitesse de convergence

Il s'affaire d'abord pour savoir "de combien chacune des fractions est plus grande que celle qui la précède".

$$F_2(W)-F_1(W) = \frac{3W}{3W^2-1} - \frac{1}{W} = \frac{1}{W(3W^2-1)}$$

$$F_3(W)-F_2(W) = \frac{-1}{(3W^2-1)(-15W^3+6W)}$$

Il semble que le numérateur vaille 1 ou -1, c'est ce que Lambert vérifie par récurrence en étudiant la loi de formation des dénominateurs. "Mais faisons voir généralement que tous les numérateurs sont égaux à 1 (*) et que tous les dénominateurs sont le produit de ceux des deux fractions dont ces résidus marquent la différence" (p. 130).

La nature de la suite de terme général $F_n(W)$ est d'autre part la même que celle de la série de terme général $F_{n+1}(W)-F_n(W)$, puisqu'on a, par télescopage :

$$F_n = F_1+(F_2-F_1)+\ldots+(F_n-F_{n-1})$$

(*) Lambert change de signe le dénominateur le cas échéant.

Il examine les premières fractions

$$F_1(W) = \frac{1}{W} \qquad F_2(W) = \frac{1}{W-\frac{1}{3W}} = \frac{3W}{3W^2-1}$$

$$F_3(W) = \frac{1}{W+\frac{1}{-3W+\frac{1}{5W}}} = \frac{-15W^2+1}{-15W^3+6W}$$

Suite de fractions rationnelles donc ; Lambert est donc ici "naturellement" conduit à examiner l'approximation d'une fonction ($V \longrightarrow tgV$) par des fractions rationnelles, et ceci donne un nouvel éclairage fonctionnel aux fractions continues (qui avait été seulement entrevu par Euler) : il y a là le cheminement d'une idée.

On a donc : $$F_n(W)-F_{n-1}(W) = \frac{1}{|Q_{n-1}(W)\cdot Q_n(W)|} \qquad (1)$$

Reste à examiner un peu comment ça se passe au dénominateur. Pour cela Lambert écrit (p. 124) les premières valeurs des dénominateurs.

$$Q_1(W) = W$$
$$Q_2(W) = 3W^2-1$$
$$Q_3(W) = -15W^3+6W$$

et essaie de trouver la forme générale. Il y faut un bon oeil, (car la loi de formation n'est pas évidente), mais il n'en manque pas, car il postule (et <u>démontre</u> par récurrence) la forme suivante (*) :

(*) Au signe près, à nouveau.

$$Q_n(W) = 1,3,5\ldots(2n-1)W^n - \frac{W^{n-2}}{2}(2n-2)(1.3.5\ldots(2n-3))$$
$$+ \frac{W^{n-4}}{2.3.4}(2n-4)(2n-6)(1.3.5\ldots(2n-5))$$
$$- \frac{W^{n-6}}{2.3.4.5.6}(2n-6)(2n-8)(2n-10)(1.3.5\ldots(2n-7))$$
$+ \ldots$ (il s'agit de polynômes)

et donc, en mettant en facteur le monôme dominant (p. 129) :

$$Q_n(W) = 1.3.5\ldots(2n-1)W^n\left[1-\frac{W^{-2}}{2}\,\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{W^{-4}}{2.3.4}\,\frac{(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right]$$

"Posons $n = \infty$", dit-il sans aucun souci ici de convergence. Le crochet "donne" (avec $W = \frac{1}{V}$) :

$$1 - \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} - \ldots$$

qui est le cosinus de V. (p. 129)

on a donc à l'infini : $Q_n(W) \sim 1.3.5\ldots(2n-1)W^n \cos V$ (*)

et $\left|\frac{1}{Q_{n-1}(W)Q_n(W)}\right|$ décroît donc vers zéro très vite (à cause des factorielles : 1.3.5...(2n-1)), et la série est donc "plus convergente que ne l'est toute progression géométrique décroissante".

D'autre part, le numérateur $P_n(W)$ a une structure analogue ; avec la mise en facteur du même terme $(1.3.5..(2n-1)W^n)$, on voit qu'il tend vers :

$$W^{-1} - \frac{1}{2.3}\,W^{-3} + \frac{1}{2.3.4.5}\,W^{-5} - \ldots$$

c'est-à-dire : sin V. Ainsi, on a la convergence simple :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(W) = \mathrm{tg}V.$$

(*) Lambert ne parle pas d'équivalent mais écrit : "quoique le 2.4.6 etc. terme soit soustractif, cela n'empêche pas que la somme des termes ne croisse plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante" (p. 130).

ce qui établit donc les deux premiers points de la partie synthèse de son résultat.

Lebesgue a étudié le théorème de Lambert dans "Leçons sur les constructions géométriques" (*), et il souligne que numérateur et dénominateur convergent uniformément (vers sin V et cos V respectivement) sur tout segment contenu dans l'ensemble de définition de tangente ([4] page 106) ; Lambert, dit-il, ne s'est évidemment pas soucié de convergence uniforme. L'analyse de Lebesgue est cependant peu satisfaisante par ailleurs car il n'a repris qu'une partie seulement du texte original de Lambert ; pour la partie "irrationnelle", décrite plus loin, il utilise la variante de Legendre (voir plus loin) qui est en effet bien plus simple, mais aussi tout à fait opaque. Les calculs de Lambert dans cette partie sont d'autre part rebutants : ceci est le prix de sa méthode et de son obstination à tout interpréter en termes de division euclidienne, qui est son idée maîtresse. Ce point de vue disparaî apparemment complètement dans le texte de Legendre.

Lebesgue, d'ailleurs, donne des résultats généraux ([4] pages 95/102) dans le cas des fractions continues du type étudié par Lambert qui ne sont plus "arithmétiques", mais "généralisées". (Un résultat de Lebesgue est que, moyennant certaines hypothèses, on a $|Q_n(W)|>2|Q_{n-1}(W)|$ ([4] p. 99).

(*) [4] Paris Gauthier Villars 1950. Il s'agit d'un livre posthume remarquable rassemblant des leçons faites au Collège de France (pages 102 à 109).

Ce qui entraîne aussitôt une majoration géométrique de :

$$\frac{1}{|Q_n(n)\,Q_{n-1}(W)|} < \frac{1}{2^{n-3}Q_1^{\,2}(W)}$$

Or, le résultat de Lambert est plus fort :

$$\frac{1}{|Q_n(W)Q_{n-1}(W)|}$$

négligeable devant $\frac{1}{k^n}$, pour tout k.

En fait, donc, tgV est très bien approchée par les rationnels, Liouville, s'il avait bien lu Lambert, aurait sans doute pu appliquer au scénario précédent son propre théorème : (*) Tout algébrique est mal entouré par les rationnels. Si un nombre est bien entouré par les rationnels, il est donc transcendant.

C'est ici le cas de tgV qui est donc transcendant si V est rationnel ; or ceci est un résultat de 1887 (théorème d'Hermite-Lindermann).

Sans doute peut-on dire ici de Lambert ce que Lebesgue(**) disait d'Hermite et Lindemann : "ils ont moins bien compris que nous ce qu'ils ont fait", une phrase que Freud aurait pu signer.

(*) Liouville : "Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques" (C.R.A.S. 13&20 Mai 1844).

(**) Sur les démonstrations dites élémentaires de e et de π (p. 266) "L'enseignement mathématique" Genève Juin 1932.

CONVERGENCE VERS UN IRRATIONNEL

C'est le point le plus délicat. Au milieu de la forêt de ses calculs, je tâcherai ici de rester fidèle à Lambert dans l'esprit de sa méthode mais non dans son détail.

Supposons, dit-il, que $V = \frac{\phi}{\omega}$ soit rationnel ainsi que $tgV = \frac{M}{P}$ (ω,ϕ,M,P entiers). On peut supposer M et P premiers entre eux.

On mesure de deux manières différentes la distance entre la limite (la "vraie valeur") et la $n^{\text{ième}}$ fraction.

- d'abord, par <u>nécessité</u> de sa propre construction :

$$\lim_n F_n(W) = tgV$$

Donc $|F_n(W)-tgV| <$ Reste de rang n de $|F_{n+1}-F_n|$

$$|F_n(W)-tgV| < \frac{1}{Q_n^{\,2}} + \frac{1}{Q_{n+1}^{\,2}} + \cdots \leqslant \frac{\lambda}{Q_n^{\,2}}$$

(car $|Q_{n+1}| > 2|Q_n|$ par exemple à partir d'un certain ran[g]

- ensuite et par <u>structure</u>, pour tout rationnel $\frac{M}{P}$, on

$$\left|F_n(W)-\frac{M}{P}\right| = \left|\frac{P_n(W)}{Q_n(W)} - \frac{M}{P}\right| = \frac{|P.P_n(W)-M.Q_n(W)|}{P|Q_n(W)|}$$

Donc :

$$\left|F_n\left(\frac{\omega}{\phi}\right)-\frac{M}{P}\right| = \frac{\left|P\,P_n\left(\frac{\omega}{\phi}\right)-M\,Q_n\left(\frac{\omega}{\phi}\right)\right|}{P\left|Q_n\left(\frac{\omega}{\phi}\right)\right|}$$

P_n et Q_n sont à coefficients entiers : le numérateur est de la forme $\frac{1}{\phi^n}.\ S_n$, où S_n est un entier.

Donc $$\left|\frac{S_n}{\phi^n P.Q_n\left(\frac{\omega}{\phi}\right)}\right| \leqslant \frac{\lambda}{Q_n^{\,2}\left(\frac{\omega}{\phi}\right)}$$

De là on conclut que $|S_n| \leqslant \mu \dfrac{\phi^n}{|Q_n(\frac{\omega}{\phi})|}$

comme $\frac{1}{Q_n}$ décroît plus vite que toute progression géométrique il en résulte que S_n devient plus petit "que toute quantité assignable, ce qui veut dire qu'il n'y en a point", et ceci "emporte la conséquence que $\frac{M}{P}$ est une quantité incommensurable à l'unité ou irrationnelle." ([2] ; p. 138).

En effet, S_n est un entier, qui tend vers zéro, il est donc nul à partir d'un certain rang. Ceci implique que $\frac{M}{P} = F_n(\frac{\omega}{\phi})$ pour tout $n > N_0$, ce qui est exclu, car les fractions sont deux à deux distinctes, comme on le voit par la différence $F_{n+1}-F_n$.

L'argument de Lambert, équivalent à celui-ci est d'une mise en forme bien plus compliquée, car il réinterprète en termes de pseudo-divisions euclidiennes la différence :

$$\frac{M}{P} - F_n(W)$$

L'argument majeur est donc ici : il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels non nuls. On note que l'argument de Legendre (cf. dernier paragraphe) dans cette même partie de sa variante est celui de la descente infinie de Fermat : il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels; ce fait simple et essentiel était donc ici interprété : comme pour les fractions continues arithmétiques la suite des réduites associées à tgV est donc constante (à partir d'un certain rang), si et seulement si tgV est rationnel. S'il ne l'est pas, il est encadré au sens strict par les réduites (rationnelles) de rang pair et impair.

Revenons à Lambert : il conclut comme annoncé

$tg\frac{\Pi}{4} = 1$; Donc $\frac{\Pi}{4}$ n'est pas rationnel, non plus que Π.

"les tangentes rationnelles et les arcs rationnels ne sont pas distribués par toute la circonférence du cercle, de façon comme s'ils étaient jetés au hasard, mais il faut qu'il s'y trouve un certain ordre et que cet ordre les empêche de se rencontrer jamais" ([2] p. 138).

Lambert se lance ensuite dans une longue étude et un parallèle entre les nombres premiers et ce qu'il appelle les "tangentes premières" (*) que je ne développerai pas ici. Cela l'autorise à établir le résultat amusant que dans une table trigonométrique rédigée en degrés, tg45° est le seul rationnel à figurer ([2], p. 143).

EXTENSION AUX EXPONENTIELLES

Lambert observe ([2], p. 145) d'abord que

$$\frac{e^V-e^{-V}}{2} = V + \frac{V^3}{2.3} + \frac{V^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

$$\frac{e^V+e^{-V}}{2} = 1 + \frac{V^2}{2} + \frac{V^4}{2.3.4} + \ldots$$

Tous les signes sont ici positifs. Mais le cas est essentiellement le même que le précédent ; on en déduit donc pareillement :

$$\frac{e^V-e^{-V}}{e^V+e^{-V}} = \frac{1}{(1/V)} + \frac{1}{(3/V)} + \frac{1}{(5/V)} + \ldots \qquad (1)$$

(*) Nommons "tangente première toute tangente rationnelle qui soit celle d'un arc dont aucune partie aliquote n'ait tangente rationnelle" ([2] p. 140). En termes modernes : le rationnel r est une tangente première si $(\forall_n \geqslant 2)$ $tg[\frac{1}{n}$ Arc tg r] n'est pas rationnel.

Ceci est aussi égal à $\frac{e^{2V}-1}{e^{2V}+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $(2V = x)$

Soit : $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{(2/x) + \cfrac{1}{(6/x) + \cfrac{1}{(10/x) + \ldots}}}$

En écrivant $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 - \frac{2}{e^x-1}$; prenant $x = 1$, ([2] ; p. 146)

on trouve d'abord $\frac{e-1}{2} = (\frac{1}{1}) + (\frac{1}{6}) + (\frac{1}{10}) + (\frac{1}{14}) + \ldots$

C'est ce que Euler avait établi empiriquement.

D'autre part, et comme les conditions sont les mêmes que précédemment, la condition (1) montre que V et $\frac{e^{2V}-1}{e^{2V}+1}$ ne sont jamais rationnelles en même temps.

Il en est donc de même de x et e^x qui ne sont pas rationnels ensemble.

Conclusion : "c'est ce qui nous fait voir à quel point l'irrationalité du nombre e est transcendante en ce qu'aucune de ses dignités (*) ni aucune de ses racines n'est rationnelle." ([2], p. 153).

De même, "tout nombre rationnel a un logarithme hyperbolique irrationnel."

EXORDE

Et Lambert conclut d'abord sur la classification des nombres plus finement que ne l'a fait Euler : "il ne suffit pas d'avoir trouvé que ces quantités transcendantes

-----

(*) Les puissances.

sont irrationnelles, c'est-à-dire incommensurables à l'unité. Car cette propriété ne leur est pas unique... Car, outre qu'il y a des quantités irrationnelles qu'on pourra former au hasard, (*) et qui par là ne sont guère du ressort de l'analyse, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme algébriques ; telles sont les quantités irrationnelles radicales, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et toutes les racines irrationnelles des équations algébriques, comme par exemple celles des équations

$$0 = x^3 - 5x + 1$$

Je les nommerai les unes et les autres quantités irrationnelles radicales, et voici le théorème que je crois pouvoir être démontré :

Je dis donc qu'aucune quantité transcendante circulaire et logarithmique ne saurait être exprimée par quelque quantité irrationnelle radicale qui se rapporte à la même unité, et dans lequel il n'entre aucune quantité transcendante." ([2], p. 158).

C'est conjecturer que e et Π ne sont pas racines d'une équation à coefficients entiers ni d'aucune équation à coefficients algébriques.

Lambert appuie sa conjecture sur la vague considération que la différence entre x^2 et e^x c'est celle de la variabilité soit de l'exposant, soit de l'argument.

(*) C'est moi qui souligne : ceci vaut donc pour Π, selon Lambert.

Et Lambert d'expliquer que si ce théorème est démontré, alors la quadrature du cercle est impossible: "Car tout ce qu'on peut construire géométriquement revient aux quantités rationnelles et radicales ; et il s'en faut même de beaucoup que ces dernières puissent être indifféremment construites." ([2], p. 159) : ceci est la trame d'une démonstration à venir, le théorème de Wantzel de 1837, (*) pierre angulaire sur le chemin de la quadrature ; Wantzel montre en effet que les seuls points constructibles à n pas, à la règle et au compas, à partir d'un ensemble de points à coordonnées rationnelles ont des coordonnées solutions d'une équation algébrique de degré 2^n (réciproque fausse).

La perspicacité de Lambert est ici étonnante, car il décrit exactement les résultats à venir (mais pas dans le bon ordre) : le théorème de Wantzel sur la constructibilité (1837), la transcendance de π (1882 : Lindermann) et donc l'impossibilité de la quadrature.

LE CITOYEN LEGENDRE

C'est un des derniers textes du 18e siècle que les "Eléments de Géométrie" de Legendre publiés en 1795 (et donc probablement rédigés dans le bruit et la fureur). C'est un

-----

(*) "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre afec la règle et le compas" Journal de Mathématiques pures et appliquées (1) 2, 1837, 366-372.

texte très "géométrique" en effet, avec des problèmes de constructibilité comme "inscrire dans un cercle donné un décagone régulier.(*) A la fin du volume, on trouve cependant deux notes assez calculatoires dont la note IV : "où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et à son quarré sont des nombres irrationnels." ([5], p. 289).

Legendre n'explique rien, part d'un développement en série hypergéométrique tiré d'on ne sait où (et il ne se préoccupe pas non plus de convergence), cherche une équation fonctionnelle qu'elle vérifie, ce qui lui permet d'écrire un développement en fraction continue généralisée (où il ne s'intéresse pas davantage à la convergence). Pour une valeu numérique donnée, il retrouve Lambert en ses développements de thx et tgx.

Il traite la question de l'irrationalité de la limite par le lemme suivant ([5], p. 291).

$$x = \left(\frac{m_1}{n_1}\right) + \left(\frac{m_2}{n_2}\right) + \dots \left(\frac{m_k}{n_k}\right) + \dots$$

et si $\left|\frac{m_k}{n_k}\right| < 1$ à partir d'un certain rang, alors x est irrationnel : la démonstration, très simple, à partir de l méthode de descente infinie de Fermat (Legendre omet cependant l'étude d'une exception), masque néanmoins ce qu'il en est des fractions continues pour Lambert.

(*) [5] Legendre, Eléments de géométrie. Je citerai l'édi de 1842 (Firmin Didot, Paris).

Comme on a

$$tgx = (\frac{1}{1/x}) + (\frac{1}{-3/x}) + (\frac{1}{5/x}) + \ldots$$

on écrit la forme équivalente :

$$tgx = (\frac{x}{1}) + (\frac{-x^2}{3}) + (\frac{x^2}{5}) + \ldots$$

et $|\frac{x^2}{2n+1}| < 1$, à partir d'un certain rang.

C'est cette variante de Legendre que Lebesgue utilise pour commenter le théorème de Lambert.

Pour terminer, Legendre observe ([5], p. 296)

$$tg\Pi = o = \cfrac{\Pi}{1+\cfrac{(-\Pi^2)}{3+\cfrac{(-\Pi^2)}{5+H}}} \quad ; \text{ donc } 3 + \frac{(-\Pi^2)}{5+H} = 0$$

$$\text{et} \quad 3 = \cfrac{\Pi^2}{5+\cfrac{(-\Pi^2)}{7+(\ )}}$$

Par le même argument : 3 est rationnel, donc Π^2 est irrationnel.

ANNEXES

BULLETIN n° 4

SOMMAIRE

* * *

BULLETIN n° 5

S O M M A I R E

UNIVERSITE D'ETE INTERDISCIPLINAIRE
SUR L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES
Toulouse 6 - 12 juillet 1986

PROGRAMME

Dimanche 6 juillet

9H à 10H30 Accueil des participants
10H30 à 12H Présentation de l'Université d'Eté
14H à 16H Conférence
F. DE GANDT "Mathématiques et Sciences de la Nature (réflexions à partir du calcul des forces chez NEWTON)"
16H30 - 18H30 Conférence
A. DJEBBAR "L'algèbre dans les mathématiques arabes"

Lundi 7 juillet

9H à 12H Ateliers série I en parallèle
E. BARBIN, G. ITARD "L'émergence du concept de fonction"
D. BESSOT "Constructions géométriques"
J. BORREANI, D. SCHEIER "La démonstration géométrique dans les éléments d'EUCLIDE"
K. CHEMLA "Caractère et rôle des algorithmes dans l'histoire des mathématiques"
A. DAHAN "LAGRANGE : la méthode critique en algèbre"
F. DE GANDT "HUSSERL : symbolisme et mathématique"
X. LEFORT "Mathématiques et arpentage"
14H à 16H Conférence
R. BKOUCHE "Les principaux thèmes dans l'histoire de la géométrie"
16H30 à 18H30 Ateliers série I en parallèle

Mardi 8 juillet

9H à 12H Ateliers pédagogiques
A. BATAILLE, H. PLANE "Comment commencer à faire de l'Histoire des Mathématiques"
J. DEMALANDER ; M. GIANORDOLI ; S. SOKELAND "Un stage PAF à Reims. Quels éléments d'histoire des mathématiques pour nos élèves"
F. EYSETTE "Histoire des mathématiques dans la formation continue des professeurs de collège"

J.P. GUICHARD, J.P. SICRE "Compte rendu d'un PAE sur VIETE et son temps"

M. GURGO "Histoire des mathématiques et pédagogie"

C. HAUCHART, N. ROUCHE "Limites et continuité... Comment voyez-vous ça ?"

P. KNERR "Les options du programme actuel de TA_{2-3}"

D. LANIER, J.P. LE GOFF "Un enseignement d'histoire des mathématiques en DEUG Philosophie"

14H à 16H — Ateliers traduction et documentation en parallèle

16H30 à 18H30 — Conférence

C. HOUZEL "Les grands thèmes dans l'histoire de l'arithmétique"

Mercredi 9 juillet

9H à 10H30 — Exposés en parallèle

J.L. CHABERT "Les géométries non euclidiennes"

O. KELLER "Les fractions égyptiennes : origine, technique, contexte économique et social".

~~G. MAZARS "Les mathématiques indiennes"~~

S. ROERO "La fenêtre de VIVIANI : de PAPPUS à LEIBNIZ"

11H à 12H30 — Exposés en parallèle

K. CHEMLA "La notion de preuve en Chine"

A. DAHAN "L'Ecole Normale de l'An III"

L. GIACARDI "Mathématiques babyloniennes"

J.C. MARTZLOFF "Histoire des mathématiques japonaises du 17ème au 20ème siècle"

14H — Départ pour l'excursion Albi-Cordes

Jeudi 10 juillet

9H à 12H — Ateliers série II en parallèle

E. BARBIN, M. CHOLIERE "Mathématiques et artillerie"

R. BKOUCHE "Le raisonnement géométrique"

J. BOROWCZYCK "Résolutions d'équations différentielles"

J.P. CLERO, J. GUICHARD "Représentations des objets mathématiques dans la pensée philosophique"

R. CUCULIERE "Equations en nombres entiers"

J.P. FRIEDELMEYER "GAUSS : Des équations qui déterminent les sections circulaires"

D. LANIER "La fenêtre de VIVIANI"

14H à 16H — Conférence

C. HAUCHART "Didactique et Epistémologie : à propos de l'enseignement de l'analyse"

16H30 à 18H30 — Ateliers série II en parallèle

Vendredi 11 juillet

9H à 12H — Ateliers série III en parallèle

N. BOULAHIA "Méthodes d'approximation chez les anciens"

M.C. CARAMATIE "Les systèmes planétaires dans la Grèce antique"

J.L. CHABERT "La théorie des parallèles"

J.P. CLERO, Y. MAREC, S. PROVOST "Mélanges sur le temps"

J. DHOMBRES "Architecture de l'analyse basée sur le concept de fonction chez EULER"

O. KELLER "Calcul numérique et algèbre en Egypte antique"

14H à 16H — Exposés et ateliers documentation en parallèle

R. CUCULIERE "~~Les nombres~~ premiers d'EUCLIDE à GAUSS"

J.P. LE GOFF "Le premier traité de perspective"

M. SERFATI "L'affaire LAMBERT"

16H30 à 18H30 — Ateliers série III en parallèle

Samedi 12 juillet

9H à 12H — Ateliers projets

14H à 16H — Table ronde : "Histoire des mathématiques et formation scientifique"

TOULOUSE 6 - 12 JUILLET 1986

André Antibi	Maths	UPS	31000 Toulouse
Aimée Baillette	Maths		
Huguette Barber	Maths	Collège	31470 St Lys
Evelyne Barbin	Maths	Université du Maine IREM	72017 Le Mans CEDEX
Annie Bartez	Maths	LPC Charles de Gaulle	RFA Baden Baden
Alain Bataille	Hist.	Lycée J. Amyot	89000 Auxerre
Bernd Bekemeier	Maths	Univ.Paris XIII CSP	93460 Villetaneuse
Daniel Bernard	Philo	Lycée Sud	72100 Le Mans
Arlette Berry	Maths	Lycée Polyv. Rve Gauche	31000 Toulouse
Didier Bessot	Maths	Lycée A. Fresnel	14000 Caen
Rudolf Bkouche	Maths	Université Lille	59655 Villeneuve d'Ascq
Eliane Bonnefon	Maths	CES La Madeleine	72000 Le Mans
Gilles Bonnefoy	Maths	Lycée Cl. Bernard	69000 Villefranche/Saone
Jacques Borowczyk	Maths	Université	86000 Poitiers
Jacqueline Borreani	Maths	Collège Le Cèdre	76380 Canteleu
Nejib Boulahia	Maths	Ecole Normale Superieure	Bizerte Tunisie
Jean-Luc Bregeon	Maths	Collège Mixte d'Etat	03016 Moulins Cedex
Martine Buhler	Maths	CLG La Guinette	94440 Villecresnes
Elisabeth Burguière	Maths	Lycée Agricole	31000 Castanet
Marie Catherine Caramatie	Maths	Lycée Jeanne d'Arc	76000 Rouen
Annie Caussé	Maths	Lycée de St Gaudens	31000 Saint Gaudens
Chantal Cazamian	Philo	Lycée André Gide	30700 Uzès
Jean Luc Chabert	Maths	Université de Picardie	02109 St Quentin
Jean Marc Charrier	Maths	Lycée Privé du SacréCoeur	49000 Angers
Karine Chemla	Maths	Centre Scien. et Polyt.	93430 Villetaneuse
Michèle Cholière	Maths	Collège de Pontvallain	72510 Mansigné
Mireille Clapié	Maths	Lycée Pardailhan	32000 Auch
Jean Pierre Clero	Maths	Lycée Saint Saens	76000 Rouen
Thierry Coulhon	Maths	Universite Paris VI	75230 Paris
Roger Cuculière	Maths	Lycée Raspail	75014 Paris

TOULOUSE 6 - 12 JUILLET 1986

Roger Cuppens	Maths	UPS	31000 Toulouse
Claude Curutchet	Maths	Collège Léon Bérard	64120 St Palais
Amy Dahan	Maths	CNRS	Paris
Jean Marc Daudonnet	Maths	Lycée Français de Londres	GB London SW7
Denis Daumas	Maths	Lycée Climatique	65400 Argelès Gazost
Francois De Gandt	Philo	CNRS	Paris
Marie Lucie Delale	Maths	La Folie St James	92200 Neuilly
Marie Françoise Delmas	Lett.	Collège de Villecresnes	94000 Villecresnes
Jean Demalander	Maths	CRFPEGC	51100 Reims
Martine Dervieux	Maths	Collège Victor Hugo	62440 Harnes
Roger Desq	Maths	UPS	31400 Toulouse
Jean Dhombres	Maths	Institut de Maths	44072 Nantes CEDEX
Ahmed Djebbar	Maths	Univ. Paris Sud	91405 Orsay CEDEX
Alain Dodard	Maths	Lycée Militaire St Cyr	78120 St Cyr
Brigitte Dody	Maths	Collège Liberté	83170 Brignoles
Marie Dopffer	Philo	Ecole Normale	31400 Toulouse
Caroline Dulac-Fahrenkrug	Maths	Lycée Franco-allemand	Freiburg
Claire Durant	Maths	Lycée Paul Valéry	34000 Sète
Chantal Escale	Maths	Lycée Henri IV	34500 Béziers
Jean Luc Eveno	Maths	Lycée Privé Le Petit Sémin	56400 St Anne d'Aur
Frédéric Eysette	Maths	Université	06034 Nice CEDEX
Sabah Fakir	Maths	Univ. Lille 1	59655 Villeneuve d'As
Gaston Fraysse	Philo	CNED	92171 Vanves
Jean Pierre Friedelmeyer	Maths	LTE Louis Couffignal	67200 Strasbourg
J. Pierre Février	Maths	Collège J. Monod	53000 Laval
Anne Galaup	Maths	Lycée P. Sabatier	11000 Carcassonne
Livia Giacardi	Maths	Istituto di Matematica	I 10123 TORINO
Monique Gianordoli	Maths	Lycée G. Clémenceau	51100 Reims
Marc Godin	Maths	ENM de Lille	59000 Lille
Monique Goiran	Maths	Lycée Michelet	82000 Montauban

Carlos Gomez Bermudez	Maths	Inst. Bachillerato Vilanova SP Vilanova Barcelona
Philippe Grandemange	Maths	Ecole Normale 77000 Melun
Dominique Grenier	Maths	Collège de Réquista 12170 Requista
Jacqueline Guichard	Philo	Lycée E. Pérochon 79200 Parthenay
Jean Paul Guichard	Maths	Collège Mendès France 79200 Parthenay
Michel Guillemot	Maths	UPS 31400 Toulouse
Michel Gurgo	Maths	Collège J. Prévert 89400 Migennes
Maryvonne Hallez	Maths	Lycée Paul Bert 75014 Paris
Christiane Hauchart	Maths	Université Louvain
Elisabeth Hebert	Maths	Les Bruyères 76000 Sotteville
Bernard Hebraud	Maths	Collège de Coursan 11100 Coursan
Guy Hennecart	Maths	ENNA 31000 Toulouse
Christian Houzel	Maths	Univ. Paris Nord 93430 Villetaneuse
Gilles Itard	Maths	Lycée Racan 72500 Chateau du Loir
François Jaboeuf	Maths	Lycée Joffre 34000 Montpellier
Philippe Jacquemier	Maths	IDEN 38100 Grenoble
Marie Françoise Jozeau	Maths	Lycée G. de Nerval 95270 Luzarches
Claudine Kahn	Maths	Lycée Marie Curie 67000 Strasbourg
Gérard Kaleka	Philo	Lycée Pothier 45000 Orléans
Olivier Keller	Maths	Lycée P. Brosselette 69100 Villeurbanne
Jean Paul Keller	Maths	Lycée Déodat de Séverac 31076 Toulouse Cedex
Paule Knerr	Maths	Lycée Colbert 75010 Paris
Marie Hélène Labarthe	Maths	Lycée ND du BonSecours 66000 Perpignan
Françoise Lalande	Maths	Lycée Joffre 34000 Montpellier
Denis Lanier	Maths	Lycée Malherbe 14000 Caen
Christiane Larere	Maths	CNEFASES 95260 Beaumont sur Oise
Alain Le Boulch	Maths	Lycée Jacques Cartier 35403 Saint Malo CEDEX
Jean Luc Le Chevalier	Maths	Lycée Polyvalent Corot 59508 Douai CEDEX
Josette Le Coq	Maths	Collège international 01210 Ferney-Voltaire
Jean Pierre Le Goff	Maths	Lycée Malherbe 14000 Caen

Annick Le Meur Lhomme	Hist.	Collège Lannilis 29214 Lannilis
Xavier Lefort	Maths	IUT St Nazaire 44606 St Nazaire
Lethierry	Philo	Ecole Normale 12000 Rodez
Françoise Magna	Maths	Lycée de Verneuil 27130 Verneuil / Avre
Michèle Manoa	Maths	Collège Anduze 30000
Françoise Marchesseau	Maths	Lycée Privé St Joseph 44270 Machecoul
Yannick Marec	Hist.	Collège Jean Zay 76770 Le Houlme
J. Claude Martzloff	Maths	Institut Htes Etudes Chinoi: 75016 Paris
Christiane Massoutie	Maths	ENSEEIHT 31000 Toulouse
Joelle Meignen	Maths	Lycée J. Dantet 17000 La Rochelle
Michel Merigot	Maths	Université 06000 Nice
M. Hélène Merland	Maths	Collège 31470 St Lys
Alain Mesmin	Maths	Lycée autogéré 75015 Paris
Annie Michel Pajus	Maths	Lycée Joffre 34000 Montpellier
Monique Nouet	Maths	Lycée Montesquieu 72000 Le Mans
Marie Christine Palandjian	Maths	Collège Chaumié 47000 Agen
Yves Paquelier	Maths	UER Didactique 75005 Paris
Jean Pelissier	Maths	UTM 31000 Toulouse
Gérard Pelissier	Maths	ENFA 31000 Auzeville
Aline Petit	Maths	Collège 31470 St Lys
Annette Peyrichoux	Maths	Collège d'Orlinde 46130 Bretenoux
Annie Pialot	Maths	Collège de Frouzins 31270 Cugnaux
Henry Plane	Maths	Lycée J. Amyot 89000 Auxerre
Geneviève Portes	Maths	Lycée R. Naves 31200 Toulouse
Sylvie Provost	Phys.	Lycée Technique F. Buisson 76504 Elbeuf
Dominique Ravel	Maths	LTE Dhuoda 30000 Nimes
Marie Claire Remillieux	Maths	Lycée Henri Vogt 55200 Commercy
Paul Robbe	Maths	Lycée Paul Valéry 34200 Sète
Silvia Roero	Maths	Istituto di matematica I 10123 Torino
Marie Paule Rommevaux	Maths	Lycée Polyvalent G. Cuvier 25207 Montbéliard CEDEX

Antoine Rossignol	Maths	UPS	31400	Toulouse
Nicolas Rouche	Maths	Université de Louvain		
Joaquin Ruiz	Philo	Lycée Rive Gauche	31000	Toulouse
Pascale Sagot	Maths	Lycée Honnorat	04400	Barcelonnette
Linda Salama	Maths	Ecole Normale	35043	Rennes CEDEX
Patrice Salle	Maths	ENSEEIHT	31000	Toulouse
Danielle Scheier	Maths	Collège E. Branly	76120	Grand Quevilly
Ivo Schneider	Maths	Deutsches Museum	D	Munich RFA
Michel Serfati	Maths	Lycée Raspail	75014	Paris
Jean Pierre Sicre	Maths	Collège A. Tiroqueau	85205	Fontenay le Comte CE
Jacky Sip	Maths	Collège R. Desnos	59176	Masny
Claude Slowick	Maths	CES Lamartine	59000	Cambrai
Simone Sokeland	Maths	Lycée G. Clémenceau	51100	Reims
Solange Sor	Maths	Collège Bourdelle	82000	Montauban
Maryvonne Spiesser	Maths	UPS	31400	Toulouse
Rolland Stowasser	Maths	Tech. Universitat	D	Berlin RFA
Guy Terjanian	Maths	UPS	31000	Toulouse
Maurice Thirion	Philo	Lycée Jules Uhry	60000	Creil
Bernard Tissot	Maths	Ces Arc de Meyran	13100	Aix en Provence
Luc Trouche	Maths	Lycée Joffre	34000	Montpellier
Ghislain Vergnes	INSEE	INSEE	31000	Toulouse
Christine Virlouvet	Maths	IUT Villetaneuse	93430	Villetaneuse
Nicole Vogel	Maths	LEGT	67500	Haguenau
Klaus Volkert	Maths	Seminar fur Mathematik	D-5000	Koln
Jacqueline Zebiche	Maths	Lycée Ozenne	31000	Toulouse
Thérèse GILBERT	Didactique	Université de Louvain		
Hughes MASY	Didactique	Université de Louvain		
Marie-France LOUTRE	Didactique	Université de Louvain		

SOMMAIRE

125

I.R.E.M. de TOULOUSE
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse CEDEX