LES MATHEMATIQUES GRECQUES DANS LEUR CONTEXTE PHILOSOPHIQUE.

(ARISTOTE SUR LA DEMONSTRATION ET L'INTERPRETATION MATHEMATIQUE DE L'UNIVERS.)

François DE GANDT
C.N.R.S. Paris

Sommaire :

I - Quelques données historiques.

Les trois grands : discussion de chronologie.
Les trois grands : les oeuvres.
Autres témoignages sur les mathématiques grecques.

II - La démonstration.

La démonstration au delà de l'évidence.
Les joutes dialectiques.
La théorie du syllogisme.
Syllogisme et raisonnement mathématique.
Le rituel de démonstration d'Euclide.
Les propriétés intuitives de l'espace.

III - L'interprétation mathématique de la nature.

L'interprétation mathématique de l'univers selon Pythagore et Platon.
L'abstraction mathématique selon Aristote.
L'analyse du mouvement.
L'analyse du continu.
La proportionnalité entre force et résistance.
La science de la nature comme théorie déductive mathématique : Archimède.

Les éléments d'information et de réflexion que je vous propose devraient servir à situer les mathématiques grecques, en elles-mêmes et dans leur relation à la philosophie. Pour éviter une trop grande dispersion, j'ai choisi l'oeuvre d'Aristote comme point d'appui, en limitant l'enquête à deux thèmes :

- la démonstration, en logique et en mathématiques ;
- le lien entre mathématiques et science de la nature.

Avant d'entrer dans cette confrontation, quelques repères historiques sont indispensables, surtout pour ceux d'entre vous qui commencent seulement à s'intéresser à l'histoire des mathématiques.

I - QUELQUES DONNEES HISTORIQUES.

Les trois grands : discussion de chronologie.

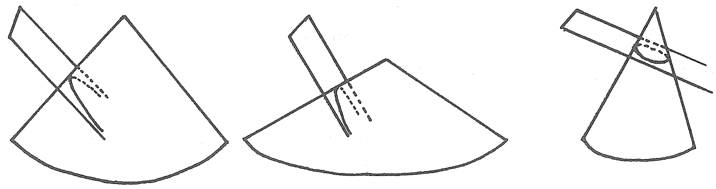
Le sommet du massif des mathématiques grecques est triple : il s'appelle Euclide-Archimède-Apollonius. Proches par le temps et par le style, ces trois hommes nous ont laissé l'essentiel des textes mathématiques grecs.

Quelle date assigner à chacun des trois ? Pourquoi les avoir cités dans cet ordre ? La question est difficile, et une discussion un peu détaillée de ce point de chronologie donnera une idée des embûches et des subtilités de l'histoire des mathématiques grecques (si le rôle du philosophe est toujours d'ébranler les certitudes, alors ce qui suit est peut-être déjà de la philosophie...).

Le repère le plus indubitable, et peut-être le seul point ferme dans toute cette chronologie, c'est la mort d'Archimède en 212 av. JC, qui s'est produite lors de la prise de Syracuse par les troupes romaines. Le fait est rapporté par plusieurs sources et semble certain. Sa mort est ainsi liée à un évènement de l'histoire militaire et politique, donc facile à contrôler. Mais si l'on veut savoir quand est né Archimède, il faut s'en rapporter à un auteur byzantin qui vivait 1400 ans plus tard, Jean Tzetzes, et qui déclare dans un vers de ses Chiliades qu'Archimède aurait vécu 75 ans. Peut-être d'ailleurs Tzetzes a-t-il choisi ce nombre parce que c'était un chiffre rond, ou qui convenait mieux à la mesure de son vers !

Sur Euclide on ne sait à peu près rien (cela n'a pas empêché les biographes arabes de raconter sa vie avec autant de détails qu'un épisode des Mille et Une Nuits). Proclus, qui est mort en 485 de notre ère, déclare qu'Archimède vivait après Euclide, "car Archimède fait mention d'Euclide". Mais ce fait n'est pas certain du tout, parce que la citation explicite des Eléments d'Euclide dans le texte d'Archimède (De Sphaera et Cylindro, I,2) est assez étrange et a toutes chances d'être une interpolation ultérieure : Archimède n'a pas l'habitude de citer les propositions sur lesquelles il s'appuie, et la référence est assez puérile dans ce cas, puisqu'il s'agit d'Euclide I,2, un résultat tout à fait élémentaire. Si Archimède explicite cette sorte de référence ici, pourquoi a-t-il négligé de le faire dans des cas beaucoup plus difficiles ? Ailleurs il invoque sans précision les "Eléments", mais nous savons qu'il a existé bien d'autres éléments que ceux d'Euclide.

Les données relatives à Apollonius sont-elles plus certaines ? Pappus (vers 300 de notre ère) rapporte qu'Apollonius serait allé à Alexandrie étudier sous la direction des élèves d'Euclide. Il est assez plausible que la théorie des coniques d'Apollonius aille au delà de ce que connaissait Euclide. Mais Apollonius est-il postérieur à Archimède ? On peut tirer argument d'une différence terminologique entre nos deux auteurs ; Archimède a conservé les appellations anciennes pour les coniques : ce qu'Apollonius nomme "parabole", "hyperbole" et "ellipse", Archimède le nomme respectivement "section du cône à angle droit", "section du cône à angle obtus", "section du cône à angle aigu" (le premier mode de description met en relief des propriétés d'application des aires avec "excès" ou "défaut", le second rappelle le mode d'engendrement géométrique où l'on choisit un cône différent -plus ou moins ouvert- pour les trois courbes).



Là où Apollonius parle d'"asymptote", Archimède parle des "lignes les plus proches". Mais tous ces archaïsmes de vocabulaire ne sont pas décisifs : Archimède tenait peut-être à cette coloration archaïsante, comme il tenait à son idiome provincial, le grec dorien de la Sicile, dans lequel il semble avoir rédigé ses oeuvres.

On peut aussi tirer quelques informations des préfaces des livres d'Archimède et d'Apollonius : leurs livres ont présentés comme de très longues lettres envoyées à Dosithée, à Eratosthène, à Eudème (de Pergame), au roi Attale. Dans les cas où ces personnages sont bien connus par ailleurs, on possède quelques repères.

Les trois grands : les oeuvres.

Ne nous attardons pas à ces discussions un peu byzantines de chronologie, qui n'aurait aucun intérêt si les oeuvres de ces trois hommes n'étaient importantes par elles-mêmes.

Les livres d'Archimède sont peut-être les plus fascinants pour nous, parce qu'une personnalité géniale s'y révèle, avec une très grande marque d'originalité. Les résultats qu'il propose sont nouveaux, et on peut essayer de suivre, malgré la perte d'oeuvres importantes, un itinéaire de découverte mathématique : il y a par exemple une progression entre le traité De la sphère et du cylindre et celui Des conoïdes et sphéroïdes ; d'autre part les résultats des Equilibres Plans I sont utilisés dans la Quadrature de la parabole, dans les Equilibres Plans II, dans la Méthode et dans les Corps flottants.

Un des traits les plus frappants de cet itinéaire est le lien étroit qu'établit Archimède entre mathématique et physique : il a donné la forme d'une théorie mathématique à la statique et à l'hydrostatique (nous y reviendrons tout à la fin), il a aussi utilisé dans les mathématiques elles-mêmes les ressources du mouvement et de la force naturelle. La spirale, qui est son invention, et qu'il utilise pour évaluer la circonférence et l'aire du cercle, est définie comme le trajet d'un point animé de deux mouvements composés, une translation et une rotation ; le début du traité Des spirales est ainsi l'un des très rares textes de cinématique dans l'Antiquité grecque, à part les textes des astronomes bien sûr.

Surtout Archimède s'est aperçu que les méthodes de détermination des centres de gravité permettaient d'obtenir des résultats de quadrature et de cubature (surface et volume). La science des poids conduisait à des propositions de géométrie pure. Cette idée est exploitée systématiquement dans un texte redécouvert en 1906 par Heiberg (il s'agit d'un manuscrit de Constantinople, provenant de Jérusalem, qui avait été gratté et réutilisé pour copier un autre texte). Ce texte retrouvé, intitulé la Méthode, ou Lettre à Eratosthène, occupe une place tout à fait à part dans le corpus mathématique grec. Archimède y expose une méthode qui permet à son avis de trouver les résultats, mais non de les démontrer. L'essentiel du procédé consiste dans la pesée de segments pris à l'intérieur des figures ; la figure elle-même est ensuite considérée comme "composée" des segments, à la manière des indivisibles de Torricelli ou Pascal. Il semble d'ailleurs que ce ne soit pas l'aspect de recomposition infinitésimale qui gêne le plus Archimède ; si sa méthode est "non-géométrique", extérieure aux canons mathématiques de démonstration ("choris apodeixeos"), c'est surtout parce qu'elle est mécanique et fait appel à des pesées.

Les *Coniques* d'Apollonius, l'unique ouvrage qui nous soit parvenu de cet auteur, sont d'un abord moins attrayant. La seule lecture des énoncés interminables, sans aucune abréviation ni notation symbolique, a de quoi rebuter un lecteur habitué à traiter les coniques par des manipulations d'équations, et le respect strict du rituel euclidien de démonstration peut lasser la patience de l'amateur pressé. Mais si l'on accepte les lois d'un genre qui pourrait ressembler à l'opéra traditionnel japonais, on vient à admirer cette géométrie si rigoureuse et raffinée.

Les *Eléments* d'Euclide enfin sont l'un des monuments de notre culture occidentale : une somme de mathématique et surtout un modèle de démonstration axiomatique. Indiquons brièvement le contenu des treize livres :

1-4 : géométrie plane.
- 1 : triangles et parallélogrammes.
- 2 : calcul géométrique d'identités remarquables (nos "$(a+b)^2$",etc..).
- 3 : géométrie du cercle.
- 4 : figures inscrites et circonscrites.

5-10 : proportions et nombres.
- 5 : théorie générale des proportions.
- 6 : proportions entre figures planes.
- 7-9 : arithmétique.
- 10 : classement géométrique des irrationnelles de forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

11-13 : géométrie dans l'espace.
- 11 : figures spatiales rectilignes.
- 12 : pyramides, cylindres, cônes, sphères (usage répété de la double réduction à l'absurde, abusivement nommée "exhaustion").
- 13 : construction des cinq solides réguliers.

L'ouvrage se termine (si l'on écarte les livres 14 et 15, ajoutés très postérieurement), par la démonstration qu'il y a seulement cinq solides réguliers.

Autres témoignages sur les mathématiques grecques.

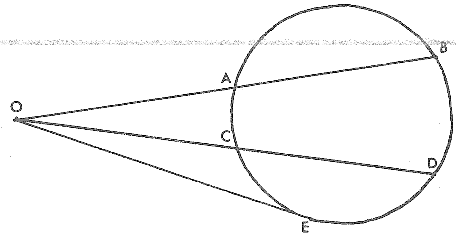
A part ces trois grands auteurs, il faut mentionner essentiellement Diophante et Pappus. L'Arithmétique de Diophante (vers 250 de notre ère ?) est très importante pour le développement ultérieur de l'algèbre et de la théorie des nombres jusqu'à nos jours, mais elle est plutôt marginale dans l'ensemble des mathématiques grecques. Elle est aussi difficile d'accès, parce que le texte a beaucoup souffert dans les transmissions successives et que Diophante semble raisonner sur des cas particuliers, sans dégager explicitement des procédés généraux.

La Collection mathématique de Pappus est un recueil très composite, mais important parce qu'il nous a conservé des extraits ou des paraphrases de textes perdus.

Pour être complet, il faudrait parler aussi des textes d'astronomie et de mécanique. Outre l'Almageste de Ptolémée, et ses écrits mineurs, il existe un ensemble nommé Petite Astronomie, surtout consacré à la géométrie sphérique et à la trigonométrie, qui comprend des textes d'Autolycos, Euclide, Aristarque, Théodose et Hypsiclès.
Le livre d'Autolycos (De la sphère en mouvement) est intéressant parce que c'est le seul texte mathématique antérieur à Euclide qui nous soit parvenu (Les Eléments d'Euclide étaient tellement achevés et complets qu'on n'a plus pris la peine de recopier les ouvrages antérieurs).
Les textes de mécanique forment une liste assez courte : les Questions Mécaniques (ou simplement Mécaniques) issues de l'entourage d'Aristote et longtemps attribuées à Aristote lui-même, les Equilibres plans d'Archimède et les Mécaniques de Héron d'Alexandrie, conservées en traduction arabe.

Au total, si quelqu'un voulait franchir le seuil de cet univers passionnant, je lui conseillerais d'étudier au moins le livre I d'Euclide, qui culmine avec le théorème de Pythagore, et le livre III, qui s'achève sur "la puissance du point par rapport au cercle" :

$OA.OB = OC.OD = OE^2$



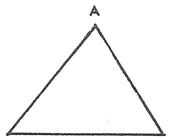
Sur des exemples assez simples, on peut y apprécier la puissance, la rigueur et l'économie de moyens de la géométrie grecque. La lecture du livre I d'Euclide a représenté pour plusieurs grands penseurs une sorte de conversion intellectuelle.

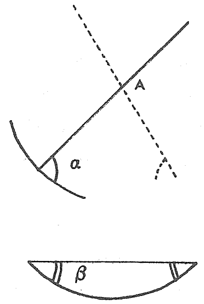
Maintenant que savons-nous des conditions dans lesquelles est né ce monumental livre des <u>Eléments</u> ? Les grands prédécesseurs d'Euclide : Thalès, Pythagore, Hippocrate de Chio, Théétète, Eudoxe, n'ont laissé aucune trace écrite. Leur nom et leur apport n'est connu que par des récits très postérieurs : des annotations anonymes en marge des manuscrits, les Commentaires d'Aristote (notamment celui de la <u>Physique</u> par Simplicius, vers 530 de notre ère), et surtout le Commentaire du livre I d'Euclide par un néo-platonicien assez bavard nommé Proclus (mort en 485 de notre ère).

Les témoignages les plus riches et les plus directs se trouvent en réalité dans les oeuvres des deux grands philosophes antérieurs à Euclide : Platon et Aristote (morts respectivement en 347 et 322 av. JC). C'est dans la <u>République</u>, le <u>Théétète</u>, le <u>Ménon</u>, dans la <u>Métaphysique</u>, les <u>Seconds Analytiques</u>, la <u>Physique</u>, que l'on a le plus de chance de voir affleurer la mathématique pré-euclidienne, certes avec les distorsions qu'un philosophe peut faire subir au matériau qu'il utilise.

Par exemple Aristote a gardé témoignage (<u>Ana. Premiers</u>, I,24) d'une notion qui disparaît chez Euclide : l'angle curviligne. Pour prouver que les angles à la base d'un triangle iso cèle sont égaux, Aristote suppose un cercle tracé autour du sommet A, avec les côtés égaux comme rayons ; il considère alors les deux "angles du demi-cercle" qui sont égaux, il en retire les "angles du segment /de cercle/"

qui sont égaux ; les restes, c'est à dire les angles à la base du triangle, sont donc égaux.





L'angle rectiligne est ainsi la différence de deux angles curvilignes : l'angle du demi-cercle α et l'angle du segment de cercle β.

Un tel raisonnement sera exclu des <u>Eléments</u> d'Euclide, probablement parce qu'entre temps on a pris conscience du comportement étrange de ces angles curvilignes. Euclide ne mentionne de tels angles que pour les exclure : il prouve en III,16 que l'angle entre un cercle et sa tangente est plus petit que tout angle rectiligne, si petit soit-il on ; a donc là une grandeur qui n'est pas nulle mais qui est plus petite que toute grandeur donnée !

II - LA DEMONSTRATION.

La démonstration au-delà de l'évidence.

La véritable merveille des mathématiques grecques, c'est l'apparition de la démonstration. Longtemps auparavant et sous d'autres cieux, on connaissait des triangles pythagoriciens (de côtés 3,4,5 par exemple). Mais nulle part ailleurs, avant les Grecs, on ne semble avoir pensé à démontrer cette propriété, c'est à dire à l'établir en général, indépendamment des cas particuliers, indépendamment des formes sensibles, en supposant seulement quelques principes initiaux.

Passer de "cela se voit" à "cela se démontre", tous les professeurs de mathématiques savent combien ce seuil est difficile à franchir. En franchissant ce seuil, les Grecs ont définitivement marqué notre culture.

Pourquoi eux ? C'est impossible à expliquer. Du moins celui qui a bu un verre d'ouzo sous les platanes sait que les Grecs adorent discuter, qu'ils discutent pour le plaisir. Voilà peut-être le point décisif : discuter pour l'amour de la discussion, avec comme seule règle ce qui est attesté et reconnu dans le cours de la discussion elle-même. Ni le sens commun, ni l'évidence de la perception n'ont de droit a priori. Les plus célèbres de ces discuteurs se sont appelés Zénon, Héraclite, Parménide. Que malheureusement Achille rattrape à chaque fois la tortue, que la guerre et l'harmonie soient deux expériences opposées, que la pluralité des existants s'impose irrésistiblement, cela n'arrête pas nos champions. Ils ont la force de soutenir jusqu'au bout ce qui va contre les évidences communes.

Dans ces jeux d'argumentation émergent peu à peu les contraintes propres au pur discours : même le partenaire de la plus extrême mauvaise foi doit s'incliner devant certaines exigences. Par exemple il n'a pas le droit de soutenir une chose et le contraire.

Telle est l'ambiance où se sont développées les techniques de preuve philosophique et mathématique, conjointement. Les filiations et les dépendances sont difficiles à préciser exactement, mais il est certain que les principes des Eléments d'Euclide doivent beaucoup aux discussions et aux objections des grands discuteurs comme Zénon.

Nous avons peu de témoignages sur les progrès de la démonstration mathématique avant Euclide. En revanche nous possédons une très riche documentation sur un autre aspect de la pratique de la preuve : je veux parler de la logique, qui naît avec Aristote, sur le fonds de procédés déjà plus ou moins codifiés par Platon et les sophistes. (Nous aurons à nous demander plus tard s'il s'agit de la même sorte de preuve dans les <u>Analytiques</u> d'Aristote et dans les <u>Eléments</u> d'Euclide.)

<u>Les "joutes dialectiques"</u>.

L'exemple le plus riche et le plus pittoresque de cet amour grec de la discussion se trouve dans les "joutes dialectiques" organisées à l'Académie de Platon. C'est Aristote qui nous en a gardé la mémoire, dans le livre VIII des <u>Topiques</u>. Les <u>Topiques</u> dans leur entier sont le fruit de cet entraînement méthodique à la discussion réglée : c'est un recueil de trucs de raisonnement utiles dans les joutes dialectiques. ("Dialectique" ne signifie précisément rien d'autre que cette pratique de la discussion réglée.)

Voici comment se passent ces championnats de discussion dans l'Académie : devant l'auditoire qui doit apprécier et arbitrer, deux partenaires s'affrontent verbalement sur un thème choisi à l'avance, et pendant un temps limité. Les thèmes, qu'Aristote appelle "problèmes", sont très variés : L'univers est-il éternel ? Le plaisir est-il un bien ? L'âme est-elle immortelle ? La connaissance sensible est-elle une science ? L'être est-il un ? Tout est-il en mouvement ? (Aristote précise qu'il vaut mieux écarter certains problèmes comme : la neige est-elle blanche ? ou : doit-on honorer ses parents ?, pour éviter de choquer directement l'évidence sensible ou la bonne moralité.)

L'un des deux partenaires, celui qu'on appelle "questionneur", choisit une des deux thèses possibles (la branche affirmative ou négative du problème), et tente de la faire accepter par son adversaire en lui posant des questions habilement graduées. L'autre, appelé "répondant", a simplement pour rôle d'accepter ou de refuser les assertions qu'on lui présente, mais il doit justifier ses refus par des objections ou des contre-exemples.

Cet exercice cultive certaines formes d'habileté : notamment on prend l'habitude de choisir soigneusement ses points de départ. On acquiert aussi une grande adresse à dissimuler : le questionneur fait accepter des thèses apparemment sans lien avec la proposition en jeu, il fragmente ses assertions, emprunte de longs détours, et c'est seulement au dernier moment qu'il ressaisit tous les fils ; il montre alors au répondant que ce dernier a admis la conclusion sans s'en rendre compte, parce qu'il en a admis successivement toutes les prémisses. Le schéma serait pour simplifier le suivant : "il y a un quart d'heure tu as admis que ce qui n'a pas de commencement est éternel, maintenant tu viens d'admettre que l'Univers n'a pas de commencement ; tu es donc obligé d'admettre que l'Univers est éternel". L'auditoire apprécie en connaisseur l'estocade finale, d'autant plus que l'adversaire ne l'avait pas senti venir.

<u>La théorie du syllogisme</u>.

Ce piège de discussion, cette technique d'argumentation qui pose séparément les éléments d'une assertion et les rassemble à l'instant final, Aristote lui donne le nom de "sullogizesthai". Le syllogisme n'est rien d'autre que la codification rigoureuse de cette technique, avec comme soubassement une certaine analyse de la phrase grecque.

Une phrase grecque élémentaire et canonique est supposée se décomposer en deux termes : un prédicat et un sujet, joints par un lien (une "copule" comme on dira) : "mortel appartient à homme", ou en exprimant la même proposition dans un autre sens : "l'homme est mortel". Chez Aristote, les termes tels que "mortel", "homme", sont traités comme des variables, avec des lettres grecques pour les désigner (c'est la première occurrence historique d'un tel procédé) : "A appartient à B" ou "B est A". Les copules sont des constantes, et Aristote combine la copule avec un indicateur de nombre, ce qui donne quatre copules possibles :

"appartenir à tout", "n'appartenir à aucun",
"appartenir à quelque", "ne pas appartenir à quelque".

Il n'y a pas de termes singuliers dans cette théorie, du genre "Socrate", "cette chaise", car les appartenances sont des relations entre classes.

Le syllogisme consiste dans un enchaînement de plusieurs propositions élémentaires qui aboutit à une proposition conclusion. L'appartenance finale de "mortel" à "homme", par exemple, est justifiée par d'autres appartenances : l'appartenance de "vivant" à "mortel" et celle d'"homme" à "vivant". On a dans ce cas le schéma (avec A pour homme, B pour vivant et C pour mortel) :

Si B appartient à tout A
et si C appartient à tout B,
alors C appartient à tout A.

On pourrait avoir aussi : Si aucun quadrupède n'est homme et si tout Angevin est homme, alors aucun Angevin n'est quadrupède ; ou encore : Si aucun percepteur n'est ailé et si un chauve au moins est percepteur, alors un chauve au moins n'a pas d'aile. Aristote aurait transcrit ces exemples avec des lettres sous la forme suivante (en mettant A pour quadrupède, B pour homme et C pour Angevin) :

Si A n'appartient à aucun B
et si B appartient à tout C
alors A n'appartient à aucun C.

et pour l'autre exemple :

Si D n'appartient à aucun E
et si E appartient à quelque F
alors D n'appartient pas à quelque F.

A chaque fois l'appartenance finale, ou la non-appartenance finale, est affirmée grâce à un troisième terme (B ou E), le moyen terme, qui est lui-même absent de la conclusion.

Nous avons ainsi un joli petit système : des groupements de trois énoncés, dont chacun contient une constante et deux variables, les variables revenant chacune deux fois au cours des trois énoncés (je laisse de côté les syllogismes "modaux", c'est à dire ceux qui comportent aussi la distinction du possible et du nécessaire.)

Aristote envisage tous les cas possibles, et il stipule des règles de passage d'un énoncé à un autre : la "conversion" qui permet de passer de "A appartient à quelque B" à "B appartient à quelque A", et de "A n'appartient à aucun B" à "B n'appartient à aucun A", et enfin de "A appartient à tout B" à "B appartient à quelque A". Grâce à ces règles, il réduit tout le système à certains arrangements fondamentaux. (L'essentiel est contenu dans les Premiers Analytiques, livre I, chap. 1-7).

Syllogisme et raisonnement mathématique.

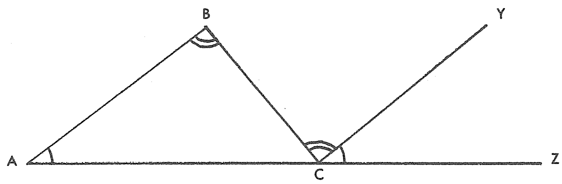
Quelle relation peut-on établir entre cette théorie du syllogisme et les mathématiques ? Un mathématicien d'aujourd'hui serait tenté de répondre spontanément : mais si c'est un petit système formel qui marche, c'est déjà des mathématiques. Il se pourrait cependant qu'une conception aussi large et aussi souple des mathématiques soit exclusivement moderne, et infidèle à la réalité des mathématiques euclidiennes par exemple. Qu'est-ce qui peut séparer la syllogistique d'Aristote des Eléments d'Euclide ?

Posons d'abord une question plus restreinte : le raisonnement mathématique peut-il selon Aristote se couler dans le moule du syllogisme ? La réponse est ambigüe et variable selon les textes. A un endroit Aristote énonce le syllogisme : un triangle isoscèle a ses angles égaux à deux droits, parce qu'un triangle isoscèle est un triangle et qu'un triangle a ses angles égaux à deux droits (Premiers Anal., I,35). Triangle sert donc de moyen terme entre triangle isoscèle et ayant ses angles égaux à deux droits. Et Aristote précise qu'il n'y a pas de moyen terme entre triangle et ayant ses angles égaux à deux droits, bien que cette appartenance soit démontrable. Constatons en passant combien il est peu naturel de manipuler en bloc des prédicats comme "a ses angles égaux à deux droits" ; le procédé d'emboîtement des classes semble convenir beaucoup mieux à une description des êtres vivants, suivant les embranchements des espèces et sous-espèces.

Le ressort du procédé syllogistique est dans la découverte d'un moyen terme qui servira de pont entre un prédicat et un sujet. Quel pourrait être le moyen terme entre triangle et ayant ses angles égaux à deux droits ? Aristote semble dire qu'il n'est pas possible de fournir ici un moyen terme qui serait un terme proprement dit, un nom de classe. Il faudrait intercaler quelque chose de plus complexe.

Un autre passage (Métaph., Theta 9) fournit peut-être la clef. Il s'agit du même théorème de géométrie : tout triangle a ses angles égaux à deux droits. Pour démontrer cela, le géomètre doit "faire" quelque chose, effectuer une construction, prolonger une droite ou tracer un cercle. Ainsi fera-t-il apparaître ce qui n'était pas directement évident. Ce qui était en puissance dans la figure est amené à l'acte par le geste du mathématicien. On peut dire de ceux qui font de la géométrie qu'ils "connaissent en produisant" (poiountes gignoskousin).

Pour illustrer cette idée, Aristote fait allusion à une démonstration qui semble identique à celle d'Euclide I,32 : comment démontrer que les angles d'un triangle sont égaux à deux droits ? Il faut tracer deux demi-droites auxiliaires, la première CZ dans le prolongement de AC, la deuxième CY parallèle à AB. Alors on voit, si on a l'oeil exercé, qu'autour du point C sont rassemblés les trois angles du triangle ABC (puisque BAC est égal à YCZ et ABC égal à BCY). A eux trois ils font un angle plat, donc deux angles droits.



Le mathématicien rend donc la conclusion manifeste en traçant certaines lignes auxiliaires, en cheminant d'une certaine manière dans l'espace à la fois idéal et sensible de la figure. Cette action n'a pas grand chose à voir avec l'interposition d'un moyen terme dans une classification (par exemple entre homme et mortel, il faut interposer vivant). On ne rend pas compte de cette différence en disant que le syllogisme permettrait seulement d'exposer, non de découvrir. La différence est plus profonde, et tient à la nature même des mathématiques telles que les concevaient les Anciens.

Le rituel de démonstration d'Euclide.

Une proposition d'Euclide se compose d'une suite d'étapes toujours identique, dont Proclus (Commentaire de la prop. 1, Fr.203) nous a gardé les noms :

énoncé, exposition, détermination, préparation, démonstration, conclusion

(protasis, ekthesis, diorismos, kataskeué, apodeixis, sumperasma).

Apollonius respecte scrupuleusement le même rituel, et Archimède s'y tient assez généralement.

1°) énoncé ou proposition : on commence par énoncer en général la proposition à démontrer ;

2°) exposition ou ecthèse : on suppose tracée la figure correspondante ("Soit le triangle ABC...") avec des noms pour les différents points (A,B,etc...) ;

3°) détermination : on réitère l'énoncé à propos de cette figure ; "Je dis que le triangle ABC..." (parfois chez Archimède : "Il faut montrer que...") ;

4°) préparation : on "prépare" la figure en traçant diverses constructions auxiliaires ;

5°) démonstration : on démontre le résultat ;

6°) conclusion : on reformule la proposition comme résultat ("Donc..."), en toute généralité, en ajoutant la clausule "Ce qu'il fallait démontrer".

Quelques précisions : la préparation est parfois inutile, donc absente. La démonstration est souvent beaucoup plus longue que les autres étapes. La conclusion n'est pas toujours énoncée en toute généralité. L'exposition peut faire défaut lorsqu'on ne sait même pas de quels éléments initiaux il faut partir (Proclus cite Euclide IV,10). Parfois on peut raccourcir la procédure en rappelant les données de la proposition précédente ("Les mêmes choses étant posées..."). Enfin ces étapes ont une nature légèrement différente lorsqu'il s'agit de problèmes et non de théorèmes (un problème consiste dans une effectuation, par exemple : construire un triangle équilatéral, alors qu'un théorème consiste dans une démonstration) : le problème commence par "Trouver...", ou "Tracer...", "Construire...", "Couper...", et se termine par "Ce qu'il fallait effectuer" (hoper edei poiesai).

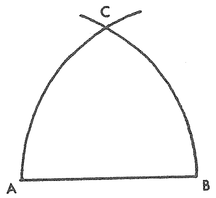
Les étapes les plus intéressantes pour nous sont les stades médians, ceux où l'on "sort" (ek-thesis, ex-position) de l'énoncé général pour raisonner sur une figure et manipuler les lignes, en cheminant dans l'espace géométrique. Il est frappant de constater que le même rituel est utilisé pour l'étude des nombres, dans les livres VII-IX d'Euclide : les propositions sont traduites, "exposées" à propos de nombres déterminés (mais non spécifiés), auxquels on donne un nom et que l'on dessine sur le côté sous forme de segments.

C'est cela qui fait la différence entre le pur raisonnement logique et le raisonnement mathématique, aux yeux d'un ancien (et jusqu'au 19e siècle ??) : la référence à des objets d'un espace idéal, essentiellement plus déterminé et plus riche que l'univers abstrait du pur raisonnement discursif.

<u>Les propriétés intuitives de l'espace</u>.

L'espace de la géométrie des Anciens n'est pas un espace construit, défini par des axiomes topologiques et métriques. Lorsque le géomètre "sort" de l'énoncé abstrait pour déterminer une figure et suivre les relations sur cette figure, il prend appui sur les propriétés intuitives et non explicitées de l'espace usuel.

L'exemple le plus simple et le plus souvent discuté se trouve dans la première proposition d'Euclide. Il s'agit d'un problème : "Construire un triangle équilatéral sur une droite finie donnée". S'étant donné le segment AB, Euclide suppose tracés, avec A et B pour centres respectifs, deux cercles de rayon AB.



Puis il écrit : "à partir du point C où les deux cercles se coupent..." Il suppose donc que les deux cercles se coupent en un point, sans discuter ni justifier cette affirmation. Un mathématicien d'aujourd'hui y verrait une application du "lemme de Jordan" : une courbe fermée simple sépare le plan réel en deux composantes et pour passer d'une composante à l'autre, il faut passer par un point de la courbe (Jordan, Cours d'analyse, 3e éd., tome I, § 96-104).

Avant que soient explicitées correctement les propriétés de l'espace usuel et qu'elles soient réduites à quelques axiomes, bien des générations de mathématiciens se sont succédées (et aussi de philosophes et de logiciens). Déjà pour entrevoir que cette entreprise devait être tentée, il fallait une grande hardiesse spéculative. Leibniz, qui semble avoir été le premier dans cette voie, n'a pas réussi à intéresser ses contemporains à son projet de réduire les relations spatiales à une sorte d'algèbre ou de caractéristique (Lettres à Huygens du 8 septembre 1679, annexe, in : Math. Schr.., II, p.20 etc... : De analysi situs, Math. Schr., V, p.178...). Bolzano, puis Riemann développeront cette idée, qui aboutira à la topologie actuelle.

En prétendant qu'Euclide I,1 est incomplet, Leibniz s'écarte de la définition traditionnelle de la géométrie. Kant au contraire est fidèle au point de vue des Anciens, lorsqu'il affirme que tout raisonnement mathématique doit "sortir" des purs concepts (über die Begriffe hinausgehen, Critique de la R. Pure, B 15), et cheminer à l'aide d'une certaine sorte d'intuition sensible (sensible mais non empirique).

Il y a donc pour un ancien une différence essentielle entre un raisonnement mathématique et un syllogisme (au delà même des imperfections du syllogisme qui le rendraient inapte à traduire un raisonnement trop complexe) : c'est que le raisonnement mathématique s'appuie sur les propriétés des figures, décrit des relations que les énoncés abstraits ne suffiraient pas à exprimer.

En un certain sens, la logique formelle d'Aristote est plus proche de notre mathématique actuelle que de la mathématique d'Euclide : l'appel aux figures et aux propriétés spatiales est aujourd'hui exclu en principe des démonstrations. Ce serait pourtant excessif de croire que nous n'avons rien à tirer de la description du raisonnement mathématique par Aristote et du rituel euclidien : aujourd'hui comme en 250 avant JC, le mathématicien ne peut s'empêcher de tracer des figures (fût-ce discrètement ; dans un petit coin du tableau), de raisonner sur des diagrammes et de spatialiser les relations les plus abstraites (surfaces de Riemann, graphes associés à des groupes).

Il est difficile de rendre compte correctement de ce fait. Trop souvent les philosophes se sont restreints aux questions de fondement, et du point de vue de la rigueur des démonstrations, les diagrammes s'ont aucun rôle à jouer. Mais il y a sans doute un autre point de vue où il faudrait se placer si l'on veut comprendre les voies du raisonnement mathématique. C.S. Peirce est l'un des rares philosophes à avoir tenté quelque chose en ce sens, en se référant explicitement à l'ecthèse d'Euclide (les mathématiques sont pour lui l'étude des diagrammes, c'est à dire l'observation et l'expérimentation sur des schémas qui représentent spatialement des relations entre objets idéaux, cf. Collected Papers, III, 556 ; IV, 233, etc...). Il reste vrai que le mathématicien est, comme l'écrit Aristote, quelqu'un qui "connaît en produisant".

[Je laisserai de côté ici un autre point de contact très étroit entre Aristote et les mathématiques de forme euclidienne : dans les Seconds Analytiques (surtout livre I, chap. 1-11), Aristote présente une conception très détaillée et très fine de la théorie déductive, il précise ce que doivent être les principes d'une science, c'est à dire d'une connaissance inébranlable de vérités nécessaires (chap. 1-3 et II,19) ; il distingue et définit les axiomes, les postulats, les définitions (chap. 9-11) ; il propose une certaine sorte de relation nécessaire entre termes, qu'il appelle "appartenance par soi" (chap. 4). Le mot de démonstration (apodeixis), pris au sens strict, désigne chez lui uniquement les inférences qui obéiraient aux règles d'une telle science idéale. Ces précisions et propositions ont certainement joué un grand rôle dans l'élaboration de l'édifice axiomatique d'Euclide. (Par exemple Proclus commente Euclide avec le cadre des Seconds Analytiques comme référence majeure). Cependant les dépendances précises entre Aristote et Euclide ne sont pas aussi nettes qu'on le dit souvent. En exposant sa théorie de la science dans les Seconds Analytiques, Aristote n'a pas prétendu légiférer pour les mathématiques, mais plutôt, en s'inspirant du paradigme des mathématiques, présenter l'esquisse idéale de ce que serait une véritable science.]

III - L'INTERPRETATION MATHEMATIQUE DE LA NATURE.

Notre image des mathématiques est fortement colorée par le succès des sciences de la nature depuis le 17e siècle. Les mathématiques sont devenues à nos yeux inséparables de la physique.

Aristote est souvent considéré comme le grand adversaire de cette union, comme celui qui empêchait de lire mathématiquement la trame de l'univers matériel. La physique d'Aristote serait dans cette perspective le type même d'une physique non mathématisée, contre laquelle Galilée a dû combattre pour inaugurer une science mathématisée de la nature. La situation me paraît plus nuancée, et plus intéressante.

L'interprétation mathématique de l'univers selon Pythagore et Platon.

La physique mathématique n'existe que trop, pourrait-on dire, dans la culture grecque du 4e siècle. Aristote a en face de lui deux courants de pensée très voisins contre lesquels il a argumenté en détail : le pythagorisme et la philosophie ésotérique du vieux Platon. Ces deux doctrines proposaient une identification assez directe entre mathématiques et réalité.

Pour les Pythagoriciens, tout est nombre, mais les nombres eux-mêmes ne sont pas séparés, ils n'existent pas dans un ciel idéal, ils sont réalisés dans la nature. Voici comment Aristote résume cette théorie :

> "Ceux qu'on appelle pythagoriciens se consacrèrent les premiers aux mathématiques et les firent progresser. Comme ils étaient nourris dans cette discipline, ils estimèrent que les principes des mathématiques sont les principes de tous les êtres. Et parce que les nombres sont par nature les premiers des principes des mathématiques, et que ces hommes croyaient contempler une multitude d'analogies avec tout ce qui est et tout ce qui devient,/.../ (une certaine propriété des nombres étant la justice, une autre l'âme et l'intelligence, une autre l'instant critique /.../), parce qu'ils voyaient en outre dans les nombres les propriétés et les propositions des harmonies musicales, et que toutes les autres choses leur semblaient avoir été formées à la ressemblance des nombres, et que les nombres paraissent être ce qui est premier dans la nature entière, ils supposèrent que les éléments des nombres sont les éléments de tous les êtres, et que l'univers est harmonie et nombre." (Métaph. A 5)

Aristote donne ici son explication des excès des Pythagoriciens : les mathématiques ont fasciné les premiers qui en ont aperçu toute la force. Aussi ont-ils cru que tous les secrets de l'univers s'ouvriraient à eux par cette voie, directement. Ils ont "fabriqué avec des nombres tous les corps de la nature" (Mét. N 3).

Reprenant la même inspiration, le vieux Platon a imaginé que toutes choses s'engendraient à partir des nombres, les nombres eux-mêmes étant issus de deux principes (l'Un et "un autre principe"). Les textes anciens nous ont gardé plusieurs témoignages pittoresques sur un certain enseignement oral de Platon, la "Leçon sur le Bien" : le pauvre étudiant qui était venu là pour entendre parler du Bien, c'est à dire de la réalité suprême, se trouvait tout déconcerté en entendant le Maître disserter sur les engendrements des nombres les uns à partir des autres, et sur diverses sortes de proportions numériques.

Aristote rapporte ces étonnantes généalogies auxquelles croient les "partisans des Idées" (les platoniciens) : ligne, surface et solide sont engendrés respectivement à partir de la dyade, la triade et la tétrade (N 3) ; de là proviennent "le vivant en soi", tous les êtres naturels, et même les modes de connaissance : l'intellect correspond au nombre Un, la science à la dyade ; l'opinion est associée à la surface ou triade, et la sensation associée au volume ; enfin l'âme du vivant est "un nombre qui se meut lui-même" (De l'âme, I,2).

Aristote critique successivement les différents stades de cette construction spéculative : comment les nombres s'engendrent-ils ? quel rapport avec les êtres naturels ? avec les êtres en mouvement ? en quel sens les nombres peuvent-ils être causes ou principes générateurs ? la multiplicité des être de l'univers peut-elle être ainsi "déduite" ? (Les livres M et N de la Métaphysique sont un exposé détaillé de cette discussion.)

Le soubassement même de la doctrine semble absurde à Aristote : "L'Un n'est pas une réalité et une substance par soi /.../ car l'Un n'a pas d'autre caractère que d'être mesure de quelque multiplicité, et le nombre, d'être une multiplicité mesurée et une multiplicité de mesures" (Mét., N 1, à comparer avec Euclide VII, déf.1 : "L'unité est ce selon quoi chacun des êtres est dit un.").

L'abstraction mathématique selon Aristote.

Aristote tente d'élaborer une conception des mathématiques qui en préserve la pureté et l'exactitude dans supposer d'entités idéalement existantes. Les mathématiques ne sont pas vraiment des sciences du sensible, ni des sciences qui porteraient sur des objets séparés du sensible (Mét., M 3). Elles portent bien sur les choses de la nature, mais sous un certain mode : elles considèrent les choses naturelles "en tant que..." (en tant que longueurs, en tant que nombres, etc...). Aristote nomme ce procédé "l'abstraction" ou "extraction" (aphairesis) : ce qui n'est pas séparé est pensé comme séparé, la longueur par exemple est étudiée en tant que telle, bien que l'on sache qu'elle n'a aucune existence en soi, et qu'une longueur est toujours la longueur d'un solide concret à trois dimensions (De l'âme, III,7). Par ce moyen on peut développer une science qui sera plus exacte parce que plus simple (Mét., M 3). Mais il ne faudrait pas laisser le mathématicien légiférer seul sur les choses de l'univers : par exemple c'est le physicien véritable -c'est à dire le philosophe- qui saura pourquoi le monde et la terre sont sphériques (Phys., II,2). Une astronomie purement géométrique est très éloignée de la cosmologie véritable (voir le commentaire de Simplicius sur Phys. II,2 traduit par Duhem dans Sozein ta phainomena reprint Vrin).

Aristote parvient ainsi à tenir distincts le discours mathématique et la connaissance de la nature, que les Pythagoriciens et les Platoniciens avaient trop directement identifiés.

L'analyse du mouvement.

Pourtant notre science moderne, mathématisée, de la nature, doit beaucoup à l'oeuvre d'Aristote, sous un autre aspect. Il s'agit de l'analyse du mouvement et du continu.

La possibilité même d'une science des choses naturelles ne va pas de soi. Pour une sagesse de type oriental (comme dans certains textes indiens ou chez Platon par endroits), la vraie "connaissance" ne peut porter sur la nature. Notre monde est trop changeant, trop décevant, trop illusoire. Le vrai sage (= le vrai savant) est celui qui a déchiré le voile de Maya, et a pénétré au-delà des apparences dans le royaume de la stabilité et de l'unité.

Aristote au contraire rend possible une science de ce qui bouge et se modifie. Les changements qui ont lieu dans l'univers peuvent être classés sous quatre rubriques :

1) mort et naissance ("corruption" et "génération") ;
2) changement de qualité ("altération") ;
3) changement de quantité ou de taille (accroissement et diminution) ;
4) changement de lieu ("mouvement local" ou "mouvement" tout court).

(Physique V, 1-2). La première de ces espèces est à ranger à part, comme un cas limite qui échapperait à toute intelligibilité : peut-il y avoir naissance absolue, à partir de rien, ou disparition totale ? En réalité tous les changements dans l'univers supposent la permanence de quelque chose : avant l'embryon il y avait la semence, et après le corps vivant il y aura encore des constituants matériels. C'est le point décisif pour rendre le mouvement accessible à une connaissance : le mouvement ou le changement ne sont pas un devenir imprévisible et chaotique, n'importe quoi succédant à n'importe quoi (comme sur l'écran de la caverne de Platon, cf. République VII). Entre le point de départ du changement et le résultat final, quelque chose reste constant : un substrat ou substance, qui possédait une certaine propriété au départ, et en possède maintenant une autre. Monsieur Durand était malade, le voici bien portant ; les briques étaient en tas informe, et elles sont devenues maison (Phys., III, 1).

De plus, entre les deux propriétés initiales et finales il y a un certain lien, une certaine cohérence. Le mouvement ne consiste pas à passer de l'ignorance à la santé ; il faut distinguer le mouvement qui conduit de l'ignorance à la science (M. Durand a appris les mathématiques) et un autre mouvement qui conduirait de la maladie à la santé (M.Durand a guéri). Le mouvement ou changement se déroule entre deux termes opposés, dans le cadre d'une certaine "dimension d'être" bien fixée (la santé, la science, la chaleur, la longueur de chemin, etc...).

C'est ce qu'Artistote nomme la continuité du mouvement. "Continu", étymologiquement, évoque quelque chose comme "qui appartient ensemble", "d'un seul tenant", "cohérent". Le mouvement ne saute pas n'importe comment d'une qualité à une autre, dans l'incohérence totale, mais il conduit d'un terme à l'autre terme opposé, en passant par tous les intermédiaires.

Le mouvement est un entre-deux difficile à appréhender, il est "incomplet", "indéterminé" (Phys. III, 1-2), cependant il recèle un minimum d'intelligibilité grâce à la permanence du substrat et à la continuité du passage entre les deux propriétés opposées.

L'analyse du continu.

L'analyse de la continuité du mouvement culmine dans l'étude de la grandeur continue : lorsqu'un mobile va d'un lieu à un autre, que signifie la continuité de son mouvement ? Cela signifie qu'il occupe successivement toutes les positions intermédiaires. Cela présuppose que la longueur parcourue est elle-même d'un seul tenant, sans lacune.

Faut-il concevoir alors cette longueur comme constituée par tous les points successivement occupés ? Aristote montre que la grandeur géométrique ne peut être "faite de" constituants indivisibles : la longueur n'est pas faite de points. Un continu est fait de parties toujours à nouveau divisibles. Il n'y a donc aucun constituant discret ultime auquel on pourrait parvenir au terme d'un processus de division réitérée. Par exemple le fait d'être d'un seul tenant implique que les constituants se touchent, et il est clair que deux points ne peuvent se toucher (Phys. VI, 1). Aussi les mathématiciens ne peuvent-ils raisonner avec des atomes de grandeur ou avec des infiniment petits. (Quelqu'un de l'entourage d'Aristote a même rédigé un petit traité pour rejeter les "lignes insécables", assez mal composé malheureusement.)

Cette impossibilité de composer une ligne avec des points correspond à une impossibilité analogue pour le temps et le mouvement : le temps ne peut être fait d'instants (d'une série de "maintenant" ponctuels), ni le mouvement fait d'une série de sauts indivisibles (des "kinemata", des "avoir-été-mû") (Phys., VI, 2 et 10).

Ainsi grandeur, mouvement et temps sont des entités homologues : ce sont tous trois des continus. Cela permet de répondre à Zénon : certes pour franchir un espace, il faut arriver d'abord à la moitié du chemin, puis à la moitié de ce qui reste, etc..., mais cela s'effectue dans un temps qui est moitié du temps total, puis moitié du temps restant, etc... Le temps se divise comme le mouvement (Phys., VI,2).

Aristote accomplit là un geste décisif dans notre histoire culturelle : le temps et le mouvement sont interprétés en termes de grandeur géométrique. Dans son jargon, Aristote dit qu'à la grandeur "correspond" le mouvement, et au mouvement "correspond" le temps (Phys., IV, 12). "Correspondre" traduit le verbe grec "akolouthein", "accompagner", "suivre", "découler", que l'on pourrait paraphraser en disant : le temps doit avoir la même structure que le mouvement, et le mouvement même structure que la grandeur. Le privilège du mouvement local, du changement de position, est une conséquence de cette thèse : tous les changements, si variés soient-ils, peuvent être étudiés en se guidant sur la structure assez simple du mouvement local.

La proportionnalité entre force et résistance.

Cette analyse détaillée du mouvement et du continu s'approche assez près d'une étude quantitative de la force. Ayant distingué d'une manière purement conceptuelle les différents aspects ou composantes du mouvement, Aristote montre qu'on peut établir entre certaines de ces composantes des relations de proportionnalité (Phys. VII, 5).

Qu'est-ce que cet évènement qu'on nomme mouvement ? C'est le fait que "quelque chose meut autre chose pendant un certain temps sur un certain intervalle" (l'intervalle entre deux qualités opposées si c'est un changement qualitatif, une longueur de chemin si c'est un changement de lieu). Il y a donc quatre termes à distinguer :
1) le moteur, 2) ce qui subit le mouvement, 3) l'intervalle, 4) le temps.
Avec ces quatre termes, Aristote prétend qu'on peut construire des relations de proportionnalité. Il raisonne principalement sur un exemple de poids à mouvoir : si la force motrice reste la même pour un poids moitié moindre, la moitié du temps suffira pour franchir le même intervalle ; si la force est moitié, et le poids aussi, le temps et l'espace restent les mêmes, car dans ce cas, "la force est proportionnelle (analogon) au poids".

Cette proportionnalité qui lie force et résistance en fonction de l'intervalle et du temps, aura une riche postérité dans la tradition occidentale. Notamment Léonard de Vinci (manuscrit F, 26, 51, etc...) et Galilée (Della meccanica, début) s'inspireront explicitement d'Aristote dans leur analyse des effets des machines (la "mécanique" au sens ancien du mot).

Pour Aristote cependant, ces relations ne servent pas à fonder une science mathématisée des phénomènes naturels, sur le mode de celle que nous connaissons.

Tout d'abord Aristote insiste sur l'absurdité qu'il y aurait à extrapoler ces proportions indéfiniment : si quatre cent hâleurs parviennent à tirer le bateau au sec sur vingt mètres en trois minutes, que se passera-t-il avec un seul hâleur qui voudrait faire des heures supplémentaires ? Le travail de chacun n'existe en acte que dans la totalité, pris isolément il n'a aucune efficacité (Phys.VII,5).

Quelle est alors l'utilité de semblables raisonnements de proportion chez Aristote ? Il semble que le philosophe s'en soit servi surtout dans des argumentations de style spéculatif, portant sur des questions très générales et non sur des phénomènes particuliers ; par exemple : faut-il admettre l'existence du vide ? peut-on accepter qu'il y ait un corps infini ? Aristote montre que l'on aboutit à des impossibilités, parce que l'on a "dépassé toute proportion" : par exemple, dans le vide on parcourait un espace infini en n'importe quel temps fini (puisque la résistance serait nulle) (Phys. IV, 8). Or la nature est ordonnée, en elle l'infini introduirait une sorte d'incommensurabilité qui serait un désordre (Phys., VIII, 1).

L'usage que fait Aristote des proportions appliquées au mouvement reste donc tout à fait abstrait et spéculatif, très éloigné de ce qu'en feront Léonard de Vinci ou Galilée.

La science de la nature comme théorie déductive mathématique : Archimède.

Rétrospectivement une autre différence très marquante apparaît entre l'analyse aristotélicienne et une théorie comme celle de Galilée (Discours sur deux sciences nouvelles, 1638, Troisième Journée). Galilée, et les physiciens modernes après lui, donneront à leur théorie la forme d'un exposé hypothético-déductif, à la manière des mathématiciens : on pose d'abord quelques hypothèses (assorties éventuellement de justifications intuitives ou expérimentales plus ou moins convaincantes). De ces hypothèses on tire un grand nombre de conséquences sous forme de théorèmes. L'exposé ressemble en tout à un traité de mathématiques, si ce n'est en son point de départ : on a pris soin d'abord de poser des termes comme le temps, la vitesse, le poids, le champ électrique, et on a supposé la vérité de certains axiomes à propos de ces êtres. Par exemple : que des vitesses acquises après des descentes de hauteurs égales sont égales (Galilée) ou : que tout corps laissé à lui-même poursuit son mouvement en ligne droite à même vitesse (Descartes, Newton). Après ces prémisses, le développement de la théorie est, ou devrait être strictement mathématique.

Rien de tel chez Aristote. Il avait envisagé, dans l'idéal, une science de forme purement déductive (Seconds Analytiques), mais certainement il ne pensait pas à une science de la nature qui pût épouser aussi strictement la forme du raisonnement mathématique.

L'initiateur véritable de cette sorte de théorie est Archimède. Deux de ses traités ont servi de modèles : les Corps flottants et les Equilibres plans. Tout le traité des Corps flottants repose sur deux suppositions, une demande initiale que voici :

> "Qu'il soit supposé (hupokeistho) que le liquide a une nature telle que, si ses parties sont disposées également et continûment, celle qui est la moins comprimée, (thlibomenon) soit chassée par celle qui est la plus comprimée, et que chaque partie soit comprimée par le liquide situé verticalement au-dessus d'elle /.../",

et un lemme placé après la proposition 7, relatif à la direction de la poussée ascensionnelle.

Ainsi Archimède ne se contente pas de constater et d'évaluer la poussée qui porte son nom, il en déduit l'existence et l'intensité à partir de principes antérieurs et très généraux concernant la nature des fluides. Voilà le modèle de raisonnement que suivront Galilée et ses successeurs : le contenu physique est renfermé dans quelques énoncés initiaux, mettant en jeu une batterie de concepts strictement délimités ; la correspondance entre ces concepts et des entités sensibles est assurée par certains procédés (notamment de mesure) ; la corroboration de la théorie par l'expérience n'est pas recherchée au niveau du noyau théorique initial, mais au niveau de lointaines conséquences de ce noyau initial (on ne teste pas les axiomes, mais des théorèmes assez éloignés des axiomes). Une fois posés les énoncés de départ, le déroulement du discours démonstratif est purement mathématique.

En dehors d'Archimède, qui parmi les Anciens aurait pu rêver d'une imbrication aussi étroite entre les mathématiques et la connaissance de la nature ? Qu'elle soit possible et fructueuse, nous-mêmes en restons encore ébahis...

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

Initiation :

G.E.R. Lloyd :

La science grecque de Thalès à Aristote, Maspero 1974.

R. Blanché :

La logique et son histoire, d'Aristote à Russel, A. Colin.

A. Tarski :

Introduction à la logique, Gauthier-Villars.

J. Moreau :

Aristote et le lycée, PUF.

Plus spécialisé :

M. Caveing :

Quelques remarques sur/.../Euclide et /.../Aristote in : Penser les mathématiques, Seuil, 1982.

J. Lukasiewicz :

La syllogistique d'Aristote, A. Colin.

E. Weil :

La place de la logique dans la pensée aristotélicienne,
in : E. Weil, Essais et conférences, I, 1970.

J. Brunschwig :

Préface aux Topiques in : Aristote, Topiques I-IV.
Editions des Belles-Lettres, 1967.

T. L. Heath :

Mathematics in Aristotle, Oxford, Clarendon Press, 1970 (recueil de textes commentés)

T. L. Heath :

Greek Mathematics, Oxford, 2 vol.

W. Burkert :

Lore and science in ancient Pythagoreanism, Harvard UP, 1972.

R. Sorabji :

Time, creation and the continuum (theories in Antiquity and the early Middle Ages), Duckworth, London, 1983.

H. J. Waschkies :

Von Eudoxos zu Aristoteles, das Fortwirken der Eudoxischen Proportionentheorie in der aristotelischen Lehre vom Kontinuum, Amsterdam, Grüner Verlag ; 1977.

W. R. Knorr :

The evolution of the euclidean Elements, Dordrecht, Reidel, 1975.

W. R. Knorr :

Inifinity and continuity : the interaction of mathematics and philosophy in Antiquity, in : *Infinity and continuity in ancient and medieval thought*, edited by N. Kretzmann, Cornell UP, 1982.

J. L. Berggren :

Spurious theorems in Archimedes Equilibrium of Planes book I, in : *Archive for Hist. of Ex;Sc.* n°16 (1976-1977).

F. de Gandt :

La mathésis d'Aristote, Introduction aux Analytiques Seconds, in : *Revue des Sc. Phil. et Théol.* 1975 et 1976.

F. de Gandt :

Force et science des machines, in : *Science and speculation, Studies in hellenistic theory and practice*, Cambridge UP, 1982 (edited by Barnes, Brunschwig, etc...)

Sources :

Euclidis Elementa, édité par Heiberg et Stamatis, 5 volumes, Teubner Verlag, 1969, 1970, etc... (Attention, le fonds Teubner de textes grecs et latins a été divisé en 1945 entre Teubner Leipzig et Teubner Stuttgart ; les volumes d'Euclide pevent être achetés à la librairie des Belles-Lettres, boulevard Raspail, à un prix raisonnable : volume I : livres I-IV, II : livres V-IX, III : livres X-IV : livres XI-XIII, V : scolies ; l'ancienne édition Heiberg comportait une traduction latine en face du texte grec.

Euclid's Elements, trad. et commentaire T. L. Heath, 3 volumes, Dover.

Archimedis Opera, éditées par Heiberg, 1880 2 volumes, 1910-1915 3 volumes (avec trad. latine).

Archimède Oeuvres (grec-française), Editions des Belles-Lettres, tra. C. Mugler, 4 volumes, 1971 etc... (ne remplace pas Heiberg pour les problèmes de textes).

Apollonius Pergaeus, Opera, éditées par Heiberg, 2 volumes, Teubner Stuttgart 1974 (avec trad. latine).

Paul Ver Eecke Les coniques d'Apollonius de Perge, Blanchard.

Diophantes Alexandrinus, Opera, éditées par Tannery, 2 volumes, Stuttgart Teubner, 1974 (trad. latine).

Diophante Les livres d'arithmétique, édités et traduits du grec et de l'arabe par Allard et Rashed, les Belles-Lettres (bilingue), 1985 etc...

Pappus Collectio, éditée par Hultsch, 3 volumes, Berlin, 1876-1878 (avec trad. latine).

Pappus La collection mathématique, 2 volumes, Blanchard 1982, (trad. Ver Eecke)

Procli Diadochi in primum Euclidis librum Elementorum Commentarii, édités par Friedlein, Teubner, Leipzig 1873 (Olms, Hildesheim 1967)

Paul Ver Eecke Proclus de Lycie, les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide, Blanchard (=Desclée de Brouwer 1948).