

LES MATHÉMATIQUES ARABES ET LEUR ENVIRONNEMENT

Ahmed DJEBBAR
Université d'Orsay

INTRODUCTION.

Les mathématiques arabes englobent tous les écrits mathématiques qui ont été réalisés, en langue arabe, à partir du VIII^e siècle et jusqu'au XVI^e siècle, si l'on ne considère que la période féconde, ou jusqu'à la fin du XIX^e siècle, si l'on prend en compte les petits ruisseaux qui ont permis à une certaine mathématique de survivre, par souci de tradition et, parfois, par un réflexe de résistance culturelle à une autre mathématique, celle de l'Occident, qui va s'introduire dans l'aire culturelle arabe ⁽¹⁾. On pourrait d'ailleurs qualifier ces mathématiques d'arabo-islamiques dans la mesure où elles ont été produites dans un contexte culturel, religieux et idéologique qui était arabo-islamique et dont l'influence sur les sciences en général sera perceptible à différentes époques. Il n'est pas facile de suivre les différentes phases de cette activité mathématique et d'en cerner les aspects essentiels. Il est encore plus difficile de discerner ce qui a été le résultat de la dynamique interne à toute tradition scientifique et ce qui a constitué une réponse à des sollicitations directes ou indirectes de l'environnement économique, social et culturel. Il sera donc indispensable, là où notre documentation est encore silencieuse ou peu sûre, d'avancer des hypothèses et des conjectures dans un souci de clarification et de cohérence.

Dans ce qui va suivre, nous aborderons trois aspects de l'activité mathématique entre le VIII^e et le XVI^e siècle :

I. Le contexte de l'avènement de la Science arabo-islamique et son développement. Cela englobera, dans un premier temps, les facteurs politiques, religieux, économiques et, dans un deuxième temps, les facteurs scientifiques qui

ont accompagné, stimulé ou orienté les premiers écrits puis les premières recherches en mathématique.

II. Le contenu de ces recherches et de l'enseignement qui en a découlé, dans ce qu'ils ont représenté comme innovation au niveau des techniques, des concepts et des grandes orientations. Compte tenu du caractère non technique de l'exposé, ce second aspect sera brièvement évoqué mais suffisamment annoté pour permettre au lecteur des investigations plus approfondies.

III. Les obstacles et les contraintes qu'ont rencontré les activités mathématiques, les solutions apportées par les chercheurs et les enseignants pour les dépasser ou s'y adapter, et les conséquences à long terme sur le développement de ces disciplines. Au delà de leur diversité, ces obstacles et ces contraintes se rattachent à deux types de facteurs : les uns sont internes à la tradition mathématique elle-même et n'apparaissent qu'après analyse et étude comparative des textes. Les autres sont externes à l'activité scientifique d'une manière générale et concernent à la fois l'environnement des sociétés arabo-islamiques avec leurs contradictions internes, et le contexte international des XIe-XIIIe siècles qui pèsera indirectement, mais efficacement, sur les structures internes de ces sociétés et, par voie de conséquence, sur les aspects scientifiques de leurs activités.

I - LE CONTEXTE DE L'AVENEMENT DE LA SCIENCE ARABO-ISLAMIQUE.

La civilisation arabo-islamique a souffert, plus que d'autres peut-être, des différentes périodisations de son histoire. Il nous faut pourtant en adopter une, en précisant bien qu'elle ne prétend pas refléter les phénomènes essentiels et les courants profonds de cette civilisation mais qu'elle vise uniquement à mettre en lumière les rapports qui ont pu s'établir entre les activités scientifiques et leur environnement.

A. LA PREMIERE PERIODE : 622-750⁽²⁾.

1. Les institutions.

Si l'on fait abstraction du contenu de l'Islam en tant que religion (dont l'enrichissement se poursuivra jusqu'en 632) et que l'on s'en tienne à ses manifestations politiques, idéologiques et culturelles dans la cité musulmane, on constate que 622, l'année de l'Hégire, c'est à dire celle de "l'émigration" du prophète Muhammad et de ses proches compagnons de la Mecque vers Médine, constitue le début d'un phénomène capital à l'échelle de l'Arabie puis du bassin méditerranéen et même de l'ancien monde. Il s'agit de la constitution d'un nouvel état, de type théocratique, avec ses spécificités sur le plan des institutions, de la gestion des territoires contrôlés, de l'économie et de la culture. Dès 632, c'est à dire dès la mort du prophète, les institutions de ce nouvel état apparaissent comme fixées dans leurs lignes de force et parfois même dans leurs détails. En effet, leurs trois sources fondamentales sont indissociables de la période de la prophétie puisqu'il s'agit du Coran, avec ses soixantes chapitres, du Hadith ou paroles du prophète et enfin de ses actes qui seront autant de cas de jurisprudence auxquels on se réfèrera pour résoudre, par analogie, des problèmes jugés semblables qui naîtront dans la cité musulmane. Plus tard lorsque la complexité des rapports de la vie citadine fera naître des problèmes que ces trois sources du droit ne permettront pas de solutionner, on fera appel au jugement de la communauté musulmane. Ce jugement se réduira, en fait, à celui des spécialistes du droit qui légifèreront par "consensus".

On peut donc considérer que, sur le plan institutionnel, à la mort du prophète, les documents de base de cet état existent. Ils vont être complétés par des commentaires et surtout par les authentications de ces propos et de ces textes. Cela va d'ailleurs provoquer, dès le départ, des luttes sanglantes entre partisans et adversaires de telle ou telle interprétation de certains aspects de ces institutions ; ce qui aboutira à des clivages politiques puis idéologiques

importants et qui ne seront pas sans influence sur la vie culturelle de cette société et, par voie de conséquence, sur ses orientations scientifiques.

2. Le territoire.

Sur le plan territorial, un siècle de conquêtes, aux aléas multiples, aboutira à la constitution d'une immense aire géo-politique qui s'étendra de l'Indus à l'Est aux Pyrénées à l'Ouest et qui englobera une mosaïque de peuples dont la diversité des langues, des religions et des cultures jouera, dans un premier temps, en faveur du pouvoir central et dont le savoir-faire sera un atout considérable dans le domaine économique, administratif et scientifique. En effet, malgré la différence de statut entre les diverses communautés, et en particulier entre celles qui étaient musulmanes et celles qui ne l'étaient pas, on observera une participation importante et constante des membres de chacune de ces communautés au développement des différents domaines de la civilisation arabo-islamique, étant entendu que cette participation reflétait aussi l'état des stratifications sociales du moment.

3. L'économie.

Sur le plan économique, on constate, sans pouvoir faire la part d'éventuelles stratégies conscientes et de conséquences objectives de la conquête, que le contrôle politique de ce vaste territoire va réaliser l'unification d'un immense marché international, le plus important qu'a eu à contrôler, jusqu'au bas moyen-âge, à la fois une religion et un état.

Ce contrôle direct ou indirect concernera non seulement les sources asiatiques, africaines et européennes des matières premières et des produits de luxe, mais également les grands axes terrestres et maritimes qui relient l'extrême Asie et l'Afrique noire à l'Europe du Sud par les passages obligés des ports orientaux et maghrébins de la Méditerranée.

En supprimant les contrôles politiques régionaux et en réduisant, par voie de conséquence, les quantités de taxe prélevées (du moins au début du monopole musulman), cette unification va accroître la fluidité et la rapidité relatives des échanges internationaux et va augmenter considérablement leur volume. La multiplication et le développement de villes moyennes et de mégapoles, qui en est la conséquence, va stimuler tous les secteurs de la production et favoriser de nouvelles spécialisations dans l'agriculture et dans l'industrie⁽³⁾.

Le dynamisme de ce commerce va d'ailleurs se refléter dans la relative opulence de ces villes, qui en seront les vitrines en quelque sorte et les centres nerveux, et va accentuer la domination, sur terre et sur mer, des pouvoirs centraux puis régionaux musulmans. Cela fera dire au grand sociologue et historien maghrébin Ibn Khaldūn, en parlant de la Méditerranée, qu'entre le IX^e et le XI^e siècle, aucun morceau de bois ne pouvait flotter sur ses eaux s'il n'était pas d'origine musulmane⁽⁴⁾.

Il faut également noter, à propos de ce commerce, que son unification survivra au morcellement politique et aux clivages idéologiques et restera, avec l'activité scientifique et pendant longtemps, un des facteurs d'unité les plus tangibles pour les différentes composantes de la société islamique.

On doit signaler enfin, comme conséquence à la fois de la vitalité du commerce et du morcellement politique, le développement dans les villes de deux couches sociales qui auront un rôle important dans le dynamisme des activités culturelles et scientifiques. Il s'agit de la classe des marchands et de celle des fonctionnaires dont le niveau d'instruction relativement élevé fera de ses membres de grands consommateurs d'ouvrages techniques ou littéraires.

4. La culture.

Sur le plan culturel, on voit se dégager, sous

les effets conjugués des affrontements politiques et idéologiques, deux tentatives d'unification qui visaient le même but mais qui ne connaîtront pas le même succès. La première est religieuse et aura pour objectif l'élaboration d'une orthodoxie qui, avec ses quatre écoles finira par s'imposer sans toutefois pouvoir résorber les schismes nés des premières luttes pour le pouvoir⁽⁵⁾ : La première décision officielle en faveur de cette orthodoxie a été celle du troisième calife "bien dirigé" ^cUthmān (644-656) qui fixa à sept les lectures autorisées du Coran. Puis, ce fut l'immense travail d'authentification des paroles du prophète et, enfin, l'élaboration du corpus juridique et théologique commencé par les chefs de file des quatre écoles orthodoxes⁽⁶⁾. La seconde tentative est linguistique et concerne l'arabe qui était déjà un puissant vecteur du corpus religieux et qui allait devenir la langue officielle de tous les pouvoirs musulmans avant de consacrer sa domination comme langue de la culture et surtout comme langue scientifique internationale. C'est le cinquième calife omeyyade, ^cAbdalmalik (685-705), qui prendra, dans ce domaine, les mesures les plus significatives. La première concerne l'arabisation des administrations centrales et régionales. Il faut préciser, à ce sujet, qu'au lendemain des conquêtes, le nouveau pouvoir, qui était contrôlé par les Arabes, au sens ethnique du terme, avait fait appel à une armée de fonctionnaires dont les traditions administratives étaient byzantines ou persanes, compte tenu des deux grandes zones d'influence pré-islamiques. D'où la juxtaposition de deux types de gestion et de deux langues, le Grec et le Persan.

La décision de ^cAbdalmalik sera complétée par la suppression, dans les documents officiels, des symboles du pouvoir byzantin, la Croix et l'invocation de la Trinité, et leur remplacement par une invocation musulmane.

Ce même calife décidera l'arabisation de la monnaie et remplacera le dinar d'or byzantin et le drachme d'argent sassanide par une nouvelle monnaie arabe, toujours bimétallique, mais dont la teneur en or et argent a été affaiblie pour faciliter, probablement, l'insertion de la nouvelle monnaie

dans les circuits traditionnels et pour s'assurer le contrôle du marché international⁽⁷⁾.

Le succès de ces nouvelles mesures peut s'expliquer d'ailleurs par le contexte très favorable caractérisé par un pouvoir politique fort et par le changement de conjoncture économique qui s'était opéré dès la fin du VII^e siècle, après le contrôle de la Méditerranée orientale et de certains grands axes commerciaux terrestres.

B. LA SECONDE PERIODE : 750-1055⁽⁸⁾.

Avant d'aborder le contenu des nouvelles activités scientifiques, il est indispensable d'évoquer, même brièvement, trois autres aspects qui les concernent plus directement et qui vont accompagner leur développement, à partir de la fin du VIII^e siècle. Intervenant à des niveaux différents, ces trois éléments vont accompagner les phases successives de l'activité scientifique et vont influencer, indirectement, sur sa vitalité et peser, parfois, sur ses orientations.

1. L'industrie du papier.

Du milieu du VIII^e siècle à la fin du XII^e, on voit naître et se développer, à proximité des grands centres et dans toutes les régions de l'empire musulman, un grand nombre de fabriques à papier dont les premières techniques, empruntées à la Chine, vont connaître de notables améliorations pour répondre à la diversité de la demande : documents officiels, papiers pour emballage, et surtout, pour ce qui nous intéresse ici, feuillets de différents formats et de différentes qualités pour la rédaction et la confection de livres.

Les éléments historiques concernant l'extension de cette industrie et l'évolution de ses techniques sont malheureusement rares, comme le sont d'ailleurs d'une manière générale les informations relatives à l'histoire des industries en terre d'Islam, en particulier à cause du secret protégeant les techniques utilisées. On sait, toutefois, que c'est

le calife abbasside Harūn al-Rashīd (786-809) qui ordonna, vers 794, la construction de la première usine à Baghdam, la capitale de l'empire. Mais, avant cette date, on en avait construit une à Samarcande en mettant à profit le savoir-faire de techniciens chinois qui auraient été faits prisonniers au cours d'une incursion de détachements musulmans dans leurs territoires⁽⁹⁾. Il semble donc que l'usine de Samarcande ait constitué une sorte de test avant la décision de multiplier le nombre de ces usines d'abord au centre puis un peu partout dans la périphérie de l'empire.

A court terme, la conséquence de cette décision sera politique : le papier va en effet chasser définitivement le papyrus et le parchemin qui étaient les derniers symboles des deux anciens systèmes byzantin et sassanide. Quant à la rapidité de ce succès, les historiens arabes l'imputent au caractère fonctionnel de ce matériau qui, contrairement aux deux autres ne pouvait être gratté et donc interdisait toute falsification des documents officiels. Pourtant, il semble bien que le triomphe du papier doive être lié au développement des activités scientifiques et littéraires qui créeront, entre le IX^e et le XII^e siècle, une demande en progression constante, comme l'atteste d'ailleurs le volume de la production écrite dans tous les domaines de la science, de la culture et de la religion.

Inversement, et c'est la conséquence à long terme de la décision de Harūn al-Rashīd, cette industrie va être un facteur non négligeable dans la relative démocratisation de l'enseignement et dans la diffusion de la production scientifique. L'arrivée du papier sur le marché, sa fabrication en quantités de plus en plus grandes et le niveau relativement bas de son prix pendant une longue période, vont stimuler la rédaction d'ouvrages de toute sorte et accroître leur consommation.

Par ailleurs, compte tenu de l'absence de monopole sur la production intellectuelle et de l'inexistence de droits d'auteurs, cela va permettre à des centaines de milliers

d'ouvrages d'être recopiés librement et à peu de frais, bénéficiant ainsi d'une diffusion à grande échelle.

2. Islam et Science.

La question du rapport entre l'Islam et les Sciences est une question généralement mal posée. En effet, interroger un corpus religieux déjà fixé sur la validité d'une science en mouvement par nature, c'est s'attendre à recueillir, à travers le prisme des exégèses et des sensibilités, un arc-en-ciel de réponses qui visent, le plus souvent à conforter les âmes qu'à satisfaire l'esprit.

Compte tenu du caractère historique de cet exposé, il est peut-être plus utile, ici, de s'interroger sur les rapports, à divers moments de la civilisation arabo-islamique, entre les hommes de religion et les hommes de science, entre les exégèses, les réflexions et les prises de position des premiers et les recherches incertaines des seconds en vue de cerner des vérités déjà inscrites dans le réel mais encore insaisissables par la rationalité du moment.

A l'arrière plan de toutes ces attitudes, il y a bien sûr les textes sacrés du Coran et des paroles attribuées au prophète qu'il nous faut évoquer brièvement puisqu'ils alimenteront les débats sur les sciences qui vont apparaître à telle ou telle période et qui concerneront parfois certains aspects de l'activité mathématique.

Tout d'abord, une première constatation : aucun passage du Coran ou du Hadīth ne prononce une condamnation à l'encontre de la Science ou d'une discipline scientifique particulière. On observe même le fait contraire, c'est à dire une incitation à l'acquisition des sciences et à leur développement. Mais, il faut bien dire que pour un sujet musulman des VIIe-VIIIe siècles (et cela sera ainsi plus tard), le terme de science avait le sens le plus large puisqu'il englobait toutes les activités intellectuelles. De ce fait, il portait en lui les germes des débats ultérieurs. D'ailleurs,

les classifications des sciences élaborées entre le IX^e et le XVI^e siècle par des philosophes comme Ibn Sīnā (m.1037) et al-Fārābī (m.950), des encyclopédistes comme Abu ^cAbdallah al-Khwārizmī (X^es.) ou des historiens comme Ibn Khaldūn (m.1406), s'accordent sur cette conception de la Science et sur sa division en deux grandes composantes, les sciences de transmission (al-^cUlūm al-Naqliya) et les sciences rationnelles (al-^cUlūm al-^cAqliya)⁽¹⁰⁾.

Le premier groupe englobe les sciences du Coran et du Hadīth, la grammaire, la linguistique, l'histoire, etc. Le second groupe comprend, en plus des sciences exactes au sens où nous l'entendons maintenant, la philosophie avec ses composantes classiques. Il faut remarquer, à ce sujet, que l'activité scientifique n'a pas tardé à provoquer des brèches dans le cloisonnement théorique de ces classifications et à imposer des disciplines intermédiaires se nourrissant des deux types de sciences, comme le montre le tableau ci-dessous qui est une synthèse simplifiée des différentes classifications connues.

A partir de ces données, on a vu s'affirmer dans les faits et par le discours deux attitudes distinctes qui vont cohabiter ou s'affronter à toutes les époques de la civilisation arabo-islamique, mais selon des rapports de force différents et en prise directe avec l'environnement socio-culturel. D'un côté, un courant favorable au développement tous azimuts des sciences qui s'affirmera pendant la période des traductions, c'est à dire entre le VIII^e et le début du Xe siècle, et qui bénéficiera du soutien des pouvoirs politiques et même de certains califes abbassides⁽¹¹⁾. Ce courant favorisera le développement d'un mécénat puissant et généreux qui survivra à ses auteurs lorsque apparaîtra puis s'organisera, sans que le Droit l'ait prévu ou autorisé, le système du Waqf (biens de main morte) qui permettait à tout musulman de faire bénéficier les institutions scientifiques d'une partie de son héritage. C'est également grâce à ce système que des centaines de milliers de manuscrits nous sont parvenus parcequ'ils

LES SCIENCES ARABES (VIIIe - XVIIe s.)

I. LES SCIENCES DE TRANSMISSION**A. SCIENCES RELIGIEUSES**

1. Exégèse
2. Lectures coraniques
3. Sciences du Hadith
4. Droit
5. Fondements du droit
6. Théologie
7. Mystique soufi

B. GEOGRAPHIE

1. Géographie descriptive
2. Cartographie
3. Relations de voyage

C. SCIENCES DE LA LANGUE

1. Linguistique
2. Grammaire
3. Métrique
4. Lexicographie
5. Littérature

D. SCIENCES HISTORIQUES

1. Généalogies-Chronologies
2. Bio-bibliographies
3. Chroniques
4. Analyse historique

II. LES SCIENCES RATIONNELLES**A. SCIENCES PHYSIQUES**

1. Sciences des êtres vivants et des plantes
 - a. Médecine
 - b. Sciences vétérinaires
 - c. Sciences de l'élevage
 - d. Agronomie
 - e. Botanique
2. Sciences des instruments
 - a. Poids spécifiques
 - b. Moments d'inertie
 - c. Leviers
 - d. Miroirs ardents
 - e. Machines de guerre
 - f. Mécanique hydraulique
3. Science des corps terrestres
 - a. Pharmacologie
 - b. Chimie
 - c. Géologie
 - d. Météorologie

B. PHILOSOPHIE

1. Logique
2. Fondements des mathématiques
3. Fondements de la physique
4. Métaphysique

C. SCIENCES MATHÉMATIQUES

1. Sciences numériques
 - a. Calcul indien
 - b. Théorie des nombres
 - c. Algèbre
 - d. Analyse combinatoire
2. Sciences géométriques
 - a. Géométrie des figures et des courbes
 - b. Géométrie de la mesure
 - c. Constructions géométriques
 - d. Arpentage
 - e. Architecture
 - f. Optique théorique
3. Astronomie
 - a. Science de l'observation
 - b. Trigonométrie
 - c. Théories planétaires
 - d. Instruments astronomiques
 - e. Science du temps
4. Musique
 - a. Théories musicales
 - b. Pratiques musicales
 - c. Instruments musicaux

III. SCIENCES INTERMÉDIAIRES

1. Science des héritages (Droit, Arithmétique, Algèbre)
2. Astrologie (Divination, Astronomie, Arithmétique)
3. Kalam (Théologie, Philosophie)
4. Rhétorique (Philosophie, Langue)

avaient été déposés dans les mosquées comme biens Waqf, inaliénables, que l'on pouvait consulter, recopier ou même emprunter (sous certaines conditions notifiées par leurs propriétaires).

De l'autre côté, un courant hostile à un développement anarchique des sciences et surtout de celles qui étaient jugées dangereuses selon les critères d'une éthique qui s'identifiait à un comportement religieux. Des historiens ou orientalistes européens, guidés parfois par des présupposés idéologiques globalement défavorables à la culture arabo-islamique ou à l'Islam en tant que religion, n'ont pas eu beaucoup de peine à exhumer des déclarations péremptoires des partisans de ce courant "anti-science". Mais, au lieu de les intégrer à une analyse des phénomènes idéologiques de cette civilisation, ils en ont fait une preuve de l'opposition irréductible d'une religion aux sciences profanes⁽¹²⁾. La réalité complexe et changeante des sociétés arabo-islamiques ne peut être réduite à de telles caractérisations schématiques.

Ce que l'on peut observer, au vu des documents connus, c'est que, pendant longtemps, des opinions dogmatiques opposées à la science et à la philosophie se sont exprimées, souvent d'une manière brillante, sans affecter les puissantes traditions de recherche nées à la fin du VIII^e siècle. Leur impact sur l'opinion publique et leurs effets ne deviennent réels qu'au moment où de nombreux facteurs internes et externes à la société arabo-islamique vont se conjuguer pour perturber gravement les mécanismes profonds de cette société, favorisant en particulier des changements de mentalité et encourageant des attitudes nouvelles, d'auto-défense culturelle pourrait-on dire. On verra ainsi, à partir d'une certaine époque, qu'il est difficile de déterminer exactement, mais qui est postérieure au XII^e siècle, se constituer une sorte de front contre l'activité philosophique et contre certaines sciences comme l'astronomie. Toutefois, cela n'est pas allé jusqu'à provoquer une inquisition semblable à celle

qu'organisera la direction du clergé italien contre des penseurs et des savants comme Giordano Bruno (m.1600) et Galilée (m.1642). Pourtant, contrairement à l'Italie où l'inquisition n'empêchera pas l'irrésistible victoire de l'esprit scientifique, dans la cité islamique de la même époque, la répression "douce" semble avoir eu raison de traditions philosophiques prestigieuses.

Cela peut signifier en fait que dans ces deux types de sociétés des facteurs plus importants et différents intervenaient et décidaient des orientations en cours dans tous les domaines. Par rapport à ces facteurs, les comportements idéologiques apparaîtraient alors comme des effets induits, secondaires pour la société du Nord en pleine mutation, mais essentiels pour la société du Sud qui connaissait déjà des crises profondes.

3. Infrastructure d'enseignement et de recherche.

Les traditions de recherche que nous avons évoquées et dont nous aborderons le contenu au chapitre suivant, ne peuvent se concevoir sans des traditions d'enseignement aussi puissantes, sinon aussi continues, et ces deux piliers de l'activité scientifique supposent un minimum d'infrastructures telles que, écoles, universités, laboratoires, observatoires, bibliothèques, centres de recherche dont l'histoire est indispensable pour l'élaboration d'une sociologie de la science arabo-islamique ou pour, tout simplement, en suivre les orientations.

Nous sommes pourtant en présence d'un domaine très peu étudié même s'il a bénéficié jusqu'à ce jour de nombreux écrits (essentiellement en langue arabe). Les informations présentées ici seront donc très fragmentaires mais, ajoutées à celles des autres aspects de l'activité scientifique, elles permettront, peut-être, de se faire une idée plus précise de la question.

a. Les écoles.

L'école dans les régions islamiques reflète à la fois leur unité religieuse et leur diversité politique ou idéologique et ce, indépendamment des clivages sociaux dont l'empreinte est manifeste parfois au niveau de l'encadrement et de l'infrastructure.

L'enseignement primaire, qui est le plus mal connu, se faisait soit dans des mosquées ou dans des locaux qui en dépendaient, et dans ce cas il était public (et financé par des fondations pieuses), soit chez les particuliers (marchands, fonctionnaires, princes) qui pouvaient payer des précepteurs.

Les matières qu'on enseignait alors étaient la lecture et l'écriture de l'Arabe, l'apprentissage du Coran (par coeur) et l'instruction religieuse. A cette formation de base, on ajoutait parfois la grammaire et, dans certains cas, la poésie, la calligraphie et même la rhétorique.

Il faut toutefois faire deux remarques au sujet de ce programme : son contenu n'a jamais été fixé par une institution centrale et sa réalisation n'a jamais été uniforme. Cela n'est pas dû seulement à l'absence d'un clergé musulman hiérarchisé mais également à la décentralisation de fait que connaîtra le pouvoir politique, dès le milieu du VIII^e siècle, et aux clivages idéologiques qui naîtront à la fin du VII^e siècle et qui ne feront que s'affirmer par la suite. La seconde remarque concerne les pédagogies appliquées à cet enseignement. Il semble en effet qu'il y en ait pas eu une, mais plusieurs, comme semble le dire l'historien maghrébin Ibn Khaldūn : après avoir exposé les pédagogies pratiquées à son époque au Maghreb, en Espagne et ailleurs, ce dernier critique celles qui forment des "têtes bien pleines" parcequ'elles reposent sur la mémoire et préconisent l'apprentissage du Coran avant l'initiation aux connaissances rationnelles⁽¹³⁾.

b. Les Universités

L'enseignement secondaire est encore plus mal connu mais, cela est dû peut-être à son intégration à un enseignement supérieur long. Ce dernier a connu essentiellement deux grandes périodes et son contenu s'est vu sensiblement modifié en passant de l'une à l'autre.

La première période qui s'achève vers le milieu du XI^e siècle (avec un certain décalage pour les provinces occidentales et asiatiques) est caractérisé par un enseignement supérieur largement privé et dans lequel la puissance publique intervient essentiellement par le mécénat. Sur le plan du contenu, c'est la période de la liberté des programmes, permettant ainsi aux sciences "rationnelles" comme la philosophie, les mathématiques, l'astronomie, de se constituer une place privilégiée dans cet enseignement, après qu'elle ait bénéficié, au début du IX^e siècle, d'une réelle impulsion donnée par le calife abbasside al-Ma'mūn (813-833) qui créera la première grande institution scientifique arabe, Bayt al-Hikma (la Maison de la Sagesse). Des mathématiciens comme al-Khwārizmī (m.850) et Thābit Ibn Qurra (m.901) y seront pris en charge et y donneront un enseignement de qualité.

Cette impulsion initiale sera soutenue pendant une cinquantaine d'années par l'idéologie officielle, le Mu^tazilisme, qui était favorable au développement des sciences exactes et de la philosophie⁽¹⁴⁾.

C'est également durant cette période que l'on verra se multiplier des bibliothèques privées, semi-publiques ou publiques, dont certaines se spécialiseront dans tel ou tel secteur de la science et dont la majorité sera ouverte aux étudiants et aux chercheurs qui y trouveront les livres inaccessibles à leurs bourses et parfois même le papier et l'encre pour en faire gratuitement des copies. Mais, en plus de leur vocation propre, la plupart de ces bibliothèques seront des centres d'enseignement supérieur relayés, pour certaines disciplines, par des institutions spécialisées comme les laboratoires, les observatoires ou les hopitaux.

Quant à la seconde période, que l'on peut dater de l'avènement du pouvoir saljuqide à Baghdad (en 1055), elle verra la fondation de collèges ou d'universités d'état qui porteront un nom, Madrasa (pluriel : Madāris), et qui se distingueront des institutions antérieures par plusieurs traits : elles seront financées exclusivement par l'Etat qui a désormais un droit de regard sur les programmes d'enseignement et sur le recrutement des enseignants. Il n'est pas inutile de préciser que ces universités seront animées par l'idéologie orthodoxe, le sunnisme, qui s'opposait énergiquement aux autres idéologies musulmanes. C'est même pour contrer les effets jugés négatifs de l'une d'entre elles, l'Ismaélisme, que les Madrasa seront créées⁽¹⁵⁾. Leur succès, lié à la fois au changement de rapport de force idéologique à l'intérieur du monde islamique et à certains facteurs politiques et militaires en Méditerranée, se concrétisera par la multiplication d'institutions semblables, à partir du XIIe siècle et jusqu'au XIVe. C'est ce que l'on observera, par exemple, en Egypte après la chute de la dynastie fatimide et au Maghreb, après la victoire des Mérinides sur les Almohades⁽¹⁶⁾.

II. LE CONTENU DES MATHÉMATIQUES ARABES.

1. L'héritage scientifique pré-islamique.

Pour revenir aux débuts de la science arabe, on peut constater, à postériori bien sûr, que dès le milieu du VIIe siècle toutes les conditions favorables étaient réunies pour une réactivation scientifique. L'une d'entre elles, et non des moindres, a été la position géographique des Arabes et leur rôle d'intermédiaires qui les avaient mis en contact direct avec les héritiers des anciennes traditions scientifiques qui étaient désormais, en partie, les sujets du nouveau pouvoir. Il y avait ainsi des communautés chrétiennes, juives, sabéennes, zoroastriennes, etc., qui avaient maintenu patiemment quelques unes de ces traditions, soit par l'étude soit par la simple transmission et conservation des ouvrages.

C'est d'ailleurs parmi les membres de ces communautés que se recruteront les premiers traducteurs du Grec, du Syriaque, du Persan vers l'Arabe.

Quant aux traités traduits, ils ont appartenu à quatre traditions même si les bio-bibliographes arabes n'insistent que sur deux d'entre elles, la grecque et l'indienne, pour leur apport incomparablement plus important que celui des traditions persanes et babyloniennes.

En nous basant sur les témoignages des savants eux-mêmes, comme al-Bīrūnī (m.1050), ainsi que sur les traductions d'ouvrages scientifiques ou philosophiques dont les titres nous ont été transmis par les bio-bibliographes, comme Ibn al-Nadīm (m.995), on constate que l'apport persan est limité à la médecine et à des tables astronomiques d'origine indienne. Les babyloniens, quant à eux, ne sont cités qu'à propos de l'astrologie, alors que l'étude comparative des méthodes algébriques arabes, par exemple, révèle des liens indiscutables avec les algorithmes babyloniens tels qu'ils sont conservés dans les tablettes analysées au début du siècle⁽¹⁷⁾.

L'apport indien est essentiellement en mathématique puisqu'il concerne de nombreux ouvrages d'astronomie, les Sindhind, dont la traduction complète ou partielle permettra aux mathématiques arabes d'assimiler les techniques arithmétiques indiennes basées sur le système décimal et les calculs trigonométriques utilisant le sinus et le cosinus qui seront préférés à la technique grecque des cordes⁽¹⁸⁾.

Cela étant, il est indéniable que l'héritage anté-islamique le plus important a été celui des mathématiques, de la philosophie et de la médecine grecques. Il sera accessible, soit directement par des traductions du Grec à l'Arabe, soit indirectement à partir de traductions syriaques. Il faut d'ailleurs préciser que certains ouvrages fondamentaux bénéficieront de plusieurs traductions et

leurs chapitres ou leurs propositions subiront parfois certains réarrangements et feront l'objet de nombreux commentaires. Ce sera le cas par exemple des *Eléments* d'Euclide⁽¹⁹⁾, de l'*Almageste* de Ptolémée⁽²⁰⁾ et des coniques d'Apollonius⁽²¹⁾. Ces améliorations successives répondaient à un besoin de rigueur qui ne faisait que refléter un double progrès, celui des mathématiques et celui de la langue arabe.

2. L'apport des mathématiques arabo-islamiques.

Les premiers travaux arabes comportant quelque originalité sont apparus dès le début du IX^e siècle et sans attendre la fin de la période de traduction, puisque l'on sait que certains ouvrages grecs, comme les *Arithmétiques* de Diophante ou les commentaires de Pappus sur le livre X des *Eléments* d'Euclide ne seront traduits qu'au début du Xe siècle⁽²²⁾.

Cette période de production intense et féconde va s'étendre au delà du XI^e siècle et ce, malgré l'apparition de facteurs nouveaux qui vont, à moyen terme, contrarier ces activités. Il y aura encore, après le XII^e siècle, de nombreuses traditions vivantes à l'est et à l'ouest du centre de l'empire, après l'essoufflement de ce dernier foyer, mais nous n'insisterons, ici, que sur la période abbasside.

Les mathématiciens de la première phase vont partir de problèmes déjà traités par les Grecs ou par les Indiens, vont les assimiler, les critiquer lorsque cela était possible, en faire des révisions et des commentaires plus ou moins approfondis. Cela se fera selon les critères de la Mathématique grecque, c'est à dire à l'aide des outils de la logique et d'instruments plus spécifiques aux mathématiques : d'abord l'analyse et la synthèse, considérée comme le meilleur outil pour établir un résultat, puis le raisonnement par l'absurde qui n'est en fait qu'un aspect du premier et enfin le raisonnement par induction, considéré comme le plus faible des trois et

qui n'était utilisé que lorsque l'on ne pouvait pas faire autrement ou lorsque la nature (arithmétique, algébrique ou combinatoire) du problème l'exigeait.

Ils vont donc, à l'aide de ces outils, s'efforcer de déceler des faiblesses, des lacunes ou des erreurs dans l'échafaudage mathématique grec. Ils vont ainsi compléter des preuves inachevées, contester la validité de certains postulats ou de certaines définitions, puis tenter de les remplacer par d'autres, à leurs yeux plus satisfaisants et, enfin, démontrer des propositions que leurs prédécesseurs n'avaient fait qu'énoncer. Ce faisant, ils vont étendre des domaines déjà abordés par les Grecs, les Indiens ou les babyloniens et faire des incursions dans d'autres peu ou pas du tout évoqués précédemment. Il en sera ainsi, par exemple, de l'étude des équations du 3^e degré qui débutera par la tentative de résolution algébrique d'un problème d'Archimède (m.212) : voulant établir rigoureusement la preuve incomplète de la proposition 4 du Livre II de la Sphère et du cylindre, al-Māhānī (m.888) aboutira, pour la première fois, à une équation du 3^e degré qu'il jugera impossible après avoir vainement tenté de lui trouver une solution par radicaux. A partir de là, de nouvelles recherches seront entreprises, en particulier par Abu-l-Jūd (X^es.) et par al-Khayyām (m.1139). Elles aboutiront à l'élaboration par ce dernier d'une théorie géométrique de ces équations⁽²³⁾.

Un autre aspect de l'innovation concerne la constitution de disciplines nouvelles comme l'algèbre, la trigonométrie et l'analyse combinatoire. Pour compléter ce qui a déjà été dit sur l'algèbre, il faut ajouter que cette discipline ne s'est pas limitée à la résolution des équations. Il y eut en effet, dès le Xe siècle, des études concernant les polynômes en tant que tels et cela aboutit à une extension des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines) à l'ensemble des polynômes à coefficients réels (positifs) et à l'introduction des nombres

irrationnels quadratiques dans les équations, comme coefficients et racines. Parmi les savants qui ont contribué à ces progrès, on peut citer Abū Kāmil (m.930), al-Fath Ibn Sīnān (Xes.), al-Karajī (m.1029) et al-Samaw'al (m.1175)⁽²⁴⁾.

Nous ignorons encore la contribution exacte des mathématiciens de l'Espagne musulmane, mais nous savons que ceux du Maghreb, qui étaient en liaison directe avec les foyers scientifiques de l'Andalousie, vont enseigner les innovations évoquées (en se libérant des contraintes de la géométrie, en particulier dans les démonstrations algébriques), et vont les compléter, à partir de la fin du XIIe siècle, par l'élaboration d'un symbolisme arithmétique et algébrique qui sera utilisé dans l'enseignement maghrébin dès le XIIIe siècle⁽²⁵⁾.

Quant à la trigonométrie, qui est née dans l'astronomie et qui a été impulsée par elle, elle aura comme point de départ les premières tables indiennes de sinus et de cosinus et se développera en s'enrichissant de nouvelles fonctions (tangentes, cotangentes, sinus-verse, cosinus-verse) et surtout d'une série de théorèmes établissant des relations entre les différentes fonctions ou entre les éléments d'un triangle sphérique. Cela permettra à l'astronomie classique de se libérer des contraintes du théorème de Ménélaius (I^{es}. ap. J.C.) qui exigeait plus de calculs⁽²⁶⁾. Ce développement quantitatif va entraîner une autonomie de fait de ce qui n'était, pendant longtemps, qu'un ensemble d'outils épars. Cette autonomie est déjà annoncée par le chapitre qui lui est consacré dans les Clés de l'astronomie d'al-Bīrūnī. Elle se révèle par le livre de l'andalou al-Jayyānī (m.1079) et s'affirme enfin avec l'important traité de Nasīr al-Dīn al-Tūsī (m.1273)⁽²⁷⁾.

L'analyse combinatoire n'atteindra pas ce stade d'autonomie, mais, au vu des manuscrits connus et analysés, on constate, sans toutefois disposer de tous les éléments, que les problèmes de dénombrement, posés d'abord dans

la tradition arabe par des questions de linguistique et de lexicographie, vont apparaître également dans le domaine mathématique et vont aboutir à la constitution d'un chapitre, indépendant des autres chapitres arithmétiques, ne disposant pas encore d'un nom et d'un statut, mais se présentant comme un ensemble cohérent avec ses définitions, ses propositions, ses types de raisonnements (énumération et induction) et même son domaine d'application. La contribution des mathématiciens du Maghreb sera importante à partir du XII^e siècle⁽²⁸⁾.

A côté de ces aspects rapidement évoqués, il faudrait dire quelques mots d'un ensemble d'activités dont les résultats ne sont pas toujours palpables mais qui auront des effets indirects importants. Il s'agit des recherches sur les fondements des mathématiques qui vont être suscitées par des lectures critiques de trois livres des *Eléments* d'Euclide : le Livre I tout d'abord, qui repose sur le cinquième postulat (des parallèles) que des mathématiciens arabes vont tenter d'éviter ou de démontrer⁽²⁹⁾, le Livre V qui expose la théorie des proportions et dont certaines définitions vont être jugées non satisfaisantes et vont être remplacées par d'autres⁽³⁰⁾, enfin le Livre X qui est une sorte d'application de la théorie du Livre V et qui étudie une classe particulière de nombres réels positifs (les irrationnels quadratiques et biquadratiques). Il bénéficiera d'une lecture algébrisante qui permettra une extension de la notion de nombre réel positif⁽³¹⁾.

III - LES OBSTACLES AU DEVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Pour compléter ce résumé très succinct des aspects essentiels de l'innovation dans les mathématiques arabes, il faudrait évoquer certains obstacles, internes et externes au domaine scientifiques, auxquels s'est heurtée l'activité mathématique dès le IX^e siècle et qui provoqueront des échecs multiformes, parfois féconds : Problèmes non résolus, propositions fausses, tentatives prometteuses mais restées inachevées, etc.

Replacés dans leur contexte scientifique, culturel et social, ces échecs révèlent, selon leur nature, certaines entraves techniques, conceptuelles ou même sociologiques. Cela rend nécessaire une double analyse, interne et externe, de l'activité scientifique arabe qui permettrait, du même coup, d'éviter les jugements partiels et les a priori idéologiques concernant certains aspects controversés de la civilisation arabo-islamique comme ceux que l'on résume par les concepts de crise ou de décadence.

Si l'on se limitait à la tradition mathématique elle-même, on constaterait que les difficultés rencontrées dans la recherche sont rarement évoquées, comme sont rarement transmises les démonstrations fausses ou les démarches fécondes mais non orthodoxes au sens de la Mathématique grecque. Il arrive toutefois que des chercheurs évoquent les obstacles rencontrés, comme le fait Ibn al-Khawwām (XIII^es.) qui conclut son livre par l'énoncé d'une trentaine de problèmes algébriques ou diophantiens non résolus⁽³²⁾. Il est intéressant de constater que les problèmes n°3 et n°23 sont les deux premiers cas de la fameuse conjecture dite "de Fermat". On sait que cette conjecture a longtemps préoccupé les mathématiciens arabes et il nous est même parvenu une tentative de preuve de son impossibilité pour $n = 3$. La nature de l'erreur que contient cette preuve révèle, en fait, les limites des outils utilisées qui apparaissent ainsi comme autant d'obstacles.

Il est arrivé aussi qu'un échec réoriente la recherche vers des voies plus fécondes, comme le montre bien ^cUmar al-Khayyām à propos de l'élaboration de la théorie géométrique des équations cubiques après des échecs successifs dans leur résolution algébrique. Dans ce cas, les difficultés étaient liées, semble-t-il, à l'absence de symbolisme.

A côté de ces limites internes aux traditions mathématiques, il y eut parfois les effets de l'environnement

culturel, comme l'illustrent bien deux tentatives des IX^e-X^e siècles qui ont réellement transgressé ces frontières culturelles. La première est celle de Thabīṭ Ibn Qurra qui a consisté à comparer des ensembles infinis dénombrables, aboutissant ainsi à une "actualisation" (au sens philosophique) de l'infini⁽³³⁾. La seconde est celle d'al-Sijzī (m.1024) qui, ayant admis l'hypothèse héliocentrique, concevra et réalisera un astrolabe révolutionnaire⁽³⁴⁾.

Ces tentatives ne semblent pas avoir eu de suite significative et on a même l'impression qu'elles ont été abandonnées sans heurt et sans drame, puisque ces audaces ne vaudront à leurs auteurs ni les disgrâces ni les persécutions que subiront plus tard certains de leurs collègues de l'Europe médiévale. Les raisons sont à chercher, bien sûr, dans la spécificité de l'environnement socio-culturel au IX^e-X^e siècles qui partageait pourtant avec les sociétés européennes de la Renaissance la même conception du monde.

Il y a enfin un dernier aspect, régional et international cette fois, des limites que connaîtront les activités scientifiques arabes d'une manière générale et qui seront induites par certains facteurs politiques et économiques.

Sur le plan politique, il faut signaler les crises internes au califat musulman et qui opposeront, globalement, le camp sunnite (orthodoxe), représenté par le pouvoir central de Bagdad et par celui de Cordoue à partir de 750, au camp shi'ite installé en Egypte (en 969), au Yemen et dans certaines provinces d'Asie centrale. A cela, il faut ajouter, à partir du XII^e siècle, les affrontements externes qui opposeront les pouvoirs musulmans, toutes tendances confondues, aux Croisés à l'ouest⁽³⁵⁾ puis aux Mongols à l'est⁽³⁶⁾. Cela se traduira par un rétrécissement de l'aire géopolitique musulmane.

Sur le plan économique, il semble que parmi les facteurs d'affaiblissement du pouvoir musulman, il

y ait eu la perte progressive de l'hégémonie commerciale à l'échelle internationale, le transfert massif de l'or dans le sens Sud-Nord et son gel par la thésaurisation, aggravé, à partir du XII^e siècle, par le tarissement des sources africaines de ce métal⁽³⁷⁾.

Les effets indirects de tous ces phénomènes sur l'activité mathématique sont visibles dès la fin du XI^e siècle, ici ou là, en fonction des spécificités régionales. On observe, en effet, des ruptures dans les traditions naissantes qui n'auront pas eu le temps d'acquiescer la vigueur des anciennes. Ce sera le cas en Espagne avec les premières grandes offensives de la Reconquista qui sonneront le glas de l'activité scientifique arabe à Tolède, à Valence puis à Saragosse, trois foyers scientifiques en Occident musulman⁽³⁸⁾. Le même phénomène se répètera à l'arrivée des Mongols avec la destruction cette fois des métropoles scientifiques d'Asie comme Samarcande en 1220 et Rayy en 1221.

A long terme, ces chocs répétés, qui vont se conjuguer avec les crises internes, vont venir à bout du dynamisme scientifique des premiers siècles. Pour rester dans le domaine mathématique, on y observera un ralentissement de la recherche dans toutes les disciplines, accompagné d'une baisse du niveau de l'enseignement. C'est ainsi que, dès la fin du XIII^e siècle, le mathématicien maghrébin Ibn al-Bannā' (m.1321), justifiait l'abandon de certains chapitres mathématiques, comme celui des nombres premiers ou celui de certaines méthodes d'approximation, par leur peu d'utilité à son époque, alors qu'ils figuraient en bonne place dans les ouvrages du XII^e siècle.

Il n'est pas inutile de remarquer que la période qui vit le tarissement de la recherche et la baisse de l'activité scientifique d'une manière générale est exactement celle qui consacra la marginalisation de la philosophie et le triomphe de certains discours théologiques et ce, après une phase de polémique intense qui a culminé avec la célèbre controverse, par livres interposés, entre

le grand philosophe du XIII^e siècle Ibn Rushd (m. 1198) et le grand théologien al-Ghazzālī (m. 1111)⁽³⁹⁾. Il est d'ailleurs intéressant de noter que c'est le même al-Ghazzālī qui n'hésitera pas, tout en admettant l'utilité des mathématiques, à mettre en garde contre elles car, selon lui, la rigueur mathématique peut faire croire au contenu de la philosophie puisque le discours de cette dernière est construit selon une rigueur analogue⁽⁴⁰⁾.

Cela dit, il serait imprudent de faire dépendre le sort de l'activité scientifique du militantisme triomphant des théologiens, fussent-ils al-Ghazzālī et Ibn Taymiyya (m. 1328)⁽⁴¹⁾. Le phénomène est plus complexe à cause de ses multiples liens avec son environnement. Il semble pourtant que l'offensive de ce courant théologique, combinée à partir du XII^e siècle à une mentalité défensive, résultat des grands chocs provoqués par les croisades et par les conquêtes mongoles, a eu sa part de responsabilité dans le ralentissement des activités scientifiques et l'extinction de la philosophie dans la société arabo-islamique.

NOTES ET REFERENCES

- (1) - Pour prendre l'exemple du maghreb, on constate que, jusqu'au début du XX^e siècle, on enseignait les mathématiques arabes traditionnelles dans les universités islamiques de Tunis (La Zaytūna) et de Fès (La Qarawiyyīn). De son côté, le théologien algérien Iḥayyash (mort en 1914) a rédigé, en 1866, un commentaire sur un livre du XV^e siècle écrit par le célèbre mathématicien maghrébin al-Qalṣādī (m.1486).
- (2) - 622-750 correspond d'abord à la période des quatre califes "bien dirigés", Abū Bakr (632-634), ^cUmar (634-644), ^cUthmān (644-656) et ^cAli (656-661), dont trois (les derniers) seront assassinés pour des raisons politiques. Puis, c'est une branche de la famille du prophète, celles des Omeyyades, qui prendra le pouvoir et qui le gardera jusqu'à l'avènement des Abbassides.
- (3) - M.LOMBARD, l'Islam dans sa première grandeur (VIII^e-XI^e siècle), Paris, Flammarion 1971, pp. 121-239.
- (4) - Ibn Khaldūn (1332-1406) a été à la fois un historien, un sociologue, un juriste et un habile homme politique. Son important ouvrage, La Muqaddima, dans lequel il expose une méthode nouvelle pour analyser les sociétés, n'est elle-même qu'une introduction (comme son titre l'indique) à une histoire universelle monumentale. La Muqaddima est aujourd'hui accessible dans une traduction française : V. MONTEIL, Discours sur l'Histoire universelle, Paris Sindbad, 1978.
- (5) - H. LAOUST, Les schismes dans l'Islam, Paris Payot, 1965.
- (6) - D. et J. SOURDEL, La civilisation de l'Islam classique, Paris Arthaud, 1968, pp. 161-212. Dans ce chapitre, les quatre doctrines orthodoxes (malékite, hanafite, chaféite et hanbalite) sont exposées et leur élaboration étudiée.

- (7) - Le dinar musulman contiendra 4,25 gr. d'or (au lieu de 4,55 gr.) et le dirham passera de 4,10 gr. d'argent à 2,97 gr. Pour un aperçu détaillé du problème de la monnaie en Islam, voir : M. LOMBARD, Monnaie et Histoire d'Alexandre à Mahomet, Paris-La Haye Mouton, 1971.
- (8) - 750-1055 correspond à la période abbasside qui commence avec l'assassinat de tous les membres de la famille omeyyade, sauf ^CAbdarrahmān qui réussira à s'enfuir vers l'Espagne où il fondera un califat rival. Cette période s'achèvera avec l'arrivée des Turcs Saljuqides à Baghdad qui gouverneront désormais, en maintenant l'illusion du califat.
- (9) - La première usine sera construite en 750, sur ordre du gouverneur de Samarcande qui était le propre frère du fameux Ja^Cfar, le vizir de Harūn al-Rashīd.
- (10) - IBN KHALDŪN, La Muqaddima, op.cit., pp. 873-1040 (pour les sciences de transmission) et pp. 1041-1087 (pour les sciences rationnelles). Les autres écrits n'ont pas de traduction en Français. Voir, toutefois un résumé des classifications des sciences arabes dans : S. H-NASR, Sciences et savoir en Islam, Paris Sindbad, 1979, pp. 58-63.
- (11) - D'abord le calife al-Ma'mūn (813-833) puis al-Mu^Ctaṣim (833-842) et enfin al-Wathīq (842-847). Sous la pression des théologiens orthodoxes et d'une partie de l'opinion, leur successeur al-Mutawakkil (847-861) fera marche arrière.
- (12) - R. BRUNSCHVIG et G.E. VAN GRUNEBAUM, Clacissicisme et et déclin culturel dans l'histoire de l'Islam, Paris Maisonneuve et Larose, 1977.
- (13) - IBN KHALDŪN, La Muqaddima, op.cit., pp. 1222-1229.

- (14) - Le Mu^Ctazilisme est un mouvement théologique à tendance rationaliste qui défend, en particulier, les principes suivants : négation des attributs de Dieu, affirmation du caractère créé du Coran, affirmation de l'existence en l'homme d'une volonté libre, obligation d'ordonner le bien et d'interdire le mal, même s'il faut user d'armes pour cela. Pour l'histoire de ce mouvement, voir : H. LAOUST, Les Schismes de l'Islam, op.cit.
- (15) - L'Ismaélisme est une branche schi^Cite qui se présente comme l'héritière d'Ismā^Cīl, un des fils de Ja^Cfar al-Sādiq, qui mourra en 750 avant son père et qui ne fera pas partie des douze Imāms.
- (16) - Les Almohades qui ont gouverné tout le Maghreb et une partie de l'Espagne (de 1130 à 1276) auront une idéologie teintée de Mu^Ctazilisme et d'Ismaélisme. Ils seront violemment combattus sur ce plan par leurs adversaires politiques les Mérinides (orthodoxes et malékites) qui leur succéderont au pouvoir. Pour l'histoire de ces deux dynasties, voir : A. LAROUÏ, L'histoire du maghreb, un essai de synthèse, Paris Maspéro, 1970, pp. 162-206.
- (17) - Fr. THUREAU-DANGIN, Testes Mathématiques babyloniens, Leiden, 1938. Voir également : O. NEUGEBAUER-A. SACHS, Mathematical cuneiform texts, New Haven, 1945.
- (18) - Parmi les auteurs indiens dont les ouvrages ont été traduits, on peut citer Aryābhata (VI^es.) et Brahmagupta (VII^es.).
- (19) - Les Eléments d'Euclide (III^es.) sont constitués de 13 livres que les Arabes ont complétés par les livres XIV et XV qui ne sont pas de lui mais d'un de

ses commentateurs, Hypsiclès. Voir la traduction en Français : F. PEYRARD, Les oeuvres d'Euclide, Paris Blanchard, 1966.

- (20) - Ce sont les Arabes qui ont popularisé le titre de l'Almageste de ptolémée (II^es.) dont le titre originel est La Syntaxe.
- (21) - Apollonius (-III^e) a divisé son traité en huit livres. Mais, déjà au VIII^e siècle, le dernier livre était considéré comme perdu. On ne l'a toujours pas retrouvé. On sait, par ailleurs, que le mathématicien arabe Ibn al-haytham (m.1039) a tenté de reconstituer ce livre perdu. Voir : J.P. HOGENDIJK, Ibn al-Haytham's completion of the conics, New York Springer Verlag, 1985.
- (22) - Cette traduction sera faite par Qusta Ibn Lūqā (m.910). Pour les livres récemment découverts et qui font partie des Arithmétiques, voir : J. SESIANO, Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the arabic translation attributed to Qusta Ibn Lūqā, New York Springer Verlag, 1982, et : R. RASHED, Diophante Les Arithmétiques, Paris Les Belles Lettres, t.III et IV, 1984.
- (23) - A. DJEBBAR et R. RASHED, L'oeuvre algébrique d'al-Khayyām, édition, traduction française et analyse, Alep I.H.A.S., 1981.
- (24) - A.P. YOUSCHKEVITCH, Les Mathématiques arabes (VIII^e-XV^es.), traduction M. CAZENAVE et K. JAOUICHE, Paris Vrin, 1976.
 - S. AHMAD et R. RASHED, Al-Bahir en algèbre d'as-Samaw'al, édition arabe et introduction française, Damas, 1972.
- (25) - A. DJEBBAR, Enseignement et recherche mathématiques dans le maghreb des XIII^e-XIV^e siècles, Publications Mathématiques d'Orsay n°81-02, 1981, pp. 6-54.

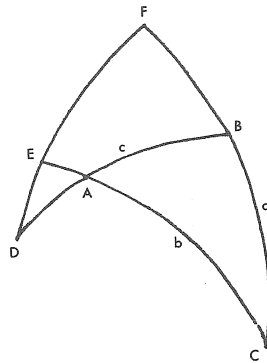
- (26) - Le théorème de Ménélaüs portait le nom de figure sécante dans la tradition mathématique arabe. Dès la fin du X^e siècle, des mathématiciens comme Abu-l-Wafā (m.998) et al-khujandī (m.1030) établiront une série de théorèmes trigonométriques et en particulier celui qu'ils appelleront la figure qui dispense et qui leur permettait d'éviter l'utilisation du théorème de Ménélaüs et surtout d'optimiser les calculs (voir encadrés ci-dessous) :

LA FIGURE SECANTE

CE, CF, DF, DB, étant des arcs de grands cercles (tracés sur une sphère), on a, en particulier :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(bf)} = \frac{\sin(b)}{\sin(ae)} \times \frac{\sin(ed)}{\sin(df)}$$

Si $\sin(a)$ est l'inconnue cherchée, il faudra, pour la déterminer, connaître les cinq autres grandeurs et faire quatre opérations arithmétiques.

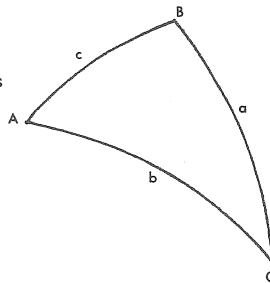


LA FIGURE QUI DISPENSE

Si (ABC) est un triangle quelconque tracé sur une sphère et d'angles A, B, C et de côtés a, b, c, des arcs de grands cercles, on aura, en particulier :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)}$$

Si $\sin(a)$ est l'inconnue cherchée, il suffira, pour la déterminer, de connaître les trois autres grandeurs et de faire deux opérations arithmétiques.



- (27) - Pour al-Bīrūnī, voir : M-Th. DEBARNOT, La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du X^e siècle, thèse de 3e cycle, Paris Sorbonne, 1980.
- Pour al-Jayyānī, voir : M.V. VILLUENDAS, La trigonométrie europea en el-siglo XI, Estudio de la obra de ibn Mu^cad El-Kitab Maḥḥūlāt, Barcelone, 1979.
- Pour al-Tūsī, voir : A. PACHA CARATHODORY, Traité du quadrilatère, Constantinople 1891.
- (28) - A. DJEBBAR, L'analyse combinatoire au maghreb : l'exemple d'Ibn Mun^cim (XII^e-XIII^e s.), Publications Mathématiques d'orsay n° 85-01, 1985.
- (29) - K.JAOUICHE, La théorie des parallèles en pays d'Islam, à paraître chez Vrin, Paris.
- (30) - La définition 5 du Livre V sera remplacée par une autre, dite antépharétique, que l'on peut exprimer à l'aide de fractions continues. Parmi les mathématiciens qui ont étudié la question, on peut citer al-Māhānī, al-Nayrizī et al-Khayyām.
- (31) - Les nombres définis et manipulés dans le livre X vont être complétés par les racines n^{ièmes}, pour n entier quelconque, et vont être soumis aux opérations arithmétiques autres que l'addition et la soustraction qui étaient les seules envisagées dans le livre X.
- (32) - Cette liste de problèmes non résolus contient des problèmes diophantiens et des problèmes algébriques aboutissant à des équations du 3^e degré pour lesquels, comme on l'a déjà dit, les Arabes ont vainement cherché des solutions algébriques.
- (33) - S. PINES, Thabit B. Qurra's conception of number and theory of the mathematical infinite. Actes du XI^e congrès international d'histoire des sciences, vol.III, Varsovie 1965.

- (34) - C'est le mathématicien al-Bīrūnī qui nous informe de ce fait dans un de ses livres encore manuscrit (le Kitāb fī Istī^Cāb...) et qui semble dire, dans un autre manuscrit (al-Qānūn al-Mas^Cūdī, ms. British Museum, OR. 1997, f.10a-b) qu'al-Sijzī n'était pas le seul à son époque à adopter cette hypothèse.
- (35) - Pour les historiens arabes, les Croisades ne se réduisent pas aux expéditions militaires qui ont commencé en 1099 pour s'achever avec la mort de Saint Louis près de Tunis, en 1278. Ils englobent dans ces évènements les attaques normandes contre la Sicile et la Reconquista espagnole dont le premier succès sera la prise de Tolède, en 1085. Pour une meilleure connaissance de ce phénomène, voir : C. CAHEN, Orient et Occident au temps des Croisades, Paris Aubier, 1983.
- (36) - L'offensive mongole commence vers 1218 par la conquête du Kwārizm (région entre la mer Caspienne et la mer d'Aral). Elle se poursuivra par le contrôle de la Perse puis par le sac de Bagdad, avant d'échouer en face des armées mameluks d'Egypte. La tactique de Gengis Khan et de ses successeurs, qui consiste à massacrer les populations des villes qui opposent la moindre résistance aux conquérants, a suffisamment traumatisé les esprits de l'époque pour que les historiens en fassent la caractéristique de ce nouveau pouvoir.
- (37) - A. LAROUÏ, L'histoire du Maghreb, op.cit., pp. 147-185.
- (38) - A. DJEBBAR, Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid, Colloque international de Marseille-Luminy sur "Les mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII^e siècle", Marseille 16-21 Avril 1984. A paraître dans les Actes du colloque.
- (39) - Les attaques d'al-Ghazzālī contre la philosophie sont

exposées, en particulier, dans son livre "Destruction des Philosophes" auquel répondra, point par point, Ibn Rushd (Averroès) dans un livre non moins célèbre intitulé "la destruction de la destruction".

- (40) - C'est une citation de son livre al-Munqidh min al-Dalāl (le livre qui préserve de l'égarement), faite par A.S. DAMIRDASH dans : Al-Bīrūnī, Le Caire, 1980, p. 133.
- (41) - Ibn Taymiyya est un théologien hanbalite dont le dogmatisme a provoqué l'hostilité à son égard de l'orthodoxie "modérée" (comme les Shaféites, par exemple), ce qui lui a valu d'être emprisonné plusieurs fois. Ses conceptions sont à l'origine du Wahabisme qui se développera en Arabie, à partir du XVIII^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- C. BOYER, A History of Mathematics, New York, Wiley International Edition, 1968, CH. XIII, The Arabic hegemony, pp. 249-271.
- [2]- A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, Routes et Dédalles, Paris-Montréal, Etudes Vivantes, 1982, CH. III, La Constitution de l'Algèbre, pp. 67-112.
- [3]- A. DJAFARI-NAINI, Geschichte der Zahlentheorie im Orient, Braunschweig Verlag Klose et Co., 1982.
- [4]- A. DJEBBAR, Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles, Publications Mathématiques d'orsay, n° 81-02, 1981-81.
- [5]- A. DJEBBAR et R. RASHED, L'oeuvre algébrique d'al-Khayyām, Alep I.H.A.S., 1981.
- [6]- A. DJEBBAR, L'analyse combinatoire au Maghreb : L'exemple d'Ibn Mun^cim (XII^e-XIII^e s.), Publications Mathématiques d'orsay, n° 85-01, 1985.
- [7]- E.S. KENNEDY, Studies in the Islamic Exact sciences, American University of Beirut, 1983.
- [8]- R. RASHED, Entre Arithmétique et Algèbre, Recherches sur l'Histoire des Mathématiques arabes, Paris Les Belles Lettres, 1984.
- [9]- A.P. YOUSCHKEVITCH, Les Mathématiques Arabes (VIII^e-XV^es.), Traduction française par M. CAZENAVE et K. JAQUICHE, Paris Vrin 1976.

(IX^e - XII^e siècles)