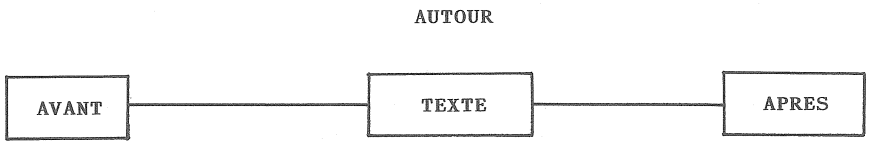
LES PROBLEMES 24 A 29 DU PAPYRUS RHIND

Michel GUILLEMOT
I.R.E.M. de Toulouse

1) INTRODUCTION

Lorsque l'on désire étudier un texte historique il est nécéssaire de prendre en compte diverses études que nous pouvons schématiser comme suit :



Nous ne devons pas oublier ce qui s'est passé "avant" et qui peut servir à l'explication du texte. Tout aussi important est la considération de "l'autour" c'est-à-dire de l'environnement tant culturel que sociologique de l'élaboration du texte lui-même. Enfin dans la partie "après" il est nécéssaire de cerner le rôle qu'a pu jouer un tel texte. (1)

En fait, une telle démarche n'est pas éloignée de l'enseignement lui-même. Il suffit de remplacer le mot texte par "cours". Nous réservons pour un autre article le développement de ce propos didactique.

Mais dans les deux cas il est souvent difficile de bien étudier tous ces aspects et dans le cas qui nous occupe, celui de la mathématique égyptienne, l'auteur de ces lignes, ne prétant nullement être maître de tous les maillons de la chaîne. Nous essaierons néanmoins de traiter successivement ces divers aspects de la question.

Toutefois avant de commencer notre étude proprement dite il nous paraît nécéssairede préciser ce qui, à nos yeux, est l'intérêt principal des textes proposés. Sans vouloir entrer dans une querelle peut être stérile sur la dénomination "algèbre égyptienne" disons que les problèmes 24 à 29 du papyrus RHIND seront examinés d'un point de

vue algébrique (2) et en ce sens cette étude montre le lien existant entre résolution d'une équation et domaine de nombres dans lequel s'effectue cette résolution.

2) AVANT

Les Encyclopédies et les diverses histoires des mathétiques permettent de donner une idée générale de l'"avant". Pour ce qui nous occupe nous devons nous placer "avant" le deuxième millénaire avant J.C. Si pour la mathématique babylonienne les documents abondent, il n'en est malheureusement pas de même pour la mathématique égyptienne. Le papyrus RHIND est même un des rares documents permettant de connaître cette dernière !

Dans ces conditions, notre étude va se limiter ici essentiellement à celle du système de numération égyptien. Citons toutefois Amy DAMAN-DALMEDICO et Jeanne PEIFFER

> "Quant à la civilisation égyptienne, formée des deux royaumes de la Haute et de la Basse-Egypte, sa période la plus brillante est celle de la IIIe Dynastie des pharaons (vers 2500 avant J.C.) qui fit construire les pyramides, mais elle devait se poursuivre à l'abri d'influences extérieures jusqu'à la conquête d'Alexandre le Grand en 332 avant J.C." (p 13)

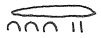
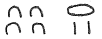
Sur les monuments, les Egyptiens ont utilisé l'écriture hiéroglyphique.

La numération hiéroglyphique est additive et à base 10. Ainsi nous trouvons un signe spécial pour désigner chacune des puissances de 10. En fait,

un pour l'unité
un pour la dizaine
un pour la centaine ou (selon l'orientation du texte)
un pour le millier ou (fleur de lotus)
un pour la dizaine de mille ou (doigt courbé)

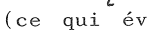
un pour la centaine de mille ou (têtard)
un pour le million ou (homme levant les bras)

Pour représenter un nombre il suffit de répéter chaque signe autant de fois qu'il est nécessaire, ainsi par exemple 1234567 peut s'écrire comme suit :

Quant aux fractions, nous laissons ici de côté la notation à l'aide de l'oeil d'HORUS que les Egyptiens utilisaient pour les mesures de capacité. Nous nous limiterons simplement à la notation hiéroglyphique qui consiste à placer généralement le signe de la bouche, , "au-dessus" du nombre pour désigner son inverse. Ainsi, par exemple, $\frac{1}{42}$ peut s'écrire  ou plutôt  .

Signalons deux exceptions, $\frac{1}{2}$ s'écrivait ou (certains pensent à la moitié de la "bouche") et $\frac{2}{3}$ s'écrivait ou ou .

L'écriture que l'on trouve sur les papyrus anciens est dénommée hiératique. Le principe de numération n'est pas changée mais l'écriture cursive a conduit à attribuer un signe à chaque chiffre des différentes unités. Ainsi, par exemple, 4 sera abrégé en et 40 en . Pour les fractions, la bouche s'est transformée en point et l'on trouve respectivement pour $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, et $\frac{1}{4}$, les notations suivantes :



(ce qui évite la confusion avec le signe pour 40 que l'on aurait pu lire $\frac{1}{4}$).

Les notations sont intimement liées au domaine égyptien des nombres. Outre les entiers et la fraction $\frac{2}{3}$ (3), les Egyptiens considéraient les fractions à numérateur unitaire autrement dit, l'ensemble $\mathbb{E}$ des nombres qu'ils considèrent est celui des nombres s'écrivant sous la forme d'additions finies d'éléments de :

$$\mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Ainsi les Egyptiens n'écrivaient pas $\frac{133}{8}$ mais $16\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$ noté hiéroglyphiquement (en lisant de gauche à droite) :

Nous aurons l'occasion de montrer la manière opératoire des Egyptiens. Disons simplement qu'elle semble découler tout naturellement de la notation hiéroglyphique. Puisque chaque signe est répété autant de fois qu'il est nécessaire l'addition et la soustraction ne présentent pas de difficultés. Il n'en est pas de même de la duplication, c'est-à-dire de la multiplication par 2. La multiplication et la division en entiers s'effectuent par duplications successives et par addition. Par contre, dans $\mathbb{E}$ la multiplication et la division présentent de sérieuses difficultés. Les problèmes que nous allons étudier nous en montrerons quelques unes.

3) L'AUTEUR

En dehors du papyrus RHIND nous possédons peu de documents concernant les mathématiques égyptiennes. Citons le papyrus de MOSCOU dit de GOLENISCHEFF, le papyrus de BERLIN, le papyrus de KAHUN datés tous les trois approximativement 1850 avant J.C. Le plus ancien est le papyrus REISNER daté : 1880 avant J.C. Des tablettes de Thèbes sont elles plus anciennes puisqu'elles sont datées 2000 avant J.C. Tout comme le papyrus RHIND, le rouleau de cuir

est daté 1650 avant J.C. Pour le sujet qui nous occupe, tous ces documents n'apportent aucune nouveauté. Nous nous contenterons donc de suivre le texte du papyrus RHIND.

Conservé au British Museum (BM 10057 et BM 10058) plus quelques fragments au Musée de Brooklyn, le papyrus RHIND est un rouleau de papyrus écrit recto verso d'une longueur supérieure à cinq mètres pour une largeur de trente deux centimètres. Il tire son nom d'Alexandre Henry RHIND, un homme de loi écossais qui voyagea en Egypte, pour des raisons de santé. Dirigeant des fouilles dans la nécropole de Thèbes il acheta de nombreux documents (4). Le papyrus mathématique fut acheté par RHIND en 1858 et à sa mort il fut acquis par le British Museum.

Dès 1877 il fut traduit par l'allemand EISENLOHR. Dans les années 1920-1930 parurent deux traductions en langue anglaise celle de PEET et celle de CHACE. Toutes les trois ont été rééditées. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas de traduction française. Toutefois Geneviève GUITEL et Maurice CAVEING dans sa thèse La Constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque soutenue en 1977, pour ne citer qu'eux, en ont donné des extraits.

Le texte est écrit en hiératique en noir et en rouge. Pour une compréhension plus aisée, PEET et CHACE en donnent une traduction hiéroglyphique. En un certain sens, la connaissance de la langue égyptienne n'est pas nécessaire. Nous verrons en effet que les textes comportent peu de langage parlé et qu'en fait les textes se résument le plus souvent à une suite de nombres. Dès lors, ceci étant joint à une information très pauvre sur les écrits mathématiques égyptiens l'interprétation n'est pas toujours facile et certains textes ne sont pas encore déchiffrés (5).

Même si les traductions de PEET et de CHACE ne sont pas rigoureusement semblables, il est acquis que le titre du papyrus nous offre plusieurs informations. Il a été écrit par le scribe AHMES, ce dernier est ainsi le premier homme connu qui ait écrit des mathématiques. La date en est fixée : l'an 33 de Aouserré APOPHIS le grand souverain

HYKSOS de la XVIe dynastie. CHACE donne "la date approximative 1650 avant J.C" alors que dans la "Naissance de l'écriture" on trouve à la page 310 "vers 1600 av. J.C.". Le scribe nous dit qu'il a effectué une copie un papyrus plus ancien écrit sous le règne du roi AMENEMHAT III (6) de la XIIe dynastie. Autrement dit, les papyrus plus anciens précités appartiennent en fait au même milieu. Moins importants, il n'est donc pas étonnant qu'ils nous apportent peu d'informations nouvelles.

Quant au but du texte, il est lui aussi annoncé très clairement : "Règles pour scruter la nature et pour connaître tout ce qui existe, chaque mystère,..., chaque secret". Vaste programme qui a amené de nombreux historiens à gloser sur le propos avoué et sur ce qui figure effectivement dans le papyrus. Toutefois, si l'on peut contester le titre de "traité de mathématiques" il est sûr que nous sommes en présence d'une compilation de problèmes résolus : la théorisation étant placée sous le signe du secret !

Après cette introduction, le texte mathématique proprement dit débute par ce que l'on appelle généralement "une table de résolution de fractions dont le dénominateur est 2" (7). Il s'agit là d'un outil fondamental pour l'arithmétique égyptienne. Certes, dans le rouleau de cuir nous trouvons par exemple, ce que l'on peut traduire comme suit:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} ;$$

mais ici, il n'y a pas de répétitions et $\frac{2}{2n+1}$ est décomposé en fractions distinctes à numérateur 1. Par exemple :

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

Ceci est nécessaire pour utiliser la duplication : autrement dit, pour multiplier $\frac{1}{n}$ on utilise, soit la simplification, soit la duplication d'où la nécessité d'exprimer $\frac{2}{n}$ comme sorte de termes distincts de $\mathbb{E}$.

Après une table de division de 10 par les neufs premiers entiers (par exemple $\frac{10}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$)

viennent les six premiers problèmes concernant des partages

de miches de pain entre dix hommes. Mais ce caractère concret ne doit pas faire illusion : il s'agit simplement d'une illustration concrète de la table précédente. Que peut signifier concrètement : "chacun des neuf hommes reçoit $(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30})$" ?
Les problèmes 7 à 23 renouent avec le caractère arithmétique pur : les problèmes 16 à 20 étant même des multiplications de $\frac{1}{n}$ par $(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3})$ sans que l'on ait pris conscience que $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$!
viennent alors les problèmes 24 à 29 sujet de notre étude.

4) LE TEXTE

Si les problèmes 24 à 29 ne sont pas étudiés dans les livres récents français d'histoire des mathématiques (voir COLETTE, DAHAN-PEIFFER, DEDRON-DARD) ils ont par contre eu la faveur des auteurs étrangers. Ainsi, par exemple, BOYER (pp. 16-17), CAJORI (p. 13), SMITH (pp. 435-436) et TROPFKE (p. 385) traitent du problème tandis que VAN DER WAERDEN préfère le problème 26 dans ses deux ouvrages (1975, pp. 27-28) 1983 (pp. 160-161). En dehors des éditeurs du texte du papyrus aucun ne traite de l'ensemble de ces problèmes. Par contre, tous ne sont pas d'accord sur l'interprétation donnée. Mieux, Van der WAERDEN, en 1983 donne deux interprétations sans pencher en faveur de l'une ou de l'autre! C'est en fait, cette abstention qui nous a conduit à examiner en bloc, les problèmes 24 à 29.

Les quatre premiers ont la même structure. Traduits en termes algébriques, ils correspondent à la résolution de l'équation

$$x + \frac{1}{n}x = P \qquad \text{et} \quad x \in \mathbb{E}$$

où n et p sont des entiers donnés valant respectivement:

pour le problème 24 : 7 et 19,
pour le problème 25 : 2 et 16,
pour le problème 26 : 4 et 15,
et pour le problème 27 : 5 et 21.

Cette traduction algébrique est tout à fait conforme au texte lui-même. C'est ainsi que pour le problème 24 nous trouvons :

PEET : "A quantity whose seventh part is added to it becomes 19"
CHACE :"A quantity 1/7 added to it, becomes it 19",
GILLINGS : A quantity and its 1/7 added becomes 19. What is the quantity ? "
Autrement dit, traduit librement "une quantité et son septième ajoutés font 19". La signification est claire : le scribe parle de quantité qui peut jouer le rôle attribué à notre x d'aujourd'hui. La quantité est quelconque. L'interprétation algébrique n'est donc pas dénuée de tout fondement. Tous ne vont pas jusque là et, par exemple, pour CHACE "Les problèmes 24 à 38 sont tous, essentiellement, des problèmes de division par une expression fractionnaire" (p. 25).

Nous sommes en droit de nous poser le problème de cette manière. En fait, dans le cas précis qui nous occupe, le mathématicien égyptien aurait pu effectuer la division de 19 par $(1 + \frac{1}{7})$ selon les procédés du papyrus RHIND à savoir par multiplications successives de $(1 + \frac{1}{7})$ on cherche à obtenir 19. Le scribe aurait pu disposer ses calculs comme suit :

1	1	$\frac{1}{7}$		c'est-à-dire 1 - fois $(1+\frac{1}{7})$
2	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	c'est-à-dire par duplication 2 - fois $(1+\frac{1}{7})$ avec $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
4	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	car $4\ (1+\frac{1}{7}) = (2 \times 2)(1+\frac{1}{7}) = 2\ (2+\frac{1}{4}+\frac{1}{28})$
8	9	$\frac{1}{7}$		
✓ 16	18	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	on est ainsi "assez près" de 19
✓ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$		on doit maintenant utiliser les fractions et $(16+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{7}) = 18+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28} < 19$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$		$(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7}) = 18+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{1}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28} > 19$
✓ $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$		$(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})(1+\frac{1}{7}) = 18+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}}$

Or dans "la division de 2 par 97" on trouve que :

$$2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}) + \frac{1}{7} + \frac{1}{8},$$

autrement dit, que :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28},$$

d'où

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56},$$

ce qui montre bien que

$$(16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8})\ (1 + \frac{1}{7}) = 19$$

Et le scribe aurait marqué en face de 16 , $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$ un trait oblique pour montrer qu'il effectuait l'addition.

Toutefois ce schéma opératoire montre toute la difficulté de travailler dans $\mathbb{E}$ que ce soit arithmétiquement ou algébriquement : ici 19 semble choisi de manière providentielle. En fait il semble que ceci ne soit pas le propos du scribe puisque dans ce problème 24 seule la partie "une quantité et son système ajouté" est écrite en rouge tout le reste étant écrit en noir. Traduit en langage algébrique nous pourrions dire que le scribe résoud le problème suivant : "Soit a un élément donné quelconque de $\mathbb{E}$. Résoudre l'équation

$$x + \frac{1}{7}x = a \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{E}"$$

Lorsque a est un entier le problème est en effet résoluble. Il repose sur le fait que l'on peut multiplier $(1+\frac{1}{7})$ de manière à obtenir 1.

1	1	$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$	

Certes on utilise le fait que :

$$1 = \frac{7}{8}\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{4 + 2 + 1}{8}\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)$$

mais aussi les simplifications données dans le papyrus RHIND. Pour nous persuader de la difficulté nous pouvons voir que les valeurs de n choisies par le scribe sont simples. Evidemment puisque "la table de division de 2 par 2n+1" est limitée à 101 le scribe ne peut pas résoudre, de la manière précédemment indiquée

$$x + \frac{1}{103}x = 19 \text{ et } x \in \mathbb{E}$$

puisqu'il ne dispose pas de la "décomposition" de $\frac{2}{103}$.

Est ce pour cela que le scribe nous offre un autre type de résolution ? Les résolutions des problèmes 24 à 27 sont toutes du même type. Toutefois, seule la résolution du problème 26 est un peu plus explicite les autres laissant seulement subsister les calculs. GILLINGS ne note pas cela et donne le même schéma pour tous les problèmes 24 à 27. Par contre, c'est sans doute pour cela que Van der WAERDEN a choisi le problème alors que ses collègues lui ont préféré le problème 24. Il est à noter que pour Geometry and Algebra in Ancient Civilizations il donne le texte de PEET alors que dans Science Awakening il avait opté pour une autre traduction.

Sans nous livrer cette fois au petit jeu des traductions nous pouvons adopter la traduction libre suivante qui nous l'espérons ne froissera pas les égyptologues.

"Une quantité et son quart ajoutés font 15.
Opérez avec 4 ; vous faîtes le $\frac{1}{4}$ d'eux (8), à savoir 1, le total est 5.
Opérez avec 5 pour trouver 15

/ 1	5
/ 2	10

Cela fait 3.

Multipliez 3 par 4

1	3
2	6
/ 4	12

Ceci fait 12.

1	12
$\frac{1}{4}$	3
Total	15

La quantité est 12

Le $\frac{1}{4}$ est 3

Le total est 15"

Libérons-nous des vérifications en nombres et en langage courant tout en remarquant, avec PEET, qu'une seule figure dans les problèmes 24,25 et 27. Le scribe s'est donc voulu délibérément plus explicite pour le problème 26 que pour les autres. Est-ce parce qu'il occupe une place centrale dans cette partie de problèmes ? Comme le montre le schéma suivant :

Problèmes

<table>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">21 - 23</td><td rowspan="3">6</td><td rowspan="5">1 - 5</td><td rowspan="5">"table de division de 2 par (2n+1)"</td></tr>
<tr><td>25</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">blanc</td><td rowspan="3">7 - 20</td></tr>
<tr><td>29 | 28</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
</table>

Ou bien l'ordre était-il différent dans l'original ? Ou encore l'auteur ne livre-t-il son secret qu'après deux tentatives ?

Difficile de trancher. Toujours est-il que nous plaçant dans le cadre général précité - résolution de l'équation

$$x \in \mathbb{E} \text{ et } x + \frac{1}{n} x = p$$

l'auteur procède en trois étapes.

Première étape "Opérez avec n, vous faites le $\frac{1}{n}$ d'eux," à savoir 1, le total est (n+1)

Problème 24 (n=7)

1	7
$\frac{1}{7}$	1

Problème 25 (n=2)

1	2
$\frac{1}{2}$	1

Problème 27 (n=5)

1	5
$\frac{1}{5}$	1
total	6

Deuxième étape "Opérez avec (n+1) pour trouver p" à savoir "divisez p par (n+1)"

Problème 24

1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

$(\frac{P}{n+1} = \frac{19}{8} = 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$

Problème 25

1	3
2	6
4	12
$\frac{2}{3}$	2 (9)
$\frac{1}{3}$	1

$(\frac{25}{3} = 5+\frac{1}{3})$

Problème 26

1	5
2	10
Ceci fait 3	

$(\frac{15}{5} = 3)$

Problème 27

1	6
2	12
$\frac{1}{2}$	3
Total 21	

$(\frac{21}{6} = 3+\frac{1}{2})$

Troisième étape "Multipliez $\frac{P}{n+1}$ par n"

Problème 24

1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
4	9	$\frac{1}{2}$	

Le fait tel qu'il apparaît

La quantité 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ 5 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

Total 19

Problème 25

1	5	$\frac{1}{3}$	
2	10	$\frac{2}{3}$	

Le fait tel qu'il apparaît

La quantité 10 $\frac{2}{3}$

Total 16

Problème 26

1	3
2	6
4	12

Ceci fait 12 et les deux vérifications

Problème 27

1	3	$\frac{1}{2}$
2	7	
4	15 (10)	

La quantité est 17 $\frac{1}{2}$ son $\frac{1}{5}$ est 3 $\frac{1}{2}$

Le total est 21

Les textes sont là : il nous reste à les interpréter. La plupart des historiens voient là une application de la méthode de "fausse position". De quoi s'agit-il ? Plaçons nous dans le cadre général de la résolution de

"$ax = b$ et $x \in A$."

Adoptant une "fausse position" ou une "fausse supposition" x_o on obtient

$$ax_o = b_o$$

En général, b_o est distinct de b : sinon la résolution est considérée comme terminée puisque l'on a trouvé une solution x_o . Dès lors, on obtient x en fonction de b, b_o et x_o sous réserve de la possibilité des opérations dans le domaine A :

(1) $$x = x_o \times (b:b_o) = bx\ (x_o:b_o)$$

Ici, il semble bien en effet que l'auteur ait appliqué cette méthode : il suffit de considérer que "opérez avec n" signifie "adoptez la fausse position n" bien naturelle pour obtenir un entier lorsque l'on doit en prendre la n-ième partie. La deuxième étape correspond bien à la division de b par b_o et la troisième étape à la multiplication de $(b:b_o)$ par x_o .

Cette explication est fort séduisante puisqu'elle répond au texte lui-même. Néanmoins il va sans dire que la règle opératoire (1) n'est pas immédiate. Ceci semble très éloigné des exercices précédents où le scribe ne semble pas remarquer que

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

ou même du calcul du tiers de 3 dans le problème 25 où le scribe calcule d'abord les deux tiers puis le tiers. Dans ces conditions certains ont été tentés d'émettre une autre hypothèse. Sans prétendre à l'exhaution, écoutons Van Der WAERDEN dans Science Awakening :

> "L'explication ci-dessus me paraît-être la plus simple. Mais je ne dois pas manquer de mentionner le fait que NEUGEBAUER considère la "fausse supposition" comme une légende et qu'il interprète le début de la résolution ("calculer avec 4, prendre un quart, égal à 1

ensemble 5)"(11) de manière différente comme une résolution avec des inconnues auxiliaires :

$$1 + \frac{1}{4}$$

$$4 + 1 = 5$$

(O NEUGEBAUER, Quellen und Studien). D'un autre côté il semble qu'il y ait peu de justifications pour les auxiliaires, puisque la division 15 : (1+4) peut être facilement effectuée sans les utiliser"(p28)

En 1983 il ne reprend pas la même explication

"Une autre explication a été donnée dans la quatrième édition de J.TROPFKE : Geschichte der Elementarmathematik (Berlin 1980 p.385) On divise la quantité inconnue en 4 parties égales. Cinq de ces parties sont égales à 15, ainsi chaque part est égale à 3, et la quantité d'origine était 4x3=12.

En faveur de cette interprétation on peut ajouter le fait que le scribe calcule 4 fois 3 et non 3 fois 4"(p.161)

C'est effectivement l'explication fournie dans l'ouvrage précité :

"Dans le papyrus RHIND on trouve le problème 24 : Une quantité et son septième est 19 (12)

$$x + \frac{x}{7} = 19.$$

Les problèmes suivants sont :

$$25.\quad x + \frac{x}{2} = 16, \quad 26.\quad x + \frac{x}{4} = 15, \quad 27.\quad x + \frac{x}{5} = 21.$$

Ils ont tous la forme :

$$x + \frac{x}{n} = a;$$

On peut comprendre la résolution comme suit : on partage la quantité de la grandeur x en n parties 1) de grandeur t, ainsi on a x = nt. Alors on a t. (n + 1)= a
Le texte donne seulement les calculs. Ils se déroulent comme suit a est divisé par (n + 1) et le résultat sera multiplié par n (voir [VM, 1, 55]).

1) Cette interprétation est plus simple et correspond

mieux à la suite des opérations qui consiste à considérer n comme nombre essai pour une fausse-supposition".

Notons toutefois que Kurt VOGEL co-auteur de l'ouvrage qui renvoie d'ailleurs à son ouvrage, considère le problème 24 et non pas le problème 26. Tout revient à considérer la signification de la première étape "Opérez avec n, vous faîtes le $\frac{1}{n}$ d'eux, à savoir 1, le total est (n + 1)". Van der WAERDEN n'a pas mis l'accent sur "eux" puisque sa traduction est différente. Autrement dit, aucun de ces auteurs n'a considéré le texte essai. Il va sans dire que la traduction est ambigue mais qu'en un certain sens on peut traduire comme suit "Opérez avec n quantités, vous faîtes le $\frac{1}{n}$ d'elles, à savoir 1" qui est ainsi tout à fait dans la ligne du changement d'inconnue. De toute façon, changement d'inconnue ou fausse supposition le scribe part de n pris comme signifiant soit n fois la nouvelle inconnue ou une fausse supposition.

Peut être que l'examen des problèmes 28 et 29 nous aidera à pencher en faveur de l'une ou de l'autre des hypothèses. TROPFKE est le seul à les examiner en même temps, VOGEL ayant seulement considéré le problème 28. GILLINGS pour sa part leur réserve un chapitre particulier en les rangeant sous le titre de problèmes "pensez à un nombre". Autant dire que l'éclaircissement de la situation n'est pas a priori aisé.

Comme indiqué précédemment sur le schéma du papyrus les problèmes 28 et 29 sont l'un en face de l'autre ; seul le problème 28 comporte des explications, le problème 29 étant réduit à une suite de calculs.

Traduits algébriquement PEET et CHACE considèrent que ces problèmes correspondent à la résolution des équations:

28 : $x \in \mathbb{E}$ et $x+\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x) = 10$,

29 : $x \in \mathbb{E}$ et $\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x)) = 10$.

Avant d'examiner les textes nous pouvons essayer de les traiter à l'aide des méthodes précédemment indiquées.
Adoptant la fausse supposition 9 pour le problème 28 nous

sommes conduits à présenter les calculs suivants "à la manière égyptienne" :

/ 1	9	1	15	/ 10	
/ $\frac{2}{3}$	6	$\frac{2}{3}$	10	/ 5	
Total	15	$\frac{1}{3}$	5	Total	15

Surprise ! 9 est la solution !

De même, pour le problème 29, nous adoptons cette fois afin d'éliminer les nombres fractionnaires purs, la fausse supposition 27 :

/ 1	27	1	45	/ 45	1	60
/ $\frac{2}{3}$	18	$\frac{2}{3}$	30	/ 15	$\frac{2}{3}$	40
Total	45	$\frac{1}{3}$	15	Total 60	$\frac{1}{3}$	20

Cette fois, on obtient 20 distinct de 10, donc 27 n'est pas solution.

Revenons à notre résolution de

$$ax = b \quad \text{et} \quad x \quad A$$

A partir de

$$ax_o = b_o$$

Nous avons écrit :

$$(1)\ x = x_o\ (b : b_o) = b\ (x_o : b_o).$$

et par suite deux possibilités

$x = x_o\ (b : b_o)$ 1 20

$\frac{1}{2}$ 10

c à d $\frac{b}{b_o} = \frac{20}{10} = \frac{1}{2}$

/ 1	$\frac{1}{2}$
/ 2	1
4	2
/ 8	4
/ 16	8
Total	$13\frac{1}{2}$

$27\ (\frac{1}{2}) = 13\frac{1}{2}$

$x = b\ (x_o : b_o)$

/ 1	20	/ 1	10
$\frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{2}$	5
/ $\frac{1}{4}$	5	/ $\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
/ $\frac{1}{10}$	2	/ $\frac{1}{10}$	1
c à d $\frac{x_o}{b_o} = \frac{27}{20} = 1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{10}$		Total	$13\ \frac{1}{2}$

$10\ (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}) = 13\frac{1}{2}$

Venons-en maintenant au texte lui-même. D'après CHACE nous traduisons comme suit (ce qui est encadré est en rouge)

Problème 28

$\frac{2}{3}$ est : être ajouté $\frac{1}{3}$ est : être soustrait 10 reste. Faire $\frac{1}{10}$ de ce 10

ceci devient 1, le reste est : 9, $\frac{2}{3}$ de lui à savoir 6 est : être ajouté à lui

le total est 15, $\frac{1}{3}$ de lui est 5. le 5 est ce qui était retranché le reste est 10

Le fait tel qu'il apparaît.

Problème 29

1	10
$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{10}$	1
Total	$13\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$	9	
Total	$22\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}20$
$\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}10$
Total	30	

Le problème 28 paraît lui aussi être incomplet et son énoncé est écrit en langage "elliptique" comme dit PEET. Vu leur traduction algébrique et leur proximité sur le papyrus il semble bien que les problèmes soient intimement liés. Nous avons vu que pour les problèmes 24 à 27 la rédaction pouvait différer. On peut considérer qu'ici l'auteur a

eu du mal à percer "tous les secrets" ou plutôt n'a peut être pas voulu tous les donner ou encore que devant une solution partielle le scribe a été amené à échafauder ses propres solutions. Quoiqu'il en soit,la méthode de fausse position telle que nous l'avons pratiquée précédemment nous offre des observations très utiles. D'une part la fausse supposition naturelle 9 est solution du problème 28 et le scribe s'évertue à trouver 9 à partir de 10 en lui retranchant $\frac{1}{10}$. D'autre part, dans le problème 29 nous Trouvons le calcul de b $(x_o : b_o)$ tel que nous l'avons formulé. Il semble donc qu'il n'y ait pas de doute.

Nous n'avons pas encore parlé de l'écriture rouge. Ceci nous fournit ici un argument supplémentaire car en fait, le scribe propose de résoudre

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = b \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{F}$$

où b est un entier donné. Sauf dans le cas où b est égal à 10 la méthode de fausse position est applicable puisque nous obtenons

$$x = \frac{9\ b}{10}$$

et le scribe sait toujours diviser par 10 puisque ceci revient à changer l'ordre de grandeur ; autrement dit l'équation est résoluble. Nous pouvons simplement nous étonner du fait que l'auteur ait choisi justement 10 pour valeur de b.

Quant au problème 29, si nous conservons la méthode de fausse position nous voyons qu'à la différence des problèmes 24 à 27, la formule de résolution est cette fois

$$x = b\ (x_o : b_o)$$

et non pas

$$x = x_o(b : b_o)$$

Ceci élimine, du même coup, le changement de variable.

Quant à l'interprétation donnée par GILLINGS, nous pouvons dire qu'elle ne peut se justifier que si l'on veut bien traduire le texte en ces termes "Penser à un nombre. Lui ajouter ses $\frac{2}{3}$. A cette somme retrancher son $\frac{1}{3}$. Dire la réponse". Le problème 30 qui suit se traduit lui aussi en des termes semblables quant au procédé interrogatif

"si un scribe te dis : 10 est devenu le $\frac{2}{3}\ \frac{1}{10}$ de quoi?" Mais la démonstration le terme "quantité" reparait. Autrement dit, ce n'est peut être pas parce que "quantité" ne figure pas dans les problèmes 28 et 29 qu'il faut à tout prix l'éliminer implicitement. De toute façon, à notre avis, ceci ne vaut pas la peine de se quereller. Nous devrions avoir une meilleure connaissance du hiératique pour nous permettre de pencher envers l'une ou l'autre des hypothèses et de plus traduites en termes algébriques, les deux interprétations conduisent au même résultat.

Du point de vue strictement mathématique GILLINGS n'explique ni le fait de retrancher $\frac{1}{10}$ ni le fait de multiplier par $1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{10}$. Or, la méthode de fausse position nous permet d'expliquer facilement ces opérations si nous voulons bien, comme nous y invite GILLINGS, généraliser le problème en prenant b donné entier.

28 $\quad x \in \mathbb{E}$ et $x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = b,$

29 $\quad x \in \mathbb{E}$ et $\frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)) = b.$

Pour le problème 28 prenant comme fausse supposition 9 on obtient

$$x = b\,\frac{9}{10} = b\ (1 - \frac{1}{10}).$$

De même, pour le problème 29 en prenant comme fausse supposition 27 on obtient

$$x = b\,\frac{27}{20} = b\ (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}).$$

Dès lors nous voyons bien que ces deux problèmes sont tout à fait semblables et qu'ils reposent tous les deux sur la méthode de fausse position. Notre première hypothèse concernant une explication plus ou moins fantaisiste du scribe est à rejeter et ainsi nous formulons les conclusions suivantes :

Les problèmes 24 à 29 peuvent être considérés comme les problèmes de résolutions d'équations du premier degré (13)

$$x \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad ax = b$$

où a et b sont donnés appartenant respectivement à $\mathbb{E}$ et à $\mathbb{N}^*$. Ils sont tous résolus par la méthode de fausse position. A partir de l'hypothèse x_o on obtient

$$ax_o = b_o$$

Pour les problèmes 24 à 27 l'auteur conduit les opérations correspondant à la formule

$$x = x_o (b : b_o)$$

tandis que pour les problèmes 28 à 29, la formule est

$$x = b\ (x_o : b_o)$$

5) L'APRES

A notre connaissance, nous sommes les premiers à avoir formulé les conclusions précédentes. Nous examinerons "l'après" à la lumière de ces affirmations.

Nous pouvons tout d'abord nous interroger sur la valeur mathématique des résolutions proposées. Nos connaissances des écritures hiératiques et hiéroglyphiques sont trop rudimentaires pour nous permettres de trancher entre les diverses interprétations données du caractère de ces problèmes : problèmes de quantités, division d'un entier par un nombre "fractionnaire" égyptien, problème "penser un nombre" ou même résolution de système. Nous nous permettons seulement une affirmation concernant l'interprétation : "ces problèmes peuvent être considérés comme des problèmes de résolution d'équation du premier degré". En opérant de cette manière, nous avons un comportement semblable à celui qui examine algébriquement un problème arithmétique.

Nous y avons été conduit naturellement car les textes ne sont le plus souvent qu'une suite de calculs. Mais nous ne disons pas qu'il s'agit d'algèbre bien que certains textes portent sur des quantités par nature générales.

L'examen des problèmes 28 et 29 nous a montré que l'auteur pouvait et avait sans doute en vue la résolution des équations suivantes

28 : $x \in \mathbb{E}$ et $x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = b$

29 : $x \in \mathbb{E}$ et $\frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = b$

où b est un entier naturel non nul. Il nous reste à examiner une généralisation éventuelle des problèmes 24 à 27.

Nous avons vu que le scribe avait le choix entre deux formules :

(1) $x = x_c\ (b : b_c)$ et (2) $x = b\ (x_o : b_o)$

Il est à noter que nous pouvons trouver une raison de choisir dans le fait suivant. Dans tous les cas l'auteur a pu aisément effectuer la division. Les problèmes 24 à 27 sont de la forme :

$$x \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad x + \frac{x}{n} = b$$

et la résolution proposée donne la solution à l'aide de (1)

$$x = n \ (b : n + 1)$$

tandis que 28' et 29' utilisent (2)

$$x = b \ (9 : 10) = b - \frac{b}{10} \quad , \quad x = b \ (27 : 20) = b \ (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10})$$

Nous pouvons noter que, à l'exception du problème 28, les divisions correspondent à des nombres supérieurs à 1. Quant au problème 28, la méthode "soustractive" proposée est plus simple que celle qui consisterait à utiliser la table de division par 10 donnant :

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$$

Compte tenu de cet état de fait nous pouvons dire que l'Egyptien est amené à choisir d'une part x et d'autre part une des formules (1) et (2) de manière à ce que la division soit aisée à mener dans $\mathbb{E}$. Pour mettre en évidence la valeur du choix effectué par l'auteur il suffit de comparer les méthodes. Dans ce cas du problème 28 nous avons à effectuer alors la division de b par 10. Ceci ne présente aucune difficulté étant donné l'écriture égyptienne des nombres et la connaissance de la table de division des nombres de 1 à 9 par 10. De même, pour le problème 29', la division par 20 est aisée. Nous pouvons même constater que pour la valeur choisie par l'auteur, a savoir 10, la formule (1) est plus simple. Pour une autre valeur la résolution est assez semblable mais l'application de la formule (2) permet une résolution générale. Par exemple, on pourrait traiter, à l'aide de la formule (1), l'équation suivante

$$x \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left[(x + \frac{2}{3}x) + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3})\ x\right] = 19$$

Comme suit :

$19 : 20 = \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$	$27\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5})$	$19\ (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10})$
1 20	/ 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$	/ 1 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$
/ $\frac{1}{2}$ 10	/ 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$	/ 2 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$
/ $\frac{1}{4}$ 5	4 3 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$	4 5 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$
/ $\frac{1}{5}$ 4	/ 8 7 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$	8 10 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$
	/ 16 15 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{30}$	/ 16 21 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$
	Total 25 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{15}$	Total 24 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$

Les calculs sont tout à fait semblables.

Examinons ce qu'il en est pour les problèmes 24 à 27. Le problème 26 va nous montrer la difficulté de l'entreprise. Il faut en effet diviser 4 par 5 et ceci n'est pas aisé 5 étant premier . Certes nous connaissons un résultat obtenu à l'aide de la table donnant $\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{15}$.

$$\frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{2}{5} = 2\ (\frac{1}{3} + \frac{1}{15}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

mais ceci nous montre bien la difficulté de la tâche. Nous devons tâtonner en essayant divers multiples de 5 et la division est ainsi difficile

1	5
/ $\frac{2}{3}$	$3\ \frac{1}{3}$
/ $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
/ $\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi aucun doute n'est permis, le scribe a bien choisi la meilleur solution.

En fait nous ne devons pas donner trop de louanges

à l'auteur des résolutions car il a choisi, pour le problème 26, la valeur 15. S'il avait choisi, par exemple, la valeur 14 nous aurions été aux prises avec les mêmes difficultés. Autrement dit, compte tenu des connaissances opératoires à l'intérieur du domaine $\mathbb{E}$ nous ne pouvons pas généraliser les problèmes 24 à 27 sauf à généraliser la "table de division de 2 par (2n + 1)" ce qui est un vaste problème. Nécessairement, ici, le mathématicien égyptien est prisonnier de la structure de $\mathbb{E}$: celle-ci n'est pas très riche !

Examinons maintenant l'influence qu'ont pu avoir de telles méthodes. Nous serons très brefs. Dans le papyrus RHIND nous trouvons d'autres méthodes de résolution mais aussi les mêmes méthodes. Rien n'explique toutefois comment les Egyptiens ont pu être amenés à opérer de cette manière.

Quant à la méthode de fausse position nous renvoyons à SMITH

> "La règle simple telle qu'elle a été utilisée au Moyen Age, semble nous venir de l'Inde, mais ce furent les Arabes qui la firent connaître en Europe" (p.437)

et à l'étude qu'à menée Maryvonne SPEISSER "Equations du premier degré : méthode de fausse position". Le passage des Egyptiens aux Indiens reste toutefois à élucider.

NOTES

(1) On peut consulter avec profit l'ouvrage de François RUSSO Nature et méthode de l'histoire des sciences Blanchard, PARIS, 1983.

(2) L'examen des textes anciens s'effectue souvent de manière plus moderne que le propos du texte lui-même. Par exemple Roshi RASHED examine les "livres arithmétiques de DIOPHANTE à la lumière de la géométrie algébrique.

(3) Nous laissons de côté le "pourquoi" de "la fraction $\frac{2}{3}$ ".

(4) Outre le papyrus mathématique RHIND et le rouleau de cuir, il existe deux autres papyrus dénommés papyrus RHIND I et papyrus RHIND II qui ne traitent pas de mathématiques et qui sont au Royal Scottish Museum d'Edimbourg.

(5) L'absence de discours est a rapprocher des rédactions de nos élèves où quelques implications jetées au hasard suffisent, à ce qu'ils croient, à la compréhension. Le rapprochement avec les textes égyptiens peut être salutaire!

(6) ROBERT p. 58 AMENEMHET ou AMENEMHAT ou AMMENEMES
p. 61 AMMENEMES III (v. 1850 - 1800) Fils et successeur de Sésostris III, il entreprît l'exploitation économique du Fayoum, fit creuser le lac Moeris et construire la pyramide et le temple de Haouârah (le Labyrinthe).

(7) En fait le propos est plus complexe : on trouve une décomposition de 2 en fractions égyptiennes permettant une décomposition de $\frac{2}{2n+1}$ en fractions égyptiennes. Nous développerons ce sujet dans un autre article en préparation.

(8) PEET attire notre attention sur 4 traité comme un pluriel.

(9) Comme c'est souvent le cas, l'égyptien calcule d'abord les deux tiers pour obtenir le tiers.

(10) Sans doute : erreur du copiste.

(11) Nous citons en anglais "calculate with 4, take a fourth part, equal 1, together 5"

(12) Citons le texte allemand "Ein Haufen und sein Siebtel ist 19".

(13) Il va sans dire qu'ainsi nous n'adoptons pas le point du vue de TROPFKE qui considère que le problème 29 correspond à la résolution de

$x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{E}$ et $z \in \mathbb{E}$ et $x+\frac{2}{3}x = y$ et $y+\frac{1}{3}y = z$ et $\frac{1}{3}z = 10$

(14) Nous laissons en exercice le soin de montrer qu'il est necessaire d'avoir une fraction unitaire dont le dénominateur est supérieur ou égal à 30.

BIBLIOGRAPHIE

BOYER, C, B ;

A history of mathematics
Wiley, New-York, 1968.

CAJORI, F ;

A history of mathematics
3e ed. chelsea, New-York, 1980.

CAVEING, M ;

La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque. Thèse 1977 (3vol) Reimp. Université de Lille III, 1982.

CHACE, A ;

(vol I) The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Free translation and commentary by Arnold Buffum Chace with the assistance of Henry Parker MANNING Bibliography of egyptian mathematics by Raymond Clare Archibald
Oberlin, OHIO, 1927.
vol II Photographs, Transcription transliteration, Literal Translation by Arnold Buffun CHACE, Ludlow BULL and Henry Parker MANNING Bibliography of Egyptian and Babylonian Mathematics
(Supplement) by Raymond Clare Archibald
The Mathematical Leather Roll in the British museum by Stephen Randolf Kingdon GLANVILLE
Oberlin, OHIO, 1979.

COLLETTE, J-P ;

Histoire des mathématiques vol 1
Editions du Renouveau Pédagogique, MONTREAL, 1973.

DAHAN-DALMEDICO, A ; PEIFFER, J ;

Routes et dédales
Etudes Vivantes, PARIS, 1982.
(Diffusé par la librairie Blanchard).

DEDRON, P ; ITARD, J ;
Mathématiques et mathématiciens
Magnard, PARIS, 1959.

EISENLOHR, A ;
Ein mathematisches handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt (2 vol)
LEIPZIG, 1877
Reimp : Sandig, WIESBADEN, 1972.

GILLINGS, R ;
Mathematics in the time of the Pharaohs
Mit Press, CAMBRIDGE, 1972.

GUITEL, G ;
Histoire comparée des numérations écrites
Flammarion, PARIS, 1975.

IFRAH, G ;
Histoire universelle des chiffres
Seghers, PARIS, 1981.

PEET, T, E;
The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Introduction, transcription and commentary
Hodder and Soughton, LONDON, 1923.
Reimp : LEIDEN 1977

RASHED, R ;
DIOPHANTE, les Arithmétiques tome III, livre IV, texte établi et traduit.
Les belles Lettres, PARIS, 1984.

ROBERT, P ;
Le Petit Robert 2. Dictionnaire universel des noms propres alphabétique et analogique
Le Robert, PARIS, 4ème ed. 1980.

RUSSO, F ;
Nature et méthode de l'histoire des sciences
Blanchard, PARIS, 1983

SMITH, D, E ;

History of mathematics vol II
Reimp : Dover, New-York, 1958.

TROPFKE, J ;

Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage Band 1. Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bear beitet von kurt VOGEL, Karim REICH, Helmuth GERICKE Walter de Gruyter, BERLIN 1980.

VOGEL, K ;

Vorgriechische Mathematik I. Vorgeschichte und Ägypten
Hermann Schroedel, Hannover, 1958.

Van der WAERDEN, B, L ;

Science Awakening I English translation by Arnold DRESDEN with additions of the author. 4e ed. Noordhoff, LEYDEN, 1975.

Van der WAERDEN, B, L ;

Geometry and Algebra in Ancient Civilizations
Springer-Verlag, BERLIN, 1983.

X ;

Naissance de l'écriture. Cunéiformes et hiéroglyphes.
Galeries nationles du Grand Palais 7 mai-9 aout 1982
Réunion des musées nationaux, PARIS, 1982.