François De Gandt

UNE PREMIERE PRESENTATION DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE :

LE MANUSCRIT "DE MOTU" DE 1684.

DU MOUVEMENT DES CORPS SUR DES ORBITES

(Isaac Newton, 1684)

Définition 1 : J'appelle force centripète la force par laquelle un corps est poussé ou attiré vers un point quelconque considéré comme un centre.

Définition 2 : Et j'appelle force d'un corps, ou force interne à un corps, la force par laquelle ce corps s'efforce de persévérer dans son mouvement selon une ligne droite.

Définition 3 : Et résistance, l'enpêchement régulier dû au milieu.

Hypothèse 1 : La résistance est nulle dans les neuf propositions suivantes, ensuite elle est comme la vitesse du corps et la densité du milieu prises ensemble.

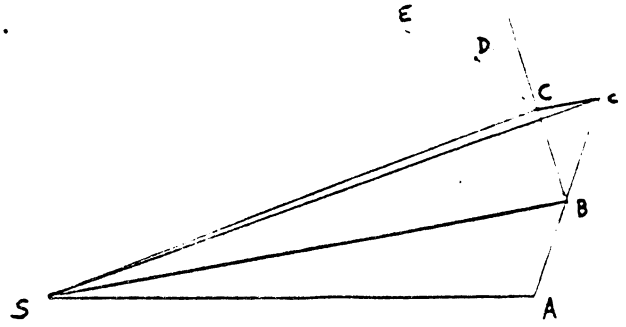
Hypothèse 2 : Tout corps, par sa seule force interne, s'avance uniformément selon une ligne droite, à moins que quelque chose d'extérieur ne l'en empêche.

Hypothèse 3 : Un corps, dans un temps donné, est porté par plusieurs forces réunies au même endroit où il serait porté successivement par ces forces divisées en des temps égaux.

Hypothèse 4 : L'espace qu'un corps décrit sous l'action d'une force centripète quelconque au commencement de son mouvement, est en raison double du temps.

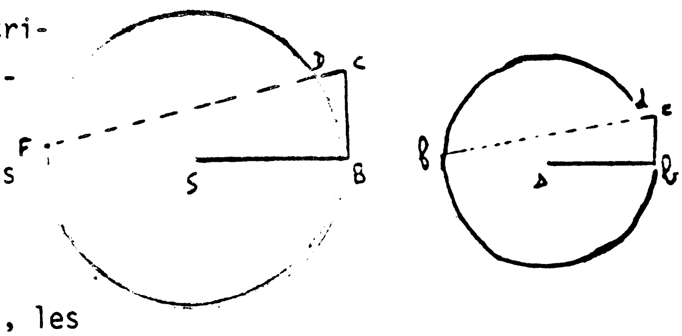
Théorème 1 : Sur leur orbite tous les corps décrivent, par les rayons menés au centre, des aires proportionnelles aux temps.

Que le temps soit divisé en parties égales, et que dans la première partie de temps le corps décrive, par sa force interne, la droit AB. Dans la seconde partie de temps, si rien n'empêchatt ce même corps, il continuerait en ligne droite (Hyp.1) jusqu'en c, décrivant la ligne droite Bc égale à la ligne AB, si bien que par les rayons AS, BS, cS menés au centre, seraient parcourues des aires égales ASB, BSc. Mais lorsque le corps arrive en B, que la force centripète agisse, par une impulsion unique mais importante, et oblige le corps à se détourner de la droite Bc et à continuer sur la droite BC. Que l'on trace, parallèlement à BS, la droite cC qui coupe BC en C ; à la fin de la seconde partie de temps, le corps se trouvera en C (Hyp.3). Joignez SC, et le triangle SBC, à cause des parallèles SB, Cc, sera égal au triangle SBc, et donc aussi égal au triangle SAB. Par un argument semblable, si la force centripète agit successivement en C,D,E, etc.... et fait décrire au corps, dans chacun des moments de temps, chacune des droites CD, DE, EF, etc..., le triangle SCD sera égal au moments de temps, chacune des droites CD, DE, EF, etc..., le triangle SCD sera égal au triangle SBC, et SDE égal à SCD, et SEF à SDE. Donc en des temps égaux sont décrites des aires égales. Maintenant que ces triangles soient en nombre infini et infiniment petits,de manière qu'à chacun des moments du temps corresponde chacun des triangles, la force centripète agissant alors sans interruption, la proposition sera établie.



Théorème 2: Si des corps tournent uniformément sur des circonférences de cercles, les forces centripètes sont comme les carrés des arcs simultanément décrits divisés par les rayons des cercles.

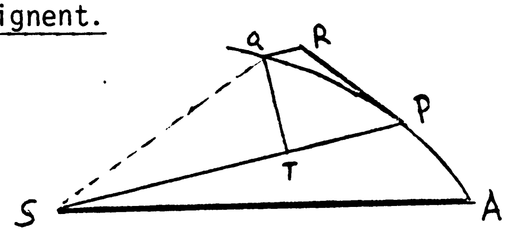
Que les corps B et b, tournant sur les circonférences de cercles BD et bd, décrivent simultanément les arcs BD et bd. Par leur seule force interne, ils décriraient les tangentes BC et bc, égales à ces arcs. Ce sont les forces centripètes qui retirent perpétuellement les corps depuis les tangentes jusqu'aux circonférences, et donc elles sont entre elles comme les distances CD et cd gagnées par les corps, c'est à dire, en prologeant CD et cd jusqu'en F et f, elles sont comme BC^2/CF à bc^2/cf, ou $BD^2/\frac{1}{2}$ CF à $bd^2/\frac{1}{2}$ cf. Je parle d'espaces BD et bd très petits et diminuant à l'infini, de sorte qu'à la place de $\frac{1}{2}$ CF et $\frac{1}{2}$ cf il est permis d'écrire SB et sb, les rayons des cercles. Cela fait, la proposition est établie.



Corollaire 1. Par conséquent, les forces centripètes sont comme les carrés des vitesses divisés par les rayons des cercles.
Corollaire 2. Et inversement, comme les carrés des temps périodiques divisés par les rayons.
Corollaire 3. Donc si les carrés des temps périodiques sont comme les rayons des carcles, les forces centripètes sont égales. Et réciproquement.
Corollaire 4. Si les carrés des temps périodiques sont comme les carrés des rayons, les forces centripètes sont inversement comme les rayons et réciproquement.
Corollaire 5. Si les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des rayons, les forces centripètes sont inversement comme les carrés des rayons. Et réciproquement
Scolie. Le cas du corollaire 5 a lieu pour les corps célestes. Les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des distances à partir du centre commun autour duquel tournent ces corps. C'est le cas des grandes planètes tournant autour du soleil,

et des petites autour de Jupiter et Saturne, ainsi que l'ont déjà établi les astronomes.

Théorème 3 : Si un corps tournant autour d'un centre S décrit une ligne courbe quelconque, et qu'une droite PR soit tangente à la courbe en un point quelconque P, et que d'un autre point quelconque Q de la courbe on mène QR parallèle à la distance SP : je dis que la force centripète est inversement comme le solide $SP^2 \times QT^2/QR$, pourvu que l'on prenne toujours la quantité de ce solide telle qu'elle devient ultimement lorsque les points P et Q se rejoignent.



En effet, dans la figure infiniment petite QRPT, la toute petite ligne QR est, dans un temps donné, comme la force centripète, et pour une force donnée, comme le carré du temps (hyp. 4), et par suite, si aucune n'est donnée, elle est comme la force centripète et le carré du temps pris ensemble, c'est-à-dire comme la force centripète et le carré de l'aire SQP proportionnelle au temps (ou le double de cette aire SP×QT). Que l'on divise les deux côtés de cette proportionnalité par la ligne QR, et l'unité sera comme la force centripète et $SP^2\ QT^2/QR$ pris ensemble, c'est-à-dire que la force centripète est inversement comme $SP^2 \times QT^2/QR$.

Le texte ci-joint provient d'un manuscrit de Newton intitulé De Motu corporum in gyrum . L'extrait traduit constitue le début du texte, soit environ un cinquième du texte total.

L'intérêt principal de ce manuscrit est qu'il contient sous une forme plus simple et plus brève plusieurs théorèmes essentiels des Principia . La rédaction de cet ouvrage s'est en effet poursuivie de la fin de l'année 1684 jusqu'à la publication en 1687, et nous possédons plusieurs ébauches préparatoires, toutes bâties sur la même trame : progressivement les matériaux s'accumulent, le raisonnement devient plus raffiné, Newton ajoute de longs préambules, greffe des études particulières et des variantes sur la charpente initiale. Au terme de cette croissance par accrétion et développement, le résultat est un livre énorme et très difficile d'accès: les Philosohiae Naturalis Principia Mathematica . Alors que le manuscrit de 1684 comprend seulement 4 théorèmes et 7 problèmes, qui pourraient tenir en une vingtaine de pages, les Principia contiendront 193 propositions (théorèmes ou problèmes), soit environ 500 pages.

Dans cette série de manuscrits qui aboutit aux Principia, le texte présenté ici est le premier ou l'un des premiers. Voici le schéma de l'ensemble du manuscrit:

- d'abord une série d'énoncés initiaux:
  - trois définitions portant sur la force centripète, la force interne (vis insita) et la résistance;
  - quatre hypothèses, dont la deuxième est le principe d'inertie;
- ensuite viennent trois théorèmes fondamentaux:
  - le premier est la loi des aires (déjà formulée par Kepler sans démonstration rigoureuse);
  - les deux autres sont relatifs à la force qui retient un corps sur une orbite circulaire (th. 2) ou quelconque (th. 3);

- le théorème 3 est mis en application dans les trois problèmes qui suivent:
  - le problème 1 détermine la loi de variation de la force centripète dans le cas d'un mobile qui parcourt un cercle sous l'action d'un centre de forces situé sur la circonférence;
  - le problème 2 étudie le cas d'une orbite elliptique avec un centre de forces situé au centre de l'ellipse;
  - le problème 3 porte aussi sur une orbite elliptique, mais le centre de forces est situé en un foyer (Newton démontre que dans ce cas la force est en $1/r^2$);
- ce résultat très important est suivi d'un théorème 4 qui établit la troisième loi de Kepler, comme conséquence d'une variation de la force en $1/r^2$.
- Le reste est constitué par des problèmes, parfois accompagnés d'un scolie qui en détaille les applications et les prolongements:
  - Problème 4 : on cherche l'ellipse décrite par un corps attiré en $1/r^2$, pour une position et une vitesse initiale données;(un Scolie concerne l'application aux comètes, et le calcul approché des secteurs d'ellipse à partir du foyer -problème "de Kepler" -);
  - Problème 5 : si un corps tombe verticalement, on cherche les espaces parcourus après des temps donnés (la force varie comme $1/r^2$);
  - Les deux derniers concernent le mouvement en milieu résistant (ils sont comme le germe du livre II tout entier):

    le problème 6 vise à déterminer le mouvement d'un corps soumis à la seule résistance du milieu, et le problème 7 traite du mouvement en milieu résistant pour un corps en mouvement rectiligne soumis à une force uniforme.

L'intérêt du manuscrit de 1684 n'est pas seulement dans sa brièveté. Il est passionnant de suivre l'évolution de la pensée de Newton, de repérer les précisions et les raffinements qu'il introduit dans les rédactions successives. Par exemple on remarquera que le manuscrit ci-contre ne contient même pas un semblant de justification pour les procédés infinitésimaux ou "ultimes" qui seront employés dans les démonstrations, rien qui tienne la place qui reviendra à la section I des Principia sur les "premières et dernières raisons" (rapports de quantités naissantes ou évanouissantes).

L'évolution est particulièrement importante dans le cas des énoncés initiaux, qui forment les assises de toute la construction: l'ensemble des trois définitions et des quatre hypothèses placées au début du manuscrit n'annonce que très lointainement les défintions et les "axiomes ou lois" placés au début des Principia. Ici trois définitions seulement délimitent le cadre conceptuel, et encore la troisième n'est-elle qu'une simple précision concernant le sens du mot résistance; cette troisième définition a d'ailleurs été rajoutée après coup, comme on le voit sur le manuscrit lui-même (cf; photo in J. Herivel, The background of Newton's Principia, Oxford 1965,face à la page 292).

Les définitions 1 et 2 forment un couple, qui détermine deux sortes de forces: la force centripète et la force interne. C'est en composant ces deux forces que l'on reconstituera la trajectoire d'un mobile soumis à une force centripète (cf. la démonstration des théorèmes 1 et 3). La première seule est une force au sens qu'a le mot depuis le 18e siècle, puisque la force interne, ou "force d'un corps", est simplement ce qui fait qu'un corps tend à poursuivre son mouvement rectiligne uniforme.

La force centripète sera englobée, dans les <u>Principia</u>, au sein d'une catégorie plus vaste, celle de "force impresse" ou "force imprimée", qui comprend aussi bien les cas de choc que d' attraction continue. Le couple <u>vis centripeta/ vis insita</u> du manuscrit de 1684 fera ainsi place à un autre couple: <u>vis insita / vis impressa</u> (définitions 3 et 4 des <u>Principia</u>, cette dernière étant précisée et subdivisée dans les définitions 5 à 8).

Les quatre hypothéses sont de nature très différente, et le seul fait que Newton ait regroupé ces quatre affirmations sous l'appellation commune d'hypothèses atteste combien sa pensée est encore peu élaborée, très en retrait par rapport aux exigences logiques dont témoigneront les <u>Principia</u>. La première hypothèse en effet est une simple supposition, ou à la rigueur un postulat, par lequel on convient que la résistance sera prise en considération dans les deux dernières propositions seulement (problèmes 6 et 7), et cela proportionnellement à la vitesse du mobile. En revanche l'hypothèse 2 est une affirmation d'une immense portée, puisqu'elle énonce la loi d'inertie, reprise comme axiome 1 des <u>Principia</u>.

Les hypothèses 3 et 4 apparaîtront dans les <u>Principia</u> comme des conséquences des affirmations initiales, démontrées à titre de corollaire 1 des lois, et de lemme 10 (section 1). Il s'agit du principe de la composition des forces suivant le parallélogramme, et d'une généralisation de la loi de chute donnée par Galilée : les espaces parcourus sous l'action d'une force centripète sont proportionnels au carré des temps. Galilée l'avait énoncé pour le cas de la pesanteur, Newton l'affirme pour des forces quelconques, qui peuvent varier avec la distance (ce sera le cas étudié dans la suite), à condition de ne regarder que le commencement du mouvement.

Dans la présentation qu'a choisie Newton, la chaîne démonstrative commence par la loi des aires (théorème 1), sans doute en raison d'une importance spéciale qu'il accorde à ce théorème. En réalité le théorème 2 (avec ses corollaires) aurait pu être placé avant le théorème 1, parce qu'il en est logiquement indépendant et qu'il concerne une situation plus simple. La loi des aires n'est utilisée que dans le théorème 3, pour substituer au temps écoulé l'aire balayée par le rayon vecteur.

Le théorème 2 évalue la force centripète qui retient un corps sur une orbite circulaire parcourue à vitesse constante. C'est le résultat qu'avait obtenu Huygens dans son De vi centrifuga ; l'opuscule de Huygens restera inédit jusqu'en 1703, mais les résul tats sont publiés sans démonstration dans l'Horologium Oscillatorium de 1673. Une différence décisive sépare les deux auteurs: Newton traite d'une force centripète là où Huygens envisageait une force centrifuge, faute d'avoir clairement dégagé toutes les conséquences du principe d'inertie.

Voici les étapes du raisonnement suivi pour démontrer le théorème 2:

- Si les mobiles B et b n'étaient pas soumis à une force centripète, ils parcourraient les tangentes BC et bc. Il faut supposer des forces centripètes pour rendre compte de leur déviation par rapport au mouvement rectiligne. Cette déviation est indiquée par la différence entre le mouvement virtuel sur la tangente et le mouvement effectif sur le cercle, pour un même intervalle de temps très petit. Pour le mobile de gauche, cette différence (cette "distance gagnée") est représentée par le segment CD, et par cd pour le mobile de droite.
- Newton affirme, sans justification antérieure, que les forces centripètes sont proportionnelles à ces distances CD et cd. Dans les Principia, ce sera le contenu de la loi 2: "Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée...".

- Pour évaluer les segments CD et cd, Newton utilise la puissance des points C et c par rapport à leurs cercles respectifs (la référence au livre 3 d'Euclide est explicite dans un autre manuscrit). Cela permet d'écrire: $CD.CF=CB^2$ et $cd.cf = cb^2$. Les tangentes CB et cb peuvent être remplacées par les arcs DB et db qui leur sont égaux (parcourus à la même vitesse dans le même temps).
- C'est ici que se place le passage à la limite: les arcs sont considérés comme tendant vers zéro ("loquor de spatiis BD,bd, minutissimis inque infinitum diminuendis"). On peut donc regarder comme équivalents $\frac{1}{2}$ CF et BS, rayon du cercle, ainsi que $\frac{1}{2}$cf et bs (l'introduction du coefficient $\frac{1}{2}$ ne change rien à la proportionnalité).
- Par conséquent les distances CD et cd sont entre elles comme les carrés des arcs décrits dans le même temps, divisés par les rayons des cercles. On connaît par là la proportion entre les forces centripètes, dont CD et cd sont les expressions géométriques. (Peut-être aura-t-on remarqué que Newton admet sans démonstration que le centre de forces est le centre du cercle; il le démontre dans les Principia en utilisant la réciproque de la loi des aires.)

Ce théorème 2 a des conséquences importantes, que Newton tire dans les corollaires 3,4 et 5 : si l'on sait que la période et le rayon sont dans une certaine proportion constante pour des mouvements à des distances différentes d'un centre, on pourra en déduire la loi de variation de la force en fonction de la distance. Le corollaire 5 est le plus important, il concerne le cas où le carré de la période et le cube du rayon sont dans un rapport constant; c'est la troisième loi de Kepler pour les planètes, étendue aux satellites de Jupiter et Saturne, du moins si l'on accepte de considérer les mouvements des planètes et des satellites comme des mouvements circulaires uniformes autour de leur centre de force. On a ainsi, en abrégé:

$$v^2 / R = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 / R = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{T^2}\right) / R^2 = \text{Cstte} / R^2 \ .$$

Dans ce cas la force varie comme l'inverse du carré de la distance à partir du centre.

Le théorème 3 concerne un cas beaucoup plus général: l'orbite est une courbe quelconque, parcourue à une vitesse qui peut varier (il faut évidemment que la vitesse et l'aire balayée gardent un sens). Le raisonnement consiste à évaluer la déviation QR, qui est la différence entre le parcours tangentiel et le parcours effectif. Ce segment est proportionnel à la force centripète, comme tout à l'heure les segments CD et cd, en vertu de la supposition implicite (loi 2 des <u>Principia</u>) que le changement de mouvement et la force sont proportionnels; cette déviation QR est aussi proportionnelle au carré du temps, en vertu de l'hypothèse 4: RQ est l'analogue d'un parcours de chute accéléré vers S, centre de force).
On peut donc écrire: $QR \propto \text{Force} \times (\text{Temps})^2$.

Ici est utilisé le résultat de la proposition 1 : le temps peut être mesuré par le secteur balayée SPQ, puisque dans le cas d'une force centrale, les secteurs balayés par le rayon vecteur sont proportionnels au temps (2e loi de Kepler ou "loi des aires"). La proportionnalité devient:

$$QR \propto \text{Force} \times (\text{ aire du secteur } SPQ)^2 \qquad \text{ou:}$$

$$QR \propto \text{Force} \times \left(\tfrac{1}{2}\, SP.QT\right)^2 \qquad \text{ou:}$$

$$\text{Force} \propto \frac{QR}{SP^2 \times QT^2} \ .$$

Newton prend l'inverse de cette proportionnalité, préférant parler d'un "solide", c'est à dire d'un terme de dimension 3, plutôt que d'un terme de dimension -3 .

C'est cette formule qui servira à établir la loi de force dans les problèmes qui suivent. La méthode consiste à exprimer $QR/SP^2.QT^2$ en tenant compte des propriétés géométriques de l'orbite, c'est à dire à montrer que ce terme est proportionnel à un autre terme où ne figurent plus que des constantes et la distance SP . Ainsi, dans les problèmes 1, 2 et 3, la force centripète se révèle être proportionnelle respectivement à $1/SP^5$, à SP, et à $1/SP^2$.

La loi des aires (théorème 1) ne permet pas seulement de remplacer le temps par l'aire balayée, elle est comme une "présentation" de la notion de force centripète, à la manière dont une ouverture musicale présente en raccourci les thèmes essentiels. C'est peut-être pourquoi Newton l'a placée au tout début de l'enchaînement.

La démonstration repose sur un raisonnement dynamique et sur des relations géométriques très simples, suivies d'un passage à la limite. AB est le parcours inertial effectué pendant le premier intervalle de temps. Bc est le parcours rectiligne uniforme qui aurait été effectué en l'absence de force centripète pendant le second intervalle de temps. Si la force agit de manière ponctuelle en B, forçant le corps à se détourner de sa direction, on peut affirmer qu'il se trouvera en C après le deuxième intervalle de temps: BC est en effet la diagonale du parallélogramme obtenu en composant le trajet Bc et une parallèle à BS issue de c . Newton compose ainsi deux "forces" de nature différente: une <u>vis insita</u> correspondant à Bc et une <u>vis centripeta</u> correspondant à cC. (L'hypothèse 3 permet de composer des <u>forces</u>, et non des déplacements.)

On obtient ainsi trois triangles d'aire égale: SAB et SBc ont des bases égales (AB=Bc) et une hauteur identique (la distance entre le point S et la droite ABc); de même SBc et SBC ont une même base SB et une hauteur identique (la distance entre les parallèles SB et Cc). Donc l'aire SBC est égale à l'aire SAB. De même, dans l'intervalle de temps suivant, SCD sera égal en aire à SBC, etc... La forme du triangle peut varier, mais l'aire balayée reste la même si l'intervalle de temps est le même.

Newton affirme qu'il en sera encore ainsi lorsque le nombre des triangles augmente infiniment pendant que leur taille diminue.(Ce passage à la limite mériterait une discussion détaillée.) L'égalité d'aire pour des secteurs curvilignes est ainsi obtenue comme limite du cas rectiligne. Du même coup le contour polygonal devient une trajectoire courbe, et la force se transforme en force continue: les impulsions ponctuelles reçues en B,C,D,etc... font place à une déviation continue vers le centre S. La force continue est ainsi envisagée comme limite d'une série de chocs distincts (par "choc" j'entends simplement des impulsions quasi-instantanées, sans qu'il y ait nécessairement une poussée par un autre corps au contact).

La régularité du balayage permet de prendre l'aire de secteur comme mesure du temps, elle offre si l'on peut dire une "horloge", comme celles que les astronomes classiques se donnaient sous forme d'une révolution uniforme autour d'un point équant (le"moyen mouvement"des planètes); elle permet de réprésenter géométriquement le temps sur les figures. Le temps, pour Newton et ses contemporains, n'est nullement une variable comme les autres, et il est nécessaire de préciser quelle variation uniforme on choisira pour le représenter.

La loi des aires permet aussi de manifester le caractère géométrique de la notion de force centripète. Ce sera plus net encore dans les Principia où la régularité du balayage est utilisée comme indice d'une force centrale, et moyen de déterminer la position du centre de force (propositions 2,3,4,5 du livre I et propositions 1,2 et 3 du livre III).Le contraste avec Kepler fait ressortir cet aspect géométrique : chez l'astronome allemand, la loi des aires découle d'une série d'hypothèses sur la "diffusion" de la force à partir du soleil et sur ses effets dans le mouvement des planètes.

La représentation imagée de l'action du soleil précède l'affirmation de l'invariance des aires balayées. Newton au contraire reste très discret sur l'action exercée par le centre S. Il se contente d'affirmer qu'en B, C, D, etc..., la trajectoire du mobile est défléchie en direction de S. La définition 1 laisse ouvertes plusieurs possibilités : un corps soumis à une force centripète peut être considéré comme "poussé" ou "attiré" vers le centre. Seule compte ici la manifestation géométrique de la force. Il devient ainsi possible de construire une théorie dynamique sans s'engager dans la discussion du mode d'action des forces.

F. De Gandt juin 1981.

Bibliographie:

Plusieurs manuscrits préparatoires aux Principia ont été publiés, et parfois traduits en anglais, dans:

- W.W. Rouse Ball, An essay on Newton's Principia, London,1893,p.35-51,
- J. Herivel, The background of Newton's Principia, Oxford,1965,p.257-303,
- Unpublished papers of Isaac Newton, ed. A.R. Hall et M.B. Hall, Cambridge, 1962,p.239-292,
- The mathematical papers of Isaac Newton, vol. VI, ed. D.T. Whiteside, Cambridge,1974, p. 30-537.

Le livre le plus important sur l'ensemble de ces questions me semble celui-ci Richard S. Westfall, Force in Newton's physics, The science of dynamics in the seventeenth century, London, 1971.