—INCURSIONS DANS L'HISTOIRE—

UNE IDEE DE PASCAL POUR LE LIVRE SCOLAIRE

PAR R. J. K. STOWASSER

Traduit par A. DAURIAC
professeur d'Allemand au
lycée Val de Seine à
76 Grand Quevilly

I - APERCU DU CONTENU ET PERSPECTIVES

La traduction de l'écrit de Pascal "*De numeris multiplicibus ex sola characterum numericum additione agnoscendi*" en annexe, permettra au lecteur de juger la part revenant à Pascal dans la proposition éducative que j'ai conçue pour les élèves de onze ans (et pour les amateurs de pensée mathématique) et pratiquée à plusieurs reprises dans mon enseignement.

Pour approcher le champ du problème, on aura recours à la montre, oh! combien familière, et à une question absurde. Ainsi, on révèlera l'idée de Pascal dans une version particulièrement simple, pour ainsi dire sur le cadran.

Grâce à des divisions du jour non-babyloniennes, des jeux avec des allumettes, etc.. on exécute des variations de l'idée de Pascal qui, prise dans sa généralité, peut servir à plus de choses qu'à simplement régir parfaitement le chapitre "*Règles de divisibilité*". Les liens de l'idée de Pascal avec la notion "*d'égalité des restes*" constituent le coeur de ma proposition éducative. Pascal, par contre, ne fait évoluer sa belle idée que dans l'optique des règles de divisibilité, ne voit que le cas particulier (Reste 0), rend ainsi plus difficile l'accès à la compréhension, doit apporter une preuve, montre ainsi qu'il n'a pas totalement compris sa propre idée.

Ma proposition utilise l'idée de Pascal pour la conception d'algorithmes rapides grâce auxquels, pour des nombres donnés, on en produit de plus petits aux restes égaux. La règle de divisibilité de Pascal, à plus forte raison ses cas particuliers triviaux, les règles d'addition et de sommation des chiffres des livres scolaires ne sont plus qu'accessoires - à l'évidence.

Il n'est pas difficile d'écrire un chapitre de livre scolaire dans la ligne de cette proposition. Le livre scolaire dans lequel il aurait sa place n'est cependant pas en vue, bien que ses caractéristiques soient suffisamment connues :

- il développe les mathématiques autour d'idées organisatrices de type Pascalien. Leur

interprétation fait éclater le cadre habituel plat,fondé sur la logique et le système.

- il s'écarte de la pratique contestable qui consiste à dispenser à la petite cuiller la matière d'enseignement (Freudenthal).
- il présente de nombreuses situations concrètes riches, qui favorisent l'apprentissage actif.

Ou, de façon plus logique :

- il vise à rendre l'apprentissage passif impossible (de nouveau d'après Feudenthal).

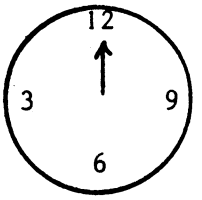
La contribution que des incursions dans l'histoire des mathématiques peuvent apporter à "*l'enfant désiré*", en voici un exemple dans cet exposé.

2 - LA PETITE AIGUILLE DE LA MONTRE

On a auparavant, pendant les cours, traité à fond les systèmes de numération (systèmes pour lesquels la valeur dépend de la place) et, je l'espère, fait abondamment usage de l'abaque. Puis le chapitre "*Divisibilité*" en classe de CM2* est la suite naturelle des opérations sur les bases.

Dans le champ d'expérience des élèves de 11 ans, la montre se présente comme une approche passionnante.

J'apporte une grande montre (ou un cadran d'horloge) en carton sans grande aiguille en classe de 6e (classe de 5e en Allemagne). L'aiguille des heures est sur le chiffre 12.



Un élève est appelé au tableau. Il a à écrire les heures que l'aiguille doit parcourir. Il écrit un nombre d'heures imprononçable. Il va du bord gauche au bord droit du tableau.

Trois secondes après l'écriture du dernier chiffre, je place l'aiguille sur la bonne heure. Pour par exemple 204501022305312345678902468135790254140 3 je place l'aiguille sur le 7.

Les élèves vérifient par le calcul. Divisent par 12. Ils remplissent une page de cahier. Beaucoup d'erreurs. En bas à droite se trouve la seule chose

* *CM2 en France, 6e en Allemagne (élèves de 11 ans).*

intéressante : le reste.

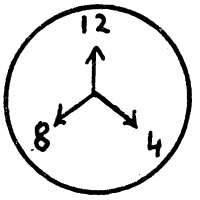
La classe sait bien que je ne suis pas magicien et surtout que je ne suis pas particulièrement bon en calcul mental. Je ne révèle naturellement pas mon "truc". La classe l'obtiendra par déduction, le découvrira. Une feuille d'exercices préparés, qui réclame de nombreuses "indications d'heure", demande donc les restes de division par 12, fait apparaître un modèle : les restes des divisions par 12 des puissances de 10 à partir de 10^2 sont , Dieu soit loué, tous égaux.

$$R_{12}(10^n) = 4 \text{ pour } n > 2$$

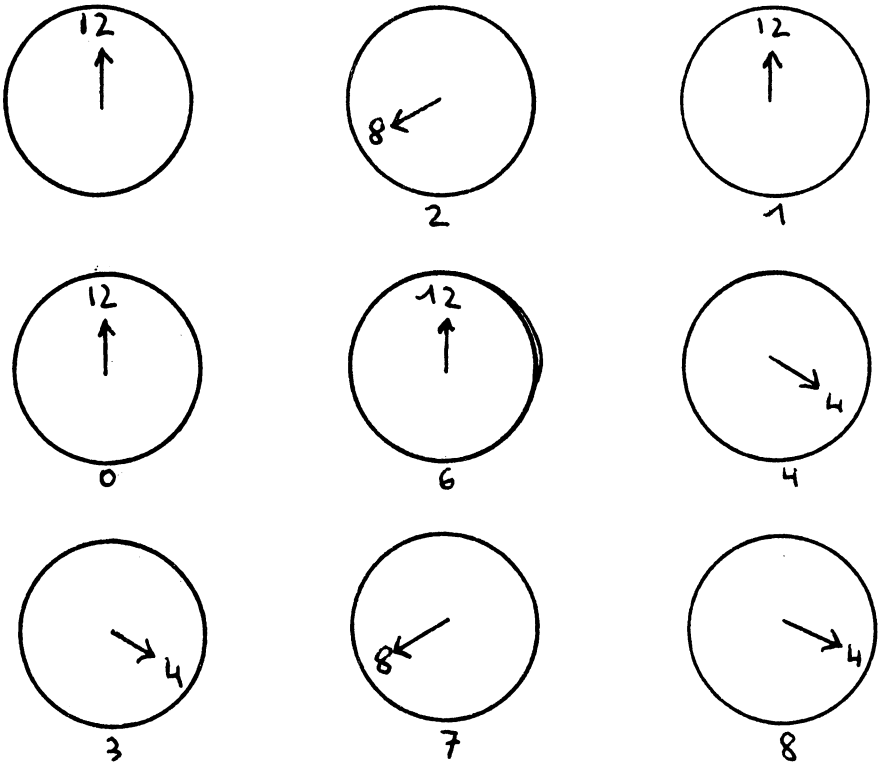
toute puissance de 10 ($\neq$ 10) fait avancer l'aiguille de quatre heures.

Je me fonde sur le fait - dans le cas contraire, il faudrait y remédier - que les élèves disposent vraiment de l'idée d'abaque, qu'ils voient un nombre décimal composé de la somme des puissances de 10 .

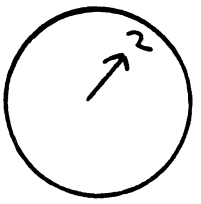
Alors tout le secret de mon calcul rapide est éventé. Peu importe le nombre de chiffres qui se trouvent devant. L'aiguille oscille simplement entre trois positions (au-dessus des dizaines).



Je fais plutôt tourner les aiguilles dans ma tête que sur le cadran de carton. Dans l'exemple R_{12} (2106437822), mon travail mental se présente ainsi :
Départ :



Les 22 heures de la fin, par une opération de routine, placent l'aiguille des heures finalement dans la position suivante :



Les élèves de onze ans comprennent même la question que je pose ensuite : vos opérations sur la feuille d'exercices ont-elles confirmé également

$$R\ (10\ 000\ 000\ 000\ 000) = 4\ ?$$

La raison - une conséquence induite cachée en raison des puissances de dix définies de façon récurrente - des élèves de 11 ans la trouvent à la seule condition de les guider un peu.

De 10^2 heures, il reste quatre heures une fois retirées les demi-journées. De $10^3 = 10.10^2$ heures 10.4 heures.

Une fois enlevées les demi-journées, il rest par conséquent de 10^3 heures à nouveau quatre heures. Nous calculons de même pour $10^4 = 10.10^3$.

.....

Le calcul à l'aide de la montre peut aussi être représenté de façon plus compliquée, par exemple en opérant plus avec des signes qu'avec des images. On peut gêner la compréhension de l'idée si simple de Pascal. Par exemple ainsi :

$$R_{12}\ (2106437822) = R_{12}\ [(2 + 1 + 0 + 6 + 4 + 3 + 7 + 8).4 + 22]$$
$$= R_{12}\ (31.4 + 22)$$
$$= R_{12}\ (146)$$

La "recette" dans le langage des élèves de onze ans :
marche à suivre

(1) Sépare du nombre la fin à deux chiffres

21064378/22

(2) Forme le produit par quatre de la somme des chiffres du début :

$4.(2 + 1 + 0 + 6 + 4 + 3 + 7 + 8) = 124$

(3) Additionne le résultat de (2) et la fin à deux chiffres

$124 + 22 = 146$

Le nombre initial et le résultat de (3) sont des nombres à même reste :

$$R_{12}(2106437822) = R_{12}(146)$$

Le mathématicien note le résultat dans son langage de spécialiste de la façon suivante :

$$R_{12}\left(\sum_{k=0}^{n} Z_k.10^k\right) = R_{12}\ \left(4\sum_{k=2}^{n} Z_k + Z_1.10 + Z.\right)$$

Quoi qu'il en soit, le premier problème est résolu. Les élèves ont trouvé ma méthode de calcul rapide (truc) grâce à laquelle je les ai épatés au début. Maintenant, ils vont faire admirer leurs talents d'artiste du calcul par leurs parents et amis qui ne se doutent de rien. Ensuite, il leur restera le plaisir d'initier leurs parents.

3 - LA GRANDE AIGUILLE

60 minutes après, elle recommence. Les élèves maîtrisent la nouvelle situation de façon parfaitement autonome. Ils ont en effet, dans le cas particulier 2, déjà aperçu l'idée de résolution générale de Pascal. (C'est justement pour cette raison que j'ai choisi cette partie de la théorie des nombres comme modèle pour un enseignement tourné vers le problème). Le résultat :

$$R_{60}\left(\sum_{k=o}^{n} Z_k.10^k\right) = R_{60}\left(40.\sum_{k=2}^{n} Z_k + Z_1.10 + Z.\right)$$

4 - L'HORLOGE QUI N'A QUE ONZE HEURES

Nous notons les restes de la division par 11 des puissances de 10 de droite à gauche sur un tableau horizontal. Ainsi, on peut maintenant produire, pour chaque nombre donné, un nombre plus petit qui a le même reste dans la division par 11. Sous les cases du tableau, on écrit le nombre (par exemple 620518) en plaçant correctement chaque chiffre.

(11)	10	1	10	1	10	1
	6	2	0	5	1	8

On multiplie chaque chiffre du nombre par le reste de la division par 11 de la puissance 10 qui se trouve placé au-dessus. Les produits sont additionnés

$$6.10 + 2.1 + 0.10 + 5.1 + 1.10 + 8.1 = 85$$

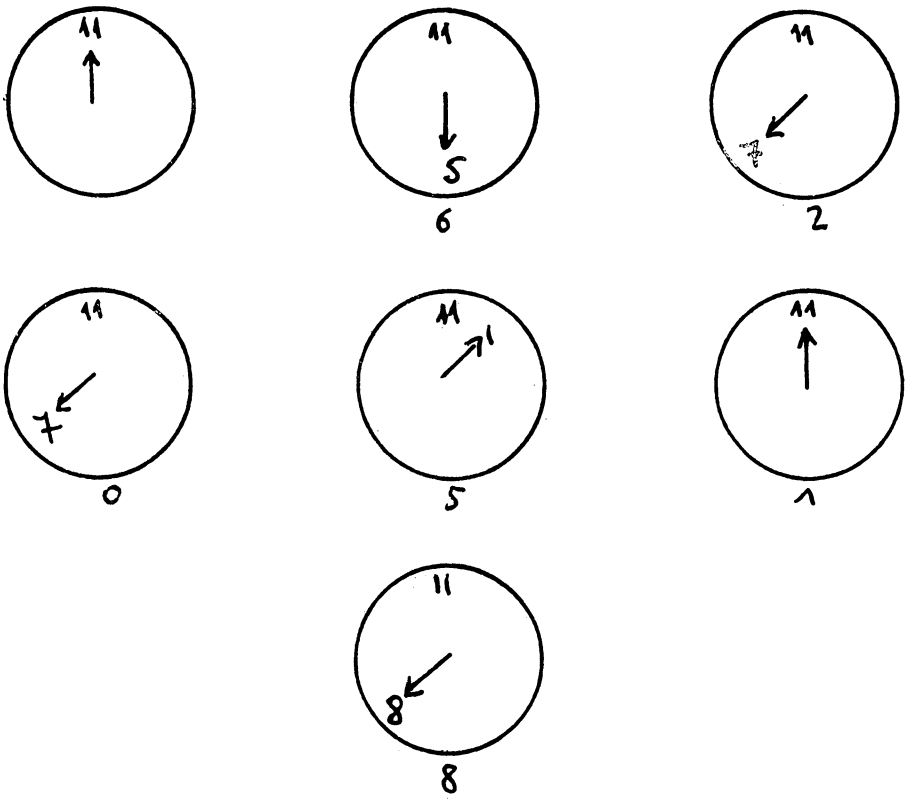
Le nombre ainsi produit est appelé somme des chiffres pondérée

La méthode générale qui consiste à produire pour un nombre donné, un autre qui a le même reste et pour les puissances de 10 à les remplacer par leurs restes dans la division par 11 justifie la méthode des tableaux de restes indiquée plus haut.

En utilisant des nombres négatifs, on améliore certains tableaux de restes. On prend comme représentant dans chaque case le nombre dont la valeur absolue est la plus faible. Par exemple :

(11)	-1	1	-1	1		

Les élèves comprennent plus facilement le langage de l'horloge de 11 heures : au lieu de 10 heures dans le sens normal, une heure en sens inverse



5 - UN JEU A BASE D'ALLUMETTES

Las des horloges, nous continuons à jouer avec des allumettes. Un élève met un certain nombre d'allumettes dans une boîte d'allumettes normale. Je secoue la boîte au niveau de mon oreille et fais extraire de celle-ci, par la suite, un nombre d'allumettes correspondant à la somme des chiffres. Je secoue encore une fois et peux désormais annoncer sans risque d'erreur le nombre d'allumettes restant dans la boîte.

Les élèves font eux-mêmes l'expérience et remarquent : après avoir enlevé la somme des chiffres, le nombre des allumettes est toujours un multiple de 9. Les quelques solutions possibles, une oreille exercée est capable de les distinguer facilement.

Reste encore la question de la validité de la formule : 9 divise Z - Q (ℤ) Les élèves ont recours à cette formule relative à la numération après avoir fait

des expériences sans boîte avec de "grands" nombres.

Sortons des allumettes de la boîte et groupons les par 10. Cela donne quelques paquets de 10 (5 au maximum), quelques allumettes restantes (9 au maximum). Pour extraire la somme des chiffres, nous procédons de la façon suivante : nous soustrayons à chaque paquet de 10 une allumette, toutes les allumettes restantes sont enlevées. Il reste à coup sûr quelques paquet de 9 ou plus rien.

Pour des nombres plus grands, nous considérons de nouveau les restes obtenus à la suite de la division par 9 des puissances de 10. Le tableau des restes indique tout le reste

(9)	1	1	1

Grâce à lui, on peut, à partir de n'importe quel nombre, déterminer un nombre dont le reste de la division par 9 est identique, c'est-à-dire la somme des chiffres pondérée. Le tableau des restes montre l'identité des deux fonctions numériques Q_9 et Q (fonction sommation habituelle). Cela fait de l'usage de l'horloge à 11 divisions un jeu d'enfant.

6 - AUTRES TABLEAUX DE RESTES

Les élèves ont depuis longtemps remarqué la chose suivante : à chaque nombre b correspond un tableau des restes des puissances de 10 dans la division par b. Grâce à lui, on peut calculer la somme des chiffres pondérée d'un nombre Z. $Q_b(Z)$ a le même reste que Z dans la division par b.

Nous laissons les élèves libres de choisir. Ils trouvent de beaux, de compliqués tableaux de restes ; constamment apparaissent des périodes, la période est toujours plus petite que b. Les raisons en sont faciles à élucider (il n'y a que b-1 restes différents. Les beaux tableaux de restes ont de courtes périodes.

(12) ...	4	4	4	4	10	1
(60) ...	40	40	40	40	10	1
(3) ...		1	1	1	1	1

Les tableaux de restes pour 9 et 3 sont identiques. Le tableau de restes ne définit donc pas de façon unique le diviseur b. Toutes les suites périodiques de nombres naturels commençant par 1 ne produisent pas obligatoirement un tableau des restes (pourquoi ?).

Le nombre 37, bien connu en arithmétique, présente un beau tableau de restes.

(37) ...	26	10	1	26	10	1

Pour les nombres b , qui sont diviseurs d'une puissance de 10, le reste de cette puissance de 10 et de toutes les puissances de 10 suivantes est 0 . Dans le cas d'un nombre b pas trop long, le calcul de la somme des chiffres pondérée est particulièrement facile. Plus tard, la formule de décomposition en facteurs premiers prouvera que ces diviseurs sont de la forme $2^m.5^n$

16 ...	0	0	8	4	10	1
40		0	0	20	10	1

Le tableau de restes pour le nombre 7 est moins beau. Il a une période de six cases, donc une période maximale *.

7 - REGLE DE DIVISIBILITE DE PASCAL

Rappel : Z et $Q_b(Z)$ ont le même reste lorsqu'ils sont divisés par b . En conséquence, les deux nombres ont soit le reste 0 soit un reste différent de 0 lorsqu'on les divise par b . Ou dans une autre formulation : si b divise z , b divise la somme des chiffres pondérée par les restes de la division des puissances de 10 par b, de z.

Telle est la teneur de la règle de divisibilité de Pascal.

Mes élèves de 11 ans ont bien compris, s'ils manient convenablement les tableaux de restes et s'ils ont saisi le maniement des bases qui est le fondement de cette méthode. Dans les livres scolaires, on trouve quelques règles relatives aux derniers chiffres (tableaux de restes avec des zéros) et les règles concernant la somme des chiffres pour la divisibilité par 3, 9 et 11. Ce sont toutes des cas particuliers de la règle de divisibilité de Pascal.

8 - TABLEAUX DE RESTES ET REGLES DE DIVISIBILITE POUR D'AUTRES SYSTEMES DE NUMERATION.

Les esprits éveillés de la classe remarquent qu'il n'y a aucune raison de privilégier le système à base 10. La méthode de Pascal s'applique aussi pour les systèmes à base différente. (Pascal l'a évoqué avec insistance dans son traité). On ne peut empêcher les esprits éveillés de formuler des règles de divisibilité pour des systèmes de numération à base différente de 10 et de découvrir d'importantes analogies. Ils découvrent rapidement que, par exemple, la règle de divisibilité par 4 dans le système à base 5 concorde avec la règle de divisibilité par 9 dans le système à base 10.

* *On voit bien tout le travail qu'on peut faire avec les tableaux de restes pour les notions algébriques fondamentales (Groupes, anneaux, corps, groupes cycliques, hormomorphismes etc..). Le "petit théorème Fermat" n'est pas loin.*

9 - ALGORITHMES DE COUPURE (algorithmes "scies")

Le professeur reconnaîtra rapidement le caractère de ces applications particulières et pourtant si faciles à saisir de l'idée de Pascal dans les exemples peu commentés qui suivent.

Pour un grand nombre donné, je voudrais obtenir un nombre beaucoup plus petit ayant le même reste, par exemple dans la division par 37.

En raison de $R_{37}(10^6) = 1$ je coupe de l'extrémité droite un ensemble de six chiffres et l'additionne à la partie de devant

$$\begin{array}{rl} a = & 403342028376 \quad \boxed{253102} \\ & + \quad 253102 \leftarrow \\ \hline a_{37} = & 403342281478 \end{array}$$

Pour les grands nombres, il faut tout simplement couper souvent.

Pour les nombres premiers $p \neq 2$ ou 5, le "petit théorème de Fermat" assure que

$$R_p(10^{p-1}) = 1$$

Le nombre 14 ne produit jamais le reste 1 dans la division d'une puissance de dix.

En raison de $R_{14}(10^8) = 2$ nous ajoutons ici à l'extrémité finale qui comporte 8 chiffres la partie initiale multipliée par 2 .

$$\begin{array}{rl} a = & \boxed{234820123502} \quad 42640218 \\ & \textcircled{\times 2} \longrightarrow \underline{469640247004} \\ & a_{14} = 469682887222 \end{array}$$

Bibliographie