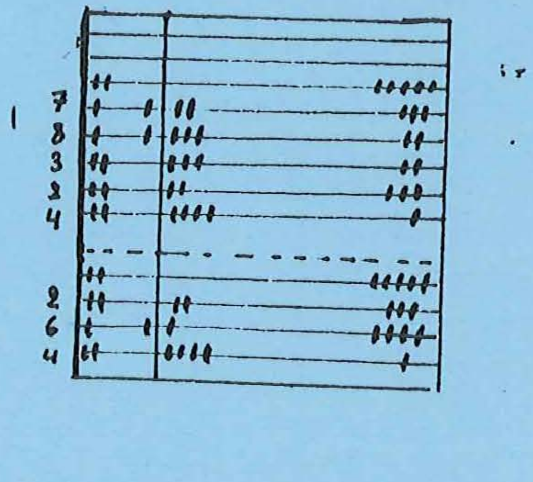
MATHEMATIQUES ARABES ET INDIENNES DANS LE SECOND DEGRE

Maurice CAUSSE (IREM de POITIERS).



MATHEMATIQUES ARABES ET INDIENNES DANS LE SECOND DEGRE
REFLEXIONS D'UN PROFESSEUR

M. CAUSSE

I.- Pour une Histoire des Mathématiques, il existe d'excellents ouvrages que nous ne chercherons pas à remplacer :

1) - Histoire générale des sciences ; R. TATON ; P.U.F. 1966
La Science Arabe, ARNALDES, MASSIGNON, YOUSCHKEVITCH, t. I.441-525
Bibliographie à la fin de l'article.

2) - Journal Asiatique, voir notamment, 1853, De L'algèbre chez les Arabes (SEDILLOT)
1854, Les Notations Algébriques d'Al Qalaçadi et l'Algèbre d'Omar Khayyam (WOEPKE)
1878 : l'Algèbre d'Al Kharismi et les méthodes indiennes et grecques. (RODET)

3) - History of Mathématics, E. SMITH (Dover, 1967)

4) - Les Mathématiques Arabes, Youschkevitch, Vrin 1976. Ce livre, appuyé notamment sur des textes retrouvés en Asie Centrale et publiés récemment en Union Soviétique, renouvelle sur plusieurs points l'état de la question.

5) - Dictionnaire Archéologique des techniques.

6) - ITHACA, Actes du XI° Congrès d'Histoire des sciences, articles de E.S. Kennedy, Ramifications of the world year concept in Islamic Astrology, t.I, pp 23-46, et S.SEN, Study of Indeterminate Analysis in ancient India, t.I, p 493-499.

7) - Histoire des Sciences de St Augustin à Galilée, A.C. CROMBIE (P.U.F. 1959)

8) - Les Penseurs de l'Islam, CARRA DE VAUX, Paris 1926.

9) - Encyclopaedia of Religion and Ethies, Edinbourgds 1921, articles Atheism, Atomic Theory, (Indian et Muhammadan), Rosaries

10) - Revue ISIS

11) - Aldo Mieli, La Science Arabe.

L'intérêt des Mathématiques anciennes, pour l'enseignement, vient de ce que leur contenu correspond encore largement à celui des programmes secondaires, même si le fait a cessé d'être exact pour la géométrie. Ainsi nos techniques trop bien rodées ont-elles un jour mobilisé les grands esprits de l'humanité.

Comment ?

A l'élève entraîné à ne JAMAIS diviser par O, dédions la poétique découverte du mathématicien indien Bhasbârâ (XII° siècle) :"exemple : dividende: 3, diviseur : 0, résultat : 3/0 . Cette quantité qui est infinie s'appelle "quotient par 0" ; elle n'éprouve pas de changemen . Ni addition, ni sous-"traction, ne peut lui faire éprouver perte ou accroissement, pas plus qu'au "temps sans fin et sans déclin des séries d'existences."(Rodet, 2). On peut en effet, en admettant qu'on suppose un sens arithmétique à l'opération, vérifier la propriété : x = a/ 0 = a/ 0 + b. Il n'est pas indifférent, de rattacher l'intuition de l'infini à l'idée de la transmigration des âmes chez les Hindous. Plus généralement, les idées mathématiques naissent dans un certain contexte philosophique, et le portrait que nous nous faisons de ce contexte philosophique est sérieusement altéré, si nous ignorons ce que la mathématique lui doit, ou lui a apporté.

II.- Tenants et aboutissants de l'équation du 2° degré.

A) $x^2 + x = 3/4$. Cette équation représente le premier problème de la tablette du British Museum n° 13.901, dont la rédaction remonte à la première moitié du second millénaire avant J.C. , traduite par F. Thureau-Dangin, textes Mathématiques Babyloniens : (réf. 5; article CALCUL)

"J'ai additionné la surface (x^2) et le côté de mon carré (x) : 3/4.
"Tu poseras 1, l'unité ; tu fractionneras en deux, et tu croiseras (1/4).
"Tu ajouteras à 3/4 : 1 ; c'est le carré de 1. Tu soustrairas 1/2, que
"tu as croisé de 1 : 1/2 ; c'est le côté du carré".

Avec les notations actuelles, nous écririons, pour $x^2 + b.x = c$:

$$x = \sqrt{b^2/4 + c} - b$$

Dans d'autres textes, on soustrait les x des x^2.

B) Quel a été l'apport des Grecs ?

Essentiellement, de fournir une interprétation géométrique de la solution. En effet, l'objet mathématique ne reçoit l'existence "réelle" que si on peut le construire par la règle et le compas.

La construction d'Euclide revient à celle de $\sqrt{\Delta}$ par le théorème de pythagore (T. Haath, A Manual of Greek mathematics, Dover, 1931, 1963, p. 103).

ex : $x^2 = ax = b^2$; $(x + a/2)^2 = b^2 + a^2/4$

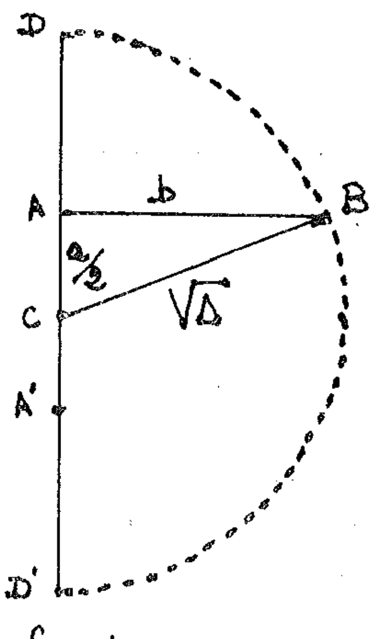


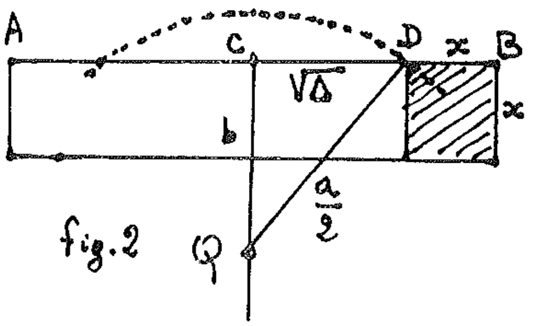
fig. 1

$AA' = a$; $AC = \frac{a}{2}$; $BC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$

$AD = x$; AD' est la solution de l'équation $x^2 - ax = b^2$

Il est clair que la solution elle-même du problème posé reste essentiellement algébrique ; la géométrie n'apporte pas une analyse de la solution, mais une construction du résultat. Il n'est pas envisagé de solution négative.

2° exemple : $x^2 = b^2 = ax$



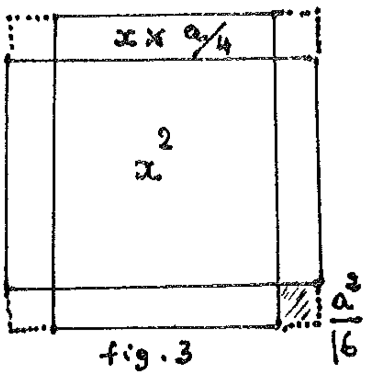
AB = a ; CQ = b ; CB = QD = a/2

$CD = \sqrt{a^2/4 - b^2}$; BD = x

Le phénomène est ici plus net encore : si la construction géométrique jouait un rôle dans l'analyse du problème, on aurait vu qu'elle fournit deux solutions.

C) Les constructions d'Al Khowarizmi (780-850)

$x^2 + a.x = b^2$ ex : $x^2 + 10.x = 39$



A la surface carrée x^2 , on accole sur chaque côté un rectangle de côté 10/4 ; il est clair qu'on obtient un carré incomplet, de côté (x + 10/2), et qu'on le complètera en rajoutant quatre petits carrés de côté 10/4.

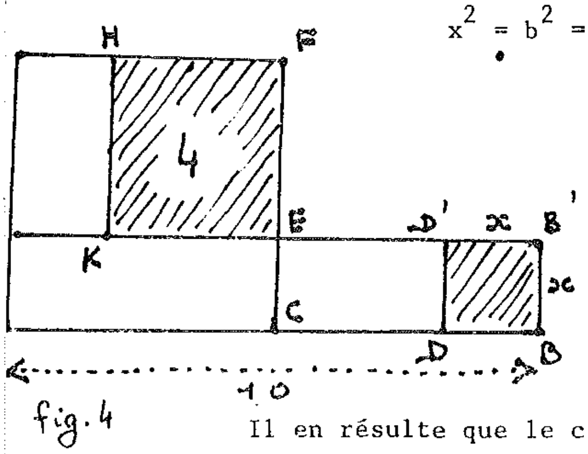
La surface complète est donc :

$$39 + 4.(25/4) = 64$$

Le carré complet a donc pour côté 8, et on a x = 3. ET LA SURFACE INCONNUE est 9. sa racine est 3.

Ici, l'analyse géométrique a valeur de démonstration.

$x^2 = b^2 = a.x$ ex: $x^2 + 21 = 10.x$



Si on enlève le carré x^2 au rectangle de côtés x et 10, la surface restante vaut 21. Considérons le carré de côté 5 construit sur AC, et le carré de côté 5 - x construit sur EF, soit EFKH ; les rectangles CDD'E et A'KHG sont égaux ; la surface AA'GHKEC est donc 21, et celle du carré EFHK est 25 - 21 = 4.

Il en résulte que le côté de ce carré est 2, donc x = 3.

Commentaire d'Al Khowarizmi : Voici la solution (de ce cas) :
"Tu divises en deux les racines (les x) ; ce qui donne 5 ; multiplie -le
"par lui-même ; ce qui donne 25 ; retranche de là les 21 qu'on a mentionnés
"avec le carré ; il reste 4 ; prends la racine, qui est 2 ; et retranche de
"la moitié des x ; il reste 3 : c'est la racine du carré que tu désires, et
"le carré est 9. Si c'est ta volonté, ajoute cette racine (2) à la moitié des
"racines (5) ; cela donne 7 ; c'est la racine du carré que tu désires, et le
"carré est 49. S'il se présente à toi un problème qui te ramène à cette solu-

"tion, examine alors sa justesse par l'addition ; et si tu ne le peux pas "avec celle-là, alors, par la soustraction, certainement, (tu l'obtiendras)."

L'auteur reconnaît ensuite le cas d'impossibilité et la racine double.

D) Lorsque nous comparons ce résultat avec ceux des Grecs, on observe d'abord la véritable analyse géométrique à l'aide des surfaces ; de là nous vient encore que nous désignons par le terme de "racine" non seulement le côté d'un carré de surface donnée, mais la solution d'une équation du second degré : l'expression complète est : la racine du carré inconnu.

C'est également la première fois qu'est prise en considération la possibilité d'une seconde racine, et il faut souligner ici un illogisme de la démarche scientifique : Alors que la construction grecque par le théorème de Pythagore donnait simplement les deux racines possibles, c'est le mathématicien arabe qui énonce cette possibilité, alors que sa démarche géométrique n'y conduit pas. On pourrait penser à la thèse des "Somnambules" d'A. Koestler, si celui-ci n'y exprimait pas un grand dédain pour la science arabe.

E) Les Indiens. Bhaskârâ, XII° siècle. (Lilavati)

La démarche reste purement algébrique. Pour la première fois apparaissent les deux solutions positives simultanées d'une équation :

Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante,
Un huitième au carré gambadait dans le bois.
Douze criaient tous à la fois
En haut de la colline verdoyante.
Combien étaient-ils au total ?

$(x/8)^2 + 12 = x$; solutions : 48 et 16.

L. Rodet (ref. 2) donne un autre exemple de problème :

D'un essaim de mouches à miel
Prends le carré, puis la racine.
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.
Huit Neuvièmes du tout voltigent dans le ciel ;
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus son mâle bourdonner ;
Attiré par l'odeur, il s'était fait emprisonner.
De combien est l'essaim, le saurais-tu, ma chère ?

Bhaskârâ prend ici l'inconnue auxiliaire telle que $N = 2.x^2$: d'où l'équation : $2.x^2 = (8/9).2x^2 + x + 2$.

Lilavati, c'est la chère disciple, qu'un amour purement intellectuel attache à son vénéré maître.

Ni les Arabes, ni, contrairement à ce qu'on trouve écrit parfois, les Indiens n'ont jamais à notre connaissance envisagé les solutions négatives de l'équation du second degré. L'apport nouveau d'Al Khowarizmi pourrait bien se rattacher au problème du déterminisme. Quand le calcul algébrique fournit deux solutions, la justesse de l'une est affaire de bon sens. Peut-être est-il imprudent de s'engager dans la spéculation philosophique. On ne connaît pas encore tous les documents, et il est certainement bizarre de penser qu'Omar Khayyam aura découvert que l'équation du troisième degré peut avoir deux solutions positives (XI° siècle) avant que le même phénomène ait été franchement reconnu et admis pour le second degré. Mais Al-Khayyam, même si l'on a édifié une mosquée près de son tombeau, est un athée :

"O toi qui dépends des 4 éléments et des 7 cieux, écrit-il,
"Tu es bien embarrassé sous l'influence de ces 4 et de ces 7,
"Bois du vin car, je te l'ai déjà dit mille fois,
"tu n'as pas de retour à espérer ; une fois parti, on est bien parti"

(Mieli ; II, p. 112 d'après P. Salet, Omar Khayyam, savant et philosophe, 1927)

Autrement dit, je serais tenté de penser que c'est malgré le déterminisme religieux, accordé pour la science à celui des Grecs, que Omar Khayyam a donné certains de ses résultats importants. Quant à Al-Khowarizmi, il précise que ses préoccupations sont d'ordre pratique, partages d'héritages notamment ; ce pourquoi l'inconnue est la surface, le "bien" qui sera traduit en latin par "census". Or, dans l'Islam, les héritages sont fixés non par la volonté d'un testateur, mais par la loi divine : il ne peut y avoir qu'une seule solution.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, les Indiens ont fourni une bonne collection de problèmes à plusieurs solutions, ou une infinité, n'étant peut-être pas retenus par les mêmes scrupules.

III.- De l'indéterminisme dans les équations.

(voir S. SEN et E.S. Kennedy, ref. 6 ; GR. Kaye, ISIS,II, p.352; D. Smith, ISIS VI, p 319)

Les Indiens ont consciemment pris en considération des équations indéterminées. Les premiers exemples donnés par S. Sen, avec des problèmes de pavages indéterminés pour des constructions d'autels, ont surtout un intérêt documentaire parce qu'il n'apparaît pas de méthode générale. Mais, dès le V° siècle de notre ère, Aryabhatta a étudié des équations en nombres entiers de la forme $ax - by = c$. En effet cette équation est liée, comme l'idée de l'infini pour Bhaskara, au "Karma", au retour éternel des choses. Elle sert à étudier les périodes des retours de plusieurs planètes en conjonction. Yuga, le cycle, est le terme général pour désigner ces périodes. Une conjonction triple a pour période le ppcm des périodes des conjonctions concernées. On situe le Déluge au commencement de la Grande Période, à la conjonction simultanée du Soleil et de toutes les Planètes, calculée pour le 17 février 3.102 avant Jésus-Christ. Sont particulièrement remarquées les conjonctions Soleil, Jupiter, Saturne ... De là, on déduit des horoscopes nationaux... Qu'Al Biruni trouvait d'ailleurs stupides. (Kennedy, loc. cit, p. 25°).

Sous sa forme arithmétique précise, le problème se présente ainsi : connaissant les périodes synodiques a_1 , a_2 ... et les ascensions droites r_1 , r_2 ... des planètes, déterminer les entiers x_1 , x_2 ... tels qu'on ait :

$$a_1.x_1 + r_1 = a_2.x_2 + r_2 = \ldots = N$$

Comme il y a contestation d'antériorité avec la mathématique chinoise, S. Sen commente ce problème chinois de IV° siècle, dont l'auteur Sun-Tzu-Suan-Ching ne donne qu'une solution :

Calculer N, sachant que, si on le divise par 3, le reste est 2
" " 5 " " 3
" " 7 " " 2.

Autre problème, traité par Brahmagupta, VI° siècle :

Calculer N, sachant que, si on le divise par 6, le reste est 5
" 5, 4
" 4, 3
" 3, 2

Autre problème chinois, devenu célèbre en Inde, puis en Europe au Moyen-Age, le problème des 100 poules : "Un coq coûte 5 pièces de monnaie, une poule 3, et on a trois poulets pour une pièce. Si nous en achetons 100 pour 100 pièces, combien aura-t-on respectivement de coqs, de poules et de poulets ? "

Notons encore qu'Avicenne, au XI° siècle, attribue aux Indiens la découverte de la preuve par 9. (Smith).

IV.- Des Nombres négatifs.

On fait généralement aux Indiens un crédit un peu excessif sur ce point.. Diophante d'Alexandrie, au III° siècle, connaît déjà l'addition et la soustraction des négatifs (ta leiponta, les manquants). Ref. 2.

Ce qui est axact, c'est qu'Aryabhatta a fourni la première interprétation intuitive de la règle des signes pour la division, et donc la multiplication, avec le problème des courriers :

"Divisant, en marche opposée, la distance par la somme des vitesses ; "en marche concordante, la distance par leur différence, les deux quotients "sont les temps de rencontre des deux (mobiles) au passé et au futur"
Ceci répond à la formule $x/v = d/(v + v')$ et revient à dire qu' Aryabhatta savait déjà tenir compte du double signe $\pm$ et - au dénominateur.
(Ref 5 ; J. Auboyer, art. Calcul)

Remarquons que l'image cinématique, comme modèle intuitif de la multiplication (-). (-), est restée la seule jusqu'à la fin du XVIII° siècle, où arrivèrent enfin les lois de Coulomb en électricité et en magnétisme. C'est ce qui explique la formulation étonnante de D'Alembert, dans la célèbre Encyclopédie, antérieure aux lois de Coulomb : "Les règles des opérations "algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout "le monde, et reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache "d'ailleurs à ces quantités".(art. Négatif).

Or ces règles, y compris tous les cas de la multiplication, numérique <u>et littérale</u> - jusqu'au second degré -, se trouvent dans l'Algèbre d'Al-Khowarizmi.

On y lit en effet, entre autres règles :

wahad al-naqus fi wahad al-naqus wahad za'id : $(-1) . (-1) = + 1$
Ila shai'an fi ila shai'an mâla za'id : $(-x) . (-x) = + x2$

الواحد الناقص في الواحد الناقص واحد زائد
$(-1) \times (-1) = (+1)$

الا شيئا في الا شيئا مال زائد
$(-x) \times (-x) = (+x^2)$

Le pas qui n'est pas franchi, c'est de considérer l'être négatif en soi, comme chose représentable, intervenant comme facteur ou produit d'une multiplication. C'est beaucoup demander. Au-delà des calculs relatifs au mouvement uniforme, il fallait d'autres progrès. Tabit Ibn Qurra au X°siècle et Al-Biruni au XI° siècle ont préparé le cadre nécessaire, avec l'étude de la vitesse dans un mouvement non uniforme, du maximum ou minimum d'une grandeur variable.

B.- Le cadre nécessaire existait par contre en Inde, pour le compte, l'addition et la sousctraction, donc les négatifs, dans les problèmes à plusieurs inconnues du premier degré. Le chapelet semble être une invention indienne (9,art. Rosaries). Il en existait de différentes couleurs, suivant les dieux concernés, pour le compte des prières, ou des malédictions. Ces mêmes couleurs se retrouvent dans les problèmes à plusieurs inconnues, comme on le voit dans l'exemple suivant (3,t.II,p.434) :

5 rouges + 8 noirs + 6 bleus + 90 roupies = 7 rouges + 9 noirs + 6 bleus + 62roupies.

D'où : 2 rouges = (-1) noir + 1 bleu + 28 roupies.

Pour le second degré, une lettre initiale permettait de désigner le "rouge carré", etc.

Ce symbolisme n'a pas laissé de traces dans le calcul arabe, bien que ceux-ci aient emprunté aux Hindous l'usage du chapelet, 99 grains pour le compte des attributs de Dieu - sauf, peut-être, les deux noms donnés aux nombres purs dans une expression du second degré. On les désigne en effet par "dirhems" (grec : drachmes), équivalant aux "roupies" de l'Inde, et aussi par "uqud", du mot qui désigne le collier.

En ce qui concerne la désignation de l'inconnue, notre x, qui se prononce en espagnol "sh", est l'équivalent de cette lettre en arabe, désignant la "chose" dans cette langue. On connaît le "chouia", la petite chose. une deuxième inconnue auxiliaire, désignée "qasm", a permis à Omar Khayyam de traiter certains problèmes de géométrie plane conduisant à l'équation du second ou du 3° degré, en utilisant la théorie des proportions. Il ne semble pas qu'on soit allé au-delà.

V.- La transformation des équations. (Al Khowarizmi)

(Rodet ; 2.1878 ; Youschkevitch, 4, p. 36)

Les équations à solutions positives se ramènent à six cas : a.x2 = b.x ; a.x2 = c ; a.x = c ; a.x2 + b.x = c ; a.x2 + c = b.x ; a.x2 = b.x + c. Toutes les quantités figurant dans ces équations étant positives.

Soit alors l'équation suivante :

$$X^2 + (10 - x)^2 = 58$$

On applique d'abord les règles de transformation des polynômes indiquées au paragraphe précédent : multiplications :

$$x^2 + (100 + x2 - 20.x)$$

puis, finalement : 2.x2 + 100 - 20 x = 58

On procède alors aux trois opérations :

Al - Jabr : $2\ x^2 + 100 = 58 + 20\ x$; On ajoute aux deux membres les "manquants", c'est à dire les quantités retranchées.

Al - radd : x2 + 50 = 29 + 10 x ; c'est la simplification, appelée aussi Al-hatt.

Al -muqabala : $x^2 + 21 = 10\,x$: c'est la réduction des termes semblables. En fait, dans les exercices pratiques, Al-Khowarizmi se contente de parler de muqabala : qâbel bĭnhụma ...(*) et le reste suit. Nous n'agissons pas différemment, et ces trois opérations sont bien comprises comme le développement d'un même mécanisme. Dans la pratique, leur ensemble sera désigné par "l'Algèbre et la Muqabala", et finira par prendre, dans la progression de la mathématique, sa place entière aux côtés de l'Arithmétique, une place qu'elle va conserver à peu près, dans nos conceptions scolaires, jusqu'aux réformes de 1968.

B.- <u>La place dans l'idée du savoir</u>.

L'idée de fond, qui vient des Grecs et cherche son accord avec la religion, est qu'il y a une UNITE du savoir, un savoir sans contradictions, et qu'il est possible, par conséquent, d'en fournir une représentation cohérente, comme cadre naturel d'un enseignement.

Aristote le répartissait en quatre grandes branches (le quadrivium) : Logique, Sciences Théorétiques, Sciences pratiques (morale et politique), Sciences poétiques. La Mathématique est une section de la seconde branche, et se répartit en Arithmétique et géométrie. Il y aura des variations sur la place de telle ou telle discipline particulière dans ce tableau, notamment des sciences religieuses ; finalement, il prévaudra dans l'orthodoxie de l'Islam le sentiment que cette place mesurée à la religion dans le savoir est incompatible avec la vraie piété. Mais l'ensemble de l'héritage scientifique arabe s'insère dans une vision de ce tableau.

Pour Al-Farabi, fin du IX° siècle, les Mathématiques comportent :

Arithmétique, Géométrie, Optique, Astronomie, Musique, Science des poids, Mécanique.

- Les Frères de la Pureté, X° siècle : Arithmétique, Géométrie, Astronomie, Musique.
- Al-Khowarizmi II (fin X° siècle) : Même tableau + Mécanique.
- Avicenne (début XI° siècle) : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique, + une dizaine de sciences dérivées.
- Al-Ghazali, XI° siècle : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique.

Ce tableau, d'une constance remarquable, donne sa mesure au progrès accompli au XIV° siècle par Ibn Khaldoun :

Il y a deux grandes branches des Mathématiques :

a) Les sciences du nombre :-Arithmétique
-Science du calcul
-Algèbre et Muqabala

(*) "Fais la muqabala entre les deux membres".

-Les transections commerciales

-Les partages des successions

b) Les sciences géométriques

-géomâtrie sphérique et conique

-arpentage

-optique

c) Astronomie

d) Musique

(Tout le tableau qui précède, d'après L. GARDET, Introduction à la Théologie Musulmane, VRIN, 1948) pp 102-124. Le plan d'Ibn Khaldoun suit exactement les préoccupations d'Al-Khowarizmi. C'est la pratique qui oriente la réflexion scientifique, AU CONTRAIRE D'ARISTOTE, pour qui elle est "théorétique" ; et il n'est pas improbable que ce point de vue ait permis de l'accréditer. "C'est Dieu qui a envoyé Mohammed, écrit Al-Khowarizmi au début de l'Algèbre, en un temps où il n'y avait pas de prophétie, où l'on reniait la vérité, et il a ouvert par lui les yeux des aveugles, sauva par lui ceux qui étaient perdus, élevé les petits, rassemblé les dispersés... Il y a toujours eu des savants, dans les temps et les peuples du passé, qui ont écrit des livres sur les sciences et les raisonnements de la philosophie, à l'intention des générations futures ... Lorsqu'un homme a trouvé le premier ce que personne n'avait découvert avant lui, ceux qui viennent après en héritent ; quand un homme commente ce qu'ont laissé les premiers et qui était obscur, il en rend le chemin aisé, et la compréhension facile. Et lorsqu'un homme a trouvé dans une partie du livre une erreur et ne le rejette pas, mais qu'il redresse et perfectionne la pensée de son ami, c'est une oeuvre utile, et il n'y a aucune vantardise de sa part..." Il a donc fait un livre abrégé et concis, pour les partages d'héritages, pour les canaux à creuser ...

Cependant qu'Omar Khayyam, hérétique et athée fieffé qui avait plus que d'autres son franc parler, considérait bel et bien, vers l'an mille, l'algèbre comme une spécialité : Il y avait, pour lui, des "algébristes" (Youschkevitch, p. 36 ; voir aussi, p.10-11, le récit de ses ennuis.

N'oublions pas que, pour l'Islam, la chose nouvelle, c'est très précisément l'hérésie. S'ils n'ont pas toujours évité par là les ennuis avec l'autorité, les savants de l'Islam ont assez bien réussi, dans l'ensemble à persuader l'histoire occidentale qu'ils n'avaient rien inventé de neuf.

C.- Signification du mot "Algèbre".

Cette question présente un intérêt pour l'enseignement, car si la thèse de Salomon Gandz est exacte, à savoir que le mot dériverait d'un terme assyre-babylonien en exprimant l'équilibre, l'égalité, on pourrait bien penser que l'idée sous-jacente à toute la théorie est une réflexion sur l'usage de la balance. En effet, le sens général de la racine jbr, dans les langues sémitiques, est celle de force.

D'autre part, chez Bhaskârâ, en Inde au XII° siècle, l'idée de l'égalité, tulya, dérive clairement de celle de balance, tula (Rodet, réf.2); or la balance à deux plateaux, en Inde, n'apparaît pas avant le VI° siècle, autrement dit, à peu de chose près, l'époque des premiers grands mathématiciens Indiens. La balance ancienne était semblable à la balance romaine. Par contre on trouve la balance actuelle à 2 plateaux sur l'obélisque d'Assurbanipal (7° siècle avant J-C) en Assyrie. (5, art : balance).

Reprenons maintenant les expressions de Bhaskârâ, d'après L. Rodet : " Appelant x la mesure de la quantité inconnue, on fera à l'aide de ce symbole ce qui est prescrit par l'énoncé ; puis on préparera adroitement deux membres en équilibre (tulya), en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant".

Il ne semble pas illégitime de conclure, de ces éléments divers, que la transformation des équations a procédé d'une réflexion sur l'usage de la balance à deux plateaux. Pour l'enseignement, il nous semblerait hautement pédagogique de fonder les différentes axiomatiques sur les usages d'instruments simples. Sans vouloir mêler tous les problèmes, cette méthode simplifierait la définition de la géométrie affine en 4° : l'usage précisément délimité d'un jeu de règles graduées astreintes au seul glissement sur elles-mêmes.

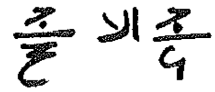
VI.- La symbolique algébrique.

C'est une invention des Arabes d'Occident. D'après un texte d'Ibn Khaldoun, XIV° s, elle pourrait remonter au mathématicien marocain Al-Banna. Malheureusement le traité d' Al-Banna auquel se réfère Ibn Khaldoun est perdu. Il est question de raisonnement "abstrait", sur les "lettres" (huruf); mais on peut hésiter sur le sens à donner à ces expressions.Youschkevitch (4,p.104) juge raisonnable d'y voir le signe d'un rôle précurseur.

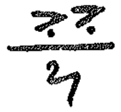
En tout cas le mathématicien espagnol de Grenade Al-Qalaçadi (XV° s.) est arrivé à une expression très proche, pour le calcul algébrique, de notre intuition scolaire classique. (Woepke, ref. 2).

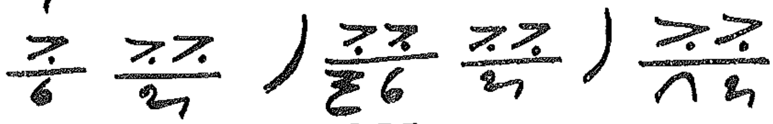
A.- Calcul des radicaux :

-  $\sqrt{3}$

-  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$

-  $\sqrt{\frac{3}{5}}$

-  $\sqrt{\sqrt{2}}$

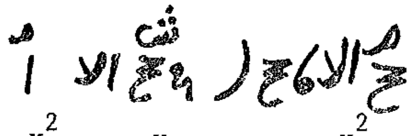


$$\sqrt{6} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{36}} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{72}}$$

B.- Ecriture des polynômes et transformation des équations :

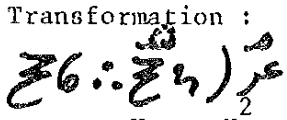
1) 

$\overset{x}{6} \quad - \quad 5 \quad \overset{x^2}{3}$: lire $3x^2 + 5 - 6x$

2) 

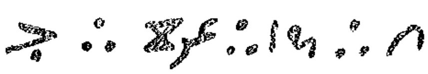
$\overset{x^2}{1} - \overset{x}{32} = 36 - \overset{x^2}{3}$: lire $3x^2 - 36 = 32x - x^2$

Transformation :



$36 + \overset{x}{32} = \overset{x^2}{4}$ lire $4x^2 = 32x + 36$

C.- Ecriture d'une proportion :

 lire : $\frac{7}{12} = \frac{84}{x}$

x 84 12 7

Les trois séries d'exemples nous permettent de faire le point.

On peut dire qu'un commencement de structure algébrique, associé à l'emploi des radicaux et du signe d'égalité, apparaît à l'évidence. Il est même vraisemblable que notre symbole "radical" n'est autre, un peu déplacé, que l'initiale  du mot arabe désignant la racine. Mais ce symbole n'a

visiblement pas encore un sens univoque. Nous avons vu, (VI,C) que le mot "racine" avait deux sens différents ; et nous avons expliqué comment il les avait pris et conservés dans notre langage actuel. Ces deux sens apparaissent dans les exemples A d'une part, C d'autre part. On voit enfin,en comparant B,2) et C, que le signe ∴ peut avoir plusieurs sens.
Il n'y a pas encore à proprement parler de signe opératoire. Le symbole d'égalité, dans la transformation des équations, nous paraît finalement le plus élaboré.

Rappelons que notre signe d'égalité remonte au XVI° s. et s'appuie sur l'intuition des droites parallèles, choses on ne peut plus égales.

Cette discussion sur une symbolique en voie de formation nous paraît intéressante dans l'enseignement, non pas tellement pour faire l'histoire du calcul algébrique, mais pour comprendre la nature et la portée de telle autre symbolique en voie de formation , par exemple l'usage des quantificateurs. Le langage abrégé, sténographique, rend parfaitement compte du caractère "muet" des variables mises en relation. Puis apparaissent des règles d'emploi :

par exemple : si : $a - b = c$, alors $a = c + b$, ce qui est l'opération précisément désignée par "Algèbre".

De même, les règles de transformation d'une proposition où figurent des quantificateurs, lorsqu'on en effectue la négation, donnent à ces symboles leur structure, et peuvent légitimer leur emploi systématique.
Il est évident que toutes nos remarques perdent leur objet, si on a donné de la soustraction une définition axiomatique a priori ...

VII.- Le Calcul Indien et Al-Khowarizmi.

Nous n'insisterons pas sur les divers algorithmes de calcul possibles, et pratiqués à la suite des Arabes vers le XV° siècle. Mais il nous paraît intéressant de penser, et de dire, que la pratique du "Calcul indien", comme Al-Khowarizmi l'appelle, doit provenir d'une réflexion sur le boulier chinois, ou abaque. Comme le remarque D.E. Smith à propos de l'Arithmétique publiée à Trévise en 1477, elle est appelée "L'arte del abacco" bien que l'usage de l'abaque ait été abandonné en Italie depuis longtemps au XV° siècle (10, t.VI,p.313).

Il est d'abord clair que la technique d'Al-Khowarizmi pour la multiplication s'adapte au boulier ; nous la suivons d'après le texte et l'exemple donnés par Karpinski (10, t. III,p. 401) : 324 x 264 .

Soit 324 le multiplicande, et 264 le multiplicateur ; on multiplie d'abord 3 le nombre de centaines, par 264. A la dernière des multiplications partielles, 3 × 4 , le 3 disparaît, et il est remplacé par le 2 de 12, la dizaine passant en retenue.

Cela fait, on passera à la multiplication des 2 dizaines de 324 par 264. Sur le papier, cela se traduira par le déplacement de 264 vers la droite, le 4 de 264 étant placé sous le multiplicande partiel 2.

1) Si vis multiplicare unum numerum per alium, pone numerum qui vis multiplicare per suas differentias et numerum per quem volueris multiplicare per suas. Ita quod prima illius per quem multiplicare volueris sit sub ultima illius quem multiplicare volueris.

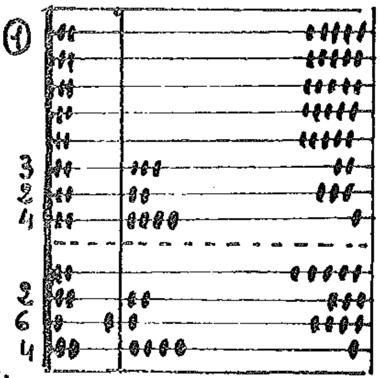


fig.5

2) Deinde multiplica ultimam per ultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe in loco illius per quem multiplicas. Si vero in decem excreverit scribe super eam figuram nichili et de decem fac unum in antea. Si autem ultra decem fuerit scribe ibi et de decem fac unum in antea. Si vero in duo decena vel in plura excreverit (etc.)

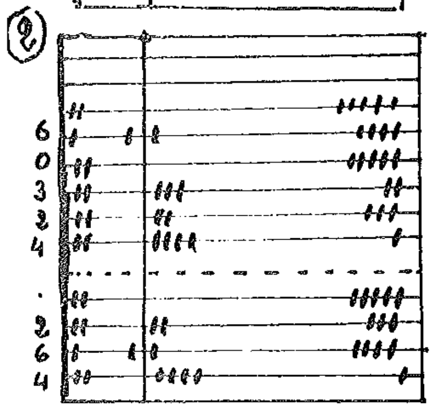


fig. 6

3) Deinde multiplica eandem per penultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe super penultimam illius per quem multiplicas. Si vero in X vel ultra fac sicut de ultima ...

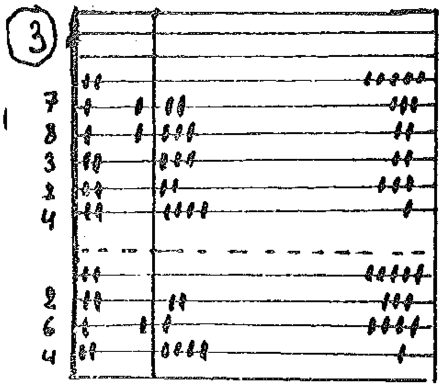


fig.7

4) ... et ita multiplica illam ultimam per omnis

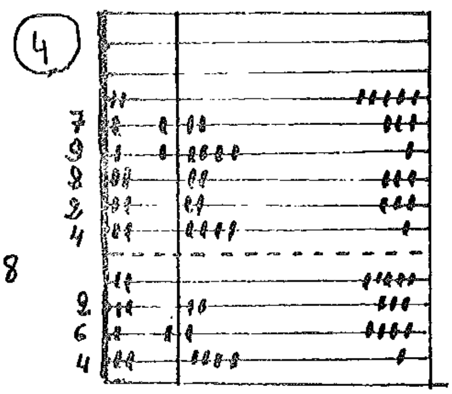


fig.8

usque ad primam. Quando autem multiplicas ultimam per primam dele ultimam (...)

4bis) Deinde protrahe figuras illius per quem multiplicas ita quod prima illius sit sub penultima eius quem multiplicas (...)

4bis

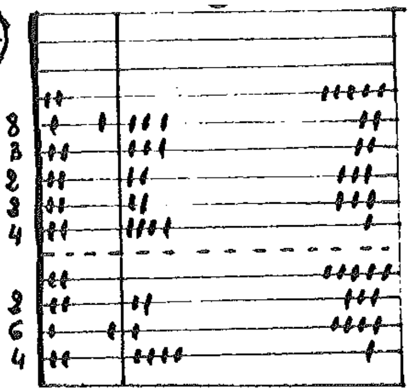


fig. 9

5) ... et multiplicata illam penultimam quilibet qui per omnis figuras illius per quem aliquem multiplicas sicut predictum est usque ad primam

5

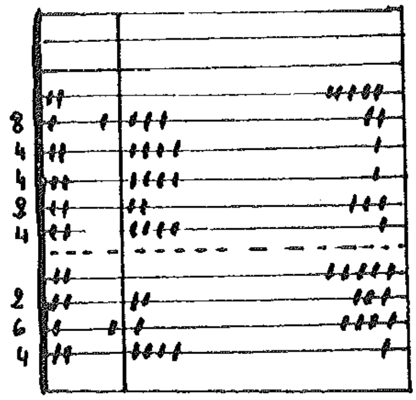


fig. 10

6) ...

7) ... et iterum dele illam penultimam (...)

7

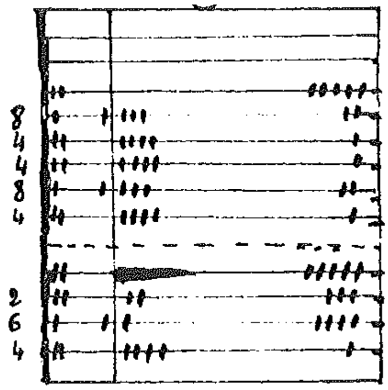


fig. 11

8) 9) 10)

... et sic multiplica omnis figuras illius quod multiplicas per omnis illius per quem multiplicas.

8

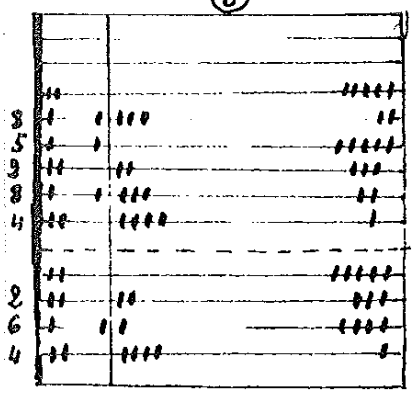


fig. 12

9

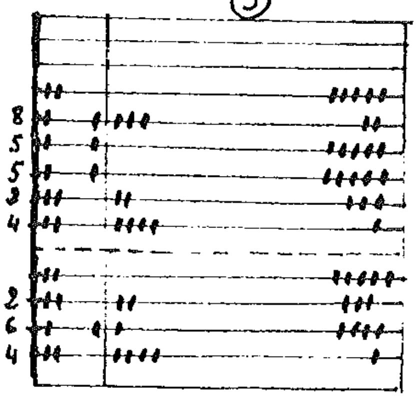


fig. 13

10

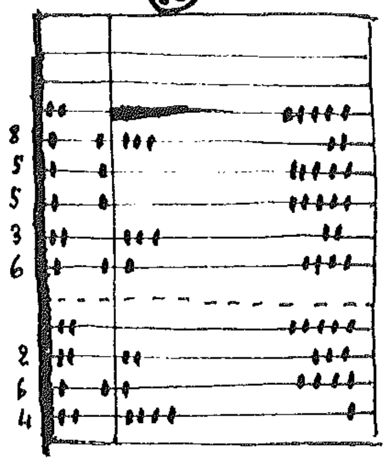


fig. 14

La méthode indiquée pour la division se met aussi directement en oeuvre sur le boulier.

Notons encore qu'Al-Khowarizmi donne séparément, dans la liste des chiffres indiens, 1, 2, 3, 4 d'une part, et 5,6,7,8,9,0, d'autre part. Ce mode de calcul ne devait pas être très ancien en Inde ; en tout cas la méthode d'Aryabatta (+499) est différente, et ne paraît pas s'adapter au boulier. Par contre la méthode décrite dans le Tsi Kou Souan King, traité chinois du VII° siècle, est identique dans son principe à celle d'Al Khowarizmi (Schrimpf, ref. 5 art.Calcul).

R.Schrimpf indique enfin, dans l'article "Abaque", ref 5, qu'on ne trouve pas trace des bouliers (abaques) dans les traités mathématiques chinois antérieurs au VII° siècle.

Il faut insister sur le fait que la position d'un chiffre était utilisée bien avant les Indiens et les Chinois dans la pratique opératoire. Qu'il suffise de dix signes, la position faisant le reste, c'est ce que le boulier a permis aux Chinois et aux Indiens de découvrir.

Il est enfin remarquable que les Romains aient déjà connu l'abaque, de type très semblable, qui s'adapte en effet fort bien à leur système de numération. Mais, l'abaque étant utilisée par les gens de basse condition, ils ne l'ont pas exploitée au-delà de l'addition. On a rarement, en mathématiques, l'occasion de considérations à caractère social très pertinentes ...

VIII.- L'extension de la notion de nombre.

Voir ici Youschkevitch, ref 4, pp 84 ss.

P. 87 : "A l'instar des Anciens, al-Hayyâm (Omar Khayyam) entend par "nombre, au sens propre du terme, un ensemble d'unités indivisibles. Il soulève "en même temps la question du lien existant entre les notions "entre les notions de rapport et de nombre. Ce problème est, selon les termes "d'Al-Khayyam, de nature philosophique et de ce fait n'est pas étudié par les "géomètres : "Un rapport de grandeurs peut-il être par essence un nombre ou "est-il accompagné d'un nombre ou encore le rapport est-il lié à un nombre non "par nature, mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport "est-il lié par nature à un nombre et n'a-t-il besoin de ce fait de rien "d'extérieur ?" Tout en laissant de côté l'aspect "philosophique" de la "question, al-Khayyam considère comme nécessaire d'introduire dans les mathématiques une unité divisible et une nouvelle catégorie de nombres,qui "correspondent à des rapports quelconques de grandeurs. En démontrant la "première propriété des rapports composés,il choisit une certaine unité et "suppose que son rapport avec une grandeur auxiliaire G est égal au rapport de "A avec B. Cette grandeur G, dit-il, nous allons "la concevoir non comme une "ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que "l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres "absolus et véritables car le rapport de A à B peut souvent ne pas être mesu- "rable numériquement c'est-à-dire qu'on peut ne pas trouver deux nombres dont "le rapport soit égal à ce rapport". C'est ainsi, explique Al-Khayyam, que procèdent les calculateurs et les arpenteurs qui parlent de la moitié ou d'une autre partie d'une unité supposée indivisible ou d'une racine de cinq, ou de dix, etc. L'unité choisie est en tout cas divisible et "la grandeur" G, qui est une grandeur arbitraire, est considérée comme un nombre au "sens indiqué."

Ce texte est d'une importance extrême. Une fois encore, il montre comment la réflexion sur l'instrument pratique de travail, ici la chaîne d'arpenteur, conduit à la structure de raisonnement. C'est la manipulation des longueurs qui mène à la définition des réels.

D'autre part, à la découverte intellectuelle, il faut associer un réel courage moral. Sur deux points au moins, ce que dit Al-Khayyam heurte l'orthodoxie musulmane . La nouveauté, c'est l'hérésie ; l'introduction, pour la nécessité du travail humain, d'êtres nouveaux, sans l'intervention divine, est une hérésie caractérisée... ce pourquoi Al-Khayyam s'abstient de la discuter sur le plan philosophique. D'autre part l'atomisme et les indivisibles, depuis Ashari (X° siècle) ont caractère de doctrine officielle.

Sur ce point, je me dois d'ajouter qu'il a soulevé au Colloque Inter-IREM de CAEN une vive et intéressante controverse avec M.T. LEVY et Melle MIKOLJ de l'IREM de PARIS-NORD. Il est évident que le point de vue de Louis MASSIGNON (ref 1), sur lequel ils s'appuient, a et doit avoir une grande autorité, par sa connaissance incomparable de l'Islam et de la langue arabe.

"(Le) caractère de la langue arabe, écrit-il (I,p. 458) a eu "pour résultat d'infléchir les connaissances qu'elle exprimait dans le sens "d'une pensée analytique, atomistique, occasionaliste et apophtegmatique. Une "Une étude récente sur "l'involution sémantique du concept" (tadhmin), expose "comment les langues sémitiques tendent à la formulation abrégée et abstraite, "algébrisent" par contraste avec la géométrisation aryenne. En effet, la pensée "peut se projeter, avec son objet, dans l'espace, comme c'est le cas pour la "figuration pythagoricienne des nombres ; elle peut aussi se replier sur elle- "même, dans le temps qui lui est propre et y construire son objet (Cf. le "temps du schématisme kantien).

" La langue arabe, qui favorise cette intériorisation de la "pensée, était particulièrement apte à exprimer les sciences axactes et à les "développer dans le sens qui a été historiquement celui du progrès des mathé- "matiques : passage d'une arithmétique et d'une géométrie intuitives, presque

"contemplatives, qui préfigurent, chez Platon, la contemplation des natures
"et des essences intelligibles, à une science des constructions algébriques,
"où finissent par s'unifier arithmétique et géométrie ...

Que dire de ces érudites considérations ??? Les arabes n'ont pas algébrisé plus que les Grecs et les Indiens, Platon ne compte pas pour le présent problème. Les Arabes l'ont fort peu connu, par rapport à Aristote, Euclide, Archimède, Diophante. Il y a peu de rapports entre la poésie romantique anglaise, et l'article scientifique écrit par Japonais dans une revue américaine spécialisée; encore ce Japonais peut-il, rentré chez lui, écrire des poèmes, avec pinceau et kimono ... L'arabe a été langue internationale, et Al Khayyam écrivait ses poèmes en persan. Al Tusi a écrit son principal traité en persan, puis l'a traduit en arabe.

Melle Nikou et M. Lévy, pour approfondir cette discussion, m'ont signalé les réflexions de L. Gardet sur les "Ad'dad", les mots arabes pouvant avoir des significations contraires (exemple français : louer un appartement). De tels mots sont assez nombreux en arabe, et un type est pour nous particulièrement intéressant à cause de la "muqabala" d'Al-Khowarizmi, c'est le "muqabal" qui désigne la mise en opposition symétrique de deux termes, ou de deux concepts. Est-ce le mot qui a créé l'idée mathématique, ou l'usage de la balance qui a trouvé un mot bien adapté, ou la pratique algébrique déjà en usage qui a trouvé ainsi à se codifier. Le rapprochement est en tout cas légitime et évocateur, au même titre que celui de Bhaskara avec l'infini et la transmigration des âmes. Mais les exposés arabe et indien de l'algèbre sont trop proches pour que nous en tirions de trop grandes conclusions. (L'ambivalence dans la culture arabe. Authropos 1967;pp. 121 s s).

Avec la langue arabe, L. Massignon et R. Arnaldez donnent aussi un rôle spécifique et positif à l'Islam. Ainsi, loc. cit. p. 523 :

"Après les invasions des Barbares, qui avaient assombri la
"brillante civilisation gréco-romaine, l'Occident fut réchauffé par le rayon-
"nement de cette autre civilisation méditerranéenne, qui avait su, pour exploi-
"ter les dons d'Allah, prendre le meilleur héritage grec, en le marquant d'un
"esprit nouveau qui doit beaucoup, d'une part à la grande pensée syncrétique
"et mystique de l'Iran, de l'autre au génie propre des Arabes et de l'Islam
sunnite."

La science des savants musulmans s'exprimant en arabe est un fait historique auquel, actuellement encore, des historiens des Sciences connus ne rendent pas suffisamment justice. Voir, par exemple, KLINE, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford U.P. 1972). Mais si l'on donne une place spécifique importante à la langue et à la religion dans le déterminisme de son éveil, il faut alors aussi expliquer son déclin. Sinon c'est faire litière du puissant désir de réforme qui anima certains penseurs musulmans à la fin du XIX° siècle, venus chercher même une partie de leur inspiration à Paris. Ainsi Jamal addin Al-Afghani, dont, écrit L. Gardet (Introduction à la Théologie Musulmane, p. 79), "la puissante figure de penseur prophétique domine toute la pensée religieuse musulmane moderne", a pu écrire : "A la vérité, la religion musulmane a cherché à étouffer la science et à en arrêter les progrès. Elle a réussi ainsi à enrayer le mouvement intellectuel ou philosophique et à détourner les esprits de la recherche de la vérité scientifique. Pareille tentative, si je ne me trompe, a été faite par la religion chrétienne, et les chefs vénérés de l'Eglise Catholique n'ont point encore désarmé que je sache... Il est permis de se demander comment la civilisation arabe, après avoir jeté un si vif éclat sur le monde, s'est éteinte tout à coup ; comment ce flambeau ne s'est pas rallumé depuis, et pourquoi le monde arabe reste toujours enseveli dans de profondes ténèbres.

"Ici la responsabilité de la religion musulmane apparaît tout entière. Il est clair que, partout où elle s'est établie, cette religion a cherché à étouffer les sciences, et elle a été merveilleusement servie dans ses desseins par le despotisme..." (Journal des Débats, vendredi 18 mai 1883 ; publié par A.-M. Goichon sur communication de L. Massignon dans son édition de la "Réfutation des Matérialistes, pp. 178-184).

Nous n'insisterons pas. S'il est vrai que ce flambeau s'est éteint vers le XV° siècle, il n'en résulte assurément pas qu'il n'ait point brillé, comme d'assez nombreux historiens des sciences l'ont peu ou prou écrit. L'Islam a pu représenter la liberté : "Man aslama fa-awlayka taharrou rachidan" Ceux qui se sont soumis à Dieu se sont libérés vraiment. (Coran, 72,14).

Mais enfin le milieu des philosophes, auquel les mathématiciens appartenaient, n'a pas réussi dans l'ensemble à faire authentifier ses apologies fondées sur le Coran. Voir encore L. Gardet; loc. cit. pp 320 ss. Ce qui est en cause, ce n'est pas L'Islam ; c'est la puissance répressive de l'Institution constituée en orthodoxie religieuse ... et aussi bien antireligieuse.

Je ne sais pas s'il existe un déterminisme linguistique ou religieux pour expliquer ou appuyer la démarche d'Omar Khayyam ; mais, en ce qui concerne la définition des réels, il s'agit d'un apport théorique. Les Grecs connaissaient les fractions continues, et la définition d'un rapport, par précisément l'Algorithme d'Euclide :

$$a = bq + r \ , \quad r \quad b-1 \quad : \quad a/b = q + r/b$$

$$b = rq' + r' \quad r-1 \quad ; \quad b/r = q' + r'/b$$

$$a/b = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{r'}{b}}$$

Lorsque le rapport est rationnel, la théorie du p.g.c.d. montre que l'opération s'arrête ; sinon elle se poursuit indéfiniment, et on ne connaît du nombre que des valeurs approchées fournies par les réduites. C'est ainsi qu'en 230 avant Jésus-Christ Apollonius donne pour π la valeur : 377/120, correspondant à

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{17}}$$

pour la troisième réduite, qui s'esprime simplement dans le système sexagésimal :

$$3,8' \ , \ 30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$$

la valeur exacte 333/106 de la 3° réduite, correspond à $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$

Les mathématiciens indiens Brahmagupta (7° siècle) et Bhaskâra (XII°) ont étudié l'équation connue sous le nom d'équation de Pell

$D.x^2 + 1 = y^2$, et le second en donne la solution sous la forme :

$x_n = (2n / D - n^2$, $y_n = D+n^2 / D - n^2$ n étant un entier convenablement choisi. (G.R.KAYE, 10, t.2, pp 336ss).

Dans ces conditions, l'apport d'Omar Khayyam est défini avec une grande précision par A. Youschkevitch (p. 85)

"Al-Hayyam élargit (...) la définition euclidienne de la relation : "plus grand que". (A/B et C/D étant définis par les suites de quotients partiels "q_o, p_1 , ...q_m ; q'_o , q'_1 , ... q'_m) D'après Al-Hayyam, on a A/B$>$C/D si, "lorsque $q'_k = q_k$ pour k m, les inégalités q_m q'_m pour m impair et q_m q'_m "pour m pair sont satisfaites. Notons qu'Al-Hayyam étend aussi cette définition "au cas où un seul des deux rapports est incommensurable et l'autre commensurable " (c'est-à-dire lorsque la décomposition de ce dernier en fraction continue " s'arrête à un certain seuil) ; il donne ainsi un critère permettant de comparer " un nombre irrationnel avec un nombre rationnel.

"La définition de l'égalité des rapports, telle qu'al-Hayyam l'a donnée, est identique à certaines définitions données par ses prédécesseurs. La définition de l'inégalité des rapports, par contre, semble pouvoir lui être attribuée. De plus, al-Hayyam s'est particulièrement efforcé d'établir l'équivalence des deux théories : la sienne d'une part et celle d'Eudoxe et d'Euclide d'autre part. Dans toute une série de propositions, al-Hayyam démontre que des rapports qui sont égaux ou inégaux au sens d'Euclide, le sont aussi dans son sens et inversement". (Et il donne une place fondamentale, dans ses démonstrations, au principe de continuité).

Autrement dit, al-Khayyam a donné le premier exemple conscient d'extension d'un ensemble muni d'une certaine structure. Les rationnels sont un sous-corps du corps des réels. Il est aussi le premier à avoir compris la mathématique de l'inégalité.

Sans vouloir épuiser le débat philosophique, on peut encore ajouter que, si l'on cherche le mot "realis", d'où procède "réel", dans un dictionnaire latin classique, on ne l'y trouvera pas. Ce mot est un néologisme du XII° siècle, et se rattache au débat sur les "universaux". Un nombre est dit "réel" parce qu'il est pour nous davantage qu'un outil de calcul : il est vraiment une chose donnée par la nature. La nature nous donne les "réels" par les chaînes d'arpenteur ... étymologiquement, un "irrationnel" n'est pas "réel", un "négatif" n'est pas "réel", comme le montrent bien les bilans usuels des conférences sur le désarmement... Si le résultat est dit "négatif", c'est qu'il n'y a pas de résultat.

On peut ici esquisser une reconstitution épistémologique, et penser à la belle conclusion que G. Bachelard donnait, dans "Le nouvel esprit scientifique", à son étude de l'épistémologie non-cartésienne :

"Chacun peut revivre ces mutations spirituelles en se rappelant le trouble et l'émoi apportés par les nouvelles doctrines dans la culture personnelle: elles réclament tant d'efforts qu'elles ne paraissent point naturelles. Mais la nature naturante est à l'oeuvre jusque dans nos âmes ; un jour on s'aperçoit qu'on a compris. A quelle lumière reconnaît-on d'abord la valeur de ces synthèses subites ? A une clarté indicible qui met en notre raison sécurité et bonheur. Ce bonheur intellectuel est la marque première du progrès." (p.178)

On pourrait encore observer que, d'une certaine façon, G. Bachelard se mettait ici en contradiction avec certaines de ses thèses antérieures. Dans son livre sur "La formation de l'esprit scientifique", il consacrait un important chapître à "l'obstacle substantialiste", à ce besoin qu'on avait autrefois, avant l'ère scientifique de l'humanité, de donner une substance intuitive, naturelle, aux notions introduites dans les raisonnements. Nous voyons que cette tendance est de toujours. Un exemple très frappant, parce qu'encore récent, nous est fourni par les nombres "imaginaires". C'était le terme de Descartes, qui lui assura une belle longévité. Son remplacement par le terme de "complexes" correspond à une "substantification" incontestable dans les esprits.

IX.- Les calculs approchés.

Ici encore, l'ouvrage de référence est celui de M. Youschkevitch, et je n'ai rien d'original à apporter. Il nous apparaît qu'avec les idées d'Omar Khayyam une étape importante est franchie. Dans le cadre des programmes actuels du Second degré, nous pouvons concevoir quelques thèmes de problèmes ayant une histoire.

A.- L'Intégration

Entre la réflexion algébrique sur les surfaces d'Al-Khowarizmi et la définition numérique de grandeurs continues par Omar Khayyam, il faut faire une place à Thabit ben Qurrah (822-900). Ce n'est pas un musulman, mais un sabéen de Harran (ou Caran). Une bonne partie des résultats étaient déjà connus d'Archimède. Mais la méthode des intervalles inégaux est originale, ainsi que la progression des résultats partiels. (Youschkevitch, pp. I24ss).

1° Sommations.

On se ramène évidemment toujours à une expression de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$. Mais le modèle graphique n'a pas perdu sa valeur pédagogique.

a) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

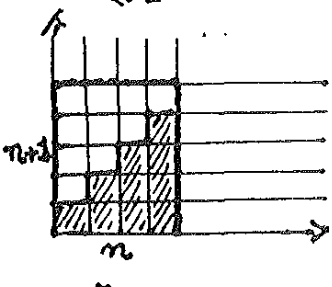
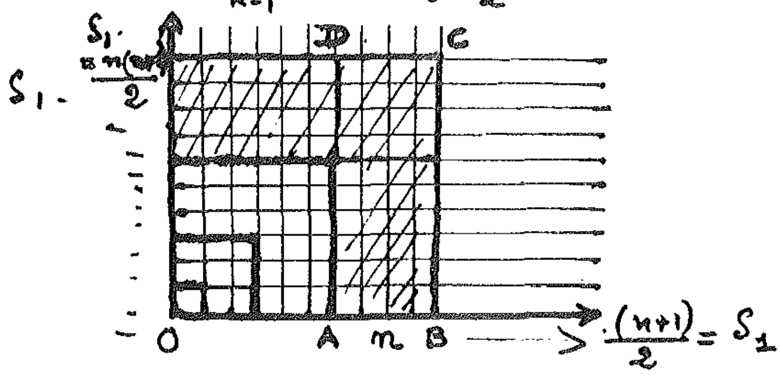


fig. 15.

b) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$



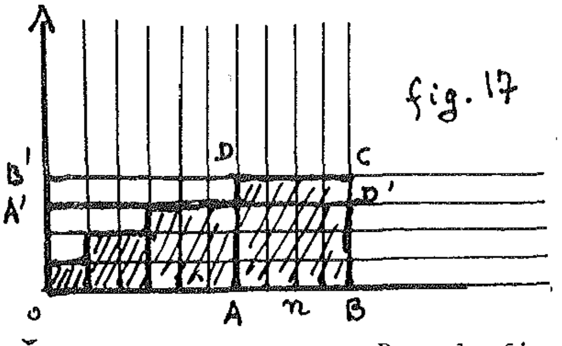
La surface du rectangle ABCD est n.(n(n+1)/2) ; la réunion des rectangles ABCD et A'B'C D' a donc pour surface : 2.n2(n+1)/2 - n2 = n3.
La formule de sommation en résulte.

(Al-Karadji, contemporain d'Ibn Qurrah ; Youschkevitch, p. 63)
une formule dérivée des précédentes est :

$$S_3 - S_1 = \quad (n^3 - n) = \quad (n + 1)\ n\ (n - 1)$$

Al Karadji reconnaît n'avoir pas réussi à donner de démonstration pour la formule relative à la somme des carrés. Le modèle géométrique nous permet d'en concevoir plusieurs. Mais avec Ibn al Haytham (Alhazen), d'une vingtaine d'années plus jeune, le principe d'une démonstration générale est trouvé : Soit à trouver S_n, on porte en abscisse S_{n-1} et n en ordonnée, la surface p. S_{p-1} est une combinaison linéaire de S_1 S_2 ...., S_{p-1},

$S_{p.1}$bn al Haytham explicite les calculs complètement pour S_1, S_2, S_3, S_4est donné pour la première fois, et il est probable que nous avons aussi la première démonstration véritable de S_2, dont l'expression était connue depuis Archimède : donc le premier cheminement complet vers l'intégration des surfaces et des volumes (cf.H.Suter, Die Abhandlung uber die Ausmessung des paraboloides von Ibn al Haythan Bibliotheca Mathematica, 1912,P.292 sz).



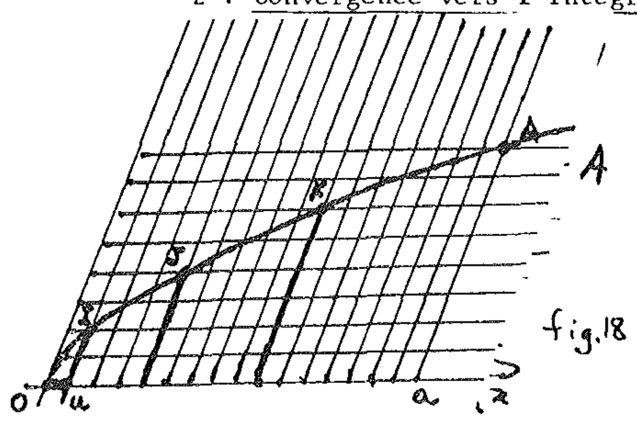
Dans la figure correspondant au calcul de S_2, la réunion du carré ABCD et du rectangle A'B'CD' a pour surface : $n^2 + n(n - 1)/2$; donc $n.n(n+1)/2 = 3.S_2/2 - S_1/2$.

quoi qu'il en soit de cette acquisition, concernant S_2, Thabit Ibn Qurrah l'utilisait pour donner la somme des n premiers carrés impairs.

La somme des n premiers nombres impairs est : $(2k-1) = n^2$

et celle des carrés correspondants : $(2k-1)^2 = \dfrac{4n^3}{3} - \dfrac{n}{3}$

2°. <u>Convergence vers l'intégrale</u>.



Soit, d'après les équations d'Apollonius, en axes orthogonaux ou obliques, la parabole

$$y^2 = 4\ px$$

pour calculer la surface comprise entre la parabole (y positif), Ox, et l'abscisse a, Thabit Ibn Qurrah partage a en n^2 parties égales, u ; puis il considère les intervalles u, 3u, 5u ..., (2n-1)u consécutifs. Les ordonnées sont alors proportionnelles à 2,4,6, etc. Soit alors s la surface du parallélogramme construit sur u et pu, la surface du polygone inscrit OIJK ... Aa est :

$$s(1 + 3^2 + \ldots.\ (2n - 1)2) = s.(4\ n^3/3 - n/3)$$

D'autre part la surface du parallélogramme OaAa' est $s.2n^3 = S$

La surface cherchée est donc :

$$(2/3).S - \ S.(1/_{6n2})$$

Dans sa proposition n° 14, Thabit Ibn Qurrah a préalablement démontré que, pour n suffisamment grand, ce rapport peut être rendu inférieur à tout rapport A/B fixé d'avance. Donc, proposition 18, la différence entre (2/3)S et la surface cherchée peut être rendue plus petite que toute surface fixée d'avance.

Quelques années plus tard, Ibn al Haytham suit la même démarche pour calculer le volume du paraboloide.

Il est donc clair qu'aux environs de l'an mille, la science arabe a bien pris conscience de la notion de limite, et de son application au calcul de l'intégrale définie.

B.- Résolution approchée de certaines équations.

1° Equation du 3° degré.

Omar Khayyam avouait que tous ses efforts pour résoudre numériquement ces équations étaient restés vains : "La démonstration de ces formes pour le cas où l'bjet du problème est un nombre absolu, n'est possible ni pour nous, ni pour aucun de ceux qui sont passés maîtres en cette science. Peut-être qu'un de ceux qui viendront après nous la réalisera."(Youschkevitch, p.96).

Par des considérations de géométrie analytique, il démontrait que, dans certains cas, l'équation avait certainement une solution positive, et deux solutions positives dans certains autres cas. Ce problème était directement lié à celui de la trisection de l'angle :

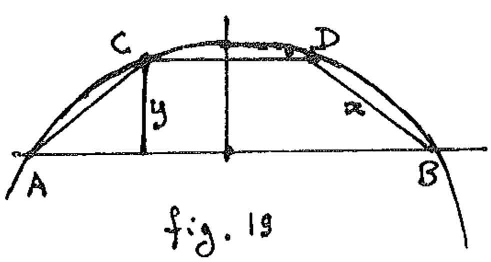


fig. 19

AB = a ; AC = CD = DB = x

$$BC^2 - y^2 = \left(\frac{a + x}{2}\right)^2 \ ; \quad x^2 - y^2 = \left(\frac{a - x}{2}\right)^2 \ ;$$

$$BC^2 - x^2 = ax \ ; \quad BC^2 = ax + x^2$$ (théorème de Piolémée)

On a ensuite, appelant D le diamètre du cercle :

$$BC^2 = \frac{4x^2.(D^2 - x^2)}{D^2}$$

D'où l'équation : $x^3 - (3D^2/4).x + (D^2/4).a = 0$

Pour étudier ce problème, Omar Khayyam le ramène, dans le style d'Al-Khowarizmi pour le second degré, au type : $x^3 + a = b.x$
Et il considère l'intersection de deux coniques :

- La parabole $x^2 = y.\ b$
- L'hyperbole équilatère $y^2 = x^2 - (a/b).x$

Il y aura sur la branche de droite (gauche pour Al-Khayyam, l'axe Ox étant pour lui orienté vers la gauche) 0 ou 2 solutions.

Il est clair qu'il en existe une voisine de (a/b) et légèrement supérieure, lorsque cette quantité est petite. Avec les notations de la trisection de l'angle, cette valeur approchée est a/3.

Al-Kasi, au XV° siècle, en donne un procédé de calcul par itération.

On pose $x_1 = a/b$, puis la suite définie par $x_n = \dfrac{a + x^3_{(n-1)}}{b}$

qui converge si, au voisinage de la racine, $3.x^2/b$ est inférieur à une quantité fixe plus petite que 1.

Appliqué au problème de la trisection de l'angle, le procédé permet d'atteindre le sinue de 1 degré. On peut en effet déterminer les fonctions circulaires de 3 degrés, à partir de $\pi/12$ et de $\pi/10$.
Un élève d'Al-Kasi a obtenu :

$$\sin.1° = 0{,}017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571$$

2° EQuation dite de Kepler.

Le procédé de calcul par itération est ici bien antérieur à al-Kasi, et remonte au IX° siècle.

Soit à résoudre : $t = \theta - e \sin\theta$

On pose $\theta_0 = t$

$$\theta_n = t + e \sin \theta_{(n-1)}(t).$$

si e est petit, la suite converge rapidement.

C.- Le Calcul d'erreurs.

Al-Kasi a franchi une étape de plus, dans l'analyse du phénomène de convergence vers une limite. Il détermine en effet le nombre de côtés nécessaires au polygone régulier qui permettra d'obtenir la longueur d'une circonférence de diamètre égal à 600.000 fois celui de la terre avec une erreur inférieure à un crin de cheval. Du point de vue théorique, le principe est analogue à celui que représente, dans l'intégration de la parabole, la proposition 14 de Thabit Ibn Qurrah. Mais il y a en plus toute la technique d'un génial calcul d'erreur.

Sans entrer dans les questions d'unités, disons que le crin de cheval correspond environ à 1/2 millimètre. On peut vérifier, en évaluant le tour de la terre à 40.000 km, que, sur un cercle 600.000 fois plus grand, l'angle de $1°/60^8$ correspond à 0,4 millimètre environ sur la circonférence. Pour l'homogénéité, prenons un rayon r, dont la valeur numérique sera 60, et posons la condition relative aux périmètres p et p' des polygones réguliers inscrit et circonscrit :

$$p' - p \quad r.60^{-9}$$

On a ensuite :

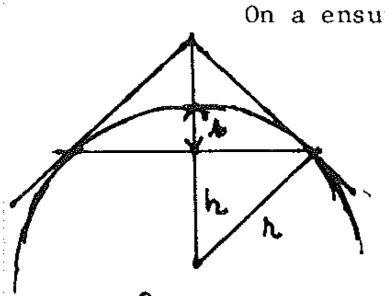


fig. 20

$$\frac{p'}{p} = \frac{r}{h} \qquad\qquad \frac{p'-p}{p} = \frac{r-h}{h} = \frac{s}{h}$$

à ce niveau, on peut écrire

$$p' - p \;\#\; s.\frac{C}{r}$$

On voit en effet qu'Al-Kasi néglige les erreurs du second ordre ; de même il prend, pour le rapport C/r, les valeurs approchées d'Archimède, 6 par défaut et 44/7 par excès.

On a donc

$$s < \frac{r}{6 \times 60^9} \sim \frac{10}{60^9}$$

Une évaluation plus précise, un peu inconséquente, donne $8.\ 60^{-9}$

Le demi-côté du polygone inscrit est alors très voisin du côté du polygone obtenu en boudlant le nombre des côtés ; on obtient dans ces conditions :

$$\frac{C^2}{4} = s.\ 2r \quad ; \qquad c \sim \frac{8.\ 8.60}{10^9} = \frac{8}{60^4}$$

Al-Kasi détermine alors combien de fois il faut doubler le nombre des côtés du triangle équilatéral, pour obtenir, dans un cercle de rayon 60, un côté inférieur à la quantité indiquée.

Il trouve que le nombre de côtés doit être 3.2^{28}. Nous pouvons ajouter que l'utilisation d'un calculateur programmable permet de suivre aisément ce raisonnement.

Ensuite, Al-Kasi cherche à évaluer avec quelle précision doivent être calculés les côtés successifs, pour obtenir la précision voulue au bout du 28° calcul de côtés. Il apparaît que son raisonnement n'est pas encore inattaquable ; mais Al-Kasi s'en tire en prenant une précision largement supérieure ($1/60^{18}$: 60-18 ...).

Ayant alors obtenu p et p', et constaté que ces valeurs répondaient à la condition posée, il prend la demi-somme, et obtient la valeur de π, qu'il convertit en fraction décimale :

$$2\pi = 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

... Et il affirme que cette valeur est beaucoup plus exacte que celle donnée par Archimède. (Youschkevith,p.153 ss).

D.- La trigonométrie.

Il était intéressant il y a vingt ans, pour un professeur des classes terminales, particulièrement dans un Lycée franco-musulman en Algérie, de dire que toutes les formules de transformations trigonométriques ou d'autres équivalentes étaient connues aux environs de l'an Mille par des savants tels qu'Abu-l-Wafa ou Ibn Yunus ; de dire que tous les problèmes de résolution de triangles avaient été résolus au XIII° siècle par Nasir ed-din al-Tusi ; de dire encore, la Cosmographie figurant alors dans les programmes, quelques mots sur les résolutions de triangles sphériques. Nous ne savions pas alors, mais nous l'apprenons par A.P. Youschkevitch (p. 143), que notre souci de justice en matière de propriété scientifique pouvait se protéger contre tout soupçon de complaisance envers le chauvinisme de nos élèves : Al-Tusi lui-même souligne tout ce que la trigonométrie sphérique doit aux anciens, c'est-à-dire à Ptolémée.

Notre rupture complète avec la géométrie des grecs, et les progrès de la rigueur dans la définition des fonctions circulaires, sans parler de la suppression de la Cosmographie, effacent pour le moment de notre horizon ce large pan de la science arabe et indienne.

Il reste que l'astronomie fournit l'axe moral du développement mathématique arabe en direction de l'Analyse. Derrière tout les calculs approchés, en peut voir l'approximation croissante des fonctions circulaires. Au fond, ce sont les seules fonctions qui donnent à la science l'idée de fonction, les seules comportant l'idée de variable. La trame visible de tout ce travail, nous pouvons la voir dans la succession des tables trigonométriques et astronomiques toujours perfectionnées :

IX° siècle : Al Khowarizmi, Al Hasib (Bagdad)
X° " : Al Battani (Harran), Ibn Yunus (Le Caire)
Abu-l-Wafa (Khorassan)
XI° " : Al Biruni (Kharezm) , Al-Khayyam (Merv)
XII° " : Al Mawazi (Merv)
XIII° " : Al Tusi (Maragha)
XV° " : Ecole de Samarcande (Al Kasi)

Il faut, bien sûr, mentionner les traités indiens (Siddhantas), traduits en arabe au 8° siècle. Mais, si l'article de J.D. Bond dans ISIS, t.IV, p. 303ss "The development of trigonometric methods" ne commet pas une grossière erreur, il faut admettre que les Indiens ne maîtrisaient pas encore les formules de transformations trigonométriques.

Les savants arabes ont établi la concordance complète entre notre trigonométrie et celle de Ptolémée, et cherché des formules d'analyse qui économiseraient des calculs laborieux. On ne peut pas dire qu'ils aient réussi. Youschkevitch signale, p. 176, comment Thabit Ibn Qurrah et Al Biruni se sont approchés de la notion de vitesse instantanée.
Mais on peut voir dans les travaux d'Al Tusi, qui était plein d'admiration pour Al Biruni, la preuve que cet intermédiaire indispensable à l'étude des fonctions n'est pas encore dégagé :
Al-Tusi a consacré d'importantes études aux épicycloides sans y faire apparemment la moindre allusion. (ISIS,1971,pp.490-498.Cl.Kren)

E.- L'idéal de la précision.

Biruni s'est occupé du perfectionnement des astrolabes, de contrôler les déterminations du diamètre de la terre, de mesurer les poids spécifiques (Journal Asiatique, 1858, J.J. Clément Mullat). Compare les poids spécifiques de l'eau chaude et de l'eau froide. Il affirme, sur un poids de 2kg, 2 pouvoir obtenir la précision de 0,06 gr...

CONCLUSION

Le savant arabe, médecin, philosophe, astronome et mathématicien, soucieux de connaître non pas tellement une spécialité, que le savoir global de ses maîtres, nous offre un type de "l'honnête homme" accessible au niveau de nos programmes du Second Degré. Au XVIII° siècle encore, certes, l'homme vraiment cultivé connaît les Mathématiques Supérieures ; mais le niveau dépasse déjà souvent nos programmes. La Mathématique Arabe est un bon domaine de réflexion pour nous, sur ce que le point de vue historique peut nous apporter.

On a beaucoup parlé de "pédagogie de la redécouverte" ; l'histoire de la découverte vraie, avec ses curieux illogismes parfois, peut rendre leur visage humain à certaines théories qui paraissent nées comme Minerve du crâne de Jupiter, munies du casque et de la lance. Ces théories intéressent pourtant l'historien et le philosophe également, parfois aussi le linguiste. Certaines listes d'exercices de nos manuels n'ont pas de valeur culturelle ; mais le coup d'oeil comparatif sur les listes des tablettes cunéiformes en a une.

Nous avons négligé quelques discussions classiques.

En quoi peut-on parler de science ARABE ? Eh oui ... parmi les Arabes, il y a les Persans ; parmi les Musulmans, certains ne sont pas Musulmans. Que faire ? Songer simplement que, dans 8 siècles, on discutera ainsi des savants français qui publiaient en anglais....

Ceux-là même qui contestent l'existence d'une découverte proprement arabe affirment le rôle d'intermédiaire que la civilisation arabe a joué. Intermédiaires entre nations, intermédiaires entre le passé et le présent ; les experts scientifiques font partie des missions diplomatiques ; le sage et cruel Gengis Khan pille rationnellement les bibliothèques ... Al Tûsi sera le plus célèbre bénéficiaire de ce pillage ...

Cependant le professeur de Mathématiques, s'il n'est pas indifférent à ces questions, ne peut que les trouver très en dehors de son rayon d'action normal ; ne cherchons pas le "gadget". Il souhaite ici le relais de ses collègues historiens. D'ailleurs, alors que nous aimons des vérités stables, cette histoire évolue avec ce que nous apprenons des relations internationales ; la découverte de nombreux manuscrits contribue à cette évolution. (Voir par exemple : History of science, 1967,pp 40-58,Youschjevitch, "Recherches sur l'Histoire des Mathématiques au Moyen Age dans les pays d'Orient ; Bilans et perspectives). Bien plus qu'il y a vingt ans, il devient clair que, dans le courant international, l'acquis mathématique se conserve et se transmet d'un pays à l'autre.

Mais alors, pourquoi n'avoir pas parlé davantage de l'Inde, presque rien dit de la Chine ??? n'avoir rien dit, non plus, comme nous l'a fait remarquer T. LEVY à la rencontre Inter-Irem de Caen, de la Science Juive, et notamment de Lévy Ben Gershon (XIV°) ?

La ligne de ce travail a été fixée par nos programmes actuels des Lycées, comme peut-être la ligne d'Al-Khowarizmi fut fixée par les besoins des juristes calculant leurs héritages. Là est notre seule chance, dans la France scolaire actuelle, de n'être pas tout à fait inutiles. Sauf quelques réflexions sur Omar Khayyam, nous en sommes restés à un aspect collectif et assez impersonnel de la progression scientifique. La science juive ne s'intègre pas aisément dans ce cadre. "L'Histoire Générale des Sciences" (ref I) consacre un article à part à la "Science hébraïque médiévale" (Is. Simon, pp.568-58I) : pourquoi "hébraïque", comme si les auteurs étaient différents suivant qu'ils s'expriment en hébreu ou en arabe ? Pourquoi pas un chapître sur la "Science Persane"? On voit pourquoi nous préférons nous arrêter sans trop chercher à nous justifier, même pas par une attitude comparable de A.P. Youschkevitch dans sa conférence citée quelques lignes plus haut. Nous souhaiterons que notre collègue, qui en a la compétence, puisse prochaînement nous éclairer sur la Mathématique Juive, et aussi sur ce problème. Elle avait une importance, puisqu'au Moyen-Age un traducteur français considère Al Khowarizmi comme un mathématicien juif. Sans le suivre jusque-là, nous écouterons pourtant le conseil qu'il donne, après l'énoncé des épuisantes règles en cas de retenues pour la multiplication :"

"Quant ch'auras fait, repren t'allaine...(ton souffle...) (EGRWaters, A thirteenth century algorithm in french verse, ISIS 1930, P45-84).

M. Causse, ancien professeur au Lycée France-musulman d'Alger-Ben Aknoun ; 1954-1962. Ala mémoire de ses anciens élèves, vivants ou disparus.