L'HISTOIRE DES GROUPES ET SES IMPLICATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

Gilles BONNEFOY
(IREM DE LYON)

Compte-rendu de Bernard VICTORI (IREM de LILLE)
Complété d'une bibliographie de G. BONNEFOY.

L'HISTOIRE DES GROUPES ET SES IMPLICATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

Groupe de travail animé par:
Gilles BONNEFOY (LYON)
Compte-rendu de:
Bernard Viltori (Lille)

Exposé:

Bonnefoy présente d'abord l'expérience faite en Terminale C d'échec des élèves devant le problème de construire un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ alors que les élèves ont devant eux les deux groupes et leurs structures mis en parallèle, et qu'ils connaissent parfaitement la définition d'un isomorphisme.

L'échec semble provenir du fait que les élèves ont l'habitude de vérifier que telle application est un isomorphisme, alors que là il faut construire cet isomorphisme. Cela réclame de savoir manipuler réellement les groupes et non plus seulement d'appliquer un formalisme qui, reste vide de sens pour l'élève. C'est la preuve que de savoir vérifier une série d'axiomes ne signifie pas avoir compris et maîtrisé la notion de groupe.

On saute à un point de vue historique pour voir comment la notion de groupe s'est introduite. On distingue 3 étapes:

-I770-I830 : les groupes apparaissent dans la théorie des équations algébriques.
Lagrange (I770), puis Abbati, Ruffini, puis Cauchy,..., sans parler de groupes, travaillent sur les valeurs prises par une fonction rationnelle de n variables quand on permute les variables et démontrent des résultats importants (théorème de Lagrange, ...).
Galois, son apport est essentiel. Il introduit le "groupe des substitutions" caractéristique d'une équation et le corps (qu'il appelle "quantités rationnelles") associé à cette équation. Par rapport au "formalisme" de Lagrange, qui veut résoudre l'équation générale littérale, Galois s'intéresse aux équations numériques et expose dès les premières pages la dépendance entre réductibilité et choix du corps de base. La "réduction" du groupe l'amène à étudier certains sous-groupes. Et il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble par radicaux quand le degré de l'équation est premier. Beaucoup de notions sur les groupes sont introduites, énoncées en termes d'équations algébriques (ces notions sont pour lui des outils pour ces équations). Par exemple: sous-groupes distingués, conjugués, décomposition en classes à gauche et à droite, primitivité, transitivité et même représentations linéaires (espaces affines sur un corps fini); bien entendu tout ce vocabulaire "moderne" n'est pas employé. Dans le premier Mémoire, Galois travaille "à la manière" de Gauss (construction du polygone régulier à I7 côtés) et utilise peu les groupes, alors que c'est l'outil principal dans ses "Fragments" et son deuxième Mémoire.

-I830-I870 : c'est l'étude des substitutions soit dans l'optique de Galois (Camille Jordan: suites de composition et leur longueur, groupes quotients, groupes résolubles jusqu'à l'ordre IO 000), soit dans d'autres optiques (Cauchy, Bravais en cristallographie qui influence d'ailleurs Jordan, Kirkman,...).

-Après 1870 : il faut attendre Dedekind (école algébrique allemande) qui dans une note donne des axiomes du groupe, au cours d'un travail sur les modules. La théorie des groupes est développée ensuite dans 4 secteurs:

-en géométrie: programme d'Erlangen de Klein (1872)

-en théorie des nombres: groupes abéliens finis.

-représentations conformes et équations différentielles: groupes "discontinus" de Poincaré.

-groupes de Lie (de "dimension" finie ou infinie) pour faire l'analogue de Galois sur les équations différentielles linéaires. C'est là qu'émerge la nécessité de poser comme axiome le fait que tout élément doit avoir un inverse (pour les groupes finis étudiés par Galois, la fermeture pour la loi de composition suffisait). Van Dick, élève de Klein, énoncera la définition moderne de groupe (sauf l'élément neutre). Ensuite il y aura des discussions sur les meilleurs axiomes possibles, par les logiciens. Enfin la théorie des représentations occupe le devant de la scène (Frobenius).

Débat:

L'exposé est interrompu à plusieurs reprises par des discussions dont voici les principaux thèmes abordés:

-Il n'est pas question de présenter les groupes dans le secondaire à partir de la problématique des équations algébriques, mais la leçon qu'on peut tirer de l'histoire, c'est qu'il faut présenter les groupes comme opérant sur un ensemble. On évite ainsi en particulier les faux problèmes, dits "problèmes didactiques" où la principale difficulté est de démontrer que la loi est associative ou de trouver l'élément neutre, alors que dans les problèmes mathématiques réels, c'est toujours évident. On peut par exemple les présenter comme groupes de symétrie d'une figure (cube...).

-Ces problèmes de groupes de symétrie sont difficiles. Mais alors pourquoi,introduire la notion de groupe si tôt, puisqu'elle ne sert à rien avant d'aborder ces problèmes? En particulier l'introduction des groupes par $(\mathbb{R}, +)$ ou $(\mathbb{Z},+)$ ou pour les fractions (définies comme opérateurs) ne sert à rien et est même néfaste, elle donne une fausse idée des groupes.

-Ce n'est pas sur des arguments historiques uniquement qu'il faut s'appuyer pour faire un enseignement, mais surtout sur les problèmes pédagogiques propres aux élèves; mais dans le cas des groupes, les arguments historiques et pédagogiques vont dans le même sens, en particulier à propos de l'inutilité de présenter $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ comme des groupes, cela n'apporte rien pour résoudre les problèmes des élèves, et de plus ces exemples sont trop triviaux pour donner une bonne idée de ce qu'est un groupe.

-Les bons exemples d'utilisation des groupes dans l'enseignement semblent être la géométrie (groupes affines, métriques au cours d'un bilan des propriétés géométriques de l l'espace euclidien, groupes finis de symetrie d'une figure) et la combinatoire (groupes de substitutions).

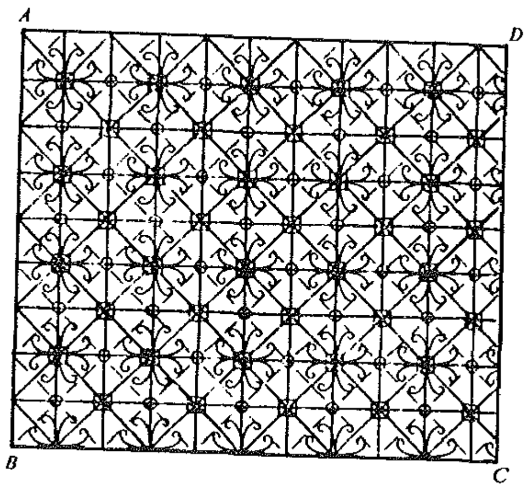
-Il faut chercher des problèmes où la théorie des groupes soit réellement efficace pour résoudre des problèmes mathématiques réels (exemple des symétries du cercle inscrit dans un carré, qui donne grâce à une transformation affine, la théorie des diamètres conjugués de l'ellipse).

-La difficulté mathématique de l'histoire de la théorie des groupes pose le problème de la possibilité pour les enseignants du secondaire dans leur ensemble de participer réellement à ce genre de travail: danger que l'histoire des maths ne devienne une affaire de spécialistes coupés de la plupart des enseignants. Un des participants en particulier est trés déçu par l'inaccessibilité des notions exposées et pense que ce n'est pas comme cela qu'on arrivera à des résultats pratiques pour l'enseignement.

Le problème est reconnu comme important, mais les quelques expériences entreprises montrent qu'il est quand même possible de se mettre à l'histoire et de transformer son enseignement en conséquence(ce qui ne veut pas dire enseigner à ses élèves de l'histoire des maths!).

-Le problème général de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement apparait non pas comme refaire le chemin historique mais mettre le doigt sur les difficultés-clés qui sont apparues dans le développement historique d'une notion, pour pouvoir comprendre les difficultés que vont rencontrer les élèves dans une acquisition réelle (et non formelle) de ces notions. En gros, par rapport au cheminement historique, il ne faut pas prendre des "raccourcis" qui évitent les "détours" historiques devant des obstacles rencontrés, mais au contraire comprendre l'importance de ces obstacles.

-Le développement actuel de l'enseignement: ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, qui pourrait a priori sembler "naturel" apparait comme complètement artificiel quand on s'aperçoit que ces différentes notions ont été forgées dans des domaines complètement différents des mathématiques pour résoudre des problèmes très difficiles (ensembles: analyse de Fourier sur $\mathbb{R}$, groupe: équations algébriques, anneaux: problèmes d'arithmétique, etc...).



On m'a demandé de vérifier ce compte rendu et si possible de fournir une bibliographie. Il y a bien quelques détails de ce compte rendu qui, d'un point de vue "vérité historique", me font "tiquer", mais je préfère le laisser tel quel. Il me paraît fort complet et je dois avouer que je fus, au cours du débat, un "animateur" souvent dépassé et largement "animé" par les discussions des participants. Tant mieux !...

Par contre, je vais essayer de fournir une liste bibliographique que je me permettrai de commenter de façon tout à fait subjective.

Voici la liste en question et les commentaires :

[1] ABEL : Oeuvres complètes 2 vol Christiania (1881)

On ne rencontre pas explicitement la notion de groupe chez Abel, mais elle est profondément sous jacente et à l'oeuvre dans grand nombre de ces travaux, particulièrement sur les équations algébriques. En ce sens, c'est donc un précurseur de Galois.

[2] Abrégé d'Histoire des Mathématiques. Hermann (sous la direction de Dieudonné)

Doit paraître bientôt

[3] BELL : Dévelopement of Mathematics. Mac graw Hell.1940

Exposé riche mais touffu

[4] BOURBAKI : Eléments d'Histoire des Mathématiques - Hermann (Edition corrigée et augmentée - 1974)
Indispensable pour bien connaître les conceptions "bourbachiques".

[5] BOYER : A History of mathematics - Wiley 1968
Une histoire des mathématiques accessible pour le "débutant" mais très incomplète à partir de 1850.....

[6] CARTAN Elie. Notice sur les travaux scientifiques - Gauthier Villars

Donne un aperçu de l'utilisation des groupes de Lie par cet éminent géomètre.

[7] CHATELET : Algèbre et Arithmétique moderne - PUF
Surtout pour les notices historiques à la fin des chapitres

[8] COOLIDGE : A History of Geometrical methods - Dover (1963)

[9] CAUCHY : Oeuvres complètes - 26 vol. Gauthier-Villars.

Il ne s'agit pas de lire les 26 volumes de Cauchy ! On trouve des résultats sur les groupes de substitutions dans les volumes 2, 9 et 10 et dans les "exercices d'analyse et de physique mathématiques" (1844).

[10] DEHN : Algebraic Equations : Dover

L'édition est épuisée mais le livre a été diffusé par le groupe inter-irem "histoire et épistémologie des maths". L'exposé suit une démarche historique et compare les méthodes de Lagrange et de Galois.

[11] DIEUDONNE : Cours de géométrie algébrique Tome 1 PUF

Cet "aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique" est très dense et très difficile à lire, mais il me semble indispensable, si on veut comprendre quelque chose avant de se lancer dans la théorie des schémas !... Il fournit des renseignements sur la genèse des groupes algébriques dont la théorie générale dépasse mes compétences !...

[12] DUGAC : Richard Dedekind et les fondements des mathématiques - Vrin 1976

Dedekind est le premier mathématicien à définir la notion d'homomorphisme de groupe (et à l'utiliser!) d'une façon "moderne" (voir p 23-24). On trouve à la fin de ce livre précis toute une correspondance de Dedekind malheureusement non traduite.

[13] Encyclopedia Universalis

Voir les articles : groupes, Abel, Cartan, Cauchy
Frobenius, Galois, Lagrange, Gauss
Jordan, Kronecker, Lie, Poincaré
... etc

[14] GALOIS : Ecrits et mémoires mathématiques Gauthier-Villars 1962

Très belle édition par Bourgne et J.P. Azra. L'oeuvre inachevée de l' "inventeur" des groupes est difficile à déchiffrer, mais elle est fondamentale.

[15] GAUSS : Recherches Arithmétiques - A. Blanchard.

Quel beau livre ! Il a eu une profonde influence sur le jeune Galois...

[16] HAWKINS Thomas : The origines of the theory of Group Characters

in Archive for History of Exact Sciences, 7, 1971, 142-70

[17] HERMITE Oeuvres Tome 1 - Gauthier Villars.

P 276-280 Hermite introduit la notion de groupe de monodromie associé à une équation defférentielle linéaire.

[18] JORDAN : Traité des substitutions et des équations algébriques
Gauthier-Villars et Blanchard
: Oeuvres, 4 vols, - Gauthier-Villars

Jordan est le continuateur direct de Galois. On peut lire aussi les "Notes sur les travaux de C. Jordan" par Dieudonné qui présente les oeuvres de Jordan.

[19] KLEIN : Le programme d'Erlangen - Gauthier Villars 1974
Montre comment Klein "unifie" la géométrie en utilisant les groupes.

[20] KLINE Morris : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times - Oxford University Press 1972

Une bible pour qui s'intéresse à l'histoire des Maths. devrait être à mon avis dans toutes les bibliothèques. Cependant l'exposé s'arrête au début du 20ème S. et l'Abrégé d'Histoire ... (voir [2]) devrait combler cette lacune.

[21] KRONECKER. Werke, 5 vol. Leipzig (Teubner)
Kronecker, en ce qui concerne les groupes a décrit la structure des groupes finis commutatifs et il est aussi l'un des continuateurs de Galois (- via Kummer) en fondant la théorie algébrique des nombres. On peut avoir un aperçu de la profondeur des conceptions de Kronecker en lisant l'article qui lui est consacré dans l'Universalis (voir [13]) et dans Serret (voir [33]).

[22] KIERNAN BM : "The development of Galois Theory from Lagrange to Artin" in Archive for History of Exact Sciences, 8, 1971, 40 - 154.

[23] LAGRANGE : Oeuvres. - Gauthier, Villars.

Essentiellement le Tome 3 où se trouve les fameux mémoires "sur la résolution algébrique des équations" publié pour la première fois à Berlin en 1770. Lagrange considère ici le nombre de valeurs prises par une fonction rationnelle des n racines d'une équation algébrique : c'est le départ de la théorie des groupes de substitutions ....

[24] LAUTMAN : Essai sur l'unité des mathématiques 10/18

Ce sont des écrits philosophiques. Les notions mathématiques y sont présentés d'une façon très claire et montrent (p 69 et suivantes) comment la théorie de Galois s'applique au corps mais aussi aux revêtements ... etc.

[25] LEBESGUE : Notices d'histoire des mathématiques

Institut des mathématiques, Genève 1958

Quand un grand mathématicien se penche sur l'histoire des Maths ....

[26] LE LIONNAIS : Les grands courants de la pensée mathématique
Blanchard

Le livre est vivant et très abordable. Lire l'article sur Lie (par E. Cartan) et sur la notion de groupe (A. Lentin).

[27] LIE end F. ENGEL, "Théorie des Transformations gruppen",3 vol.
- Leepzig (Trebner)

[28] MATHIEU : "Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables" un Journal Maths. (2) + VI 1861 p 241-323
"Sur les fonctions 5 fois transitives des 24 quantités" un Journal Maths. t XIII 1873 p 25-46

C'est dans ce second article que l'on voit apparaître les fameux groupes simples de Mathieu.

[29] MILLER :"History of the theory of Groups to 1900" in
Collected Works vol 1 427-67 University of Illinois Press 1935

[30] PICARD "Traité d'Analyse" 3 vol.

Picard a travaillé sur les groupes discontinus dans le prolongement de l'oeuvre de Poincaré (voir [31]) et dans son traité d'analyse il fait le parallèle entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations différentielles linéaires.

[31] POINCARE "Oeuvres" 11 vol. Gauthier Villars.

Seul , nous intéresse, dans cette oeuvre immense, les mémoires sur les fonctions automorphes (1882-1884) où Poincaré défini les groupes modulaires, fuschiens ... etc comme groupes discontinus (Oeuvre 2 p 108-168) et p 169-175) et les mémoires sur la topologie algébrique (Oeuvre 6 p 193-288 et p 338-70)

[32] RIEMANN: Oeuvres mathématiques - Blanchard.

L'oeuvre deRiemann- très dense : un chef d'oeuvre de rédaction concise et claire ! - est capitale dans l'histoire du 19ème S. Riemannparle et utilise peu les groupes sauf dans un mémoire "sur deux théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires a coefficients algébriques" (1857).

[33] SERRET : Cours d'Algèbre supérieure 2 vol. Gauthier Villars

Le tome 2 décrit la théorie des substitutions et la théorie de Galois. Celà donne un aperçu de cette théorie vers les années 1855. Ce beau livre didactique (Serret ainsi que Liouville fera ainsi connaître Galois) peut nous apprendre encore beaucoup ...

[34] TATON : "Histoire générale des Sciences" 3 vol. PUF

Cet ouvrage collectif, sous la direction de Taton, donne un panorama assez complet dans l'Histoire de toutes les Sciences. Les références bibliographiques sont nombreuses et soignées.

[35] VUILLEMIN : "La philosophie de l'Algèbre" PUF

C'est une recherche philosophique fort intéressante sur "quelques concepts et méthodes de l'Algèbre moderne"

Les "méthodes" de Gauss, Lagrange, Galois, Klein et Lie sont comparées et discutées d'un point de vue philosophique.

36 WUSSING : Die Génésis des alstraken gruppenbegriffes

Ce texte a été diffusé par le groupe inter irem : Histoire et Epistémologie des mathématiques.

En guise de conclusion : ne vous effrayez pas devant la longueur de la liste ! Très honnêtement, je suis loin d'avoir lu cette somme, par exemple l'oeuvre de Lie, mais j'espère que cette liste (incomplète) éveillera des curiosités ...