POURQUOI INTRODUIRE UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE ? QUEL EN EST L'ENJEU ?

C'est un débat sur ce thème qui a inauguré les journées. Nous donnons, ci-après, un compte rendu d'après bande magnétique des interventions des deux animateurs du débat : Rudolf BKOUCHE (IREM de LILLE) et Jean Louis OVAERT (IREM de MARSEILLE), suivi d'un résumé des autres points abordés dans le débat.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

LEONARDO FIBONACCI

Rudolf BKOUCHE (IREM de Lille) :

D'abord je veux dire pourquoi à l'IREM de Lille on a été un petit groupe à s'intéresser aux problèmes historiques. C'est dû à une chose simple : il ya des professeurs enseignant en 4°-3°, qui nous ont demandé quelle différence existe entre le métrique et l'affine. En dehors de la réponse bien connue:"l'affine, c'est en 4°, et le métrique, c'est en 3°", dans l'enseignement on n'arrive pas à en trouver. A partir de là on a fait un travail sur le programme d'Erlangen et en fait sur l'histoire de la géométrie, dont on devrait parler plus longuement dans un groupe de travail.

Le problème qui est posé ici, c'est : pourquoi réintroduire l'histoire? pourquoi l'histoire dans l'enseignement mathématique ? Aussi bien au niveau des maîtres : est-ce que les maîtres doivent faire de l'histoire ? connaître l'histoire de la,discipline qu'ils enseignent ? et au niveau des élèves : est-ce qu cela peut apporter quelquechose?

Si on regarde actuellement ce qui se passe, tout cet aspect historique est complètement supprimé. On présente des faits, des concepts, en les fait marcher, ou plutôt on montre aux élèves comment ils marchent, sans très bien savoir si les élèves vont voir ou pas. Et on se contente de ça : on a enseigné des mathématiques à des élèves! Or, dans tout l'enseignement secondaire ou supérieur, il y a une chose que les élèves ne font jamais : c'est d'avoir une réelle activité mathématique. On leur montre un cours, des théorèmes, on leur donne des définitions, des axiomes, et puis finalement ce qu'on leur demande dans les divers problèmes ou examens qu'ils ont, c'est pratiquement d'appliquer des recettes. Et dès qu'on sort du schéma d'un problème, qui est pratiquement recopié d'un cours, on voit que c'est catastrophique, que les élèves ne savent pas. Pourquoi?

Si on prend un cours, si on voit comment c'est fait, on s'aperçoit qu'il y a souvent des motivations, une pseudo introduction. Par exemple, hier, j'ai vu un bouquin de Terminale C, où on fait une introduction des fonctions en escalier pour faire l'intégrale de Riemann : si on prend un courant d'intensité constante, la différence de potentiel est V=RI; si on prend une vitesse constante, le déplacement est L=VT; ensuite on fait des trains qui se déplacent avec des vitesses constantes par morceaux, par intervalles. Et puis, ça, c'est une introduction, et ensuite on introduit les fonctions en escalier, on fait une intégrale de Riemann. Je ne sais pas très bien ce que les élèves voient là-dedans, quelle motivation cela peut représenter pour eux. Mais on a fait ce qu'on appelle une introduction. Ensuite il y a un exposé, c'est à dire qu'on expose la théorie de la façon dite la plus rigoureuse possible, on démontre les théorèmes, etc ... A la limite, si on veut être concret, on donne quelques applications: on revient à des problèmes de physique, de mécanique, ou à autre chose. Mais finalement là-dedans, qu'est-ce qu'ont vu les élèves? Ils ont vu une théorie qui leur est tombée sur la tête, un truc qui marche, sans trop savoir pourquoi ni comment. Après on dit qu'ils ont vu l'intégrale de Riemann en Terminale C. C'est l'exemple le plus absurde de l'enseignement mathématique. Une fois qu'ils ont vu ça, ils ne savent pas ce que c'est qu'une intégrale, et, si on ne leur dit pas, ils ne savent pas calculer une primitive ou une intégrale par approximations (métodes des trapèzes, rectangles). Riemann n'a pas inventé les sommes de Riemann parce qu'il avait envie de faire des sommes, il voulait donner un sens à une notion qui était connue depuis 150 ans, et qui était l'intégrale.

Tous les exposés actuels de cours sont fait de cette façon, on oublie complètement les conditions de production des théories, on fait un discours dessus et puis ça s'arrête là. Un élève là-dedans, ou bien il est suffisamment docile pour reprendre ce qu'on lui a dit en acceptant, peut-être, que cela lui servira plus tard, ou bien il est écoeuré, il ne fait rien, il considère que les mathématiques sont inutiles, que c'est un jeu qui ne sert à rien, ou qui sert à l'éliminer. Il ne peut pas voir ce qu'il y a derrière. C'est la raison pour laquelle on a pensé que réintroduire l'histoire, non pas pour dire en telle année il s'est passé telle chose, ou tel bonhomme a inventé telle chose, mais pourquoi on a fait des théories, pourquoi on a conceptualisé des choses sur lesquelles on travaillait avant, cela pourrait apporter quelque chose aux élèves et aussi aux maîtres, dans la mesure où ils sauraient de quoi ils parlent au lieu de répéter ce qu'on leur demande de répéter.

Pourquoi l'analyse au XVII° et XVIII° s. ? Pourquoi a-t-on introduit les notions de dérivées et d'intégrales? Cela répond à des questions posées par des professeurs de Seconde, Première, Terminale. En analyse, on enseigne toujours à tous les niveaux en commençant par fonctions, limites, continuité, et puis après dérivées, variations des fonction s. Il y a une chose difficile à faire passer, c'est limites et continuité et et pourquoi en Seconde, Première, Terminale, les seules fonctions qu'on étudie c'est soit des fonctions polynomiales, soit les fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes. Pour les fonctions polynomiales le problème de la continuité ne se pose pas : pour résoudre l'équation $\lambda = ax+ b$, expliquer qu'il faut faire toute une démarche théorique sur la continuité de la fonction linéaire, cela n'apporte strictement rien. Pour les polynomes, il n'y a qu'à faire un graphique et couper avec une droite, et expliquer que ce n'est pas vrai: cela ne coupe pas, je ne crois pas que cela dise grand chose aux élèves. Pour le second type de fonctions que l'on rencontre il est clair qu'au niveau de Seconde, Première, Terminale, on ne peut pas démontrer la continuité, par contre cela peut très bien s'admettre, parce que pour résoudre l'équation ~~sin x=a~~, couper la sinusoïde par une droite c'est quelque chose qui se voit, même si on n'a pas de démonstrations explicites à ce moment. Autrement dit, tout le cours sur limites, continuité ne sert strictement à rien, sinon à faire entendre que l'analyse, c'est difficile, mais sans trop savoir pourquoi. D'autre part, à la suite de discussions avec des enseignants, je me suis aperçu que la majorité des enseignants ne sait pas du tout que les gens qui ont inventé la dérivée et l'intégrale se foutaient complètement de la notion de limite. Les notions de limite et continuité ont été mises en place au XIX°s de façon rigoureuse, au sens qu'on donne à ce mot maintenant, mais pendant deux siècles on a travaillé avec et on a fait pas mal de choses. Pourquoi ne peut on avoir une démarche analogue au niveau de l'enseignement, c'est à dire faire manipuler des fonctions, résoudre des équations, des équations différentielles, et revenir après sur les problèmes théoriques et les notions de limite, continuité qui prennent un sens à ce moment là.

Pourquoi l'axiomatique? L'axiomatique, ce n'est pas du tout le début des mathématiques. On fait les mathématiques et on fait de l'axiomatique après. En particulier l'axiomatique de la géométrie est née très tard. On a fait de la géométrie très tôt. Mais la géométrie qu'on a faite, ce n'était pas le plaisir d'étudier des objets qu'on appelle points, droites, plans et qui vérifient des propriétés, c'était parce qu'on en rencontre dans la nature, et que c'est à partir de là qu'on a fait de la géométrie. Or actuellement on voit dans l'enseignement une présentation axiomatique, sous prétexte que, sans axiomatique on ne peut pas faire de déductions, ce qui est complètement faux. Le raisonnement déductif est lié à des problèmes qu'on résout de façon locale. L'axiomatique est une reconstruction globale. Le raisonnement déductif en mathématiques est né depuis longtemps, avant même qu'on fasse des axiomatiques. Dans l'enseignement, la présentation axiomatique qu'on donne actuellement laisse croire (et c'est aussi bien pour les élèves que pour les maîtres) que la rigueur n'existe que quand on a énoncé des définitions, donné des axiomes et des règles de démonstration. Après on fait marcher la machine. Or l'expérience montre que, dans l'enseignement, ce genre de choses ne marche pas. Ce n'est pas parce qu'on a présenté aux élèves des définitions, axiomes, règles de déductions, qu'ils sauront les faire marcher. Pour la bonne raison que, pour un élève et un mathématicien qui fait de la recherche, quand il parle de droites ou de plans, il a une image derrière. Même quand il parle de droites ou de plans dans un espace de dimensions infinies, il a une image géométrique. Enlever au niveau élémentaire ces images géométriques, ou considérer par exemple que faire des dessins en géométrie, c'est un support du raisonnement (alors que la géométrie, à ses débuts, c'est tout le contraire: on raisonne sur des figures, on ne fait pas des figures pour aider son raisonnement) c'est finalement transformer complètement l'idée même de la géométrie. La plupart des élèves qui font de la physique en Seconde ne comprennent pas du tout que la géométrie qu'ils ont fait en 4°-3° puisse servir à la physique en Seconde. Ils ne comprennent pas du tout que un triangle rectangle du cours de 3°, c'est la même chose qu'un triangle rectangle qu'on est amené à dessiner en physique, parce qu'on a, par exemple, deux forces perpendiculaires.

La géométrie, c'est d'abord le rapport à l'espace. Quand je dis qu'on en rencontre dans la nature, cela ne veut pas dire que les objets géométriques, tels qu'on les étudie, existent dans la nature. Mais si on étudie ces objets, c'est qu'on a rencontré quelquechose qui en a donné l'idée. Pour un gosse, la droite cela existe bien avant qu'il ne l'ait formalisé, sous diverses formes. Une droite, c'est, par exemple, le bord de cette table, ou quand il roule en voiture sur une droute toute droite: c'est une droite. On peut discuter longtemps sur les rapports l'enfant, la droite, la route, etc..., mais il y a derrière des phénomènes physiques, la vision d'un certain nombre de objets qui l'amènent à faire de la géométrei. Le premier niveau dans l'enseignement de la géométrie ce n'est pas le dégré abstrait, ce n'est pas non plus (e comme on le voit dans un certain nombre d'ouvrages de 4°) des manipulations dites concrètes avec des règles, des dessins, et puis, tout à coup, on a fini la partie concrète, on passe à l'abstrait, on énonce des axiomes. Ce n'est pas du tout comme cela que cela s'est passé. Les axiomes on les a explicité au fur et à mesure des besoins, mais il y a derrière cette idée physique.

Je reviens sur un autre exemple: peut-être, l'endroit de l'enseignement secondaire où on manie le plus de concepts abstraits, ce n'est pas dans le cours de mathématiques, c'est dans le cours de physique. Qu'on fasse de la mécanique avec F=m , ou de l'électrocinétique avec V=RI, ce sont des objets qui sont beaucoup plus abstraits, et qui demandent beaucoup plus d'efforts de compréhension, que les notions de droites et de plans. Là on accepte que cela se relie à l'expérience, à des objets dits "concrets", alors qu'en mathématique, sous préterte que c'est une science abstraite et rigoureuse (pour employer le langage d'un certain nombre d'élèves de Terminale C) qui répètent bien ce qu'on leur a dit) on considère que les objets ne sont définis que par les relations qu'il y a entre eux. C'est une vision fausse au niveau de l'enseignement, c'est aussi une vision fausse au point de vue de l'activité mathématique. Un mathématicien ne travaille jamais par axiomes, il travaille d'abord sur des objets qu'il connait, et c'est en les mettant en forme qu'il axiomatise et qu'il formalise.

Pourquoi la théorie des ensembles? La plupart des enseignants en 6°-5° s'imaginent que la théorie des ensembles a été crée pour résoudre des problèmes d'intersection, réunion, relation binaire etc... Or la rhétorique des ensembles ets née de problèmes d'analyse, elle est liée à la convergence des séries de Fourier, pour savoir sur quel domaine les séries convergent vers les fonctions qui les définissent, etc... Et là encore, c'est un aspect qui est complètement enlevé de l'enseignement. On sait qu'au XX°S il y a un certain nombre de gens qui ont essayé de reconstruire les mathématiques à partir de la théorie des ensembles, qui ont posé des problèmes de fondement des maths ce qui est tout à fait juste dans l'optique d'un travail mathématique; mais les fondements d'une science, c'est bien la dernière chose qu'on doit étudier. Premièrement, parce que pour étudier les fondements, il faut connaître de quoi on étudie les fondements; deuxièmement, il y a des problèmes techniques qui sont assez difficiles. Or dans l'enseignement on présente ce qu'on appelle depuis longtemps la théorie naïve des ensembles, mais on a voulu la présenter tellement bien qu'on en a fait une théorie naïve formalisée. C'est ce qu'on présente aux élèves de 6°-5°, avec les intersections, réunions, relations etc... Mais toute la problématique, qui est à l'origine de la théorie des ensembles n'est vue nulle part dans l'enseignement.

Le problème qu'on peut se poser sur la théorie des ensembles c'est: est-ce que c'est utile? C'est un fait que la théorie des ensembles, ça sert à un certain nombre d'autres choses que la théorie des séries de Fourier. Mais, premier point, les gens ne savent pas d'où ça vient. Deuxième point, est-ce qu'il est utile de faire de la théorie des ensembles au niveau élémentaire?

Je donne un exemple, peut-être caricatural, mais qui s'est trouvé: quand on fait de la théorie des ensembles avec les notions d'intersection et de réunion, formalisées comme elles le sont dans les classes de 6°-5°, et qu'on arrive à la géométrie, le plan est un ensemble de points et dans ce plan il y a des sous-ensembles qu'on appelle droites. Comme l'intersection de deux sous-ensembles est un sous-ensemble, l'intersection de deux droites cela ne peut surtout pas être un point. Il faut que ce soit le singleton dont l'unique élément est le point d'intersection.. C'est clair que si on a formalisé la théorie des ensembles, on tombe sur ce genre de problèmes qui n'ont strictement rien à voir avec un enseignement de la géométrie. Deux droites, ça se coupe en un point, et ça, ça se voit. La notion d'intersection telle queon l'utilisait avant, était largement suffisante pour savoir de quoi on parlait. La formaliser, en faisant la différence entre un point et un ensemble réduit à un point, cela ne peut amener que de la confusion. C'est vrai que quand on a fait des mathématiques, à un certain moment, il faut bien distinguer un élément et l'ensemble réduit à cet élément, mais au niveau élémentaire sous prétexte de rigueur et de précision, finalement on a rendu quelque chose de compliqué. En fait, les notions ensemblistes, est-ce qu'on a besoin de les formaliser, est-ce qu'on a besoin de la théorie des ensembles pour s'en servir? La notion de réunion, c'est quand on met des choses ensembles Cela suffit largement. Et quand on rencontre des difficultés, à un certain moment, peut-être qu'il est nécessaire de les expliciter. Mais tant qu'on n'a pas de difficultés, tant qu'on ne s'est pas cassé la gueule sur un problème, pourquoi ne pas se servir des notions qui permettent de résoudre tout ce qu'on a?

On ne sait pas finalement pourquoi on enseigne les mathématiques. Cela parait immense comme question, mais il faut quand même la poser.

Pour la géométrie, il y a quelque chose au départ, c'est le rapport à l'espace. Si il faut partir de l'axiomatique, des groupes, de telle ou telle notion, c'est un problème qui vient après. Un élève connait l'espace dans lequel il vit. De la géométrie, il en fait peut-être plus en gymnastique qu'en mathématique. Je connais des gens à qui on a dit qu'ils étaient mauvais en géométrie, parce qu'ils ne savaient pas structurer l'espace. Mais quand je connais leur métier, je m'aperçois qu'ils savent mieux le structurer que moi. Savoir qu'ensuite la théorie des groupes a fait faire un progrès immense à la géométrie et qu'une des étapes essentielles de la géométrie, c'est le programme d'Erlangen, cela ne veut pas dire surtout, que parce que maintenant on a une vision des diverses géométries à partir de la théorie des groupes, il faut se donner comme objectif de faire comprendre le programme d'Erlangen. On a inventé des théories comme moyen de comprendre des choses, on enseigne des choses comme moyens de comprendre des théories! Quand on s'adresse à un gosse et qu'on fait un discours très bien sur la plan mathématique, on fait un discours qui n'a aucune signification pour le gosse. La théorie des ~~gr~~ groupes n'a pas de signification pour un gosse. Par contre l'espace dans lequel il vit, on peut l'aider à le structurer. Les mathématiques, ce n'est pas des structures, c'est structurer des choses, parce que cette structuration permet de comprendre. Si on n'a pas besoin pour comprendre, les structures on les met de côté. Comprendre la théorie des groupes, la continuité, ce ne sont pas des objectifs. La théorie des groupes est utile pour faire de la géométrie, la continuité est nécessaire quand on veut faire de l'analyse. C'est alors qu'on peut avoir des élèves qui ont envie de ~~xxxxxxxx~~ apprendre des choses difficiles.

Ceci est lié à la façon dont on a fait la réforme et gommé l'aspect historique. Je ne pense pas que l'enseignement avant était bon, il était moins mauvais. En dehors de l'aspect sélectionniste qui y était tout autant, il y a une chose qu'on faisait avant et qu'on ne veut plus faire: on ne veut pas que les gens pataugent. Or ce qui compte, ce n'est pas d'enseigner un savoir, mais la prise de possession du savoir et cela passe par les erreurs. Vouloir s'en passer et arriver tout de suite à la vérité, c'est montrer un savoir aux gens, mais c'est leur bloquer la prise de possession du savoir, leur autonomie de savoir et la façon pour eux de se débrouiller sans le professeur.

Il y a une tendanvee actuelle de l'enseignement des mathématiques et de l'utilisation des mathématiques dans la société à montrer que toute situation est mathématisable et à mathématiser n'importe quoi. C'est vrai qu'on peut y arriver? Mais je ne crois pas que tout soit mathématisable, et même parmi les problèmes mathématisables, les maths peuvent être efficaces ou pas. Dans la mesure où dans l'enseignement on mathématise n'importe quoi, la mathématisation, puisque ça sert à tout, ça sert à rien.

Et les élèves ne voient plus la différence entre l'utilisation de la théorie des ensembles pour savoir si la relation "Pierre est frère de Paul" est symétrique ou pas, et l'utilisation des mathématiques pour faire de la physique.

Le retour à une perspective historique, c'est montrer que les mathématiques ont été utiles à la physique (au XVII°s et XVIII°s on ne peut faire la différence entre mathématique et physique sinon par un discours institutionnel actuel), que des théories sont nées à partir de certains types de problèmes (exemple: dérivée et vitesse), que si on a fait des théories compliquées, ce n'était pas pour le plaisir d'en faire, c'était pour résoudre des problèmes. Or si on fait des théories compliquées à propos de tout et n'importe quoi, l'aspect de nécessité de ces théories n'apparait plus.

Je ne crois pas qu'en mathématiques, ou dans les autres sciences, on puisse faire une différence entre savoir et savoir-faire. Elle est assez arbitraire. Entre savoir les nombres et savoir faire avec des nombres, je ne crois qu'il y ait une priorité l'un sur l'autre. Les nombres, on les apprend en les manipulant, et la nature du nombre en soi, ça ne veut rien dire. Le travail sur les nombres n'est pas seulement de la manipulation, c'est quelquechose qui permet de comprendre ce que sont les nombres. Actuellement, dans l'enseignement, on se pose le problème du savoir-faire dans l'optique: si on enseigne quelquechose, on peut toujours trouver des endroits où ça sert, pour n'importe quelle théorie. Mais le problème de l'élève, c'est: à quoi ça sert de servir à ça?

Si on veut enseigner aux élèves des concepts mathématiques, c'est du même type que d'enseigner la musique: c'est une activité utile, mais sans aspect social.

Mais les mathématiques ont un autre rôle (le coefficient des maths au bac est plus impotant que celui de la musique) que l'apprentissage de concepts. C'est un rôle social. Et ce n'est pa s pour rien qu'il y aeu une réforme des mathématiques dites modernes, qui a été une régression par rapport à un enseignement déjà dogmatique. On a remplacé un dogmatisme relativement aéré par un dogmatisme matraque.

Un des objectifs de l'enseignement, c'est que le maximum d'élèves apprennent le minimum de choses, quelle que soit la bonne volonté qu'on puisse avoir. On se pose, dans les colloques, des problèmes sur l'enseignement en Seconde, Première, Terminale C. Mais combien d'enfants d'une classe d'âge sont dans la filière Seconde-Première-Terminale C? Quand on parle du I° cycle, il s'agit que les élèves comprennent pour qu'ils puissent aller en Seconde C....

Il y a une vision élitiste, qui vise à donner à des élèves un statut social. Les mathématiques ne jouent pas seulement un rôle de sélection d'une élite à l'intérieur. Elles jouent un rôle à l'extérieur, un rôle idéologique (cf Edgar Faure: les 3 langages pour s'adapter à la vie moderne). Ce qui veut dire que s'ils n'ont pas acquis ce langage ils ne sont pas adaptés, ils n'ont plus le droit de diriger leur vie (exemple: le rôle de l'ordinateur dans notre vie).

Pourquoi on s'intéresse à l'histoire de la production mathématique? C'est pour que les élèves qui passent dans l'enseignement sachent que toute cette mathématique qu'on leur balance ne s'est pas trouvée comme ça, que cela correspond à des problèmes qui se sont posés à des gens. Ils auront peut-être une autre vision des mathématiques et de la science qu'on leur assène dans la société.

Pour démystifier toute une idéologie de la science qu'on donne actuellement, une science qui existerait comme ça, alors qu'elle s'est fabriquée à travers un certain nombres de problèmes, par des gens qui voulaient répondre à des questions.

Jean-Louis OVAERT (IREM de Marseille)

Je me mets à la place d'un élève, qui est intéressé, qui a l'esprit ouvert, appelons le Simplicio. Ou alors je prends un professeur, appelons le aussi Simplicio, qui veut faire un cours d'analyse ou qui veut faire une recherche sur l'enseignement de l'analyse. Ou alors, je suis étudiant et je suis des cours d'analyse (par exemple: analyse harmonique, théorie spectrale). Je reçois un cours sur les séries de Fourier, les algèbres de Banach, etc... A la fin du cours je ne sais toujours pas pourquoi on a appelé ça l'analyse harmonique. Je n'en ai vu en fait aucun problème. J'ai entendu des cours, des définitions, des théorèmes savants, des outils pour résoudre ces problèmes, mais en fait ni sur le plan physique, ni sur le plan automatique, ni même sur le plan mathématique je n'ai reçu d'informations.

De façon plus générale, si je suis élève, professeur ou étudiant, je peux me demander: qu'est-ce que c'est que l'analyse?
Vers quoi vais-je pouvoir me tourner?

Je peux consulter les manuels. Mais ils dépendent de programmes. Quels étaient les objectifs de ces programmes? Est-ce que l'analyse est close avec les fonctions continues et quelques calculs sur les dérivées?

Je peux aussi voir les traités scientifiques à la mode. Il fut un temps où Bourbaki sous-titrait son traité: "Les structures fondamentales de l'analyse", dans lesquelles il y a la théorie des ensembles, la topologie, les espaces vectoriels topologiques. Où est l'analyse là-dedans? Depuis, Bourbaki a abandonné ce sous titre. Pourquoi? On peut aller voir les Elements d'analyse de Dieudonné. On verra des chapitres de topologie, un chapitre intitulé Equations différentielles, et puis après des trucs sur la théorie de la mesure, etc... A aucun moment on ne sait si on fait de l'analyse (sinon par le titre)? Finalement avec les traités scientifiques à la mode on ne sait plus où on en est.

On peut se tourner vers les recherches contemporaines, on sait que celui-là fait de l'analyse harmonique. Si on va voir ce qu'il fait, effectivement il a des problèmes mais à un niveau extrêmement élevé. Et on ne trouvera pas en tête de l'article, les motivations profondes de cet auteur (tout le monde ne s'appelle pas Euler), surtout si cet auteur cherche à s'inscrire sur une liste d'aptitude quelconque de l'enseignement supérieur, auquel cas il a peut-être un autre article en vue après, il n'a pas toujours intérêt à développer ses batteries à l'avance. En moyenne, depuis 50 ans, le ton des ouvrages a beaucoup évolué dans le sens qu'on est beaucoup plus muet sur l'insertion de son travail dans une problèmatique plus générale.

Si je veux savoir ce que c'est que l'analyse, je vais me tourner vers l'histoire, non l'histoire de l'analyse, l'histoire générale. Je vais regarder une suite organisée de transformations d'un groupe de problèmes, une suite organisée de transformations des délimitations de ce groupe, une suite organisée des transformations des concept et techniques liés à ces problèmes, une suite organisée de transformations des liens entretenus entre ces problèmes et le reste de l'histoire. On ne peut imaginer une histoire sectorielle des mathématiques, en ne précisant que les frontières. Souvent les liens avec les autres secteurs sont au coeur même des concepts mathématiques et les moteurs de l'étude de ces problèmes.

Quand j'ai voulu savoir ce que c'était que l'intégration, ce n'est pas en lisant seulement Bourbaki que j'ai pu apprendre ce que c'était, mais plutôt en lisant le livre de Lebesgue. Lui, il essayait de dire quels étaient les problèmes qui s'étaient posé en intégration, et en plus il y avait un contexte historique. A travers Lebesgue on voyait que Cauchy se posait ce problème, Riemann celui-là, mais surtout quels étaient ces problèmes.

Si je suis Simplicio, si je cherche quelles sont les choses dont on parle en mathématique, je n'arrive àle trouver qu'à travers l'histoire.

Pour bien comprendre une science, il faut passer par son histoire. En tout cas, pour les mathématiques, je n'arrive par autrement. Peut-être que j'y arriverais mieux si l'enseignement que j'avais reçu, les traités et articles de recherche étaient autrement. Mais dans l'état actuel des choses, voilà mon témoignage personnel.

A propos des questions qui ont amené la mise en place de la théorie des ensembles, il s'agit d'exemples très techniques, si techniques que quand j'ai essayé de parler de théorie des ensembles en formation des maîtres (CAPES), en avertissant d'ailleurs les étudiants, à cet endroit-là j'ai triché. Je voulais leur montré comment on était amené à construire les nombres ordinaux, mais l'exemple technique pris par Cantor était si difficile, ~~que~~ que des étudiants de 4° année d'université auraient été très gênés. Ils n'auraient pas compris de quel problème scientifique il s'agissait, si bien que j'avais pris un autre exemple historique, le problème de Baire des limites de fonctions continues, où ça se déroule de la même façon. Mais qu'est-ce qu'il y a là, derrière? Je pense que, à la fin du XIX° s, on s'est intéressé en mathématiques à ce qu'on appelle l'extension du champ de la variable. Dans les problèmes d'analyse, il y a la fonction et la variable. Dans tout le courant du XVIII°s et du début du XIX°s, on faisait parcourir à la variable des intervalles de la droite, ou des parties très simples du plan définies de manière constructive (disque, ellipse, intérieur d'une ellipse, etc...). Les problèmes de séries trigonométriques ont amené les gens à se poser la question de l'élargissement du champ de la variable, c'est à dire des fonctions qui vont être définies sur des parties plus camullées de la droite et du plan. Ce discours n'est pas sans rapport avec l'enseignement du second degré, car j'ai lu des manuels où on parle de fonctions continues sur une partie quelconque de la droite (peut-être même que les programmes officiels le suggèrent : programme de Terminale, limite d'une fonction, exemple des suite et dans le commentaire, il suffira de prendre comme ensemble de définition N). C'est un bon exemple d'évacuation de problèmes. Historiquement, et mathématiquement, quand on se pose ces questions de théorie des ensembles en analyse, il s'agit de problèmes nécessitant un élargissement du champ de la variable, que ce soit des séries de Fourier ou pas. Dans l'enseignement du second degré, on n'y a vu qu'une économie de discours éventuel du professeur, on n'a pas mis un seul problème dans lequel il était nécessaire d'élargir le champ de la variable. Mais on a dit: tiens, tiens, il leur a fait un discours sur les limites et pour qu'il gagne du temps à sa montre, qu'il ne soit pas obligé de reproduire un discours où on traiterait de choses analogues sur les suites, on va dire que c'est un cas particulier. Autrement dit, on va faire de ça une astuce de discours, pour le professeur. Sans s'être préoccupé du fait que les problèmes mathématiques concernant les suites et ceux concernant les limites de fonctions entretiennent des relations importantes entre eux, certes, mais ce n'est pas le même type de problèmes. Tout le monde qui fait des mathématiques est bien d'accord là-dessus.

A propos de théorie des ensembles, les exemples historiques sont, en général, d'une technicité trop grande pour être pris en compte dans l'endeignement du second degré, voire même dans l'enseignement supérieur, mais ceci dit, si la théorie des ensembles n'avait été utile qu'à l'unicité des séries de Fourier, cela n'aurait pas connu une telle extension. On connait comme ça des problèmes simples qui ont été remisés au passé. Ce qui s'est passé, cela a été le démarrage de toute une problèmatique très importante en analyse, qui nécessite un élargissement du champ de la variable. C'est sous cette forme qu'il faut poser le problème historique et mathématique.

Mais il y a aussi des raisons sociales, philosophiques ou de conception du monde au développement des mathématiques. Les statistiques, par exemple, il s'agissait de gens qui mouraient parce qu'on leur avait administré une inoculation contre la vérole et il y avait une discussion sur le résultat de l'inoculation. D'autre part, les opinions philosophiques des gens ont joué fortement sur le développement du calcul infinitésimal.

Dans l'enseignement actuel des mathématiques, on est très coupé des relations que les mathématiques pourraient avoir avec des problèmes actuels ou de l'histoire en général. Il y a là un élargissement souhaitable, mais difficile.

Le problème didactique est de savoir si, quand historiquement il y a eu une difficulté dans l'établissement d'une théorie, l'élève est obligé de repasser par les mêmes chemeins ou des chemeins analogues. Je peux avancer la thèse suivante: un obstacle ~~???~~ épistémologique dans la construction historique du savoir est toujours le signe d'un obstacle du côté des élèves, mais la manière dont on va faire franchir l'obstacle, n'est pas nécessairement la voie historique.

Les gens qui rédignet les programmes ne se rendent pas compte des difficultés de construction du savoir. Ils sont dans l'optique Auguste Comte (I° manière).

Le débat s'est aussi articulé autour des points suivants:

"La description que fait Bkouche de la situation dans l'enseignement est péjorative, et ne représente pas la réalité. Par exemple, on ne fait pas de théories des ensembles, on utilise un langage ensembliste pour résoudre des problèmes."

" la question n'est pas de forme (discours magistral ou attitude active des élèves) mais de fond : quels sont les problèmes qui peuvent être mieux résolus au niveau du secondaire avec le langage ensembliste ?

"La présentation de l'analyse dans l'enseignement est idiote. Par exemple, toutes les fonctions étudiées dans le secondaire sont continues, sauf cas pathologiques inventés par des pédagogues."

"On ne pataugeait pas plus avec les anciens programmes. Ce n'est pas parce que l'organisation des programmes était plus pataugeante que l'enseignement était différent."

"Pour les nécessités de l'enseignement l'exposé doit être dogmatique. On ne demande pas à l'élève de comprendre ce que c'est que la science. A la limite on ne demande pas non plus au professeur de comprendre. Si on veut véritablement comprendre, il faut passer par l'histoire."

"Les concepts qui ont amené des concepts mathématiques nouveaux ont été, et restent, difficiles. Comment peut-on en parler?"

"La question est plutôt comment introduire une perspective historique que pourquoi. On voudrait permettre aux élèves de brûler des étapes, mais lesquelles?"

"Il faudrait distinguer l'utilisation d'une perspective historique au niveau des maîtres et au niveau des élèves. L'histoire n'est pas à priori un avantage par rapport à d'autres motivations?"

"Ce n'est pas le propre des mathématiques d'oublier ses conditions de production. Pourquoi s'interesser maintenant à l'aspect historique? Est-ce seulement pour permettre aux élèves d'avoir une réelle activité mathématique? Est-ce lié aussi aux fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques?"

"A vouloir réintroduire une histoire sérielle, ne risque-t-on pas de devenir prisonnier d'un gadget, en évitant les problèmes politiques?"

"Les concepts sont produit à partir de problèmes, mais pas uniquement mathématiques. Quels problèmes de la vie ~~xxxxxxx~~ réelle peuvent être résolus et avec quelles théories?"

"Un professeur de mathématiques n'est pas préparé à montrer à des élèves la situation dans laquelle un outil mathématique fonctionne. Si on veut travailler dans cette optique, il faut travailler avec les professeurs de la discipline concernée."

"Il ne faut pas avoir l'illusion, comme avec les petites machines à calculer ou l'audiovisuel, que tous les élèves arriveront à tout comprendre. Le problème est: comment l'histoire va permettre à des gens à différents niveaux de s'approprier quelquechose?"

Pour conclure ce compte-rendu, nous reproduisons ci-dessous la contribution de Gilles BONNEFOY (IREM de Lyon):

Un des enjeux de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques, est de briser cette conception dogmatique qu'on a des mathématiques, surtout dans notre enseignement, et de remettre les mathématiques sur le terrain d'une science qui est vivante, qui se produit et qui produit. En particulier, ne pas évacuer l'aspect expérimental. Quand on évacue cet aspect expérimental, on évacue toute la maîtrise pour les élèves, et pour nous-mêmes, de pouvoir comprendre les mathématiques. Cette évacuation me semble extrêmement grave et l'histoire est un terrain où on voit, où on peut étudier des situations dans lesquelles la mathématique se développe comme un véritable champ d'expériences.

On trouve des textes d'Euler qui dit: voilà, je voulais résoudre ce problème, j'ai essayé cette voie là, je n'ai pas réussi. Et il explique pourquoi il n'a pas réussi, pourquoi ça ne marche pas, et il essaie une autre voie.

En tant qu'enseignant, retrouver des textes de ce type-là, est très important parce que ça change ma conception des mathématiques. Evidemment, pour les enseigner, je ne vais pas copier ce qui s'est passé dans l'histoire, parce que tous les contextes historiques dans lesquels sont apparus certains concepts, surtout en tant qu'outils, sont des contextes extrêmement compliqués, et, du point de vue didactique, ce ne serait sans doute pas la bonne manière de les présenter. Mais on trouve là des idées pour changer notre vue sur les mathématiques.

Je suis toujours frappé quand je rencontre des mathématiciens: entre eux ils tiennent un discours où on dirait des gens qui ont fait des expériences en laboratoire. Ils tiennent un discours qui est second vis à vis de leur pratique: tu prends ce bitoniot-là, tu le tords dans ce sens-là, tu le recolles par ici, etc... Quand on n'est pas initié, si on essaie de lire leurs publications on n'y comprend rien!

Il y a toute cette distance entre le discours second que l'on a sur notre pratique et l'exposition que l'on trouve dans les livres et même que l'on fait dans nos cours, malheureusement.

Je prends l'histoire des mathématiques comme un terrain où on peut mesurer toute cette distance et changer notre pratique en tant qu'enseignant et même notre pratique vis à vis des mathématiques aussi.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooo

ooooooo

o