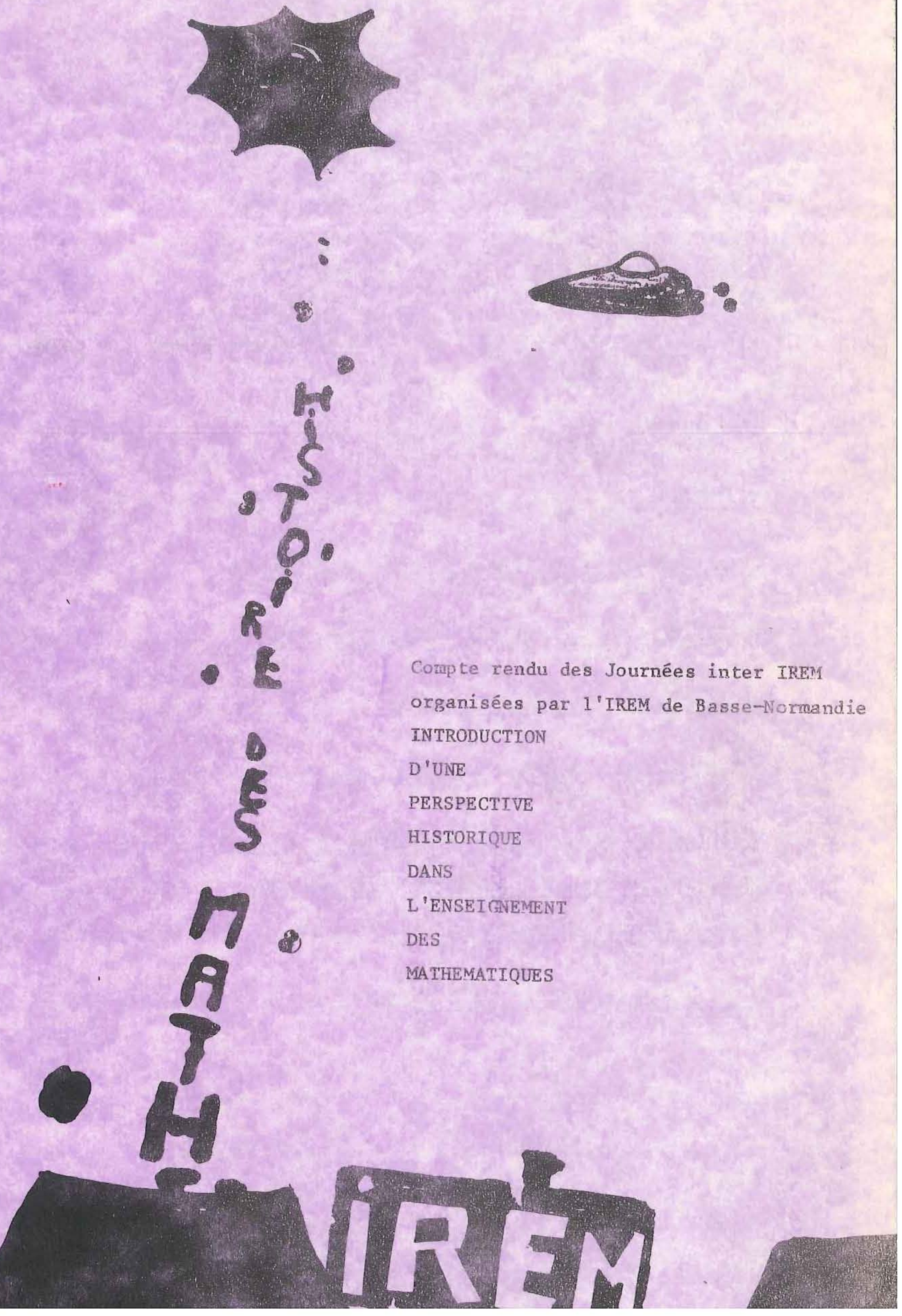


Compte rendu des Journées inter IREM
organisées par l'IREM de Basse-Normandie

INTRODUCTION
D'UNE
PERSPECTIVE
HISTORIQUE
DANS
L'ENSEIGNEMENT
DES
MATHEMATIQUES

INTRODUCTION

Ce document est destiné à rendre compte des Journées inter IREM, des 10-11-12 juin 1977, organisées par l'IREM de Basse Normandie à Tailleville.

Ce compte rendu ne peut espérer que donner une idée de la richesse des échanges qui ont lieu pendant ces quelques journées entre les participants venus de tous les ordres d'enseignement et de diverses disciplines (math bien sûr, mais aussi philosophie, sciences physiques, histoire, ...).

Nous voulions par ces journées marquer l'apport qu'une perspective historique peut donner à une réflexion et à une action concernant l'enseignement des mathématiques. Nous tenons donc à remercier les collègues qui ont bien voulu présenter leurs travaux ou réflexions pendant ces journées et montrer, ainsi, qu'un tel apport était possible, et de bien des manières.

Nous présentons donc les textes suivants, tels que les rapporteurs ou animateurs des groupes nous les ont communiqués, pour que, par leurs différences même, ils montrent la diversité et les possibilités de travail et d'action dans la perspective proposée.

La plupart des documents cités dans ces textes, en particulier concernant des travaux de groupes IREM, sont disponibles auprès des IREM concernés.

D'autre part des renseignements plus exhaustifs et des bibliographies plus complètes sont (ou seront) accessibles dans le bulletin inter IREM consacré au groupe inter IREM : "Histoire et Epistémologie des mathématiques".

Je tiens, enfin, à remercier l'U.N.C.M.T. et la direction de la maison de Tailleville pour la qualité de son acceuil, auquel, je pense, tous les participants ont été sensibles.

Denis LANIER

POURQUOI INTRODUIRE UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE ? QUEL EN EST L'ENJEU ?

C'est un débat sur ce thème qui a inauguré les journées. Nous donnons, ci-après, un compte rendu d'après bande magnétique des interventions des deux animateurs du débat : Rudolf BKOUCHE (IREM de LILLE) et Jean Louis OVAERT (IREM de MARSEILLE), suivi d'un résumé des autres points abordés dans le débat.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

LEONARDO FIBONACCI

Rudolf BKOUCHE (IREM de Lille) :

D'abord je veux dire pourquoi à l'IREM de Lille on a été un petit groupe à s'interesser aux problèmes historiques. C'est dû à une chose simple : il ya des professeurs enseignant en 4°-3°, qui nous ont demandé quelle différence existe entre le métrique et l'affine. En dehors de la réponse bien connue:"l'affine, c'est en 4°, et le métrique, c'est en 3°", dans l'enseignement on n'arrive pas à en trouver. A partir de là on a fait un travail sur le programme d'Erlangen et en fait sur l'histoire de la géométrie, dont on devrait parler plus longuement dans un groupe de travail.

Le problème qui est posé ici, c'est : pourquoi réintroduire l'histoire? pourquoi l'histoire dans l'enseignement mathématique ? Aussi bien au niveau des maîtres : est-ce que les maîtres doivent faire de l'histoire ? connaître l'histoire de la,discipline qu'ils enseignent ? et au niveau des élèves : est-ce qu cela peut apporter quelquechose?

Si on regarde actuellement ce qui se passe, tout cet aspect historique est complètement supprimé. On présente des faits, des concepts, on les fait marcher, ou plutôt on montre aux élèves comment ils marchent, sans très bien savoir si les élèves vont voir ou pas. Et on se contente de ça : on a enseigné des mathématiques à des élèves! Or, dans tout l'enseignement secondaire ou supérieur, il y a une chose que les élèves ne font jamais : c'est d'avoir une réelle activité mathématique. On leur montre un cours, des théorèmes, on leur donne des définitions, des axiomes, et puis finalement ce qu'on leur demande dans les divers problèmes ou examens qu'ils ont, c'est pratiquement d'appliquer des recettes. Et dès qu'on sort du schéma d'un problème, qui est pratiquement recopié d'un cours, on voit que c'est catastrophique, que les élèves ne savent pas. Pourquoi?

Si on prend un cours, si on voit comment c'est fait, on s'aperçoit qu'il y a souvent des motivations, une pseudo introduction. Par exemple, hier, j'ai vu un bouquin de Terminale C, où on fait une introduction des fonctions en escalier pour faire l'intégrale de Riemann : si on prend un courant d'intensité constante, la différence de potentiel est V=RI; si on prend une vitesse constante, le déplacement est L=VT; ensuite on fait des trains qui se déplacent avec des vitesses constantes par morceaux, par intervalles. Et puis, ça, c'est une introduction, et ensuite on introduit les fonctions en escalier, on fait une intégrale de Riemann. Je ne sais pas très bien ce que les élèves voient là-dedans, quelle motivation cela peut représenter pour eux. Mais on a fait ce qu'on appelle une introduction. Ensuite il y a un exposé, c'est à dire qu'on expose la théorie de la façon dite la plus rigoureuse possible, on démontre les théorèmes, etc ... A la limite, si on veut être concret, on donne quelques applications: on revient à des problèmes de physique, de mécanique, ou à autre chose. Mais finalement là-dedans, qu'est-ce qu'ont vu les élèves? Ils ont vu une théorie qui leur est tombée sur la tête, un truc qui marche, sans trop savoir pourquoi ni comment. Après on dit qu'ils ont vu l'intégrale de Riemann en Terminale C. C'est l'exemple le plus absurde de l'enseignement mathématique. Une fois qu'ils ont vu ça, ils ne savent pas ce que c'est qu'une intégrale, et, si on ne leur dit pas, ils ne savent pas calculer une primitive ou une intégrale par approximations (métodes des trapèzes, rectangles). Riemann n'a pas inventé les sommes de Riemann parce qu'il avait envie de faire des sommes, il voulait donner un sens à une notion qui était connue depuis 150 ans, et qui était l'intégrale.

Tous les exposés actuels de cours sont fait de cette façon, on oublie complètement les conditions de production des théories, on fait un discours dessus et puis ça s'arrête là. Un élève là-dedans, ou bien il est suffisemment docile pour reprendre ce qu'on lui a dit en acceptant, peut-être, que cela lui servira plus tard, ou bien il est écoeuré, il ne fait rien, il considère que les mathématiques sont inutiles, que c'est un jeu qui ne sert à rien, ou qui sert à l'éliminer. Il ne peut pas voir ce qu'il y a derrière. C'est la raison pour laquelle on a pensé que réintroduire l'histoire, non pas pour dire en telle année il s'est passé telle chose, ou tel bonhomme a inventé telle chose, mais pourquoi on a fait des théories, pourquoi on a conceptualisé des choses sur lesquelles on travaillait avant, cela pourrait apporter quelque chose aux élèves et aussi aux maîtres, dans la mesure où ils sauraient de quoi ils parlent au lieu de répéter ce qu'on leur demande de répéter.

Pourquoi l'analyse au XVII° et XVIII° s. ? Pourquoi a-t-on introduit les notions de dérivées et d'intégrales? Cela répond à des questions posées par des professeurs de Seconde, Première, Terminale. En analyse, on enseigne toujours à tous les niveaux en commençant par fonctions, limites, continuité, et puis après dérivées, variations des fonction s. Il y a une chose difficile à faire passer, c'est limites et continuité et et pourquoi en Seconde, Première, Terminale, les seules fonctions qu'on étudie c'est soit des fonctions polynomiales, soit les fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes. Pour les fonctions polynomiales le problème de la continuité ne se pose pas : pour résoudre l'équation $\lambda = ax+ b$, expliquer qu'il faut faire toute une démarche théorique sur la continuité de la fonction linéaire, cela n'apporte strictement rien. Pour les polynomes, il n'y a qu'à faire un graphique et couper avec une droite, et expliquer que ce n'est pas vrai: cela ne coupe pas, je ne crois pas que cela dise grand chose aux élèves. Pour le second type de fonctions que l'on rencontre il est clair qu'au niveau de Seconde, Première, Terminale, on ne peut pas démontrer la continuité, par contre cela peut très bien s'admettre, parce que pour résoudre l'équation ~~sinx=a~~, couper la sinusoïde par une droite c'est quelque chose qui se voit, même si on n'a pas de démonstrations explicites à ce moment. Autrement dit, tout le cours sur limites, continuité ne sert strictement à rien, sinon à faire entendre que l'analyse, c'est difficile, mais sans trop savoir pourquoi. D'autre part, à la suite de discussions avec des enseignants, je me suis aperçu que la majorité des enseignants ne sait pas du tout que les gens qui ont inventé la dérivée et l'intégrale se foutaient complètement de la notion de limite. Les notions de limite et continuité ont été mises en place au XIX°s de façon rigoureuse, au sens qu'on donne à ce mot maintenant, mais pendant deux siècles on a travaillé avec et on a fait pas mal de choses. Pourquoi ne peut on avoir une démarche analogue au niveau de l'enseignement, c'est à dire faire manipuler des fonctions, résoudre des équations, des équations différentielles, et revenir après sur les problèmes théoriques et les notions de limite, continuité qui prennent un sens à ce moment là.

Pourquoi l'axiomatique? L'axiomatique, ce n'est pas du tout le début des mathématiques. On fait les mathématiques et on fait de l'axiomatique après. En particulier l'axiomatique de la géométrie est née très tard. On a fait de la géométrie très tôt. Mais la géométrie qu'on a faite, ce n'était pas le plaisir d'étudier des objets qu'on appelle points, droites, plans et qui vérifient des propriétés, c'était parce qu'on en rencontre dans la nature, et que c'est à partir de là qu'on a fait de la géométrie. Or actuellement on voit dans l'enseignement une présentation axiomatique, sous prétexte que, sans axiomatique on ne peut pas faire de déductions, ce qui est complètement faux. Le raisonnement déductif est lié à des problèmes qu'on résout de façon locale. L'axiomatique est une reconstruction globale. Le raisonnement déductif en mathématiques est né depuis longtemps, avant même qu'on fasse des axiomatiques. Dans l'enseignement, la présentation axiomatique qu'on donne actuellement laisse croire (et c'est aussi bien pour les élèves que pour les maîtres) que la rigueur n'existe que quand on a énoncé des définitions, donné des axiomes et des règles de démonstration. Après on fait marcher la machine. Or l'expérience montre que, dans l'enseignement, ce genre de choses ne marche pas. Ce n'est pas parce qu'on a présenté aux élèves des définitions, axiomes, règles de déductions, qu'ils sauront les faire marcher. Pour la bonne raison que, pour un élève et un mathématicien qui fait de la recherche, quand il parle de droites ou de plans, il a une image derrière. Même quand il parle de droites ou de plans dans un espace de dimensions infinies, il a une image géométrique. Enlever au niveau élémentaire ces images géométriques, ou considérer par exemple que faire des dessins en géométrie, c'est un support du raisonnement (alors que la géométrie, à ses débuts, c'est tout le contraire: on raisonne sur des figures, on ne fait pas des figures pour aider son raisonnement) c'est finalement transformer complètement l'idée même de la géométrie. La plupart des élèves qui font de la physique en Seconde ne comprennent pas du tout que la géométrie qu'ils ont fait en 4°-3° puisse servir à la physique en Seconde. Ils ne comprennent pas du tout que un triangle rectangle du cours de 3°, c'est la même chose qu'un triangle rectangle qu'on est amené à dessiner en physique, parce qu'on a, par exemple, deux forces perpendiculaires.

La géométrie, c'est d'abord le rapport à l'espace. Quand je dis qu'on en rencontre dans la nature, cela ne veut pas dire que les objets géométriques, tels qu'on les étudie, existent dans la nature. Mais si on étudie ces objets, c'est qu'on a rencontré quelquechose qui en a donné l'idée. Pour un gosse, la droite cela existe bien avant qu'il ne l'ait formalisé, sous diverses formes. Une droite, c'est, par exemple, le bord de cette table, ou quand il roule en voiture sur une droute toute droite: c'est une droite. On peut discuter longtemps sur les rapports l'enfant, la droite, la route, etc..., mais il y a derrière des phénomènes physiques, la vision d'un certain nombre de objets qui l'amènent à faire de la géométrei. Le premier niveau dans l'enseignement de la géométrie ce n'est pas le dégré abstrait, ce n'est pas non plus (comme on le voit dans un certain nombre d'ouvrages de 4°) des manipulations dites concrètes avec des règles, des dessins, et puis, tout à coup, on a fini la partie concrète, on passe à l'abstrait, on énonce des axiomes. Ce n'est pas du tout comme cela que cela s'est passé. Les axiomes on les a explicité au fur et à mesure des besoins, mais il y a derrière cette idée physique.

Je reviens sur un autre exemple: peut-être, l'endroit de l'enseignement secondaire où on manie le plus de concepts abstraits, ce n'est pas dans le cours de mathématiques, c'est dans le cours de physique. Qu'on fasse de la mécanique avec F=m , ou de l'électrocinétique avec V=RI, ce sont des objets qui sont beaucoup plus abstraits, et qui demandent beaucoup plus d'efforts de compréhension, que les notions de droites et de plans. Là on accepte que cela se relie à l'expérience, à des objets dits "concrets", alors qu'en mathématique, sous prétexte que c'est une science abstraite et rigoureuse (pour employer le langage d'un certain nombre d'élèves de Terminale C) qui répètent bien ce qu'on leur a dit) on considère que les objets ne sont définis que par les relations qu'il y a entre eux. C'est une vision fausse au niveau de l'enseignement, c'est aussi une vision fausse au point de vue de l'activité mathématique. Un mathématicien ne travaille jamais par axiomes, il travaille d'abord sur des objets qu'il connait, et c'est en les mettant en forme qu'il axiomatise et qu'il formalise.

Pourquoi la théorie des ensembles? La plupart des enseignants en 6°-5° s'imaginent que la théorie des ensembles a été crée pour résoudre des problèmes d'intersection, réunion, relation binaire etc... Or la rhétorique des ensembles ets née de problèmes d'analyse, elle est liée à la convergence des séries de Fourier, pour savoir sur quel domaine les séries convergent vers les fonctions qui les définissent, etc... Et là encore, c'est un aspect qui est complètement enlevé de l'enseignement. On sait qu'au XX°S il y a un certain nombre de gens qui ont essayé de reconstruire les mathématiques à partir de la théorie des ensembles, qui ont posé des problèmes de fondement des maths ce qui est tout à fait juste dans l'optique d'un travail mathématique; mais les fondements d'une science, c'est bien la dernière chose qu'on doit étudier. Premièrement, parce que pour étudier les fondements, il faut connaître de quoi on étudie les fondements; deuxièmement, il y a des problèmes techniques qui sont assez difficiles. Or dans l'enseignement on présente ce qu'on appelle depuis longtemps la théorie naïve des ensembles, mais on a voulu la présenter tellement bien qu'on en a fait une théorie naïve formalisée. C'est ce qu'on présente aux élèves de 6°-5°, avec les intersections, réunions, relations etc... Mais toute la problématique, qui est à l'origine de la théorie des ensembles n'est vue nulle part dans l'enseignement.

Le problème qu'on peut se poser sur la théorie des ensembles c'est: est-ce que c'est utile? C'est un fait que la théorie des ensembles, ça sert à un certain nombre d'autres choses que la théorie des séries de Fourier. Mais, premier point, les gens ne savent pas d'où ça vient. Deuxième point, est-ce qu'il est utile de faire de la théorie des ensembles au niveau élémantaire?

Je donne un exemple, peut-être caricatural, mais qui s'est trouvé: quand on fait de la théorie des ensembles avec les notions d'intersection et de réunion, formalisées comme elles le sont dans les classes de 6°-5°, et qu'on arrive à la géométrie, le plan est un ensemble de points et dans ce plan il y a des sous-ensembles qu'on appelle droites. Comme l'intersection de deux sous-ensembles est un sous-ensemble, l'intersection de deux droites cela ne peut surtout pas être un point. Il faut que ce soit le singleton dont l'unique élément est le point d'intersection.. C'est clair que si on a formalisé la théorie des ensembles, on tombe sur ce genre de problèmes qui n'ont strictement rien à voir avec un enseignement de la géométrie. Deux droites, ça se coupe en un point, et ça, ça se voit. La notion d'intersection telle queon l'utilisait avant, était largement suffisante pour savoir de quoi on parlait. La formaliser, en faisant la différence entre un point et un ensemble réduit à un point, cela ne peut amener que de la confusion. C'est vrai que quand on a fait des mathématiques, à un certain moment, il faut bien distinguer un élément et l'ensemble réduit à cet élément, mais au niveau élémentaire sous prétexte de rigueur et de précision, finalement on a rendu quelque chose de compliqué. En fait, les notions ensemblistes, est-ce qu'on a besoin de les formaliser, est-ce qu'on a besoin de la théorie des ensembles pour s'en servir? La notion de réunion, c'est quand on met des choses ensembles Cela suffit largement. Et quand on rencontre des difficultés, à un certain moment, peut-être qu'il est nécessaire de les expliciter. Mais tant qu'on n'a pas de difficultés, tant qu'on ne s'est pas cassé la gueule sur un problème, pourquoi ne pas se servir des notions qui permettent de résoudre tout ce qu'on a?

On ne sait pas finalement pourquoi on enseigne les mathématiques. Cela parait immense comme question, mais il faut quand même la poser.

Pour la géométrie, il y a quelque chose au départ, c'est le rapport à l'espace. Si il faut partir de l'axiomatique, des groupes, de telle ou telle notion, c'est un problème qui vient après. Un élève connait l'espace dans lequel il vit. De la géométrie, il en fait peut-être plus en gymnastique qu'en mathématique. Je connais des gens à qui on a dit qu'ils étaient mauvais en géométrie, parce qu'ils ne savaient pas structurer l'espace. Mais quand je connais leur métier, je m'aperçois qu'ils savent mieux le structurer que moi. Savoir qu'ensuite la théorie des groupes a fait faire un progrès immense à la géométrie et qu'une des étapes essentielles de la géométrie, c'est le programme d'Erlangen, cela ne veut pas dire surtout, que parce que maintenant on a une vision des diverses géométries à partir de la théorie des groupes, il faut se donner comme objectif de faire comprendre le programme d'Erlangen. On a inventé des théories comme moyen de comprendre des choses, on enseigne des choses comme moyens de comprendre des théories! Quand on s'adresse à un gosse et qu'on fait un discours très bien sur le plan mathématique, on fait un discours qui n'a aucune signification pour le gosse. La théorie des groupes n'a pas de signification pour un gosse. Par contre l'espace dans lequel il vit, on peut l'aider à le structurer. Les mathématiques, ce n'est pas des structures, c'est structurer des choses, parce que cette structuration permet de comprendre. Si on n'a pas besoin pour comprendre, les structures on les met de côté. Comprendre la théorie des groupes, la continuité, ce ne sont pas des objectifs. La théorie des groupes est utile pour faire de la géométrie, la continuité est nécessaire quand on veut faire de l'analyse. C'est alors qu'on peut avoir des élèves qui ont envie de ~~xxxxxxx~~ apprendre des choses difficiles.

Ceci est lié à la façon dont on a fait la réforme et gommé l'aspect historique. Je ne pense pas que l'enseignement avant était bon, il était moins mauvais. En dehors de l'aspect sélectionniste qui y était tout autant, il y a une chose qu'on faisait avant et qu'on ne veut plus faire: on ne veut pas que les gens pataugent. Or ce qui compte, ce n'est pas d'enseigner un savoir, mais la prise de possession du savoir et cela passe par les erreurs. Vouloir s'en passer et arriver tout de suite à la vérité, c'est montrer un savoir aux gens, mais c'est leur bloquer la prise de possession du savoir, leur autonomie de savoir et la façon pour eux de se débrouiller sans le professeur.

Il y a une tendanvee actuelle de l'enseignement des mathématiques et de l'utilisation des mathématiques dans la société à montrer que toute situation est mathématisable et à mathématiser n'importe quoi. C'est vrai qu'on peut y arriver? Mais je ne crois pas que tout soit mathématisable, et même parmi les problèmes mathématisables, les maths peuvent être efficaces ou pas. Dans la mesure où dans l'enseignement on mathématise n'importe quoi, la mathématisation, puisque ça sert à tout, ça sert à rien.

Et les élèves ne voient plus la différence entre l'utilisation de la théorie des ensembles pour savoir si la relation "Pierre est frère de Paul" est symétrique ou pas, et l'utilisation des mathématiques pour faire de la physique.

Le retour à une perspective historique, c'est montrer que les mathématiques ont été utiles à la physique (au XVII°s et XVIII°s on ne peut faire la différence entre mathématique et physique sinon par un discours institutionnel actuel), que des théories sont nées à partir de certains types de problèmes (exemple: dérivée et vitesse), que si on a fait des théories compliquées, ce n'était pas pour le plaisir d'en faire, c'était pour résoudre des problèmes. Or si on fait des théories compliquées à propos de tout et n'importe quoi, l'aspect de nécessité de ces théories n'apparait plus.

Je ne crois pas qu'en mathématiques, ou dans les autres sciences, on puisse faire une différence entre savoir et savoir-faire. Elle est assez arbitraire. Entre savoir les nombres et savoir faire avec des nombres, je ne crois qu'il y ait une priorité l'un sur l'autre. Les nombres, on les apprend en les manipulant, et la nature du nombre en soi, ça ne veut rien dire. Le travail sur les nombres n'est pas seulement de la manipulation, c'est quelquechose qui permet de comprendre ce que sont les nombres. Actuellement, dans l'enseignement, on se pose le problème du savoir-faire dans l'optique: si on enseigne quelquechose, on peut toujours trouver des endroits où ça sert, pour n'importe quelle théorie. Mais le problème de l'élève, c'est: à quoi ça sert de servir à ça?

Si on veut enseigner aux élèves des concepts mathématiques, c'est du même type que d'enseigner la musique: c'est une activité utile, mais sans aspect social.

Mais les mathématiques ont un autre rôle (le coefficient des maths au bac est plus impotant que celui de la musique) que l'apprentissage de concepts. C'est un rôle social. Et ce n'est pa s pour rien qu'il y aeu une réforme des mathématiques dites modernes, qui a été une régression par rapport à un enseignement déjà dogmatique. On a remplacé un dogmatisme relativement aéré par un dogmatisme matraque.

Un des objectifs de l'enseignement, c'est que le maximum d'élèves apprennent le minimum de choses, quelle que soit la bonne volonté qu'on puisse avoir. On se pose, dans les colloques, des problèmes sur l'enseignement en Seconde, Première, Terminale C. Mais combien d'enfants d'une classe d'âge sont dans la filière Seconde-Première-Terminale C? Quand on parle du I° cycle, il s'agit que les élèves comprennent pour qu'ils puissent aller en Seconde C....

Il y a une vision élitiste, qui vise à donner à des élèves un statut social. Les mathématiques ne jouent pas seulement un rôle de sélection d'une élite à l'intérieur. Elles jouent un rôle à l'extérieur, un rôle idéologique (cf Edgar Faure: les 3 langages pour s'adapter à la vie moderne). Ce qui veut dire que s'ils n'ont pas acquis ce langage ils ne sont pas adaptés, ils n'ont plus le droit de diriger leur vie (exemple: le rôle de l'ordinateur dans notre vie).

Pourquoi on s'intéresse à l'histoire de la production mathématique? C'est pour que les élèves qui passent dans l'enseignement sachent que toute cette mathématique qu'on leur balance ne s'est pas trouvée comme ça, que cela correspond à des problèmes qui se sont posés à des gens. Ils auront peut-être une autre vision des mathématiques et de la science qu'on leur assène dans la société.

Pour démystifier toute une idéologie de la science qu'on donne actuellement, une science qui existerait comme ça, alors qu'elle s'est fabriquée à travers un certain nombres de problèmes, par des gens qui voulaient répondre à des questions.

Jean-Louis OVAERT (IREM de Marseille)

Je me mets à la place d'un élève, qui est intéressé, qui a l'esprit ouvert, appelons le Simplicio. Ou alors je prends un professeur, appelons le aussi Simplicio, qui veut faire un cours d'analyse ou qui veut faire une recherche sur l'enseignement de l'analyse. Ou alors, je suis étudiant et je suis des cours d'analyse (par exemple: analyse harmonique, théorie spectrale). Je reçois un cours sur les séries de Fourier, les algèbres de Banach, etc... A la fin du cours je ne sais toujours pas pourquoi on a appelé ça l'analyse harmonique. Je n'en ai vu en fait aucun problème. J'ai entendu des cours, des définitions, des théorèmes savants, des outils pour résoudre ces problèmes, mais en fait ni sur le plan physique, ni sur le plan automatique, ni même sur le plan mathématique je n'ai reçu d'informations.

De façon plus générale, si je suis élève, professeur ou étudiant, je peux me demander: qu'est-ce que c'est que l'analyse?
Vers quoi vais-je pouvoir me tourner?

Je peux consulter les manuels. Mais ils dépendent de programmes. Quels étaient les objectifs de ces programmes? Est-ce que l'analyse est close avec les fonctions continues et quelques calculs sur les dérivées?

Je peux aussi voir les traités scientifiques à la mode. Il fut un temps où Bourbaki sous-titrait son traité: "Les structures fondamentales de l'analyse", dans lesquelles il y a la théorie des ensembles, la topologie, les espaces vectoriels topologiques. Où est l'analyse là-dedans? Depuis, Bourbaki a abandonné ce sous titre. Pourquoi? On peut aller voir les Elements d'analyse de Dieudonné. On verra des chapitres de topologie, un chapitre intitulé Equations différentielles, et puis après des trucs sur la théorie de la mesure, etc... A aucun moment on ne sait si on fait de l'analyse (sinon par le titre)? Finalement avec les traités scientifiques à la mode on ne sait plus où on en est.

On peut se tourner vers les recherches contemporaines, on sait que celui-là fait de l'analyse harmonique. Si on va voir ce qu'il fait, effectivement il a des problèmes mais à un niveau extrêmement élevé. Et on ne trouvera pas en tête de l'article, les motivations profondes de cet auteur (tout le monde ne s'appelle pas Euler), surtout si cet auteur cherche à s'inscrire sur une liste d'aptitude quelconque de l'enseignement supérieur, auquel cas il a peut-être un autre article en vue après, il n'a pas toujours intérêt à développer ses batteries à l'avance. En moyenne, depuis 50 ans, le ton des ouvrages a beaucoup évolué dans le sens qu'on est beaucoup plus muet sur l'insertion de son travail dans une problèmatique plus générale.

Si je veux savoir ce que c'est que l'analyse, je vais me tourner vers l'histoire, non l'histoire de l'analyse, l'histoire générale. Je vais regarder une suite organisée de transformations d'un groupe de problèmes, une suite organisée de transformations des délimitations de ce groupe, une suite organisée des transformations des concept et techniques liés à ces problèmes, une suite organisée de transformations des liens entretenus entre ces problèmes et le reste de l'histoire. On ne peut imaginer une histoire sectorielle des mathématiques, en ne précisant que les frontières. Souvent les liens avec les autres secteurs sont au cœur même des concepts mathématiques et les moteurs de l'étude de ces problèmes.

Quand j'ai voulu savoir ce que c'était que l'intégration, ce n'est pas en lisant seulement Bourbaki que j'ai pu apprendre ce que c'était, mais plutôt en lisant le livre de Lebesgue. Lui, il essayait de dire quels étaient les problèmes qui s'étaient posé en intégration, et en plus il y avait un contexte historique. A travers Lebesgue on voyait que Cauchy se posait ce problème, Riemann celui-là, mais surtout quels étaient ces problèmes.

Si je suis Simplicio, si je cherche quelles sont les choses dont on parle en mathématique, je n'arrive àle trouver qu'à travers l'histoire.

Pour bien comprendre une science, il faut passer par son histoire. En tout cas, pour les mathématiques, je n'arrive par autrement. Peut-être que j'y arriverais mieux si l'enseignement que j'avais reçu, les traités et articles de recherche étaient autrement. Mais dans l'état actuel des choses, voilà mon témoignage personnel.

A propos des questions qui ont amené la mise en place de la théorie des ensembles, il s'agit d'exemples très techniques, si techniques que quand j'ai essayé de parler de théorie des ensembles en formation des maîtres (CAPES), en avertissant d'ailleurs les étudiants, à cet endroit-là j'ai triché. Je voulais leur montré comment on était amené à construire les nombres ordinaux, mais l'exemple technique pris par Cantor était si difficile, que des étudiants de 4° année d'université auraient été très gênés. Ils n'auraient pas compris de quel problème scientifique il s'agissait, si bien que j'avais pris un autre exemple historique, le problème de Baire des limites de fonctions continues, où ça se déroule de la même façon. Mais qu'est-ce qu'il y a là, derrière? Je pense que, à la fin du XIX° s, on s'est intéressé en mathématiques à ce qu'on appelle l'extension du champ de la variable. Dans les problèmes d'analyse, il y a la fonction et la variable. Dans tout le courant du XVIII°s et du début du XIX°s, on faisait parcourir à la variable des intervalles de la droite, ou des parties très simples du plan définies de manière constructive (disque, ellipse, intérieur d'une ellipse, etc...). Les problèmes de séries trigonométriques ont amené les gens à se poser la question de l'élargissement du champ de la variable, c'est à dire des fonctions qui vont être définies sur des parties plus camullées de la droite et du plan. Ce discours n'est pas sans rapport avec l'enseignement du second degré, car j'ai lu des manuels où on parle de fonctions continues sur une partie quelconque de la droite (peut-être même que les programmes officiels le suggèrent : programme de Terminale, limite d'une fonction, exemple des suite et dans le commentaire, il suffira de prendre comme ensemble de définition N). C'est un bon exemple d'évacuation de problèmes. Historiquement, et mathématiquement, quand on se pose ces questions de théorie des ensembles en analyse, il s'agit de problèmes nécessitant un élargissement du champ de la variable, que ce soit des séries de Fourier ou pas. Dans l'enseignement du second degré, on n'y a vu qu'une économie de discours éventuel du professeur, on n'a pas mis un seul problème dans lequel il était nécessaire d'élargir le champ de la variable. Mais on a dit: tiens, tiens, il leur a fait un discours sur les limites et pour qu'il gagne du temps à sa montre, qu'il ne soit pas obligé de reproduire un discours où on traiterait de choses analogues sur les suites, on va dire que c'est un cas particulier. Autrement dit, on va faire de ça une astuce de discours, pour le professeur. Sans s'être préoccupé du fait que les problèmes mathématiques concernant les suites et ceux concernant les limites de fonctions entretiennent des relations importantes entre eux, certes, mais ce n'est pas le même type de problèmes. Tout le monde qui fait des mathématiques est bien d'accord là-dessus.

A propos de théorie des ensembles, les exemples historiques sont, en général, d'une technicité trop grande pour être pris en compte dans l'endeignement du second degré, voire même dans l'enseignement supérieur, mais ceci dit, si la théorie des ensembles n'avait été utile qu'à l'unicité des séries de Fourier, cela n'aurait pas connu une telle extension. On connait comme ça des problèmes simples qui ont été remisés au passé. Ce qui s'est passé, cela a été le démarrage de toute une problèmatique très importante en analyse, qui nécessite un élargissement du champ de la variable. C'est sous cette forme qu'il faut poser le problème historique et mathématique.

Mais il y a aussi des raisons sociales, philosophiques ou de conception du monde au développement des mathématiques. Les statistiques, par exemple, il s'agissait de gens qui mouraient parce qu'on leur avait administré une inoculation contre la vérole et il y avait une discussion sur le résultat de l'inoculation. D'autre part, les opinions philosophiques des gens ont joué fortement sur le développement du calcul infinitésimal.

Dans l'enseignement actuel des mathématiques, on est très coupé des relations que les mathématiques pourraient avoir avec des problèmes actuels ou de l'histoire en général. Il y a là un élargissement souhaitable, mais difficile.

Le problème didactique est de savoir si, quand historiquement il y a eu une difficulté dans l'établissement d'une théorie, l'élève est obligé de repasser par les mêmes chemeins ou des chemeins analogues. Je peux avancer la thèse suivante: un obstacle épistémologique dans la construction historique du savoir est toujours le signe d'un obstacle du côté des élèves, mais la manière dont on va faire franchir l'obstacle, n'est pas nécessairement la voie historique.

Les gens qui rédignet les programmes ne se rendent pas compte des difficultés de construction du savoir. Ils sont dans l'optique Auguste Comte (I° manière).

Le débat s'est aussi articulé autour des points suivants:

"La description que fait Bkouche de la situation dans l'enseignement est péjorative, et ne représente pas la réalité. Par exemple, on ne fait pas de théories des ensembles, on utilise un langage ensembliste pour résoudre des problèmes."

" la question n'est pas de forme (discours magistral ou attitude active des élèves) mais de fond : quels sont les problèmes qui peuvent être mieux résolus au niveau du secondaire avec le langage ensembliste ?

"La présentation de l'analyse dans l'enseignement est idiote. Par exemple, toutes les fonctions étudiées dans le secondaire sont continues, sauf cas pathologiques inventés par des pédagogues."

"On ne pataugeait pas plus avec les anciens programmes. Ce n'est pas parce que l'organisation des programmes était plus pataugeante que l'enseignement était différent."

"Pour les nécessités de l'enseignement l'exposé doit être dogmatique. On ne demande pas à l'élève de comprendre ce que c'est que la science. A la limite on ne demande pas non plus au professeur de comprendre. Si on veut véritablement comprendre, il faut passer par l'histoire."

"Les concepts qui ont amené des concepts mathématiques nouveaux ont été, et restent, difficiles. Comment peut-on en parler?"

"La question est plutôt comment introduire une perspective historique que pourquoi. On voudrait permettre aux élèves de brûler des étapes, mais lesquelles?"

"Il faudrait distinguer l'utilisation d'une perspective historique au niveau des maîtres et au niveau des élèves. L'histoire n'est pas à priori un avantage par rapport à d'autres motivations?"

"Ce n'est pas le propre des mathématiques d'oublier ses conditions de production. Pourquoi s'interesser maintenant à l'aspect historique? Est-ce seulement pour permettre aux élèves d'avoir une réelle activité mathématique? Est-ce lié aussi aux fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques?"

"A vouloir réintroduire une histoire sérielle, ne risque-t-on pas de devenir prisonnier d'un gadget, en évitant les problèmes politiques?"

"Les concepts sont produit à,partir de problèmes, mais pas uniquement mathématiques. Quels problèmes de la vie ~~xxxxxxx~~ réelle peuvent être résolus et avec quelles théories?"

"Un professeur de mathématiques n'est pas préparé à montrer à des élèves la situation dans laquelle un outil mathématique fonctionne. Si on veut travailler dans cette optique, il faut travailler avec les professeurs de la discipline concernée."

"Il ne faut pas avoir l'illusion, comme avec les petites machines à calculer ou l'audiovisuel, que tous les élèves arriveront à tout comprendre. Le problème est: comment l'histoire va permettre à des gens à différents niveaux de s'approprier quelquechose?"

Pour conclure ce compte-rendu, nous reproduisons ci-dessous la contribution de Gilles BONNEFOY (IREM de Lyon):

Un des enjeux de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques, est de briser cette conception dogmatique qu'on a des mathématiques, surtout dans notre enseignement, et de remettre les mathématiques sur le terrain d'une science qui est vivante, qui se produit et qui produit. En particulier, ne pas évacuer l'aspect expérimental. Quand on évacue cet aspect expérimental, on évacue toute la maîtrise pour les élèves, et pour nous-mêmes, de pouvoir comprendre les mathématiques. Cette évacuation me semble extrêmement grave et l'histoire est un terrain où on voit, où on peut étudier des situations dans lesquelles la mathématique se développe comme un véritable champ d'expériences.

On trouve des textes d'Euler qui dit: voilà, je voulais résoudre ce problème, j'ai essayé cette voie là, je n'ai pas réussi. Et il explique pourquoi il n'a pas réussi, pourquoi ça ne marche pas, et il essaie une autre voie.

En tant qu'enseignant, retrouver des textes de ce type-là, est très important parce que ça change ma conception des mathématiques. Evidemment, pour les enseigner, je ne vais pas copier ce qui s'est passé dans l'histoire, parce que tous les contextes historiques dans lesquels sont apparus certains concepts, surtout en tant qu'outils, sont des contextes extrêmement compliqués, et, du point de vue didactique, ce ne serait sans doute pas la bonne manière de les présenter. Mais on trouve là des idées pour changer notre vue sur les mathématiques.

Je suis toujours frappé quand je rencontre des mathématiciens: entre eux ils tiennent un discours où on dirait les gens qui ont fait des expériences de laboratoire. Ils tiennent un discours qui est second vis à vis de leur pratique: tu prends ce bitoniot-là, tu le tords dans ce sens-là, tu le recolles par ici, etc... Quand on n'est pas initié, si on essaie de lire leurs publications on n'y comprend rien!

Il y a toute cette distance entre le discours second que l'on a sur notre pratique et l'exposition que l'on trouve dans les livres et même que l'on fait dans nos cours, malheureusement.

Je prends l'histoire des mathématiques comme un terrain où on peut mesurer toute cette distance et changer notre pratique en tant qu'enseignant et même notre pratique vis à vis des mathématiques aussi.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

oooooooooooooooooooooooooooooooooooo

ooooooooooooooooooooooo

ooooooo

o

H I S T O I R E   D E S   N O M B R E S

Joël B O U C H E R E A U

(I R E M de B A S S E - N O R M A N D I E)

Il s'agit d'un exposé de M.BOUCHEREAU à partir de l'ouvrage : "Il était une fois ... les nombres" J.BOUCHEREAU ; S.LAIGRE.

Tout d'abord, Monsieur BOUCHEREAU prie le groupe de bien vouloir excuser l'absence de Mme LAIGRE, qui souffrante, ne peut assister à cette journée (Il a fallu cette année accomplir une lourde tache).

I - DIFFICULTES DE LA RECHERCHE

En s'attaquant à ce travail il a été rencontré, avec surprise et désagrément, une multitude de difficultés pour les raisons suivantes :

-ouvrages rares dont on ne connaît qu'un exemplaire dans telle bibliothèque étrangère ...

-méconnaissance de la langue (sanscrit, arabe, grec ....)

-accés aux bibliothèques ....

II - DES MOYENS ET DE LA COMPOSITION DU GROUPE DE REHHERCHE

Deux personnes (J.Bouchereau ; S.Laigre) pendant 2 ans, disposant la 1ère année d'une heure d'IREM, la 2nde année de 3 h.

III - COMMENTAIRES DE LA PUBLICATION

L'ouvrage d'une centaine de pages est composé de 4 parties :

-concept du nombre

-histoire du nombre

-dictionnaire des nombres

-symbolique et numérologie

a) <u>Le concept du nombre</u>

Il est souhaité que cette 1ère partie soit développée plus amplement par des spécialistes de la question. En bref, les grands courants philosophiques auxquels on peut se reporter : les intuitionnistes, Frege, Piaget, Quinn etc...

b) Histoire des nombres

Il y a 3 grands types de numération.

- le système additif(la numération égyptienne qui utilise les hiéroglyphes).
- le système mixte (addition et multiplication : par exemple un des systèmes grecs)
- la numération de position qui implique la notion et la présence du zéro "médial" (c'est notre système, c'est le système des nombres - mots indien, c'est Babylone etc...)

Des planches circulent représentant : les systèmes de numération utilisés par les Chinois, les Phéniciens (pères de la numération alphabétique) les Arabes, les Mayas, les Aztèques, deux systèmes utilisés en Mésopotamie.

Des commentaires de ces planches sont donnés ainsi que des illustrations au tableau : exemples de nombres écrits suivant quelques-uns de ces systèmes.

Puis un exposé sur les numérations indiennes.

Dans l'ouvrage, se trouve ensuite une explication, sur le cheminement des symboles utilisés de nos jours, reprenant la thèse de Woepcke (fin du siècle dernier) : les apices de Boëce arrivant par l'Italie et les symboles transportés par les Arabes arrivant par l'Espagne, ont d'une façon évidente la même origine.

c) Dictionnaire des nombres

Il y a ici plus de 60 catégories de nombres répertoriés ! M.GLAYMANN signale encore les nombres ploutons.

d) Symbolique et numérologie

Cette partie a été traitée pour répondre à la demande de collègues. Les auteurs y attachent une importance secondaire. Cela débouche sur l'ésotérisme, les sciences secrètes, la kabbale ....

IV - CONCLUSION ET DEBAT

Il s'agit d'un ouvrage qui se veut simple afin d'être à la portée des non-spécialistes et afin d'avoir un rôle pédagogique. En effet, on peut se poser la question suivante : que penser des exercices de numération tels qu'ils sont pratiqués actuellement dans les classes primaires et de 1er cycle (ex : écrire 5343 en base 8) ? Certes, tout le monde ici pense qu'ils sont condamnables. Ne serait-il pas plus enrichissant et plus naturel de montrer aux élèves la progression des systèmes de numération au cours des âges, en prenant des exemples dans chacun des 3 principaux modes de numération?

Des expériences (Gacé) ont été faites avec succès en utilisant cet enseignement.

De plus, il est souhaité que chacun des chapitres de l'ouvrage soit repris par d'autres, afin d'obtenir une documentation beaucoup plus spécialisée et plus abondante.

Enfin, il s'agit non pas d'une histoire de la science mathématique, mais de l'histoire des nombres et rien de plus.

L'HISTOIRE DES GROUPES ET SES IMPLICATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

Gilles BONNEFOY
(IREM DE LYON)

Compte-rendu de Bernard VICTORI (IREM de LILLE)
Complété d'une bibliographie de G. BONNEFOY.

L'HISTOIRE DES GROUPES ET SES IMPLICATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT

Groupe de travail animé par:
Gilles BONNEFOY (LYON)
Compte-rendu de:
Bernard Vittori (Lille)

Exposé:

Bonnefoy présente d'abord l'expérience faite en Terminale C d'échec des élèves devant le problème de construire un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ alors que les élèves ont devant eux les deux groupes et leurs structures mis en parallèle, et qu'ils connaissent parfaitement la définition d'un isomorphisme.

L'échec semble provenir du fait que les élèves ont l'habitude de vérifier que telle application est un isomorphisme, alors que là il faut construire cet isomorphisme. Cela réclame de savoir manipuler réellement les groupes et non plus seulement d'appliquer un formalisme qui,reste vide de sens pour l'élève. C'est la preuve que de savoir vérifier une série d'axiomes ne signifie pas avoir compris et maîtrisé la notion de groupe.

On saute à un point de vue historique pour voir comment la notion de groupe s'est introduite. On distingue 3 étapes:

-I770-I830 : les groupes apparaissent dans la théorie des équations algébriques.
Lagrange (I770), puis Abbati, Ruffini, puis Cauchy,..., sans parler de groupes, travaillent sur les valeurs prises par une fonction rationnelle de n variables quand on permute les variables et démontrent des résultats importants (théorème de Lagrange, ...).
Galois, son apport est essentiel. Il introduit le "groupe des substitutions" caractéristique d'une équation et le corps (qu'il appelle "quantités rationnelles") associé à cette équation. Par rapport au "formalisme" de Lagrange, qui veut résoudre l'équation générale littérale, Galois s'intéresse aux équations numériques et expose dès les premières pages la dépendance entre réductibilité et choix du corps de base. La "réduction" du groupe l'amène à étudier certains sous-groupes. Et il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble par radicaux quand le degré de l'équation est premier. Beaucoup de notions sur les groupes sont introduites, énoncées en termes d'équations algébriques (ces notions sont pour lui des outils pour ces équations). Par exemple: sous-groupes distingués, conjugués, décomposition en classes à gauche et à droite, primitivité, transitivité et même représentations linéaires (espaces affines sur un corps fini); bien entendu tout ce vocabulaire "moderne" n'est pas employé. Dans le premier Mémoire, Galois travaille "à la manière" de Gauss (construction du polygone régulier à I7 côtés) et utilise peu les groupes, alors que c'est l'outil principal dans ses "Fragments" et son deuxième Mémoire.

-I830-I870 : c'est l'étude des substitutions soit dans l'optique de Galois (Camille Jordan: suites de composition et leur longueur, groupes quotients, groupes résolubles jusqu'à l'ordre IO 000), soit dans d'autres optiques (Cauchy, Bravais en cristallographie qui influence d'ailleurs Jordan, Kirkman,...).

-Après 1870 : il faut attendre Dedekind (école algébrique allemande) qui dans une note donne des axiomes du groupe, au cours d'un travail sur les modules. La théorie des groupes est développée ensuite dans 4 secteurs:

-en géométrie: programme d'Erlangen de Klein (1872)

-en théorie des nombres: groupes abéliens finis.

-représentations conformes et équations différentielles: groupes "discontinus" de Poincaré.

-groupes de Lie (de "dimension" finie ou infinie) pour faire l'analogue de Galois sur les équations différentielles linéaires. C'est là qu'émerge la nécessité de poser comme axiome le fait que tout élément doit avoir un inverse (pour les groupes finis étudiés par Galois, la fermeture pour la loi de composition suffisait). Van Dick, élève de Klein, énoncera la définition moderne de groupe (sauf l'élément neutre). Ensuite il y aura des discussions sur les meilleurs axiomes possibles, par les logiciens. Enfin la théorie des représentations occupe le devant de la scène (Frobenius).

Débat:

L'exposé est interrompu à plusieurs reprises par des discussions dont voici les principaux thèmes abordés:

-Il n'est pas question de présenter les groupes dans le secondaire à partir de la problématique des équations algébriques, mais la leçon qu'on peut tirer de l'histoire, c'est qu'il faut présenter les groupes comme opérant sur un ensemble. On évite ainsi en particulier les faux problèmes, dits "problèmes didactiques" où la principale difficulté est de démontrer que la loi est associative ou de trouver l'élément neutre, alors que dans les problèmes mathématiques réels, c'est toujours évident. On peut par exemple les présenter comme groupes de symétrie d'une figure (cube...).

-Ces problèmes de groupes de symétrie sont difficiles. Mais alors pourquoi,introduire la notion de groupe si tôt, puisqu'elle ne sert à rien avant d'aborder ces problèmes? En particulier l'introduction des groupes par ($\mathbb{R}$, +) ou ($\mathbb{Z}$,+) ou pour les fractions (définies comme opérateurs) ne sert à rien et est même néfaste, elle donne une fausse idée des groupes.

-Ce n'est pas sur des arguments historiques uniquement qu'il faut s'appuyer pour faire un enseignement, mais surtout sur les problèmes pédagogiques propres aux élèves; mais dans le cas des groupes, les arguments historiques et pédagogiques vont dans le même sens, en particulier à propos de l'inutilité de présenter $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ comme des groupes, cela n'apporte rien pour résoudre les problèmes des élèves, et de plus ces exemples sont trop triviaux pour donner une bonne idée de ce qu'est un groupe.

-Les bons exemples d'utilisation des groupes dans l'enseignement semblent être la géométrie (groupes affines, métriques au cours d'un bilan des propriétés géométriques de l l'espace euclidien, groupes finis de symetrie d'une figure) et la combinatoire (groupes de substitutions).

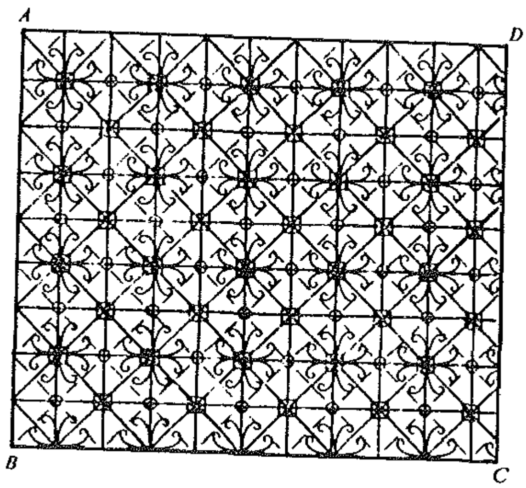
-Il faut chercher des problèmes où la théorie des groupes soit réellement efficace pour résoudre des problèmes mathématiques réels (exemple des symétries du cercle inscrit dans un carré, qui donne grâce à une transformation affine, la théorie des diamètres conjugués de l'ellipse).

-La difficulté mathématique de l'histoire de la théorie des groupes pose le problème de la possibilité pour les enseignants du secondaire dans leur ensemble de participer réellement à ce genre de travail: danger que l'histoire des maths ne devienne une affaire de spécialistes coupés de la plupart des enseignants. Un des participants en particulier est trés déçu par l'inaccessibilité des notions exposées et pense que ce n'est pas comme cela qu'on arrivera à des résultats pratiques pour l'enseignement.

Le problème est reconnu comme important, mais les quelques expériences entreprises montrent qu'il est quand même possible de se mettre à l'histoire et de transformer son enseignement en conséquence(ce qui ne veut pas dire enseigner à ses élèves de l'histoire des maths!).

-Le problème général de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement apparait non pas comme refaire le chemin historique mais mettre le doigt sur les difficultés-clés qui sont apparues dans le développement historique d'une notion, pour pouvoir comprendre les difficultés que vont rencontrer les élèves dans une acquisition réelle (et non formelle) de ces notions. En gros, par rapport au cheminement historique, il ne faut pas prendre des "raccourcis" qui évitent les "détours" historiques devant des obstacles rencontrés, mais au contraire comprendre l'importance de ces obstacles.

-Le développement actuel de l'enseignement: ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, qui pourrait a priori sembler "naturel" apparait comme complètement artificiel quand on s'aperçoit que ces différentes notions ont été forgées dans des domaines complètement différents des mathématiques pour résoudre des problèmes très difficiles (ensembles: analyse de Fourier sur $\mathbb{R}$, groupe: équations algébriques, anneaux: problèmes d'arithmétique, etc...).



On m'a demandé de vérifier ce compte rendu et si possible de fournir une bibliographie. Il y a bien quelques détails de ce compte rendu qui, d'un point de vue "vérité historique", me font "tiquer", mais je préfère le laisser tel quel. Il me paraît fort complet et je dois avouer que je fus, au cours du débat, un "animateur" souvent dépassé et largement "animé" par les discussions des participants. Tant mieux !...

Par contre, je vais essayer de fournir une liste bibliographique que je me permettrai de commenter de façon tout à fait subjective.

Voici la liste en question et les commentaires :

[1] ABEL : Oeuvres complètes 2 vol Christiania (1881)

On ne rencontre pas explicitement la notion de groupe chez Abel, mais elle est profondément sous jacente et à l'oeuvre dans grand nombre de ces travaux, particulièrement sur les équations algébriques. En ce sens, c'est donc un précurseur de Galois.

[2] Abrégé d'Histoire des Mathématiques. Hermann
(sous la direction de Dieudonné)

Doit paraître bientôt

[3] BELL : Dévelopement of Mathematics. Mac graw Hell.1940

Exposé riche mais touffu

[4] BOURBAKI : Eléments d'Histoire des Mathématiques - Hermann
(Edition corrigée et augmentée - 1974)
Indispensable pour bien connaître les conceptions "bourbachiques".

[5] BOYER : A History of mathematics - Wiley 1968
Une histoire des mathématiques accessible pour le "débutant" mais très incomplète à partir de 1850.....

[6] CARTAN Elie. Notice sur les travaux scientifiques - Gauthier Villars

Donne un aperçu de l'utilisation des groupes de Lie par cet éminent géomètre.

[7] CHATELET : Algèbre et Arithmétique moderne - PUF
Surtout pour les notices historiques à la fin des chapitres

[8] COOLIDGE : A History of Geometrical methods - Dover (1963)

[9] CAUCHY : Oeuvres complètes - 26 vol. Gauthier-Villars.

Il ne s'agit pas de lire les 26 volumes de Cauchy !
On trouve des résultats sur les groupes de substitutions dans les volumes 2, 9 et 10 et dans les "exercices d'analyse et de physique mathématiques" (1844).

[10] DEHN : Algebraic Equations : Dover

L'édition est épuisée mais le livre a été diffusé par le groupe inter-irem "histoire et épistémologie des maths".
L'exposé suit une démarche historique et compare les méthodes de Lagrange et de Galois.

[11] DIEUDONNE : Cours de géométrie algébrique Tome 1 PUF

Cet "aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique" est très dense et très difficile à lire, mais il me semble indispensable, si on veut comprendre quelque chose avant de se lancer dans la théorie des schémas !...
Il fournit des renseignements sur la genèse des groupes algébriques dont la théorie générale dépasse mes compétences !...

[12] DUGAC : Richard Dedekind et les fondements des mathématiques - Vrin 1976

Dedekind est le premier mathématicien à définir la notion d'homomorphisme de groupe (et à l'utiliser!) d'une façon "moderne" (voir p 23-24). On trouve à la fin de ce livre précis toute une correspondance de Dedekind malheureusement non traduite.

[13] Encyclopedia Universalis

Voir les articles : groupes, Abel, Cartan, Cauchy
Frobenius, Galois, Lagrange, Gauss
Jordan, Kronecker, Lie, Poincaré
... etc

[14] GALOIS : Ecrits et mémoires mathématiques Gauthier-Villars 1962

Très belle édition par Bourgne et J.P. Azra. L'oeuvre inachevée de l' "inventeur" des groupes est difficile à déchiffrer, mais elle est fondamentale.

[15] GAUSS : Recherches Arithmétiques - A. Blanchard.

Quel beau livre ! Il a eu une profonde influence sur le jeune Galois...

[16] HAWKINS Thomas : The origines of the theory of Group Characters

in Archive for History of Exact Sciences, 7, 1971, 142-70

[17] HERMITE Oeuvres Tome 1 - Gauthier Villars.

P 276-280 Hermite introduit la notion de groupe de monodromie associé à une équation defférentielle linéaire.

[18] JORDAN : Traité des substitutions et des équations algébriques
Gauthier-Villars et Blanchard
: Oeuvres, 4 vols, - Gauthier-Villars

Jordan est le continuateur direct de Galois. On peut lire aussi les "Notes sur les travaux de C. Jordan" par Dieudonné qui présente les oeuvres de Jordan.

[19] KLEIN : Le programme d'Erlangen - Gauthier Villars 1974
Montre comment Klein "unifie" la géométrie en utilisant les groupes.

[20] KLINE Morris : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times - Oxford University Press 1972

Une bible pour qui s'intéresse à l'histoire des Maths. devrait être à mon avis dans toutes les bibliothèques. Cependant l'exposé s'arrête au début du 20ème S. et l'Abrégé d'Histoire ... (voir [2]) devrait combler cette lacune.

[21] KRONECKER. Werke, 5 vol. Leipzig (Teubner)
Kronecker, en ce qui concerne les groupes a décrit la structure des groupes finis commutatifs et il est aussi l'un des continuateurs de Galois (- via Kummer) en fondant la théorie algébrique des nombres. On peut avoir un aperçu de la profondeur des conceptions de Kronecker en lisant l'article qui lui est consacré dans l'Universalis (voir [13]) et dans Serret (voir [33]).

[22] KIERNAN BM : "The development of Galois Theory from Lagrange to Artin" in Archive for History of Exact Sciences, 8, 1971, 40 - 154.

23 LAGRANGE : Oeuvres. - Gauthier, Villars.

Essentiellement le Tome 3 où se trouve les fameux mémoires "sur la résolution algébrique des équations" publié pour la première fois à Berlin en 1770.
Lagrange considère ici le nombre de valeurs prises par une fonction rationnelle des n racines d'une équation algébrique : c'est le départ de la théorie des groupes de substitutions ....

24 LAUTMAN : Essai sur l'unité des mathématiques 10/18

Ce sont des écrits philosophiques. Les notions mathématiques y sont présentés d'une façon très claire et montrent (p 69 et suivantes) comment la théorie de Galois s'applique au corps mais aussi aux revêtements ... etc.

25 LEBESGUE : Notices d'histoire des mathématiques

Institut des mathématiques, Genève 1958

Quand un grand mathématicien se penche sur l'histoire des Maths ....

26 LE LIONNAIS : Les grands courants de la pensée mathématique
Blanchard

Le livre est vivant et très abordable. Lire l'article sur Lie (par E. Cartan) et sur la notion de groupe (A. Lentin).

27 LIE end F. ENGEL, "Théorie des Transformations gruppen",3 vol.
- Leepzig (Treubner)

28 MATHIEU : "Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, sur la manière de les former et sur les substitutions qui les laissent invariables" un Journal Maths. (2) + VI 1861 p 241-323
"Sur les fonctions 5 fois transitives des 24 quantités" un Journal Maths. t XIII 1873 p 25-46

C'est dans ce second article que l'on voit apparaître les fameux groupes simples de Mathieu.

29 MILLER :"History of the theory of Groups to 1900" in
Collected Works vol 1 427-67 University of Illinois Press 1935

[30] PICARD "Traité d'Analyse" 3 vol.

Picard a travaillé sur les groupes discontinus dans le prolongement de l'oeuvre de Poincaré (voir [31]) et dans son traité d'analyse il fait le parallèle entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations différentielles linéaires.

[31] POINCARE "Oeuvres" 11 vol. Gauthier Villars.

Seul , nous intéresse, dans cette oeuvre immense, les mémoires sur les fonctions automorphes (1882-1884) où Poincaré défini les groupes modulaires, fuschiens ... etc comme groupes discontinus (Oeuvre 2 p 108-168) et p 169-175) et les mémoires sur la topologie algébrique (Oeuvre 6 p 193-288 et p 338-70)

[32] RIEMANN: Oeuvres mathématiques - Blanchard.

L'oeuvre deRiemann- très dense : un chef d'oeuvre de rédaction concise et claire ! - est capitale dans l'histoire du 19ème S. Riemannparle et utilise peu les groupes sauf dans un mémoire "sur deux théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires a coefficients algébriques" (1857).

[33] SERRET : Cours d'Algèbre supérieure 2 vol. Gauthier Villars

Le tome 2 décrit la théorie des substitutions et la théorie de Galois. Celà donne un aperçu de cette théorie vers les années 1855. Ce beau livre didactique (Serret ainsi que Liouville fera ainsi connaître Galois) peut nous apprendre encore beaucoup ...

[34] TATON : "Histoire générale des Sciences" 3 vol. PUF

Cet ouvrage collectif, sous la direction de Taton, donne un panorama assez complet dans l'Histoire de toutes les Sciences. Les références bibliographiques sont nombreuses et soignées.

[35] VUILLEMIN : "La philosophie de l'Algèbre" PUF

C'est une recherche philosophique fort intéressante sur "quelques concepts et méthodes de l'Algèbre moderne"

Les "méthodes" de Gauss, Lagrange, Galois, Klein et Lie sont comparées et discutées d'un point de vue philosophique.

36 WUSSING : Die Génésis des alstraken gruppenbegriffes

Ce texte a été diffusé par le groupe inter irem : Histoire et Epistémologie des mathématiques.

En guise de conclusion : ne vous effrayez pas devant la longueur de la liste ! Très honnêtement, je suis loin d'avoir lu cette somme, par exemple l'oeuvre de Lie, mais j'espère que cette liste (incomplète) éveillera des curiosités ...

D E L A V I T E S S E D E G A L I L E E
A U X F L U X I O N S D E N E W T O N

Mathématiques et réalités physiques au XVII e siècle

Exposé de François de GANDT (PARIS)

Table des matières:

§ 1. Dérivée et vitesse.

Le 17e siècle a vu naître en même temps le calcul infinitésimal et la science du mouvement, à peu près entre 1610 et 1690. Les deux directions de recherche sont inséparables, elles font partie d'un unique effort global pour élucider les phénomènes du mouvement. Ce sont souvent les mêmes hommes qui enrichissaient à la fois la réflexion philosophique, les procédés mathématiques et l'appréhension physique de la nature.

Je voudrais montrer dans le détail cette imbrication, et récuser une manière trop naïve de voir les choses, qui serait la suivante: le physicien, qui s'occupe des phénomènes naturels de mouvement, avait bien de la peine à étudier et calculer des vitesses instantanées, et voilà qu'un beau jour, un spécialiste d'une autre discipline, le mathématicien, lui a fourni les outils infinitésimaux, principalement la notion de dérivée. En fait cette notion est née dans un contexte d'étude du mouvement; chez plusieurs auteurs, la dérivée n'est même rien d'autre que la vitesse elle-même.

On pourrait dire, en forçant à peine: ce n'est pas la dérivée qui a permis la définition de la vitesse, mais bien le contraire. Dans un grand nombre de textes, la vitesse instantanée est une notion considérée comme admise, et qui sert de base aux raisonnements infinitésimaux. L'exemple de Newton est très net: son calcul des "fluxions" est une comparaison entre des vitesses de variation.

Mon propos ici sera de suivre ce fil continu qui mène de la vitesse "physique" étudiée par Galilée aux fluxions "mathématiques" de Newton. Je choisirai quelques étapes décisives dans le raffinement progressif de la notion de vitesse, et ce sont aussi tout naturellement des étapes décisives dans la naissance du calcul infinitésimal. Les hommes du 17e siècle ont manipulé pendant assez longtemps des mouvements accélérés et des vitesses, avant de pouvoir préciser ce qu'ils entendaient par là. (Il est vrai que nos "pédaguogues" d'aujourd'hui, surtout en mathématiques, sont persuadés qu'il faut définir avant de manipuler...)

Tous les créateurs de l'analyse infinitésimale ne peuvent pas être rattachés à ce courant, à cette inspiration cinématique. Ni Fermat ni Leibniz par exemple ne raisonnent de cette manière, leur contribution n'aura donc pas sa place ici.

De plus certains auteurs ont refusé cette mathématique liée au mouvement. Descartes est le plus grand de ceux-là, sa Géométrie représente la réaction d'une mathématique extrêmement stricte, trop étroite en fait pour embrasser le développement des notions et des problèmes à cette époque, mais féconde justement en raison des contraintes qu'elle a imposées. J'aurai donc à situer la tentative de Descartes, comme une digression, un coup d'arrêt dans la progression inévitable des idées et des procédés.

Le parti-pris qui a guidé ma présentation, et qui demanderait à être précisée et vérifié, pourrait se formuler ainsi: dans la vie culturelle du 17e siècle, la question du mouvement a joué un rôle primordial, et notamment comme introduction naturelle, intuitive, aux problèmes et aux découvertes du calcul infinitésimal; bien sûr il fallait résoudre aussi les difficultés logiques de l'infiniment petit, des indivisibles, etc...Mais les spéculations logiques n'ont pas été le moteur de cette histoire: l'étude des mouvements et des vitesses constituait un motif autrement puissant, parce qu'elle fournissait un support physique et imaginatif au raisonnement.

I - LA VITESSE DANS LES DISCORSI DE GALILEE.

§ 2. Une notion intuitive de la vitesse.

Les recherches de Galilée sur la chute des corps fourniront le point de départ de notre enquête. Dans son dernier livre, les Discours sur deux Sciences nouvelles, (1638, cité en abrégé Discorsi), Galilée donne la loi du mouvement uniformément accéléré (l'espace parcouru est proportionnel au carré du temps), et prouve que les projectiles doivent avoir une trajectoire parabolique.

Pourtant l'idée qu'il se fait de la vitesse est encore assez vague et intuitive. Nulle part il n'explique précisément ce qu'il appelle "velocitas": aucune définition de la vitesse instantanée, ni même de la vitesse uniforme ou moyenne. Dans le déroulement relativement rigoureux de son raisonnement, la notion de vitesse intervient tout à coup, sans préparation ni justification, au beau milieu d'un axiome:

> "Axiome III: Pour un même intervalle de temps, l'espace franchi avec une vitesse plus grande est supérieur à l'espace franchi avec une vitesse moins grande"
>
> (Discorsi, trad. Clavelin, p. 126)

La vitesse est simplement une certaine qualité des corps, susceptible de croître et de diminuer, on pourra éventuellement tenter de mettre en rapport des vitesses différentes, en tous cas ce n'est pas une quantité à proprement parler. Ainsi, pour affirmer que la vitesse croît proportionnellement au temps, Galilée emploie une formule qui marque la différence de statut entre vitesse et temps:

> "l'intensification de la vitesse a lieu conformément à l'extensification du temps" (intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem, Discorsi, trad. p. 131).

Alors que le temps ou la longueur sont des "extensions", des grandeurs additives, la vitesse est une grandeur d'un autre genre, ce qu'on appelle une grandeur "intensive": impossible de la mesurer directement, comme on mesurerait une longueur, impossible de la calculer en ajoutant des "parties de vitesse" . Galilée ne parle d'ailleurs pas de "quantité de vitesse", mais uniquement de "degrés de vitesse".

En fait il faudra attendre assez longtemps une définition proprement dite, en termes modernes: peut-être la première se trouve-t-elle dans les communications de Varignon à l'Académie des Sciences en 1700. Même chez Newton, je n'ai trouvé jusqu'ici que la "définition" suivante, dans un manuscrit de jeunesse:

"velocitas est motus intensio", "la vitesse est l'intensité (ou l'intensification) du mouvement" (Unpublished Scient. Papers, ed. Hall & Hall, p. 115)

On peut supposer en outre que les hommes de cette époque n'éprouvaient pas le besoin de définir pareille notion.

§ 3. Comment comparer des vitesses ?

Pour faire comprendre ce qu'est un degré de vitesse instantanée, Galilée évoque la distance que le mobile parcourrait en un certain temps, si sa vitesse ne changeait plus, si le degré de vitesse qu'il a acquis à ce moment restait le même (p. 13[illegible]). Cette distance parcourue par un mouvement uniforme donne une évaluation, un critère de comparaison, surtout elle permet de concevoir ou de figurer la notion dont il s'agit. Mais elle n'est bien sûr jamais constatable directement.

Galilée utilise un autre moyen d'appréciation de la vitesse, pour répondre à une objection qui lui est faite. Voici l'enchaînement des idées (p. 13[illegible]-133): admettons d'une part que la vitesse à chaque instant est mesurée par la distance que parcourrait le mobile si son mouvement était uniforme; d'autre part Galilée affirme que le corps qui tombe passe par tous les degrés de vitesse, de plus en plus lents si l'on remonte très près du début de la chute;

cela signifie alors que le mobile, vers le début de sa chute, possède une vitesse qui, en un millier d'années, ne lui ferait pas parcourir la largeur d'une main, ou même moins encore. Comment imaginer une chose pareille ? Galilée répond en proposant une autre manière, plus directe et plus sensible, de mesurer la vitesse : si l'on considère qu'un maillet agit d'autant plus fortement sur un piquet que la vitesse du maillet est plus grande, on admettra que le même maillet peut avoir un~~e~~ ~~[illegible]~~ effet et donc une vitesse aussi petite que l'on veut, à condition de le lâcher d'une hauteur très minime. La lenteur de son mouvement se constatera par l'enfoncement quasi-nul du piquet. Galilée rend ainsi concevable l'idée d'une vitesse très faible, et fait admettre sa thèse que le mobile passe par tous les degrés de vitesse. Dans ce cas, la vitesse est mesurée par l'effet produit:

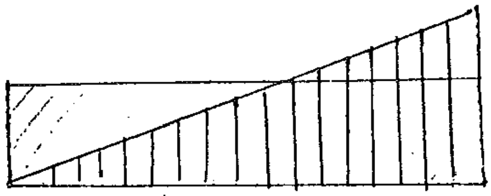
> "de combien est la vitesse d'un corps qui tombe, nous pourrons le conjecturer sans erreur par la qualité et la quantité du choc" (p. 1[illegible], trad. retouchée, texte: "Quantà sia la velocità d'un grave cadente, lo potremo noi senza errore conietturare dalla qualità e quantita della percossa").

Pour atteindre une réalité aussi fuyante que la vitesse, plusieurs chemins valent mieux qu'un.

§ 4. Le théorème du degré moyen.

Dans toute son étude de la chute des corps, Galilée ne manipule pas directement des vitesses variables, il utilise un artifice pour ramener les mouvements uniformément accélérés à des mouvements uniformes. Cet artifice, c'est le théorème du degré moyen, découvert au 14e siècle (par les philosophes de Merton College à Oxford et Nicole Oresme à Paris): une grandeur intensive uniformément variée, entre deux degrés extrêmes, produit le même "résultat" global qu'une grandeur intensive uniforme, dont le degré constant serait égal au degré moyen de la précédente.

Les médiévaux concevaient cette équivalence pour toutes sortes de variations: une flamme dont l'intensité varierait uniformément entre deux extrêmes produirait, en un temps donné, les mêmes effets qu'une flamme d'intensité moyenne constante. Nicole Oresme représente graphiquement ce résultat par l'égalité de deux surfaces:



Les applications de ce théorème étaient très variées, parfois à la limite de l'absurde. Galilée pour sa part s'en tient au mouvement accéléré: un mobile qui part du repos et accélère uniformément parcourra le même espace, en un temps donné, qu'un autre mobile en mouvement uniforme, et de vitesse égale à la moitié de la vitesse finale du mobile accéléré. La démonstration de Galilée est assez scabreuse: il considère "toutes" les vitesses successivement possédées par le mobile, représentées par des segments croissants, et étudie alors la surface constituée par la totalité de ces segments (p. 139-140). Grâce à ce théorème, l'étude d'un mouvement accéléré est ramenée au cas plus simple, celui du mouvement uniforme.

§ 5 Une confusion de Galilée.

En un passage pourtant, Galilée raisonne directement sur des vitesses variant à chaque instant, et il s'embrouille horriblement, en appliquant à la vitesse instantanée ce qui ne vaut que pour la vitesse uniforme. Il cherche à démontrer que la vitesse ne peut pas être proportionnelle à l'espace parcouru, ainsi qu'il l'avait cru lui-même autrefois (p. 136). Le raisonnement me semble être le suivant: - si les vitesses sont d'autant plus grandes que le trajet est ~~est~~ plus long, alors les trajets seront tous effectués dans le même temps (mais cela n'est vrai que pour des vitesses uniformes, chacune sur un segment distinct)

- or ici les vitesses seraient d'autant plus grandes que l'on est loin du point de départ (cette fois il s'agit de vitesses instantanées, en différents points d'une même droite);

- donc les différents points du parcours seraient tous atteints en même temps, ce qui est impossible.

La prétendue réfutation de Galilée repose sur une confusion entre vitesse uniforme et vitesse instantanée.

Certains historiens ont pris la défense de Galilée Fermat contre Gassendi; Peirce contre Mach; Bernard Cohen il y a 20 ans). Le raisonnement de Galilée, pour ceux qui le jugent acceptable, reviendrait à dire que l'équation $\frac{ds}{dt} = k \cdot s$ n'a pas de solution non nulle, si l'on a posé, pour $t=0$, $s=0$. Une chose est sûre, Galilée écrit des formules impossible à admettre dans notre perspective actuelle: il parle de "la vitesse avec laquelle le mobile a traversé la distance de quatre coudées", comme si l'on pouvait parler de la vitesse sur une portion finie du parcours, après avoir posé que la vitesse varie en chaque point. Peut-être a-t-il cru pouvoir appliquer son théorème du degré moyen dans le cas où la vitesse varie en fonction de l'espace.

II LES COURBES MECANIQUES.

§ 6 . L'héritage de l'Antiquité.

Notre univers technique nous a habitués à raisonner constamment en termes de vitesse intantanée, aussi sommes nous surpris de constater que Galilée est aussi mal à l'aise. Au 17e siècle, il s'agit vraiment d'objets nouveaux, que les "philosophes de la nature" doivent apprendre à manipuler, et l'on pourrait considérer que l'intervalle de temps séparant Galilée de Newton correspond à peu près à cet apprentissage.

L'héritage scientifique de l'Antiquité ne comportait rien de semblable, à une exception près, comme on le verra. La mathématique grecque ne s'occupait que d'objets immobiles, contemplés dans une sorte d'univers des idées. Chez Euclide il n'y a pas de mouvement, à part l'opération rituelle parfaitement fictive qui consiste à amener deux figures en coïncidence. On ne dit même jamais "Construisons telle chose...", mais "Soit construite..." D'une manière générale la science antique n'est pas une science du mouvement. Pour Platon ou Aristote, il ne peut y avoir une science authentique qui porterait sur les objets changeants d'ici-bas.

Pourtant la tradition mathématique classique, ou du moins un courent particulier et marginal de cette tradition, a fourni à Galilée de quoi alimenter ses méthodes de raisonnement. Il l'explique lui-même, au début de son exposé sur le mouvement accéléré, en termes assez nets, mais peu compréhensibles pour un lecteur d'aujourd'hui:

> "et il convient en premier lieu de trouver et de développer une définition qui convienne exactement au mouvement accéléré qu'utilise la nature. Rien en effet ne s'opposerait à ce que

l'on invente arbitrairement une certaine sorte de mouvement [latio = transport], et qu'ensuite on étudie les propriétés qui découlent d'un tel mouvement (ainsi ceux qui ont imaginé les hélices ou les conchoïdes comme des lignes engendrées par certains mouvements, quoique la nature n'en fasse pas usage, ont fait merveille en démontrant les caractéristiques de ces lignes à partir de leur définition posée initialement) pourtant, puisque la nature se sert d'une certaine sorte d'accélération pour la descente des corps lourds, ce sont les propriétés de ces corps que nous avons décidé d'étudier"... (Discorsi p. 130, trad. modifiée)

Précisons d'abord qu'à l'époque le mot latin hělix désigne la spirale, et même la spirale d'Archimède, la seule connue. Quel lien peut-il y avoir entre l'étude de la chute et celle des spirales et des conchoïdes ? Galilée semble dire: parmi toutes les compositions de mouvements que les mathématiciens peuvent imaginer, je restreindrai mon intérêt à celle qui convient pour décrire la chute des corps (ou plus exactement: à celle que la nature utilise réellement pour faire tomber les corps). On se demande alors : où diable Galilée voit-il une composition de mouvements dans la descente d'un corps pesant ? Cette question-là est sans réponse. Mais on peut y substituer cette autre: pourquoi Galilée replace-t-il ses recherches dans ce contexte ?

§ 7 . La spirale d'Archimède.

Pour comprendre les références qu'invoque Galilée, il est bon de connaître la définition de la spirale par son créateur, Archimède. La courbe est engendrée par un double mouvement, rotation d'une demi-droite autour de son origine, et translation d'un point sur cette demi-droite à partir de l'origine. Voici la traduction mot à mot du texte d'Archimède:

"lorsqu'une droite tourne également-vite [isotacheôs] dans un plan, une de ses extrêmités demeurant fixe, et revient à nouveau d'où elle est partie, et que, la droite étant dans sa révolution, un point est transporté également-vite sur la droite à partir de l'extrêmité immobile, alors ce point décrira [grapsei] une spirale dans le plan ..."

(Des Spirales, éd Belles-Lettres, p.11 et31)

Cette définition présente plusieurs aspects originaux: d'abord il est question de mouvementdans un texte mathématique, ce qui est exceptionnel pour l'Antiquité classique. La courbe n'est pas considérée comme existant de toute éternité, et découverte par l'oeil mental du mathématicien contemplatif, elle est au contraire engendrée par le point qui la décrit en se déplaçant. Archimède fait intervenir la vitesse du mouvement, avec le mot "également-vite".

Cette notion de vitesse égale est précisée dans la première proposition du même livre Des Spirales , où Archimède démontre la propriété fondamentale du mouvement rectiligne uniforme:

"Si un point parcourt une ligne en étant porté également-vite par rapport à lui-même, et qu'on prend sur cette ligne deux segments, ceux-ci auront le même rapport l'un à l'autre que les temps dans lesquels le point parcourt ces segments."

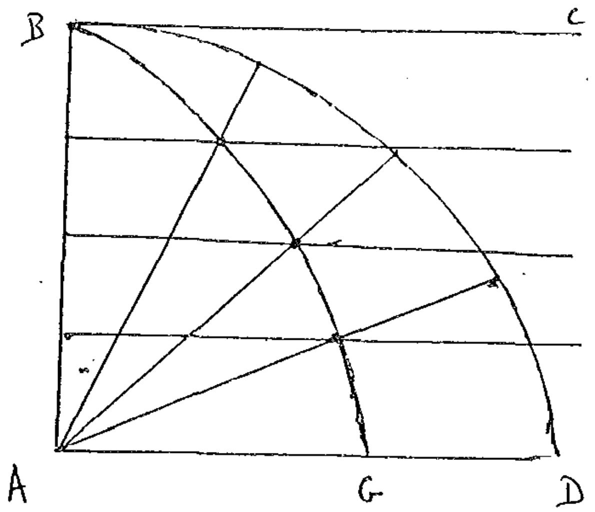
(ib. p. 13)

Ce théorème servira ensuite à démontrer certaines propriétés de la spirale (notamment les propositions 12, 14 et 15 qui font intervenir le temps de parcours). Ce traité d'Archimède constitue ainsi un des rares points d'encrage pour la cinématique de l'époque moderne. Galilée reprend presque textuellement cette première proposition des Spirales, avec la démonstration correspondante (par les proportions), au début de la troisième journée des Discorsi (p. 126-127), comme base de son étude sur le mouvement uniforme.

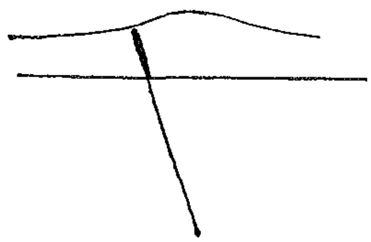
§ 8 . Autres courbes mécaniques.

Cette manière d'engendrer des lignes par la composition de mouvements n'est pas propre aux spirales. Les Anciens connaissaient des lignes analogues, utiles pour la solution de certains problèmes désespérés (quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle); on les appelait "courbes mécaniques". Les problèmes résolus par ces courbes ne l'étaient que d'une manière approximative et imparfaite. En somme ce n'était pas une solution véritable, comme celle que l'on aurait souhaité obtenir avec la régle et le compas (problèmes plans) ou à la rigueur en employant des coniques (problèmes solides).

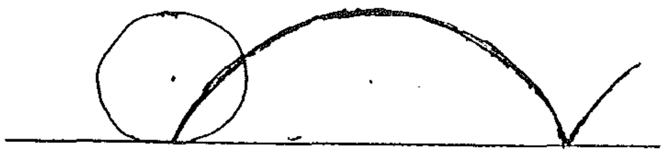
La plus célèbre de ces courbes mécaniques est la quadratrice, destinée à carrer le cercle, et permettant ausi de couper un angle en autant de parties que l'on veut. Elle se décrit ainsi (Pappus IV, in Heath, Greek Maths I, 226): pendant que le rayon du cercle se meut uniformément, balayant le quart de cercle de AB vers AD, la ligne horizontale BC descend uniformément vers AD, jusqu'à coïncider avec elle. Les deux mouvements doivent se faire dans le même temps, et les intersections du rayon et de la ligne sont les points de la courbe. § On démontre alors que AB est à AG comme 1 à 2π.



La conchoïde appartient au même groupe, elle servait à la trisection de l'angle. Cette fois le temps n'intervient plus directement, mais la construction est plus nettement "mécanique" encore: à partir d'un"pôle", on fait tourner une droite portant un segment coulissant de longueur constante ("diastéma","écart"), ce segment reposant toujours sur une droite fixe ("kanon") où il glisse.



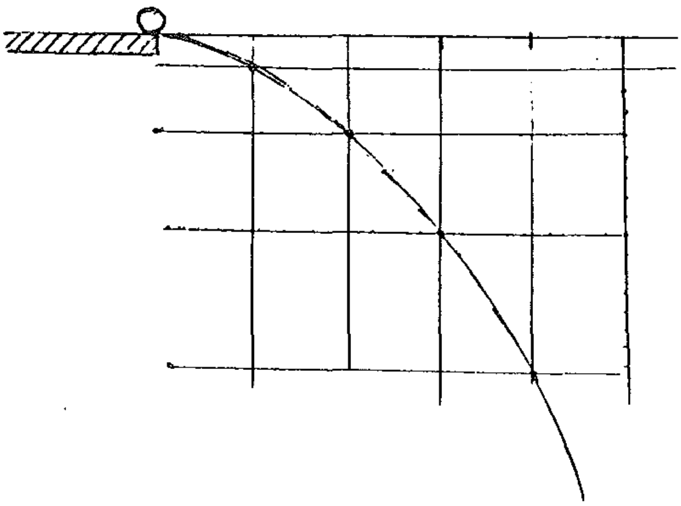
Le 17e siècle va s'intéresser avec passion à ces courbes. L'intérêt s'était déjà réveillé avec Viète (voir les propositions sur la quadratrice, éd 1646 p; 365-367). Le stock des courbes mécaniques va même s'enrichir considérablement: Galilée, puis Mersenne inventent la cycloïde (qu'on appelle aussi roulette ou trochoïde), la courbe que décrit un point d'une circonférence qui roulerait sans glisser sur une droite. Pascal imagine la courbe nommée limaçon, Roberval décrit la première sinusoïdale (la "compagne de la roulette") au cours de son étude de la cycloïde.



Même les coniques sont étudiées à l'aide des mouvements qui peuvent les engendrer. Les travaux les plus complets à ce sujet sont ceux des hollandais van Schooten (1646) et De Witt (1661) qui nomment ce procédé la "description organique des courbes".

§ 9 . Le mouvement des projectiles

Ce mode de raisonnement est illustré à merveille par la démonstration de Galilée sur la trajectoire parabolique des projectiles (Discorsi, quatrième journée, p. 203-209) : supposons qu'un corps pesant quitte son support selon un mouvement horizontal; il sera alors soumis à la pesanteur, et animé par conséquent d'un deuxième mouvement, cette fois vertical et accéléré. Pendant que le mobile est mû uniformément vers la droite et parcourt une longueur horizontale proportionnelle au temps, il parcourt vers le bas une distance proportionnelle au carré du temps (Théorème du mouvement accéléré). La parabole est le lieu des points qui satisfont les deux équations à la fois:
$x = k.t$ et $y = K.t^2$, elle est définie en fonction du temps pris comme paramètre commun (ce jargon et ces équations sont bien sûr absents du texte de Galilée).



Cette thèse ainsi"démontrée" n'est pas une proposition de physique expérimentale : il ne s'agit pas de constater par des mesures et des approximations que la trajectoire des projectiles a telle ou telle allure . Les discussions continueront d'ailleurs assez longtemps après Galilée, pour savoir dans quelle mesure les projectiles physiques s'écartent de cette trajectoire.

Galilée compose deux mouvements abstraits, parfaitement définis et réglés, et montre que le résultat vérifie les propriétés mathématiques de la parabole. Ce n'est pourtant pas non plus de la pure mathématique : la démonstration de Galilée repose sur certaines thèses physiques, par exemple sur l'idée que des mouvements différents peuvent se composer dans un même mobile sans se détruire ni se gêner (on peut considérer ce principe comme un corollaire du principe d'inertée).

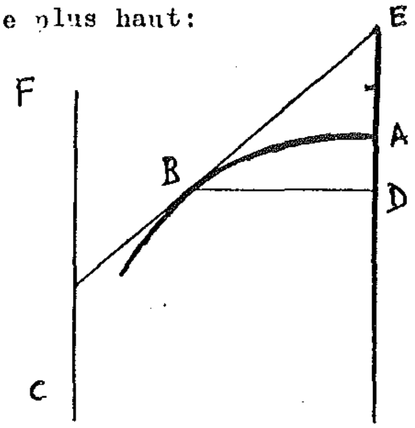
§ 10 . La cinématique de Torriccelli.

Cette géométrie du mouvement occupe la ligne de crête entre le versant mathématique et le versant physique. Galilée a emprunté aux mathématiques des Anciens les théorèmes sur la parabole, pour les appliquer aux mouvements des projectiles. Ce processus de fécondation réciproque continue avec les disciples de Galilée: Torriccelli imagine des projectiles nouveaux, inconnus et impossibles, simplement pour décrire cinématiquement des courbes plus complexes:

> "Soit un mobile, poussé horizontalement sur un plan 'F, et venant à tomber, de telle façon qu'il possède alors deux impetus (= deux élans, deux mouvements),
> -l'un uniforme et horizontal en direction de FC
> - l'autre descendant et accéléré en raison quadratique (= la vitesse croît comme le carré du temps);
> je dis qu'il se produira ainsi une parabole cubique."
>
> (Opere 1919, I, II, p. 310)

L'échange se fait cette fois dans l'autre sens: non plus de la géométrie vers la physique, mais à l'inverse. Torriccelli crée des êtres mathématiques nouveaux simplement en généralisant les résultats de Galilée sur les projectiles.

La considération du mouvement n'est nullement un simple auxiliaire imaginatif, un échafaudage très vite inutile: c'est en supposant que sa courbe est réellement décrite par un projectile physique, que Torriccelli trouve un moyen élégant et rapide pour déterminer les tangentes. Voici comment il procède dans le cas de la cubique décrite plus haut:



"Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente.

En effet, le point mobile B qui décrit la parabole possède deux impetus lorsqu'il est dans la position B:
-un impetus horizontal dirigé selon la tangente AF
-un impetus perpendiculaire selon le diamètre AD;
et on cherche le rapport de ces deux impetus de la façon suivante: l'impetus horizontal, pendant le temps de la chute, a parcouru l'espace DB, et de son côté l'impetus perpendiculaire, selon ce qui a été dit, parcourrait, pendant la durée de la chute, s'il se conservait toujours égal, un espace triple de la chute AD; par conséquent le mouvement ou la direction du point B, qui ~~sont~~ est composé de deux vitesses qui sont l'une à l'autre comme BD à BE, se fera le long de la ligne BE." (Opere, I, II, p. 311)

Lorsqu'il expose son procédé pour tracer les tangentes, Torricelli suppose admises certaines propriétés physiques du mouvement: il faut sous entendre que la tangente est la direction instantanée du mouvement du point mobile, et que cette direction peut être déterminée en construisant le parallélogramme des vitesses.

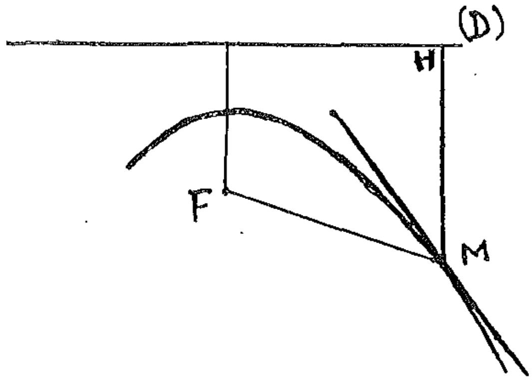
§ 11 . Roberval et les tangentes.

Durant ces années 1640, le français Roberval enseigne une méthode identique pour tracer les tangentes. L'ouvrage imprimé (en 1693 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences) porte le titre: Observations sur la composition des mouvements et le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes. L'exposé est plus méthodique et plus détaillé que celui de Torricelli, il comporte des justifications explicites:

> "Axiome ou principe d'invention:
>
> La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là" (p. 24)
>
> "Règle générale:
>
> Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe."(p.25)

Roberval applique cette méthode à 13 courbes différentes (coniques, diverses sortes de conchoïdes, limaçon, spirale, quadratrice, cissoïde, roulette, compagne de la roulette). Je m'en tiendrai à deux exemples, la parabole et la spirale.

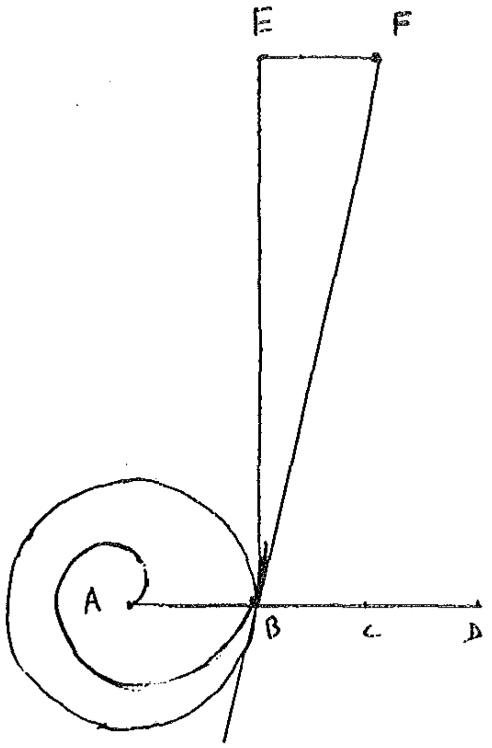
Pour étudier la parabole, Roberval a recours à la définition par foyer et directrice : tout point est à distance égale du point F et de la droite (D).



Le point M a donc deux mouvements, celui de la droite HM et celui de FM. Et lorsque M se déplace, HM et FM s'accroissent également. On peut alors considérer "que le mouvement du point décrivant la parabole est composé de deux mouvements droits égaux" (p. 26). Par conséquent la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$ est aussi la tangente en M.

Une justification complète du procédé dépasse les moyens mathématiques de Roberval. De quel droit avoir négligé la rotation de FM, et le déplacement latéral de HM ? Roberval déclare simplement qu'il était "plus facile" de procéder comme il l'a fait (p. 27).

La tangente à la spirale est déterminée d'une manière analogue, sans détour ni calcul: le point qui décrit la spirale se déplace uniformément sur la demi-droite et circulairement avec la révolution de la demi-droite. Selon le mouvement de translation uniforme, il parcourt à chaque tour une distance égale, qu'on peut prendre pour mesure de sa vitesse rectiligne. Comment maintenant mesurer son mouvement circulaire, puisqu'il se mouvra d'autant plus vite qu'il est plus loin de l'origine ? Il suffit de considérer le cercle correspondant à la position du point;



"en B le mouvement est tel que s'il en eût toujours eu un circulaire égal depuis A jusqu'en B, il aurait décrit une circonférence dont AB est le rayon pendant le temps d'une révolution" (p. 52). Donc, si le segment constant AB sert à mesurer le déplacement rectiligne, la circonférence centrée en A et de rayon AB mesurera le déplacement circulaire caractéristique du point proposé. Pour avoir la tangente, il suffit alors de construire le parallélogramme des vitesses: on trace en B un segment BE perpendiculaire de longueur égale à la circonférence, et au bout de ce segment, en E, un segment EF égal au segment AB et parallèle à la demi-droite AD. BF sera la tangente cherchée.

Le procédé suppose qu'on sache tracer un segment rectiligne égal à une circonférence. Précisément Archimède utilisait la spirale dans l'autre sens: la tangente à la spirale lui permettait de calculer la longueur de la circonférence (<u>Des Spirales</u>, prop. 18). Le problème est alors: comment Archimède détermine-t-il la tangente ? (Certains pensent qu'il aurait utilisé lui aussi un procédé d'invention cinématique).

Il faut un certain doigté pour appliquer la méthode de Roberval, comme on l'a vu pour la parabole. Le cas de la quadratrice est assez embrouillé, par exemple: il ne faut pas choisir n'importe quels mouvements générateurs. Ceux qui voudront utiliser ces techniques sans discernement, sans un certain flair, risquent des erreurs. Cela est même arrivé à un jeune homme qui ne manquait pourtant pas de flair, Isaac Newton (voir Math. Papers of I. Newton, p. 373-380, un manuscrit de 1665).

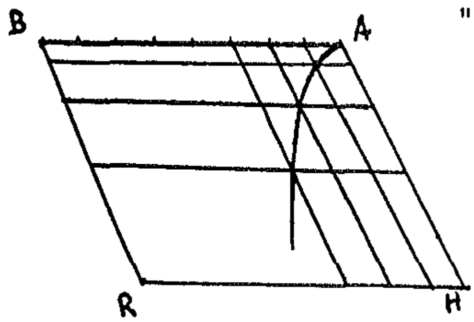
III LA PURETE CARTESIENNE.

§ 12 . Une courbe mécanique chez Descartes.

La Géométrie de Descartes est en rupture complète avec le courant que je viens d'évoquer. Descartes rejette les courbes mécaniques, et toute la géométrie purement cinématique, au nom d'une conception rigoureuse des mathématiques.

Il faut d'abord reconnaître qu'il savait s'en servir s'il le fallait, et avec beaucoup d'adresse, comme en témoigne sa solution au problème posé par Florimond de Beaune (lettre du 20 février 1639). Il s'agit de déterminer une courbe en connaissant certaines conditions que doit satisfaire la tangente (en termes d'aujourd'hui, l'équation est $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}$, c'est historiquement la première étude d'une équation différentielle).

Descartes montre d'abord comment on peut encadrer les points de la courbe cherchée entre des intersections successives de tangentes, ce qui rend possible une approximation indéfinie par des séries. Puis Descartes indique comment on pourrait effectuer une description géométrique de la courbe en utilisant deux déplacements, le premier uniforme, le second à vitesse variable:



"pour décrire exactement cette courbe AVX, il faut mouvoir deux lignes droites en telle sorte que, l'une étant appliquée sur la ligne AH et l'autre sur AB, elles commencent à se mouvoir en même temps également vite, AH vers BR et AB vers RH; et que celle qui se meut de AH vers BR retienne toujours la même vitesse, mais que l'autre, qui descend de BA parallèle à RH, augmente la sienne en telle proportion que, si elle a un degré de vitesse en commençant, elle en ait 8/7 lorsque la première a parcouru la huitième partie de la ligne AB, et 3/6 ou 4/3 lorsque la première a parcouru le quart de AB [...] et ainsi à l'infini; et l'intersection de ces deux lignes droites décrira exactement la courbe AVX, qui aura les propriétés demandées. Mais je crois que ces deux mouvements sont tellement incommensurables, qu'ils ne peuvent être réglés exactement l'un par l'autre; et ainsi que cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejetées de ma Géométrie, comme n'étant que mécanique;..."

§ 13 . Quelles sortes de mouvements sont admises dans La Géométrie.

En effet, au début du livre II de La Géométrie, Descartes avait rejeté hors de la géométrie (c'est à dire des mathématiques proprement dites), "la spirale, la quadratrice et autres semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques" (édition de 1637, p. 317).

Pourtant il n'exclut pas le mouvement lui-même, puisqu'il déclare:

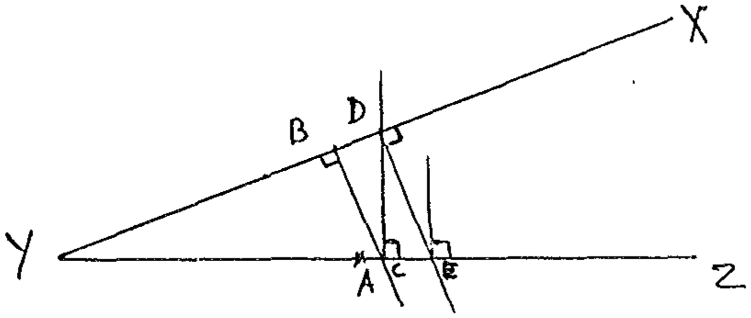
"il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres". (p. 316)

Une courbe "géométrique" peut donc, tout autant qu'une courbe "mécanique", être décrite par une combinaison de mouvements. La seule différence est que dans le premier cas les mouvments sont en relation directe les uns avec les autres, ils se règlent mutuellement, et cela permet une "mesure". Les mouvements qui engendrent une courbe "mécanique" sont au contraire "incommensurables" entre eux:

"considérant la géométrie comme une science qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer

> être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent; car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure."

L'exemple que donne Descartes, deux pages plus loin (p. 318), permet de comprendre ce qu'il entend par des "mouvements qui s'entresuivent", se règlent l'un l'autre de proche en proche, et rendent possible la détermination d'une mesure. On imagine un instrument idéal, une sorte de compas articulé dont les branches YZ et YX peuvent s'écarter à volonté. Les distances YA et YB sont égales et constantes. En B est fixée à angle droit une équerre de longueur indéfinie, qui vient buter contre le point mobile C et le faire glisser vers Z lorsqu'on ouvre le compas. Le point C en coulissant sur YZ entraîne une autre équerre, qui à son tour agit sur le point D et le fait coulisser vers X, etc...



Chaque mouvement dépend du précédent, tous sont rattachés de proche en proche au mouvement d'ouverture du compas. Cette dépendance permet une "mesure" des mouvements les uns par les autres. Considérons par exemple la courbe engendrée par les positions successives du point D. On a toujours, par les similitudes des triangles, $\frac{YD}{YC} = \frac{YC}{YB}$; d'autre part YB est constant (c'est si l'on veut l'unité de mesure). Le point D satisfait donc à l'équation $YD = YB.YC^2$, ou $y = k.x^2$. (On pourrait facilement obtenir l'équation en repère dit cartésien, avec ED au lieu de YD)

Dans le cas d'une courbe purement mécanique au contraire, les mouvements ne sont pas réglés l'un par l'autre, il est impossible de mesurer la position d'un point mobile par son rapport au déplacement d'un autre ~~p~~point. Pour décrire une quadratrice par exemple, on emploie deux mouvements entièrement indépendants; les lignes mobiles ne sont assujetties qu'à une condition commune: parcourir une certaine distance dans le même intervalle de temps. En termes modernes, il est impossible d'éliminer le paramètre commun aux deux déplacements, pour essayer d'obtenir une équation algébrique. Le temps est ainsi le seul lien des deux mouvements.

§ 14 . Le projet cartésien d'un classement des problèmes.

L'intérêt de cette distinction apparaît mieux encore, si l'on se réfère au projet d'ensemble de Descartes. Son ambition n'est pas d'enrichir les mathématiques par des courbes ou des théorèmes nouveaux (il le fait d'ailleurs aussi, mais en passant). Il désire avant tout résoudre méthodiquement les problèmes, tous les problèmes que la science peut ~~p~~offrir, et cela exige d'abord un classement, une mise en ordre, une hiérarchisation des problèmes eux-mêmes. Le texte le plus clair remonte à la jeunesse de Descartes, c'est une lettre à Beeckmann du 26 mars 1619:

> "Au vrai, pour te découvrir clairement le desein que je projette, ce n'est pas l'Ars Brevis de Lulle que je désire apporter, mais une science entièrement nouvelle, grâce à laquelle puissent se résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité, aussi bien continue que discrète. Mais chacune selon sa propre nature: en effet, tout comme en Arithmétique certains problèmes se résolvent par des nombres rationnels, d'autres par des nombres irrationnels, d'autres enfin peuvent seulement être imaginés, ~~ils~~ et échappent à toute solution; de même dans le domaine

de la quantité continue, j'espère le prouver, certains problèmes peuvent se résoudre uniquement avec des lignes droites et des cercles [= à la règle et au compas]; d'autres encore ne peuvent se résoudre, sinon à l'aide d'autres lignes courbes engendrées par un mouvement unique et décrites avec des compas d'une nouvelle sorte, non moins déterminés ni moins géométriques, que les compas ordinaire dont on décrit les cercles; enfin d'autres problèmes ne peuvent se résoudre à moins qu'on n'utilise des courbes engendrées par deux mouvements différents non subordonnés l'un à l'autre, et de telles courbes sont purement imaginaires, comme la ligne quadratrice suffisamment répandue. Et j'estime qu'on ne peut rien imaginer qui ne puisse se résoudre par les lignes dont je parle; mais j'espère arriver à démontrer quelles sortes de questions peuvent se résoudre de telle ou telle manière et non de telle autre: de sorte qu'il ne reste alors presque plus rien à trouver en géométrie."

Pour faire avancer les connaissances humaines, il est capital de bien distinguer les différents ordres des problèmes, classés "selon leur nature". Cette distinction s'effectue assez facilement et naturellement pour tout ce qui relève du nombre (les problèmes sont soit rationnels, soit irrationnels, soit impossibles). Par contre les problèmes qui traitent de réalités continues n'ont pas encore été hiérarchisés aussi clairement. Descartes se propose de le faire. Alors les solutions viendront presque d'elles-mêmes, chacune selon sa nature. Lorsque ces solutions existent, bien sûr. Mais précisément le classement projeté par Descartes évitera toute illusion sur des solutions prétendues, correspondant à des problèmes imposiblles . Ainsi la quadratrice offre une apparence de solution pour une question insoluble, et ceux qui s'occupent de telles choses sont dans l'illusion.

§ 15 . Qu'est-ce qu'une courbe pour Descartes ?

Ce projet méthodique a pour conséquence, en mathématiques, la priorité donnée au traitement algébrique. Descartes n'étudie pas les courbes pour elles-mêmes, comme des réalités spatiales. Une courbe est pour lui un "lieu" géométrique, l'ensemble des solution d'une équation.

Cela apparaît dans la composition du livre premier de La Géométrie : on commence par les solutions d'équations à une inconnue, du premier degré, puis du second degré, et chaque fois il est indiqué comment construire géométriquement les solutions (les segments représentant les solutions). Ensuite on passe aux équations à deux inconnues, et les solutions ne sont plus alors des segments isolés, mais des couples de valeur, dont la totalité constitue une ligne:

> "à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connaître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver..." (p. 307)

L'objet premier de cette géométrie, c'est donc la représentation des solutions de problèmes algébriques. A tel type d'équation correspond tel type de construction.

D'autre part l'éventail des expressions algébriques autorisées a été défini par avance dans les premières lignes de La Géométrie: Descartes n'admet que les 4 opérations de l'arithmétique usuelle, il y ajoute l'extraction de racine, qui est "une espèce de division" (p. 297) ; pas question de passage au sinus, ou au logarithme. La correspondance entre algèbre et géométrie est ainsi fondée d'une manière stricte. Ce point de vue si contraignant est aussi extrêmement fécond, on peut y voir le début de la géométrie algébrique d'aujourd'hui, selon laquelle une courbe est le lieu des zéros d'un polynome à plusieurs variables.

IV LES FLUXIONS NEWTONIENNES ET LA PLACE DU TEMPS.

§ 16 . La définition des logarithmes par la vitesse.

La Géométrie de Descartes délimite strictement le domaine des mathématiques. C'est ce qui en fait la fécondité et aussi la faiblesse. Descartes s'est posé en législateur, en censeur, mais ses prétentions seront vite débordées par le développement des problèmes et des procédés.

L'exemple des logarithmes est très instructif à cet égard. Voilà le type même des êtres mathématiques que La Géométrie rejette dans les ténèbres extérieures. Les logarithmes existent depuis Napier (1614) et Képler (1624), pourtant Descartes ne les mentionne jamais. A vrai dire, pour lui comme pour tous ses contemporains, les logarithmes sont des nombres tabulaires, c'est à dire des nombres approchés que l'on calcule par des procédures très laborieuses, et leur intérêt se réduit à l'utilité pratique : les astronomes en ont besoin dans leurs calculs, pour substituer des additions à des multiplications trop fastidieuses. Rien à voir par conséquent avec la mathématique noble.

Mais au cours du siècle les logarithmes acquièrent leurs lettres de noblesse. Le moment décisif se situe peu avant 1650, lorsque Grégoire de Saint Vincent et son élève Sarasa découvrent que le logarithme mesure la surface délimitée par une courbe algébrique bien connue, l'hyperbole. Descartes lui-même avait reconnu implicitement l'importance des logarithmes en proposant sa solution au problème de de Beaune (cf. § 12): le procédé utilisé est en effet très semblable à celui dont Napier s'est servi pour inventer et définir ses logarithmes , il est probable que Descartes s'en est inspiré.

La création des logarithmes s'est faite dans le même contexte que les travaux de Galilée ou Roberval : il s'agit encore d'une mathématique du mouvement. Le problème à résoudre est le suivant : on veut faire correspondre une progression géométrique (par exemple de base 10, ce qui n'est pas le cas chez Napier) et une progression arithmétique

1/100	1/10	1	10	100	1000
-2	-1	0	1	2	3

L'intérêt pratique vient de ce que la progression du haut se fait par multiplication, et celle du bas par addition. Mais le but ne sera atteint que si l'on peut considérer les deux progressions comme des réalités continues, qui gardent un sens pour les valeurs situées entre les nombres que l'on a écrits. Il faut pouvoir trouver par interpolation quelle valeur de la suite arithmétique correspond à une valeur quelconque dans l'autre suite. (Que 3 soit le logarithme de 1000 n'est pas très intéressant, par contre on aimerait savoir à quel nombre en bas correspond 687 en haut.)

C'est sur ce point que la représentation du mouvement semble avoir été utile à Napier. Il imagine des déplacements continus sur deux droites parallèles, selon un mouvement uniforme sur la première ligne et avec une vitesse décroissante sur la seconde ligne. La vitesse variable est proportionnelle à la distance restant à parcourir. (On remarquera que c'est presque la loi de mouvement que Galilée déclarera impossible 15 ans plus tard.) De cette manière l'espace parcouru sur la première ligne sera le logarithme de l'espace parcouru sur l'autre ligne (mouvement décéléré)

Ce procédé de Napier, et les raisonnements qu'il y joint, présentent plusieurs originalités. D'abord la manipulation des vitesses intantanées se fait avec aisance (sans aucune définition bien sûr). D'autre part Napier utilise des mouvements à vitesses variables, mais sans mettre les mouvements en contact, sans leur faire décrire une courbe commune. Ce qui est commun aux deux mouvements, c'est seulement leur contemporanéité, qui permet de calculer le rapport des déplacements à un instant donné. Sous cet aspect la conception de préfigure celle de Newton dans le calcul des fluxions.

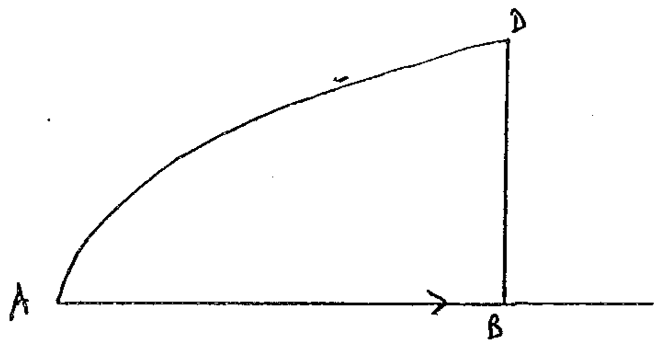
§ 17 . Le mouvement qui déplace les lignes.

Dans ses premiers travaux, Newton utilise en effet le même schéma que Napier. Il imagine deux déplacements sur deux lignes horizontales parallèles, et il cherche à exprimer la relation des vitesses, connaissant les déplacements effectués dans le même temps; ou inversement, les espaces parcourus connaissant les vitesses. Si la relation entre les espaces est donnée par une équation, il s'agit de trouver l'équation qui donnera le rapport des vitesses, et inversement. (Cf Math. Papers, I p. 343 et suiv.; p. 385-6; Méthode des Fluxions, p. 45 de la trad. Buffon).

Les courbes et surfaces seront conçues sur le même mode: le lieu de mouvements à différentes vitesses. Une figure de la Méthode des Fluxions est une réalité qui bouge et s'anime, il faut arriver à "voir" l'engendrement des lignes et des surfaces par le déplacement des points et des segments. Newton le déclare explicitement:

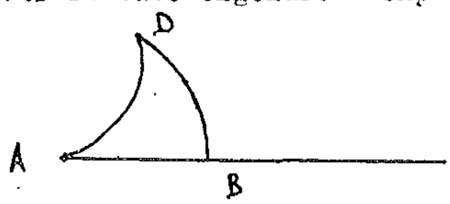
> "je considère les quantités comme engendrées par une augmentation continue, à la manière de l'espace qu'un mobile décrit dans sa course." (Fluxions, trad. p. 21, texte latin dans Math. Papers, III p. 72)

Une figure géométrique est une sorte de mécanisme où le mouvement se transmet selon les articulations de la figure. Les lignes et surfaces sont engendrées au sens propre par des déplacements. Le schéma le plus général et le plus simple est celui-ci

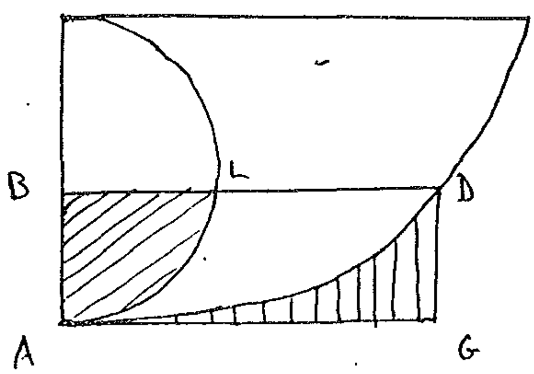


Sur une ligne horizontale, un point mobile se déplace à partir de l'extrêmité gauche A, il entraîne dans son mouvement un segment vertical BD de longueur variable ; l'extrêmité D du segment engendre la courbe, et le balayage crée la surface. (Newton nomme AB la "base", et BD "l'ordonnée" ou "appliquée").

Il existe des combinaisons plus raffinées. Ainsi la spirale est engendrée par le gonflement continu d'un cercle centré en A et le déplacement d'un point sur la circonférence de ce cercle. L'accroissement du cercle est mesuré par le déplacement du point B sur la base, comme ci-dessus par conséquent, mais cette fois le mouvement sur la base engendre l'expansion d'un cercle.



La cycloïde est engendrée par un mécanisme complexe, où le déplacement fondamental est un balayage de bas en haut. La base est donc verticale cette fois. Lorsque le point B monte, il entraîne dans son mouvement la droite BLD, et par suite aussi le segment DG. Les surfaces ABD, ADG, et ABL (surface du cercle générateur) s'accroissent en fonction des balayages respectifs des segments. Newton prouve que l'accroissement de la surface ABL est à tout instant égal à l'accroissement de la surface ADG. La cycloïde entière est donc égale au rectangle complet, de côtés 2 R et $2\pi R$, dont on retranche la surface égale à celle du cercle générateur, en tout $4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2$ (trad. p. 91; Papers p. 204)



Parmi les mouvements des divers éléments de la figure, Newton choisit un mouvement de référence, en général le déplacement du point B sur la "base". Les autres sont calculés en fonction de celui-là. La dépendance des mouvements est inscrite sur la figure: l'impulsion se transmet de proche en proche selon les articulations particulières du mécanisme choisi. Dans certains cas, la dépendance pourra être exprimée par une relation algébrique, et l'on retrouve alors comme cas particuliers les courbes "géométriques" de Descartes.

Le calcul se résume à deux opérations fondamentales : connaissant la proportion entre les déplacements, trouver la prortion entre les vitesses, et inversement passer des vitesses aux déplacements. Newton parle plus volontiers de "fluxion" et de "fluente", mais sans exclusive, il écrit même parfois "fluxio sive velocitas", "la fluxion, ou si vous préférez, la vitesse", il parle aussi du "taux d'écoulement"("fluendi ratio") d'une quantité. Chaque fluente (la ligne x, la surface y) a ainsi sa fluxion (notée $\dot{x}$, $\dot{y}$ dans les derniers textes de Newton).

§ 13 . <u>La place fondamentale du temps.</u>

En plusieurs endroits, Newton a recours à un infinitésimal, noté " o " (un petit o couché, à ne pas confondre avec le zéro), qui est l'élément fondamental de tout accroissement. Il s'agit en quelque sorte d'une particule atomique de temps. L'écoulement minimum de toute grandeur se calculera alors en multipliant la vitesse de cette grandeur par l'élément o : $\dot{x}.o$, $\dot{y}.o$ seront les accroissements infiniment petits de x et y . C'est donc le petit o qui fournit toute l'impulsion, il suffit de l'introduire dans une figure ou une relation algébrique pour les mettre en mouvement, et déterminer ainsi les "accroissements contemporains" des quantités en jeu.

Le rôle primordial appartient donc au temps : toutes les grandeurs sont fonctions du temps. En ce sens la relation entre la fluxion d'une quantité et la fluxion de la base ne peut être confondue avec notre dérivée : le déplacement du point mobile sur la base est lui-même fonction du temps, il a lui aussi sa fluxion par rapport au temps. La quantité x n'est pas une variable indépendante, c'est une fluente au même titre que les autres , dont la fluxion sera $\dot{x}$ et l'accroissement minimum $\dot{x}.o$. Ce que Newton calcule, ce ne sont donc jamais des dérivées, mais des rapports entre vitesses : $\dot{y}/\dot{x}$. Parfois d'ailleurs, il sera utile de considérer que le déplacement du point sur la base est à son tour fonction d'un autre déplacement sur une autre base : Newton se sert de cette transformation cinématique pour calculer certaines intégrales délicates (qui pour nous aboutiraient à des logarithmes) en les ramenant à des intégrales plus simples qui leur serviront d'unité.

Bien qu'il n'y ait pas de variable indépendante inscrite sur la figure, pourtant Newton se rapproche, dans les faits, de notre manière de voir : il pose le plus souvent que la fluxion de la base est 1 . Le mouvement du point B sur AB est considéré comme uniforme, et c'est en fonction de lui que tous les autres mouvement sont déterminés. En notation newtonienne: $\dot{x} = 1$, et donc en fin de compte $\dot{x}.o = o$, c'est à dire que l'infinitésimal devient l'accroissement minimum de x. Considérée du point de vue du fotmalisme mathématique, cette convention revient ainsi à faire de x la variable indépendante.

Mais ce choix d'un mouvement de référence a des justifications très profondes qu'il importe de saisir:

> "Parce que nous ne possédons aucune estimation du temps, sinon en tant qu'il est représenté et mesuré par l'intermédiaire d'un mouvement local uniforme, et parce que d'autre part des quantités ne peuvent être mises en rapport que si elles sont de même genre, et si la vitesse de leur accroissement ou décroissement est aussi de même genre, pour cette

raison je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au temps pris formellement, mais, parmi les quantités proposées qui sont de même genre, je supposerai que l'une s'accroît selon une fluxion uniforme, et je rapporterai toutes les autres quantités à celle-là comme si elle était le temps lui-même, si bien que le nom de temps peut à bon droit lui être attribué par analogie."

(Papers 72; Buffon traduit très mal)

Parce que le temps ne peut se figurer directement, une des variations tiendra la place du temps. Le mathématicien est satisfait: le paramètre temps peut désormais disparaître des calculs, il suffit de choisir une variable qui le représente. Dès lors on peut même considérer que le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{x}$ est bien une dérivée en notre sens: la variation de x n'est plus fonction du temps, x devient la variable de base dont dépendent les autres.

Mais l'explication de Newton n'est pas seulement faite pour faciliter les opérations formelles. Newton n'oublie pas qu'il parle du temps et du mouvement, il garde un souci ontologique ou métaphysique : le temps n'est pas une grandeur qui puisse être mise au même rang que les autres. Nous n'en avons que des mesures toujours approchées. Référées au temps absolu, toutes nos horloges sont fausses, et pourtant il faut bien pratiquer des mesures. C'est ce qui se passe dans le calcul des fluxions comme dans l'astronomie: ne pouvant ~~faute de pouvoir~~ appréhender le temps lui-même, nous choisissons une fluente qui servira de référence, faute de mieux.

Le temps en effet n'est pas présent dans les choses de la nature ou sur les figures du mathématicien, mais il est sous-jacent à toutes, c'est lui qui construit et défait toute réalité. Les formes sont la trace passagère d'une activité plus profonde. Dieu lui-même se rend sensible par son action incessante, car "il dure d'éternité en éternité, il est présent d'infini en infini, il régit toutes choses, ... et en existant toujours et partout il constitue la durée et l'espace"...(Newton, Principia, scolie général) Newton, lecteur assidu de Boehme et des cabbalistes, avait fini par penser que l'attraction universelle était une manifestation physique de l'omniprésence divine. On risquerait de raplatir trop facilement les travaux de Newton : il y a toutes raisons de penser que le mouvement qu'il a insufflé aux êtres mathématiques n'était pas un simple excitant pour l'imagination. Il aurait voulu que son oeuvre fût toute entière à la gloire de celui en qui "la totalité des choses sont contenues et reçoivent leur mouvement" (Principia, scolie général). Aussi, lorsque Newton attribue au temps un "genre d'être" qui le distingue des autres variations, il faut voir là une prise de position d'ordre métaphysique ou théologique : la réalité du temps, à la fois tout puissant et en retrait, accessible seulement "par analogie", manifeste certainement pour Newton la domination et l'inaccessibilité divines.

Quelques indications bibliographiques:

- concernant Galilée.

Les Discorsi ont été traduits tout récemment:
Galilée, Discours et démonstrations concernant deux sciences nouvelles, traduits par M. Clavelin, éditions Armand Colin, Paris 1970.
On trouvera le texte original (en italien avec de longs passages en latin) dans l'Edizione Nazionale, ou dans Discorsi intorno a due nove scienze, a cura di Carugo e Geymonat, Torino, 1958.
Les deux principales études en français sont:
A. Koyré, Etudes Galiléennes, éd. Hermann, Paris 1966 (ou 1939)
M. Clavelin, La Philosophie naturelle de Galilée, éd. Armand Colin, Paris, 1968.

- concernant les grandeurs intensives:

Les études les plus importantes sont celles de Anneliese Maier sur la scolastique du 14e siècle (5 livres pa rus à Rome, en allemand, de 1949 à 1958, et un article en français sur Nicole Oresme, dans la Revue des Sciences Philosophiques et Théologiques, année 1948). On trouvera un résumé en anglais dans E.J. Dijksterhuis, The mechanization of the world-picture, Oxford Univ. Press 1961.

La discussion médiévale sur les grandeurs intensives s'est greffée sur un passage d'un manuel de théologie, le Livre des Sentences de Pierre Lombard (I,distinctio 17 "de missione spiritus sancti",n°7 ; édition Migne, Patrologie Latine, colonnes 56-57).Le commentaire de cette distinction 17 s'enflera progressivement jusqu'au 17e siècle. (Voir un exemple dans l'article de A. Combes, L'intensité des formes d'après Jean de Ripa, Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Age, 1971).

Pour une discussion plus récente, on peut recourir à une communication au récent Colloque Lambert de Mulhouse (Septembre 1977): Claude Debru,Nature et Mathématisation des grandeurs intensives (surtout chez J.H. Lambert et E. Kant) à paraître dans les Actes du Colloque Lambert.

- concernant Torricelli et Roberval:

Torricelli Opere, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919.
Roberval, Divers Ouvrages, dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, éd. 1693, rééd. 1730.
Il existe une thèse inédite de Kokiti Hara sur la méthode de Roberval pour les tangentes (bibliothèque de la Sorbonne).

- concernant les mathématiques de Descartes:

La Géométrie est éditée à la suite du Discours de la Méthode dans le vol. VI de l'édition Adam-Tannery. Une édition très commode a été réalisée aux Etats Unis: fac-similé de l'original français (1637) avec traduction et notes en anglais en face

The Geometry of René Descartes translated by . Latham and . Smith, Dover Books, New-York. Le livre le plus récent sur le sujet, malheureusement assez contestable, est celui de J. Vuillemin, Mathématiques et Métaphysique chez Descartes, P.U.F., Paris, 1960. Il vaut mieux aller voir en bibliothèque le vieux livre excellent de G. Milhaud, Descartes Savant, éditions Félix Alcan, Paris 1921.

- concernant Newton:

La grande édition des écrits mathématiques de Newton est bientôt achevée: The mathematical papers of Isaac Newton, edited by Derek T. Whiteside, 8 volumes (seul le dernier n'est pas encore paru, à ma connaissance). Dans les pages qui précèdent j'ai utilisé le volume I, qui contient les manuscrits de jeunesse, et le volume III, où se trouve le texte original (latin, avec traduction anglaise en face) de la Méthode des Fluxions et des Séries infinies. Ce dernier ouvrage est disponible actuellement dans la vieille traduction faite par Buffon au 18e siècle (réédition Albert Blanchard, Paris).

- en général :

Les <u>Eléments d'Histoire des Mathématiques</u> de Bourbaki contiennent quelques pages sur le sujet évoqué ci-dessus, sous le titre "la cinématique", dans la partie consacrée au calcul infinitésimal.

Le même D.T. Whiteside qui édite les écrits de Newton

avait fait paraître, il y a quelques années, sa thèse sur l'ensemble des mathématiques ~~entre 1650~~ de cette période (en gros de Descartes à Newton) :

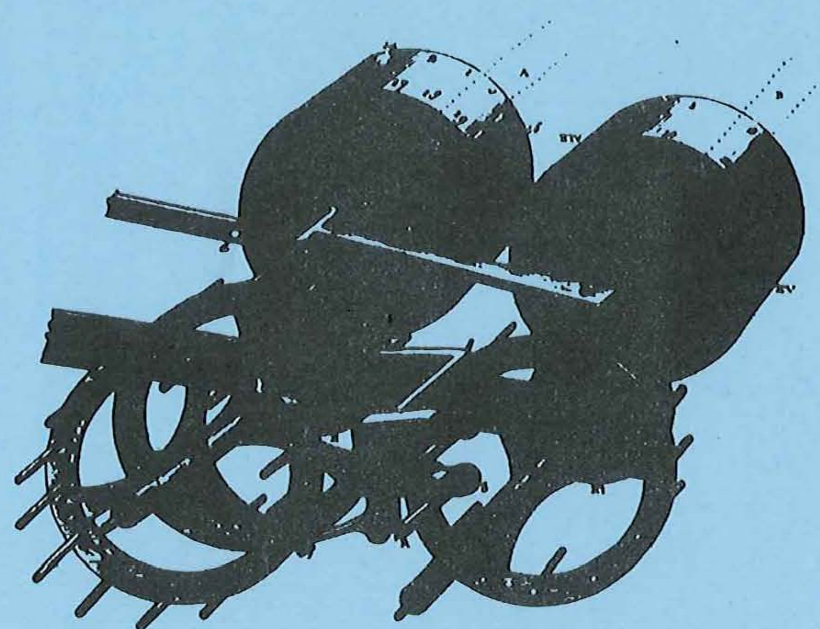
Derek T. Whiteside, <u>Patterns of mathematical thought in the later 17th century</u>, Archive for the History of exact Sciences, Springer Verlag, Berlin, volume I, pages 179-388.

H I S T O I R E   D E S   M A T H E M A T I Q U E S

O U

E P I S T E M O L O G I E ?

Exposé de Pierre RAYMOND (PARIS)



Chaque expression sera suivie pour elle-même. Nous montrerons ainsi que la conception qu'on a de l'histoire joue sur la pratique qu'on a de l'épistémologie. C'est à dire que l'histoire est affaire de théorie, l'épistémologie d'intervention.

Quelques illustrations ponctuelles seront évoquées au fur et à mesure du développement.

I - L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

A - A propos de l'histoire nous partirons d'un principe du matérialisme historique : aucune histoire d'un secteur de la société ne peut être comprise sans être articulée à l'histoire générale de la formation sociale. L'oeuvre de Marx, à propos de la société capitaliste, le montre bien : si l'on étudie seulement le secteur économico-social, sans référence aux secteurs politique et idéologiques, on ne parvient qu'aux lois selon lesquelles fonctionne un mécanisme, les lois de la production capitaliste, en l'occurence, qui montrent comment ce type de production rencontre périodiquement des contradictions de plus en plus grandes, qui le secouent en crises de plus en plus violentes, et qui permettent, par la concentration, des réorganisations par un capital de plus en plus puissant. Le mécanisme des crises capitalistes est celui d'une perpétuation et non d'une révolution : "La production capitaliste tend <u>sans</u>
"<u>cesse</u> à dépasser ces limites qui lui sont immanentes, mais elle n'y parvient qu'en
"employant des moyens, qui, <u>de nouveau</u>, et à une échelle plus imposante, dressent
"devant elle <u>la même</u> banière .
"... les limites entrent <u>sans cesse</u> en contradiction avec les méthodes de production
"que le capital ... le moyen entre <u>perpétuellement</u> en conflit avec la fin ....
"... le mode de production capitaliste ... représente ... une contradiction <u>permanente</u>"
(<u>Le Capital</u>, III, 1, Les contradictions internes de la loi de la baisse tendancielle du taux de profit, éd. sociales).

Les possibilités révolutionnaires n'apparaissent qu'avec l'articulation de ces crises dans l'ensemble social. Mais le caractère "inéluctable" d'une révolution n'est pas alors l'effet d'un mécanisme légal, il est celui d'une pratique révolutionnaire. Ce qu'indique le <u>Manifeste</u>, en faisant intervenir l'histoire générale. C'est à ce niveau seulement qu'il y a histoire, et dialectique réelle.

A propos de l'histoire des mathématiques il en va de même qu'à propos d'une histoire sectorielle : il n'y a d'histoire que par les articulations avec l'ensemble de l'histoire sociale. Le problème est donc celui des <u>articulations</u>.

Ce problème apparaît sur quelques exemples. Ainsi dans l'Antiquité gréco-romaine certaines questions théoriques furent posées par Archimède.

L'urgence théorique d'une solution semble immédiate. Et du reste, comme le souligne Alexandre Koyré (Etudes galiléennes) c'est un élève d'Archimède, Galilée, qui la fournira. Mais dans une autre société, vingt siècles plus tard. Koyré donne cela comme un fait inexplicable. Il s'agit d'un fait d'histoire en réalité : il n'y a d'urgence théorique que mise en place par des conditions sociales extra-théoriques. Ainsi le mathématicien Hilbert a passé dix-sept ans de sa vie à chercher des solutions à des problèmes de logique mathématique imposés en partie par des présupposés non mathématiques mais philosophiques. L'orientation de ses recherches mathématiques a dépendu de conditions extérieures à l'enchaînement seulement mathématique.

B- Qu'en est-il exactement de ce que nous avons appelé jusqu'ici le "secteur mathématique" dans une société ?

1.- Bien sûr on peut essayer de le repérer empiriquement sans faire le détour d'une définition. On y trouvera sans doute des théories exposées à l'usage de savants ou d'étudiants, des recherches en cours et plus difficiles à cerner dans leur matérialité, des utilisations par d'autres sciences, des ambitions d'applications directes à d'autres situations réelles, des diffusions plus ou moins vulgarisées, des exploitations à des fins philosophiques ou autres ... Mais, dans cette perspective d'inventaire, déjà, il convient d'être très attentif.

D'abord à ce qu'une théorie n'existe jamais à l'état de "pureté" scientifique, mais toujours diffusée dans des conditions données, pour un public donné. On peut même aller plus loin et envisager que le caractère textuel, la continuité textuelle d'une théorie scientifique n'existe en fait que par le montage d'une diffusion(jusque dans les Eléments de Bourbaki, XVII, p.6 - 7 : " La mathématique formalisée ne peut être écrite toute entière ; force est....de faire confiance au sens commun... abus de langage ... langage courant ... commentaires ... intuition ... rhétorique ...") qui fait intervenir des considérations extra-théoriques.

Ensuite, il convient de bien préciser le sens de chaque notion, comme celle de théorie, de recherches ... Ainsi, pour prendre l'exemple le plus simple, le plus sûr en apparence, la notion de méthode évoquée par un traité de mathématiques à l'usage de lycéens de Terminale n'est pas identique à ce qu'en dit en général un professeur de philosophie : celui-ci parlera sans doute d'accès argumenté à un résultat, de code qui permette de parvenir au but à coup sûr ; il écartera aussi bien les mécanismes non justifiés que les aléas d'une histoire effective. Mais, à propos de la solution d'une équation du 2ème degré, on trouve par exemple dans un manuel très courant de mathématiques :

" soit $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$

Divisons les deux membres de cette équation par a ...

On recherche dans le premier membre le développement d'un carré, on le trouve en utilisant l'identité suivante ...".

Exemple simple où les conseils cartésiens du philosophe ne peuvent que dérouter l'apprenti mathématicien. Et les choses sont bien pires si le philosophe commence, comme il convient à un philosophe, à distinguer méthode, au sens de Descartes, et combinatoire ou esprit de système au sens de Leibniz. La pédagogie n'y trouve bien sûr pas son compte.

2.- Avant d'aborder les controverses qui touchent à la définition des mathématiques, restons un peu sur une de leurs propriétés importantes, qui a frappé Cavaillès et qui nous concerne ici puisqu'il s'agit de leur aspect négateur de l'histoire. Difficulté intéressante à cerner pour qui veut pratiquer l'histoire de cette discipline.

Cavaillès notait que les mathématiciens, plus particulièrement que d'autres savants, refusent de s'intéresser à l'histoire de leur discipline, comme s'il s'agissait d'un passé devenu étranger à leur recherches. Nous avons proposé (le passage au matérialisme) une explication à ce fait : pour la plupart des sciences, on peut distinguer sans grande difficulté le progrès des connaissances, tel que des théories en modifient ou en remplacent d'autres antérieures, du rapport de connaissance, qui met en liaison des concepts avec une réalité à connaître. Or il se trouve, dans le cas des mathématiques, que ces deux termes se mêlent étroitement : le progrès des connaissances se fait sans doute par rectification des théories antérieures, mais la connaissance mathématique a ceci de particulier qu'elle porte toujours d'un secteur théorique sur un autre, l'algèbre travaille sur la géométrie, la combinatoire sur l'algèbre ... , de sorte que la connaissance transforme en général l'antérieur en objet à étudier, le passé est de ce fait intégré au présent, c'est-à-dire nié comme passé.

Les exemples de ce processus où rectification et connaissance se confondent, sont très nombreux dans la chronique des mathématiques. Un des plus frappants est celui de l'Art de conjecturer de Jacques Bernoulli : la première partie de ce grand traité, publié sous le nom de cet auteur, est une réédition rectifiée par des remarques du traité du calcul dans les jeux de hasard de Huygens. De sorte que, par la présence du traité de Bernoulli, celui de Huygens a disparu dans le progrès de l'analyse combinatoire. Il est du reste notable qu'en mathématiques plus qu'ailleurs la réécriture des théories antérieures est coutumière, jusqu'à constituer un des aspects majeurs de cette discipline : qu'est-ce que "la géométrie euclidienne" ? non pas celle d'Euclide, mais un des innombrables remakes des Eléments d'origine, rarement consultés en fait, jamais par les élèves en tout cas. L'attitude de rejet du passé comme non mathématique par des mathématiciens va très loin : non seulement, par exemple, l'analyste actuel a du mal à considérer que le traité du marquis de l'Hospital est déjà une région du continent analytique, mais chacun sait qu'une des formes fréquentes de la polémique entre mathématiciens contemporains consiste à dénier aux travaux des autres le titre de "mathématiques".

3.- A partir de ces constatations, les conflits traditionnels et actuels sur le statut scientifique des mathématiques sont plus aisés à comprendre. Nous ne ferons pas l'inventaire des doctrines qui se sont affrontées, nous essaierons seulement d'en dégager quelques grands types.

Pendant des siècles, tant que les mathématiques demeurèrent la seule science, ou, du moins, tant qu'aucune science expérimentale ne se développa, c'est-à-dire jusqu'au 17ème siècle à peu près, la doctrine principale, énoncée déjà par la philosophie platonicienne, fut celle d'une science qui portait sur des essences ou objets spirituels généraux. Le rapport de connaissance entre nos concepts et ces essences était réglé par la catégorie philosophique d'intuition intellectuelle. Lorsque la physique expérimentale commence à se développer sur les bases d'une physique mathématique galiléenne, la doctrine de l'intuition, fixée dès le départ du travail mathématique, devient bien pauvre pour caractériser une science au vu de ce qu'on aperçoit comme rapport expérimental nécessaire à chaque pas de la constitution de la théorie physique . Les philosophies de l'intuition disparaissent rapidement de la scène. Peu importe ici ce qui les remplace quant à la physique. Pour les mathématiques, une première doctrine tend déjà à s'y substituer dès Galilée : cette discipline donnerait à connaître l'armature du monde ("écrit en langage mathématique") , la seule science, celle de la nature, serait donc une lecture mathématique. Mais cette doctrine est vite interprétée en un autre sens, toujours en vigueur aujourd'hui : les mathématiques ne sont pas le langage de la nature, mais celui de la physique. Il ne s'agit donc plus d'une science, mais d'un instrument des sciences. Le prestige des mathématiques empêchait qu'on les tînt pour une sous-science, on les tînt donc pour une sur-science : le critère même de la "scientificité" des autres sciences. C'est ainsi qu'elles apparaissent dans les classifications chères à plusieurs philosophies du 19ème siècle, en particulier celle d'Auguste Comte. Les effets de cette doctrine, majoritaire aujourd'hui sous des formes variées, sont nombreux : d'abord une assimilation des mathématiques à une sorte de langage, mais la sorte la plus pure, univoque (alors que tout langage est équivoque) ; la complicité idéologique entre langage et mathématiques a des conséquences en logique mathématique et en linguistique ; conséquences rendues plus aiguës par le second effet : la réduction des mathématiques à un instrument qui a perdu tout rapport de connaissance avec la réalité pour ne devenir qu'un jeu formel démonstratif.
On substitue alors au rapport expérimental une pauvreté philosophique, le rapport d'abstraction : les formes mathématiques seraient empiriquement abstraites de la

réalité, d'où la possibilité de les utiliser comme instrument pour la physique. Mais sans expérience, l'abstraction, elle, ne serait pas mathématique mais anté-mathématique. Conséquence par exemple pour la linguistique : la collaboration du formalisme à faire oublier l'aspect relationnel du langage (alors qu'il n'y a langage que par le rapport pratique de formes symboliques avec une réalité sociale, et non par le seul jeu de règles).

A cette doctrine, comme à celles qui précèdent, nous avons opposé celle des mathématiques comme science expérimentale : nous voulons dire par là que :

1° les mathématiques ne sont telles que par le travail d'un secteur intérieur (arithmétique, géométrie, algèbre, combinatoire ...) sur un autre, dans la réciprocité des fonctions.

2° Cette production de connaissances mathématiques, qui en fait une science, échappe à la gratuité par les rapports d'utilisation (et non d'application) que ses concepts entretiennent avec d'autres sciences, qui, elles, sont en relation avec une réalité non symbolique ; ce rapport entraîne toutes sortes de modifications (souvent peu soulignées) dans les concepts, et provoque des appels au travail mathématique.

3° Cette utilisation n'a rien à voir avec un rapport d'origine qui ferait que les concepts mathématiques seraient abstraits de la réalité ; leur origine effective relève d'une histoire tout à fait différente, où l'antérieur n'est pas d'abord la "réalité" d'où abstraire, mais des conceptions à transformer.

Nous avons développé cette doctrine ailleurs, nous reviendrons volontiers aux débats qu'elle engage, mais ici n'en est pas le lieu.

C - Si l'on admet que les mathématiques sont bien une science, sans rapport avec de mythiques essences, encore faut-il, pour en faire l'histoire, indiquer en quoi peut bien consister de faire l'histoire d'une science, d'une activité scientifique, par différence avec celle d'une autre activité sociale.

Nous écarterons ici les difficultés d'ordre philosophique posées par la question : on ne peut faire l'histoire d'une réalité que si cette réalité n'échappe pas au devenir historique pour atteindre l'éternité. Or l'éternité du vrai, telle que la suppose l'idéalisme dès Platon, retire à l'histoire l'accès à une partie du domaine scientifique, qui, soit existe en permanence en dehors d'elle, soit émerge définitivement de l'histoire.
Cette attitude consiste à séparer le découvreur, réduit à une subjectivité, et le trésor, objet éternel. Nous en verrons les effets dans l'oeuvre de Popper. Il nous suffit ici d'indiquer que la philosophie matérialiste peut éviter ce rejet partiel de l'histoire sans tomber dans le relativisme de la vérité.

Pour la question posée auparavant, on peut former des hypothèses générales, sur les types d'articulation qui lient les activités scientifiques aux autres activités sociales, et des hypothèses particulières sur le cas des mathématiques.

Hypothèses historiques générales sur les rapports de l'activité scientifique avec l'extérieur : autres sciences, techniques, publics, idéologies ... ; mais aussi sur les moyens et formes nécessaires à leur fonctionnement, contraignant pour leur fonctionnement : qu'il s'agisse des moyens matériels et idéologiques déployés à l'appui des "forces productives" scientifiques, et de leur distribution, ou des formes théoriques de leur fonctionnement. Les uns et les autres demandent des études nouvelles fondamentales en histoire des sciences. Nous avons commencé à nous y employer ailleurs, en particulier pour ce que nous avons justement nommé "les formes philosophiques de fonctionnement".

Hypothèses historiques particulières quant aux mathématiques : science originale dans la mesure où les sumbolismes y entretiennent un double rapport avec :

1° D'autres symbolismes (rapport expérimental intersectoriel, donc intra-mathématique).

2° Des concepts appartenant à d'autres sciences, qui les mettent en relation avec une réalité naturelle, sociale ... Trois types exemplaires de problèmes nous retiendront ici :

- D'où vient l'apparence d'anticipations que les mathématiques fournissent parfois par rapport aux développements que connaîtront les autres sciences ? Comme si l'abstraction était prête avant l'approche de la réalité à laquelle elle conviendra. Les géométries de Riemann avant leur utilisation par la Relativité. Question qui demande d'évidence une étude historique attentive. Attentive à ne pas gommer le travail d'utilisation, ses effets modificateurs sur les concepts mathématiques, au profit du mythe de l'adéquation. A ne pas oublier l'idéologie au contraire physicienne où s'est produite l'oeuvre de Riemann.

Plusieurs histoires sont à constituer : une histoire des symbolismes mathématiques qui peut montrer dans quelles conditions divers symbolismes empruntés à divers secteurs sociaux ont été pris comme moyens ou au contraire comme objets par les mathématiques (exemple des difficultés de Pascal et de Fermat à dresser des tableaux pour les combinaisons). Une histoire des problématiques, qui peut montrer en fonction de quelles orientations de recherche divers éléments conceptuels ont été introduits, et que c'est la manière de poser les problèmes qui détermine les concepts et non l'espace organisé des théories (l'insertion du langage infinitésimal dans la physique mathématique de Galilée en est un exemple). Une histoire des utilisations, qui peut montrer comment un concept est transformé par emprunt (excellent exemple fourni par Popper, dans la logique de la découverte scientifique, à propos de l'utilisation en physique des concepts mathématiques probabilistes).

- Pourquoi les mathématiques ont-elles entretenu un rapport privilégié avec la philosophie idéaliste jusqu'à Kant (qui lui-même réfléchit sur une physique a priori plaquée mathématiquement sur la physique newtonienne. Ne pas confondre à ce sujet le formel et l'a priori : la réflexion kantienne porte bien sur l'expérience physique, mais comme a priori) ? Nous nous sommes interrogé ailleurs sur cette liaison et ses raisons. D'autres interrogations sont aussi essentielles aujourd'hui sur les rapports privilégiés entre les mathématiques et la politique de discrimination (plutôt que de sélection) scolaire.

- Enfin les mathématiques ont vu depuis le début du 19ème siècle leur sort lié, plus ou moins autoritairement, avec celui de la logique mathématique. L'impérialisme de cette discipline, qui parle du point de vue mathématique sur la philosophie et du point de vue philosophique sur les mathématiques (et qui prétend coiffer bien d'autres choses encore, comme la linguistique ...) est un problème particulier. Nous nous en sommes soucié dans Matérialisme dialectique et logique par exemple.

II.- L'EPISTEMOLOGIE

A - La définition même de l'épistémologie a provoqué et provoque des conflits. Plusieurs doctrines sont repérables actuellement. Les unes tirent l'épistémologie vers une théorie de la connaissance, d'autres vers la méthodologie, voire vers la logique, d'autres vers la philosophie des sciences, d'autres vers l'histoire des sciences, ... La liste n'est pas exhaustive. La prise de parti est donc inévitable, d'un point de vue philosophique cette fois-ci, puisque la référence même à une science (l'histoire ou la logique) est en discussion.

L'intérêt des positions soutenues par divers épistémologues français depuis le début du 20ème siècle n'est pas d'avoir exclu telle ou telle doctrine étrangère, mais d'avoir poursuivi le meilleur du travail de la philosophie classique quant aux recherches scientifiques. Ils n'ont pourtant pas eu le moyen de se donner comme philosophes, et leur soumission à différentes philosophies dominantes n'en a été que plus forte. Les oeuvres de Cavaillès, de Koyré ou de Bachelard se signalent, à des titres divers, par leur refus d'être inféodées à l'impérialisme logique, leur intérêt pour l'histoire des recherches plus que pour la méthodologie, leurs interventions, pour Cavaillès et Bachelard, dans l'actualité scientifique. Cette mise au premier plan de l'histoire devant la méthodologie n'est toutefois pas allée sans ambiguïté : déjà Cavaillès hésitait entre une philosophie dialectique de type hégélien et une ouverture au matérialisme historique ; Bachelard, en associant l'histoire des sciences et l'épistémologie, en rejetant le plus souvent la référence philosophique, a permis un projet ambigu comme celui d'une épistémologie historique, où l'on ne sait plus exactement ce qui est philosophique, ce qui est historique, et ce que c'est que l'épistémologie.

L'originalité de l'épistémologie ne peut sans doute bien apparaître qu'à partir d'une distinction entre les sciences prises comme objets, la science historique et la philosophie dont on se réclame. C'est-à-dire qu'à moins d'être un redoublement philosophique vague des sciences, ou une technique méthodologique que les sciences s'intègrent aujourd'hui, ou une histoire des sciences, qui appartient à l'histoire scientifique, l'épistémologie doit se déclarer comme de la philosophie qui intervient dans les recherches en cours. Intervention en des lieux à préciser. Au nom de finalités à préciser. De sorte que l'épistémologie ne soit plus cette entité mystérieuse, nouveau terme dont ne sit ce qu'il recouvre, mais seulement ce qu'il ne recouvre pas.

A partir des positions du matérialisme marxiste, on décide par exemple le primat des acquisitions de l'histoire scientifique sur l'intervention épistémologique, de même que la politique révolutionnaire requiert, d'une manière bien sûr à préciser, certains enseignements de la théorie du matérialisme historique. Mais l'épistémologie n'est pas plus de l'histoire que la politique n'en est. Les liens de l'histoire et de la politique ne sont pas ceux d'un modèle ni d'un exemple à répéter ou à suivre ; mais ceux de processus non achevés dont la suite présente exige la connaissance des commencements pour être menée rationnellement. De même l'épistémologie doit emprunter ses concepts, jusqu'à celui de science, de telle science, à l'histoire ; et l'histoire seule peut expliquer les récurrences épistémologiques ; mais les récurrences sont philosophiques et leur justification reste philosophique.

L'engagement épistémologique au niveau de l'histoire des sciences se faisant peut intervenir en des lieux très différents : au niveau de l'exposition des théories, des recherches, des utilisations par d'autres sciences, des applications éventuelles, de la diffusion (pédagogique ou non), des exploitations idéologiques ...

Cet engagement doit toujours rester soucieux de la spécificité de chacun de ces termes les uns par rapport aux autres : par exemple, dans le cas des mathématiques, le philosophe, en particulier, a intérêt à bien distinguer la réalité d'une doctrine mathématique comme l'intuitionnisme dans telle ou telle recherche et sa transcription philosophique, par les mathématiciens eux-mêmes ; à ne pas croire donc avoir rejeté l'une quand il a réfuté l'autre. ce point est essentiel : rien n'indique a priori que l'utilité scientifique de formes de fonctionnement philosophiques corresponde à leur valeur idéologique extérieure. L'épistémologie ne peut juger que sur pièces. Il n'y a pas de méthode épistémologique particulière, mais il y a des jugements épistémologiques.

Mais l'épistémologie appartient d'autant plus au domaine philosophique qu'on a aperçu l'importance des formes philosophiques de fonctionnement dans les recherches scientifiques, et qu'on ne s'est pas seulement soucié de la matérialité et de la distribution des forces de production scientifiques. A titre d'exemple : les querelles pédagogico-politiques actuelles que les "mathématiques modernes" peuvent être éclairées de diverses lumières : psycho-pédagogique, politico-culturelle ... ; mais à partir du moment où des finalités politiques sont définies pour un enseignement, où l'accès aux recherches spécialisées n'exclut pas la culture mathématique sans finalité de recherches, où l' on distingue les nécessités d'une formation culturelle de celles d'une formation pour un chercheur, alors c'est le fonctionnement des recherches souhaitées ou de la culture souhaitée qui doit précéder la pédagogie. Car celle-ci, au cas surtout où elle s'alimente auprès d'une psychologie incertaine et conflictuelle, peut-elle éviter de renforcer la "nature" supposée de l'élève aux dépens des transformations de nature que suppose tout enseignement ? Comme disait Robert Escarpit à propos du dossier scolaire, si l'on enseigne à des muets, c'est pour les faire parler.

Mais il demeure clair que les positions épistémologiques sont partiales, car elles ne dépendent pas seulement d'une science, l'histoire, mais d'une philosophie, c'est-à-dire d'une partialité. Et encore faut-il ajouter, grâce à Marx, que l'histoire est une science particulière, différente des autres : elle ne peut être menée scientifiquement qu'à partir de la justesse de positions politiques, même si elle peut éclairer ensuite l'action politique.

B - La conception qu'on a de l'histoire comme science est donc essentielle pour la pratique qu'on a de l'épistémologie. Mais cela n'exclut pas le rapport inverse : cette pratique oriente en retour le travail de l'historien. Elle indique par exemple pourquoi les recherches mathématiques peuvent mettre obstacle à la formation historique du concept de science mathématique expérimentale.

Bien plus l'épistémologie est la source de l'histoire comme la politique révolutionnaire est celle du matérialisme historique. Ce que l'historien marxiste Pierre Vilar montre dans la Préface à La Catalogne dans l'Espagne moderne : c'est à partir des problèmes d'une politique actuelle que les fils historiques antérieurs doivent être rétrospectivement dégagés. L'histoire est rétrospective et non récurrente. La distinction intéressante est entre histoire morte (achevée) et histoire vivante (inachevée) et non entre histoire invalidée et histoire sanctionnée. Seule la politique ou l'épistémologie peuvent invalider ou sanctionner.

Ce type de lien entre conception de l'histoire et pratique épistémologique est illustré par les difficultés qu'offre l'oeuvre de Popper pour un partisan du matérialisme historique (cf. Matérialisme historique ou matérialisme biologique ? , de Pierre Raymond, article à paraître dans un ouvrage collectif sur Popper et le néopositivisme, éd. Maspero). Popper estime que l'épistémologie ne peut être qu'une logique des produits de la connaissance, car la production elle-même, historique, ne serait qu'affaire de subjectivité, donc de psychologie, celle du producteur. Or toute la tradition du matérialisme historique s'insurge contre cette distinction entre produit et producteur : dans l'Introduction à la Contribution à la critique de l'économie-politique, Marx montre clairement que le produit comme le producteur sont dans tous les cas des effets du processus de production ; et l'étude des modes de production est historique et non psychologique ni subjectiviste. De même l'épistémologie n'est pas contrainte à la méthodologie ou à la logique pour éviter la biographie des savants.

A distance des problèmes d'une histoire des sciences et d'une épistémologie, le matérialisme historique donne quelques indications pourtant à leur propos. Pourquoi par exemple s'agit-il de philosophie au carrefour de l'histoire et de la politique (de l'histoire des sciences et de l'épistémologie ?)

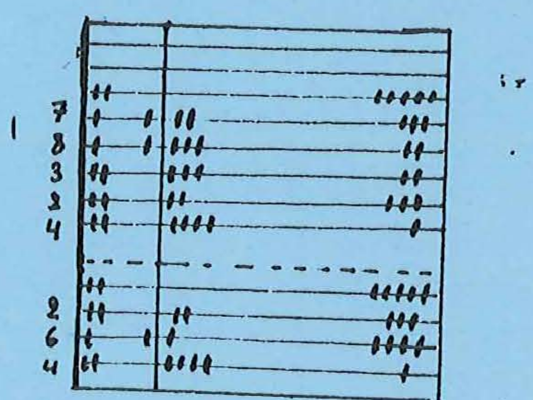
Parce que l'histoire ne détermine pas la politique (la recherche) présente, mais en permet une prévision probabilitaire, mais seule la politique se détermine. Il y a là toute la différence entre déterminisme scientifique et détermination idéologique. Et c'est dans cet écart que se situe par définition la philosophie.

Parce que la philosophie joue souvent le rôle de laboratoire des conceptions scientifiques (comme l'indique déjà Engels dans la Dialectique de la nature, "science de la nature et philosophie") , d'une manière plus ou moins implicite selon la correspondance entre formes de fonctionnement et recherches, ajouterons-nous. Après coup, malheureusement, on voit mieux en quoi les recherches de Hilbert par exemple quant à la théorie de la démonstration, les interprétations pessimistes du théorème de Gödel, l'impérialisme de la logique mathématique et son apparent technicisme anti-philosophique, sont affaire de philosophie.

Et comment appeler, sinon philosophie, le fonctionnement métaphysique, issu de Leibniz, d'une partie des recherches infinitésimales jusqu'à Euler ? L'avantage serait grand aussi de voir que la sensibilité de Newton à l'histoire inachevée du même calcul n'était pas le fait d'un pragmatisme empiriste de savant, mais d'un philosophe matérialiste (cf. Philosophie et calcul de l'infini).

MATHEMATIQUES ARABES ET INDIENNES DANS LE SECOND DEGRE

Maurice CAUSSE (IREM de POITIERS).



MATHEMATIQUES ARABES ET INDIENNES DANS LE SECOND DEGRE
REFLEXIONS D'UN PROFESSEUR

M. CAUSSE

I.- Pour une Histoire des Mathématiques, il existe d'excellents ouvrages que nous ne chercherons pas à remplacer :

1) - Histoire générale des sciences ; R. TATON ; P.U.F. 1966
La Science Arabe, ARNALDES, MASSIGNON, YOUSCHKEVITCH, t. I.441-525
Bibliographie à la fin de l'article.

2) - Journal Asiatique, voir notamment, 1853,De L'algèbre chez les Arabes(SEDILLOT)
1854,Les Notations Algébriques d'Al Qalaçadi et l'Algèbre d'Omar Khayyam (WOEPKE)
1878 : l'Algèbre d'Al Kharismi et les méthodes indiennes et grecques. (RODET)

0 -> Q

3) - History of Mathématics, E. SMITH (Dover, 1967)

4) - Les Mathématiques Arabes, Youschkevitch, Vrin 1976. Ce livre, appuyé notamment sur des textes retrouvés en Asie Centrale et publiés récemment en Union Soviétique, renouvelle sur plusieurs points l'état de la question.

5) - Dictionnaire Archéologique des techniques.

6) - ITHACA, Actes du X° Congrès d'Histoire des sciences, articles de E.S. Kennedy, Ramifications of the world year concept in Islamic Astrology, t.I, pp 23-46, et S.SEN, Study of Indeterminate Analysis in ancient India, t.I, p 493-499.

7) - Histoire des Sciences de St Augustin à Galilée, A.C. CROMBIE (P.U.F. 1959)

8) - Les Penseurs de l'Islam, CARRA DE VAUX, Paris 1926.

9) - Encyclopaedia of Religion and Ethies, Edinbourgds 1921, articles Atheism, Atomic Theory, (Indian et Muhammadan), Rosaries

10) - Revue ISIS

11) - Aldo Mieli, La Science Arabe.

L'intérêt des Mathématiques anciennes, pour l'enseignement, vient de ce que leur contenu correspond encore largement à celui des programmes secondaires, même si le fait a cessé d'être exact pour la géométrie. Ainsi nos techniques trop bien rodées ont-elles un jour mobilisé les grands esprits de l'humanité.

Comment ?

A l'élève entraîné à ne JAMAIS diviser par 0, dédions la poétique découverte du mathématicien indien Bhasbârâ (XII° siècle) :"exemple : dividende: 3, diviseur : 0, résultat : 3/0 . Cette quantité qui est infinie s'appelle "quotient par 0" ; elle n'éprouve pas de changement. Ni addition, ni sous-"traction, ne peut lui faire éprouver perte ou accroissement, pas plus qu'au "temps sans fin et sans déclin des séries d'existences."(Rodet, 2). On peut en effet, en admettant qu'on suppose un sens arithmétique à l'opération, vérifier la propriété : $x = a/0 = a/0 + b$. Il n'est pas indifférent, de rattacher l'intuition de l'infini à l'idée de la transmigration des âmes chez les Hindous. Plus généralement, les idées mathématiques naissent dans un certain contexte philosophique, et le portrait que nous nous faisons de ce contexte philosophique est sérieusement altéré, si nous ignorons ce que la mathématique lui doit, ou lui a apporté.

II.- Tenants et aboutissants de l'équation du 2° degré.

A) $x^2 + x = 3/4$. Cette équation représente le premier problème de la tablette du British Museum n° 13.901, dont la rédaction remonte à la première moitié du second millénaire avant J.C. , traduite par F. Thureau-Dangin, textes Mathématiques Babyloniens : (réf. 5; article CALCUL)

"J'ai additionné la surface (x^2) et le côté de mon carré (x) : 3/4.
"Tu poseras 1, l'unité ; tu fractionneras en deux, et tu croiseras (1/4).
"Tu ajouteras à 3/4 : 1 ; c'est le carré de 1. Tu soustrairas 1/2, que
"tu as croisé de 1 : 1/2 ; c'est le côté du carré".

Avec les notations actuelles, nous écririons, pour $x^2 + b.x = c$:

$$x = \sqrt{b^2/4 + c} - b$$

Dans d'autres textes, on soustrait les x des x^2.

B) Quel a été l'apport des Grecs ?

Essentiellement, de fournir une interprétation géométrique de la solution. En effet, l'objet mathématique ne reçoit l'existence "réelle" que si on peut le construire par la règle et le compas.

La construction d'Euclide revient à celle de $\sqrt{\Delta}$ par le théorème de pythagore (T. Haath, A Manual of Greek mathematics, Dover, 1931, 1963, p. 103).

ex : $x^2 = ax = b^2$; $(x + a/2)^2 = b^2 + a^2/4$

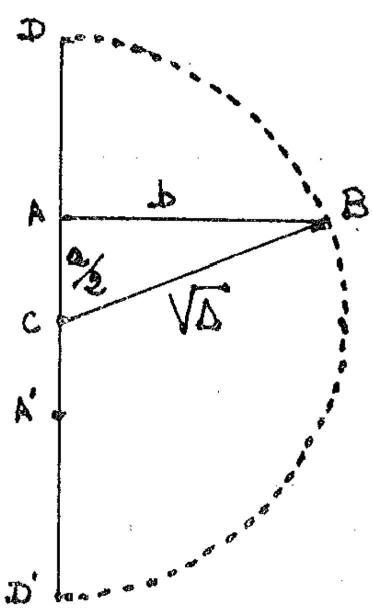


fig. 1

$AA' = a$; $AC = \frac{a}{2}$; $BC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$

$AD = x$; AD' est la solution de l'équation $x^2 - ax = b^2$

Il est clair que la solution elle-même du problème posé reste essentiellement algébrique ; la géométrie n'apporte pas une analyse de la solution, mais une construction du résultat. Il n'est pas envisagé de solution négative.

2° exemple : $x^2 = b^2 = ax$

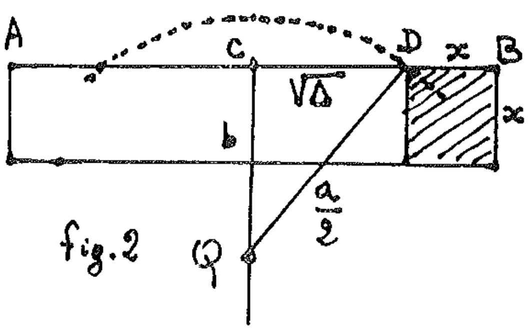


fig.2

$AB = a$; $CQ = b$; $CB = QD = a/2$

$CD = \sqrt{a^2/4 - b^2}$; $BD = x$

Le phénomène est ici plus net encore : si la construction géométrique jouait un rôle dans l'analyse du problème, on aurait vu qu'elle fournit deux solutions.

C) Les constructions d'Al Khowarizmi (780-850)

$x^2 + a.x = b^2$ ex : $x^2 + 10.x = 39$

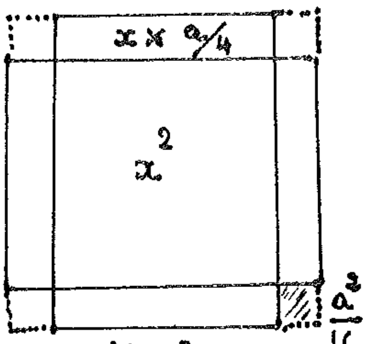


fig.3

A la surface carrée x^2, on accole sur chaque côté un rectangle de côté 10/4 ; il est clair qu'on obtient un carré incomplet, de côté $(x + 10/2)$, et qu'on le complètera en rajoutant quatre petits carrés de côté 10/4.

La surface complète est donc :

$$39 + 4.(25/4) = 64$$

Le carré complet a donc pour côté 8, et on a $x = 3$. ET LA SURFACE INCONNUE est 9. sa racine est 3.

Ici, l'analyse géométrique a valeur de démonstration.

$x^2 = b^2 = a.x$ ex: $x^2 + 21 = 10.x$

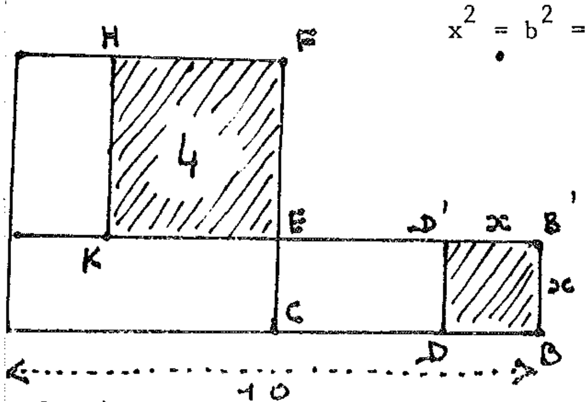


fig.4

Si on enlève le carré x^2 au rectangle de côtés x et 10, la surface restante vaut 21. Considérons le carré de côté 5 construit sur AC, et le carré de côté 5 - x construit sur EF, soit EFKH ; les rectangles CDD'E et A'KHG sont égaux ; la surface AA'GHKEC est donc 21, et celle du carré EFHK est 25 - 21 = 4.

Il en résulte que le côté de ce carré est 2, donc x = 3.

Commentaire d'Al Khowarizmi : Voici la solution (de ce cas) :
"Tu divises en deux les racines (les x) ; ce qui donne 5 ; multiplie -le
"par lui-même ; ce qui donne 25 ; retranche de là les 21 qu'on a mentionnés
"avec le carré ; il reste 4 ; prends la racine, qui est 2 ; et retranche de
"la moitié des x ; il reste 3 : c'est la racine du carré que tu désires, et
"le carré est 9. Si c'est ta volonté, ajoute cette racine (2) à la moitié des
"racines (5) ; cela donne 7 ; c'est la racine du carré que tu désires, et le
"carré est 49. S'il se présente à toi un problème qui te ramène à cette solu-

"tion, examine alors sa justesse par l'addition ; et si tu ne le peux pas "avec celle-là, alors, par la soustraction, certainement, (tu l'obtiendras)."

L'auteur reconnaît ensuite le cas d'impossibilité et la racine double.

D) Lorsque nous comparons ce résultat avec ceux des Grecs, on observe d'abord la véritable analyse géométrique à l'aide des surfaces ; de là nous vient encore que nous désignons par le terme de "racine" non seulement le côté d'un carré de surface donnée, mais la solution d'une équation du second degré : l'expression complète est : la racine du carré inconnu.

C'est également la première fois qu'est prise en considération la possibilité d'une seconde racine, et il faut souligner ici un illogisme de la démarche scientifique : Alors que la construction grecque par le théorème de Pythagore donnait simplement les deux racines possibles, c'est le mathématicien arabe qui énonce cette possibilité, alors que sa démarche géométrique n'y conduit pas. On pourrait penser à la thèse des "Somnambules" d'A. Koestler, si celui-ci n'y exprimait pas un grand dédain pour la science arabe.

E) Les Indiens. Bhaskârâ, XII° siècle. (Lilavati)

La démarche reste purement algébrique. Pour la première fois apparaissent les deux solutions positives simultanées d'une équation :

Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante,
Un huitième au carré gambadait dans le bois.
Douze criaient tous à la fois
En haut de la colline verdoyante.
Combien étaient-ils au total ?

$(x/8)^2 + 12 = x$; solutions : 48 et 16.

L. Rodet (ref. 2) donne un autre exemple de problème :

D'un essaim de mouches à miel
Prends le carré, puis la racine.
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.
Huit Neuvièmes du tout voltigent dans le ciel ;
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus son mâle bourdonner ;
Attiré par l'odeur, il s'était fait emprisonner.
De combien est l'essaim, le saurais-tu, ma chère ?

Bhaskârâ prend ici l'inconnue auxiliaire telle que $N = 2.x^2$: d'où l'équation : $2.x^2 = (8/9).2x^2 + x + 2$.

Lilavati, c'est la chère disciple, qu'un amour purement intellectuel attache à son vénéré maître.

Ni les Arabes, ni, contrairement à ce qu'on trouve écrit parfois, les Indiens n'ont jamais à notre connaissance envisagé les solutions négatives de l'équation du second degré. L'apport nouveau d'Al Khowarizmi pourrait bien se rattacher au problème du déterminisme. Quand le calcul algébrique fournit deux solutions, la justesse de l'une est affaire de bon sens. Peut-être est-il imprudent de s'engager dans la spéculation philosophique. On ne connaît pas encore tous les documents, et il est certainement bizarre de penser qu'Omar Khayyam aura découvert que l'équation du troisième degré peut avoir deux solutions positives (XI° siècle) avant que le même phénomène ait été franchement reconnu et admis pour le second degré. Mais Al-Khayyam, même si l'on a édifié une mosquée près de son tombeau, est un athée :

> "O toi qui dépends des 4 éléments et des 7 cieux, écrit-il,
> "Tu es bien embarrassé sous l'influence de ces 4 et de ces 7,
> "Bois du vin car, je te l'ai déjà dit mille fois,
> "tu n'as pas de retour à espérer ; une fois parti, on est bien parti"
>
> (Mieli ; II, p. 112 d'après P. Salet, Omar Khayyam, savant et philosophe, 1927)

Autrement dit, je serais tenté de penser que c'est malgré le déterminisme religieux, accordé pour la science à celui des Grecs, que Omar Khayyam a donné certains de ses résultats importants. Quant à Al-Khowarizmi, il précise que ses préoccupations sont d'ordre pratique, partages d'héritages notamment ; ce pourquoi l'inconnue est la surface, le "bien" qui sera traduit en latin par "census". Or, dans l'Islam, les héritages sont fixés non par la volonté d'un testateur, mais par la loi divine : il ne peut y avoir qu'une seule solution.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, les Indiens ont fourni une bonne collection de problèmes à plusieurs solutions, ou une infinité, n'étant peut-être pas retenus par les mêmes scrupules.

III.- De l'indéterminisme dans les équations.

(voir S. SEN et E.S. Kennedy, ref. 6 ; GR. Kaye, ISIS,II, p.352; D. Smith, ISIS VI, p 319)

Les Indiens ont consciemment pris en considération des équations indéterminées. Les premiers exemples donnés par S. Sen, avec des problèmes de pavages indéterminés pour des constructions d'autels, ont surtout un intérêt documentaire parce qu'il n'apparaît pas de méthode générale. Mais, dès le V° siècle de notre ère, Aryabhatta a étudié des équations en nombres entiers de la forme $ax - by = c$. En effet cette équation est liée, comme l'idée de l'infini pour Bhaskara, au "Karma", au retour éternel des choses. Elle sert à étudier les périodes des retours de plusieurs planètes en conjonction. Yuga, le cycle, est le terme général pour désigner ces périodes. Une conjonction triple a pour période le ppcm des périodes des conjonctions concernées. On situe le Déluge au commencement de la Grande Période, à la conjonction simultanée du Soleil et de toutes les Planètes, calculée pour le 17 février 3.102 avant Jésus-Christ. Sont particulièrement remarquées les conjonctions Soleil, Jupiter, Saturne ... De là, on déduit des horoscopes nationaux... Qu'Al Biruni trouvait d'ailleurs stupides. (Kennedy, loc. cit, p. 25°).

Sous sa forme arithmétique précise, le problème se présente ainsi : connaissant les périodes synodiques a_1 , a_2 ... et les ascensions droites r_1 , r_2 ... des planètes, déterminer les entiers x_1 , x_2 ... tels qu'on ait :

$$a_1.x_1 + r_1 = a_2.x_2 + r_2 = \dots = N$$

Comme il y a contestation d'antériorité avec la mathématique chinoise, S. Sen commente ce problème chinois de IV° siècle, dont l'auteur Sun-Tzu-Suan-Ching ne donne qu'une solution :

Calculer N, sachant que, si on le divise par	3,	le reste est	2
" "	5	" "	3
" "	7	" "	2.

Autre problème, traité par Brahmagupta, VI° siècle :

Calculer N, sachant que, si on le divise par	6,	le reste est	5
"	5,		4
"	4,		3
"	3,		2

Autre problème chinois, devenu célèbre en Inde, puis en Europe au Moyen-Age, le problème des 100 poules : "Un coq coûte 5 pièces de monnaie, une poule 3, et on a trois poulets pour une pièce. Si nous en achetons 100 pour 100 pièces, combien aura-t-on respectivement de coqs, de poules et de poulets ? "

Notons encore qu'Avicenne, au XI° siècle, attribue aux Indiens la découverte de la preuve par 9. (Smith).

IV.- Des Nombres négatifs.

On fait généralement aux Indiens un crédit un peu excessif sur ce point.. Diophante d'Alexandrie, au III° siècle, connaît déjà l'addition et la soustraction des négatifs (ta leiponta, les manquants). Ref. 2.

Ce qui est axact, c'est qu'Aryabhatta a fourni la première interprétation intuitive de la règle des signes pour la division, et donc la multiplication, avec le problème des courriers :

"Divisant, en marche opposée, la distance par la somme des vitesses ;
"en marche concordante, la distance par leur différence, les deux quotients
"sont les temps de rencontre des deux (mobiles) au passé et au futur"
Ceci répond à la formule $x/v = d/(v + v')$ et revient à dire qu' Aryabhatta savait déjà tenir compte du double signe $\pm$ et - au dénominateur.
(Ref 5 ; J. Auboyer, art. Calcul)

Remarquons que l'image cinématique, comme modèle intuitif de la multiplication (-). (-), est restée la seule jusqu'à la fin du XVIII° siècle, où arrivèrent enfin les lois de Coulomb en électricité et en magnétisme. C'est ce qui explique la formulation étonnante de D'Alembert, dans la célèbre Encyclopédie, antérieure aux lois de Coulomb : "Les règles des opérations
"algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout
"le monde, et reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache
"d'ailleurs à ces quantités".(art. Négatif).

Or ces règles, y compris tous les cas de la multiplication, numérique et littérale - jusqu'au second degré -, se trouvent dans l'Algèbre d'Al-Khowarizmi.

On y lit en effet, entre autres règles :

wahad al-naqus fi wahad al-naqus wahad za'id : $(-1) . (-1) = + 1$
Ila shai'an fi ila shai'an mâla za'id : $(-x) . (-x) = + x2$

الواحد الناقص في الواحد الناقص واحد زائد

$$(+1) = (-1) \times (-1)$$

إلا شيئا في إلا شيئا مال زائد

$$(+x^2) = (-x) \times (-x)$$

Le pas qui n'est pas franchi, c'est de considérer l'être négatif en soi, comme chose représentable, intervenant comme facteur ou produit d'une multiplication. C'est beaucoup demander. Au-delà des calculs relatifs au mouvement uniforme, il fallait d'autres progrès. Tabit Ibn Qurra au X°siècle et Al-Biruni au XI° siècle ont préparé le cadre nécessaire, avec l'étude de la vitesse dans un mouvement non uniforme, du maximum ou minimum d'une grandeur variable.

B.- Le cadre nécessaire existait par contre en Inde, pour le compte, l'addition et la sousctraction, donc les négatifs, dans les problèmes à plusieurs inconnues du premier degré. Le chapelet semble être une invention indienne (9,art. Rosaries). Il en existait de différentes couleurs, suivant les dieux concernés, pour le compte des prières, ou des malédictions. Ces mêmes couleurs se retrouvent dans les problèmes à plusieurs inconnues, comme on le voit dans l'exemple suivant (3,t.II,p.434) :

5 rouges + 8 noirs + 6 bleus + 90 roupies = 7 rouges + 9 noirs + 6 bleus + 62roupies.

D'où : 2 rouges = (-1) noir + 1 bleu + 28 roupies.

Pour le second degré, une lettre initiale permettait de désigner le "rouge carré", etc.

Ce symbolisme n'a pas laissé de traces dans le calcul arabe, bien que ceux-ci aient emprunté aux Hindous l'usage du chapelet, 99 grains pour le compte des attributs de Dieu - sauf, peut-être, les deux noms donnés aux nombres purs dans une expression du second degré. On les désigne en effet par "dirhems" (grec : drachmes), équivalant aux "roupies" de l'Inde, et aussi par "uqud", du mot qui désigne le collier.

En ce qui concerne la désignation de l'inconnue, notre x, qui se prononce en espagnol "sh", est l'équivalent de cette lettre en arabe, désignant la "chose" dans cette langue. On connaît le "chouia", la petite chose. une deuxième inconnue auxiliaire, désignée "qasm", a permis à Omar Khayyam de traiter certains problèmes de géométrie plane conduisant à l'équation du second ou du 3° degré, en utilisant la théorie des proportions. Il ne semble pas qu'on soit allé au-delà.

V.- <u>La transformation des équations.</u> (Al Khowarizmi)

(Rodet ; 2.1878 ; Youschkevitch, 4, p. 36)

Les équations à solutions positives se ramènent à six cas : $a.x2 = b.x$; $a.x2 = c$; $a.x = c$; $a.x2 + b.x = c$; $a.x2 + c = b.x$; $a.x2 = b.x + c$. Toutes les quantités figurant dans ces équations étant positives.

Soit alors l'équation suivante :

$$X^2 + (10 - x)^2 = 58$$

On applique d'abord les règles de transformation des polynômes indiquées au paragraphe précédent : multiplications :

$$x^2 + (100 + x2 - 20.x)$$

puis, finalement : $2.x2 + 100 - 20\ x = 58$

On procède alors aux trois opérations :

Al - Jabr : $2\ x^2 + 100 = 58 + 20\ x$; On ajoute aux deux membres les "manquants", c'est à dire les quantités retranchées.

Al - radd : $x2 + 50 = 29 + 10\ x$; c'est la simplification, appelée aussi Al-hatt.

Al -muqabala : $x2 + 21 = 10x$: c'est la réduction des termes semblables. En fait, dans les exercices pratiques, Al-Khowarizmi se contente de parler de muqabala : qâbel bĭnhụma ...(*) et le reste suit. Nous n'agissons pas différemment, et ces trois opérations sont bien comprises comme le développement d'un même mécanisme. Dans la pratique, leur ensemble sera désigné par "l'Algèbre et la Muqabala", et finira par prendre, dans la progression de la mathématique, sa place entière aux côtés de l'Arithmétique, une place qu'elle va conserver à peu près, dans nos conceptions scolaires, jusqu'aux réformes de 1968.

B.- La place dans l'idée du savoir.

L'idée de fond, qui vient des Grecs et cherche son accord avec la religion, est qu'il y a une UNITE du savoir, un savoir sans contradictions, et qu'il est possible, par conséquent, d'en fournir une représentation cohérente, comme cadre naturel d'un enseignement.

Aristote le répartissait en quatre grandes branches (le quadrivium) : Logique, Sciences Théorétiques, Sciences pratiques (morale et politique), Sciences poétiques. La Mathématique est une section de la seconde branche, et se répartit en Arithmétique et géométrie. Il y aura des variations sur la place de telle ou telle discipline particulière dans ce tableau, notamment des sciences religieuses ; finalement, il prévaudra dans l'orthodoxie de l'Islam le sentiment que cette place mesurée à la religion dans le savoir est incompatible avec la vraie piété. Mais l'ensemble de l'héritage scientifique arabe s'insère dans une vision de ce tableau.

Pour Al-Farabi, fin du IX° siècle, les Mathématiques comportent :

Arithmétique, Géométrie, Optique, Astronomie, Musique, Science des poids, Mécanique.

- Les Frères de la Pureté, X° siècle : Arithmétique, Géométrie, Astronomie, Musique.
- Al-Khowarizmi II (fin X° siècle) : Même tableau + Mécanique.
- Avicenne (début XI° siècle) : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique, + une dizaine de sciences dérivées.
- Al-Ghazali, XI° siècle : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique.

Ce tableau, d'une constance remarquable, donne sa mesure au progrès accompli au XIV° siècle par Ibn Khaldoun :

Il y a deux grandes branches des Mathématiques :

a) Les sciences du nombre :-Arithmétique
-Science du calcul
-Algèbre et Muqabala

(*) "Fais la muqabala entre les deux membres".

-Les transections commerciales

-Les partages des successions

b) Les sciences géométriques

-géométrie sphérique et conique

-arpentage

-optique

c) Astronomie

d) Musique

(Tout le tableau qui précède, d'après L. GARDET, Introduction à la Théologie Musulmane, VRIN, 1948) pp 102-124. Le plan d'Ibn Khaldoun suit exactement les préoccupations d'Al-Khowarizmi. C'est la pratique qui oriente la réflexion scientifique, AU CONTRAIRE D'ARISTOTE, pour qui elle est "théorétique" ; et il n'est pas improbable que ce point de vue ait permis de l'accréditer. "C'est Dieu qui a envoyé Mohammed, écrit Al-Khowarizmi au début de l'Algèbre, en un temps où il n'y avait pas de prophétie, où l'on reniait la vérité, et il a ouvert par lui les yeux des aveugles, sauva par lui ceux qui étaient perdus, élevé les petits, rassemblé les dispersés... Il y a toujours eu des savants, dans les temps et les peuples du passé, qui ont écrit des livres sur les sciences et les raisonnements de la philosophie, à l'intention des générations futures ... Lorsqu'un homme a trouvé le premier ce que personne n'avait découvert avant lui, ceux qui viennent après en héritent ; quand un homme commente ce qu'ont laissé les premiers et qui était obscur, il en rend le chemin aisé, et la compréhension facile. Et lorsqu'un homme a trouvé dans une partie du livre une erreur et ne le rejette pas, mais qu'il redresse et perfectionne la pensée de son ami, c'est une oeuvre utile, et il n'y a aucune vantardise de sa part..." Il a donc fait un livre abrégé et concis, pour les partages d'héritages, pour les canaux à creuser ...

Cependant qu'Omar Khayyam, hérétique et athée fieffé qui avait plus que d'autres son franc parler, considérait bel et bien, vers l'an mille, l'algèbre comme une spécialité : Il y avait, pour lui, des "algébristes" (Youschkevitch, p. 36 ; voir aussi, p.10-11, le récit de ses ennuis.

N'oublions pas que, pour l'Islam, la chose nouvelle, c'est très précisément l'hérésie. S'ils n'ont pas toujours évité par là les ennuis avec l'autorité, les savants de l'Islam ont assez bien réussi, dans l'ensemble à persuader l'histoire occidentale qu'ils n'avaient rien inventé de neuf.

C.- Signification du mot "Algèbre".

Cette question présente un intérêt pour l'enseignement, car si la thèse de Salomon Gandz est exacte, à savoir que le mot dériverait d'un terme assyre-babylonien en exprimant l'équilibre, l'égalité, on pourrait bien penser que l'idée sous-jacente à toute la théorie est une réflexion sur l'usage de la balance. En effet, le sens général de la racine jbr, dans les langues sémitiques, est celle de force.

D'autre part, chez Bhaskârâ, en Inde au XII° siècle, l'idée de l'égalité, tulya, dérive clairement de celle de balance, tula (Rodet, réf.2); or la balance à deux plateaux, en Inde, n'apparaît pas avant le VI° siècle, autrement dit, à peu de chose près, l'époque des premiers grands mathématiciens Indiens. La balance ancienne était semblable à la balance romaine. Par contre on trouve la balance actuelle à 2 plateaux sur l'obélisque d'Assurbanipal (7° siècle avant J-C) en Assyrie. (5, art : balance).

Reprenons maintenant les expressions de Bhaskârâ, d'après L. Rodet : " Appelant x la mesure de la quantité inconnue, on fera à l'aide de ce symbole ce qui est prescrit par l'énoncé ; puis on préparera adroitement deux membres en équilibre (tulya), en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant".

Il ne semble pas illégitime de conclure, de ces éléments divers, que la transformation des équations a procédé d'une réflexion sur l'usage de la balance à deux plateaux. Pour l'enseignement, il nous semblerait hautement pédagogique de fonder les différentes axiomatiques sur les usages d'instruments simples. Sans vouloir mêler tous les problèmes, cette méthode simplifierait la définition de la géométrie affine en 4° : l'usage précisément délimité d'un jeu de règles graduées astreintes au seul glissement sur elles-mêmes.

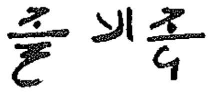
VI.- La symbolique algébrique.

C'est une invention des Arabes d'Occident. D'après un texte d'Ibn Khaldoun, XIV° s, elle pourrait remonter au mathématicien marocain Al-Banna. Malheureusement le traité d' Al-Banna auquel se réfère Ibn Khaldoun est perdu, Il est question de raisonnement "abstrait", sur les "lettres" (huruf); mais on peut hésiter sur le sens à donner à ces expressions.Youschkevitch (4,p.104) juge raisonnable d'y voir le signe d'un rôle précurseur.

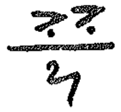
En tout cas le mathématicien espagnol de Grenade Al-Qalaçadi (XV° s.) est arrivé à une expression très proche, pour le calcul algébrique, de notre intuition scolaire classique. (Woepke, ref. 2).

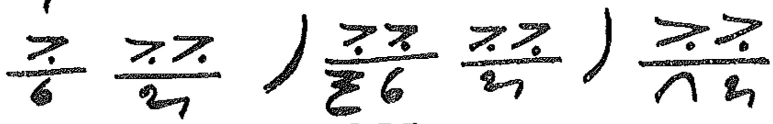
A.- Calcul des radicaux :

-  $\sqrt{3}$

-  $\sqrt{3}$ - $\sqrt{5}$

-  $\sqrt{\frac{3}{5}}$

-  $\sqrt{\sqrt{2}}$

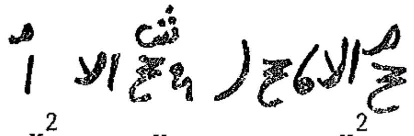


$$\sqrt{6} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{36}} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{72}}$$

B.- Ecriture des polynômes et transformation des équations :

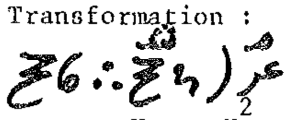
1) 

$\overset{x}{6} \; - \; 5 \;\; \overset{x^2}{3}$: lire $3\,x^2 + 5 - 6\,x$

2) 

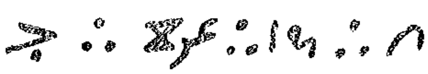
$\overset{x^2}{1} \; - \; \overset{x}{32} \; = \; 36 - \overset{x^2}{3}$: lire $3x^2 - 36 = 32\,x - x^2$

Transformation :



$36 + \overset{x}{32} \; = \overset{x^2}{4}$ lire $4\,x^2 = 32\,x + 36$

C.- Ecriture d'une proportion :



x 84 12 7 lire : $\frac{7}{12} = \frac{84}{x}$

Les trois séries d'exemples nous permettent de faire le point.

On peut dire qu'un commencement de structure algébrique, associé à l'emploi des radicaux et du signe d'égalité, apparaît à l'évidence. Il est même vraisemblable que notre sumbole "radical" n'est autre, un peu déplacé, que l'initiale  du mot arabe désignant la racine. Mais ce symbole n'a

visiblement pas encore un sens univoque. Nous avons vu, (VI,C) que le mot "racine" avait deux sens différents ; et nous avons expliqué comment il les avait pris et conservés dans notre langage actuel. Ces deux sens apparaissent dans les exemples A d'une part, C d'autre part. On voit enfin,en comparant B,2) et C, que le signe ∴ peut avoir plusieurs sens.
Il n'y a pas encore à proprement parler de signe opératoire. Le symbole d'égalité, dans la transformation des équations, nous paraît finalement le plus élaboré.

Rappelons que notre signe d'égalité remonte au XVI° s. et s'appuie sur l'intuition des droites parallèles, choses on ne peut plus égales.

Cette discussion sur une symbolique en voie de formation nous paraît intéressante dans l'enseignement, non pas tellement pour faire l'histoire du calcul algébrique, mais pour comprendre la nature et la portée de telle autre symbolique en voie de formation , par exemple l'usage des quantificateurs. Le langage abrégé, sténographique, rend parfaitement compte du caractère "muet" des variables mises en relation. Puis apparaissent des règles d'emploi :

par exemple : si : $a - b = c$, alors $a = c + b$, ce qui est l'opération précisément désignée par "Algèbre".

De même, les règles de transformation d'une proposition où figurent des quantificateurs, lorsqu'on en effectue la négation, donnent à ces symboles leur structure, et peuvent légitimer leur emploi systématique.
Il est évident que toutes nos remarques perdent leur objet, si on a donné de la soustraction une définition axiomatique a priori ...

VII.- Le Calcul Indien et Al-Khowarizmi.

Nous n'insisterons pas sur les divers algorithmes de calcul possibles, et pratiqués à la suite des Arabes vers le XV° siècle. Mais il nous paraît intéressant de penser, et de dire, que la pratique du "Calcul indien", comme Al-Khowarizmi l'appelle, doit provenir d'une réflexion sur le boulier chinois, ou abaque. Comme le remarque D.E. Smith à propos de l'Arithmétique publiée à Trévise en 1477, elle est appelée "L'arte del abaccho" bien que l'usage de l'abaque ait été abandonné en Italie depuis longtemps au XV° siècle (10, t.VI,p.313).

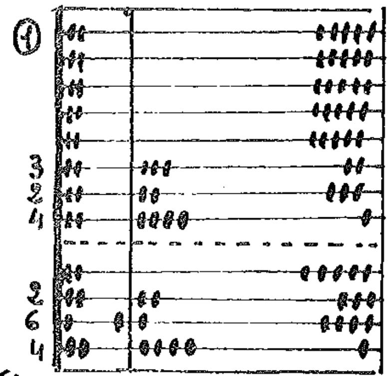
Il est d'abord clair que la technique d'Al-Khowarizmi pour la multiplication s'adapte au boulier ; nous la suivons d'après le texte et l'exemple donnés par Karpinski (10, t. III,p. 401) : 324 x 264 .

Soit 324 le multiplicande, et 264 le multiplicateur ; on multiplie d'abord 3 le nombre de centaines, par 264. A la dernière des multiplications partielles, 3 × 4 , le 3 disparaît, et il est remplacé par le 2 de 12, la dizaine passant en retenue.

Cela fait, on passera à la multiplication des 2 dizaines de 324 par 264. Sur le papier, cela se traduira par le déplacement de 264 vers la droite, le 4 de 264 étant placé sous le multiplicande partiel 2.

1) Si vis multiplicare unum numerum per alium, pone numerum qui vis multiplicare per suas differentias et numerum per quem volueris multiplicare per suas. Ita quod prima illius per quem multiplicare volueris sit sub ultima illius quem multiplicare volueris.

fig.5



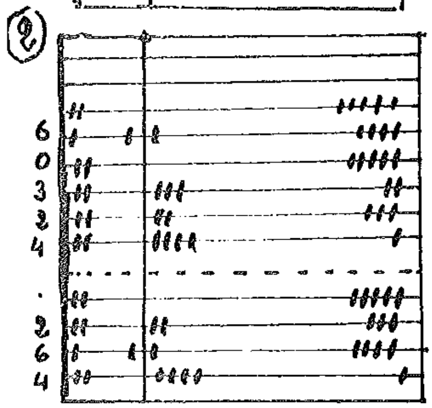
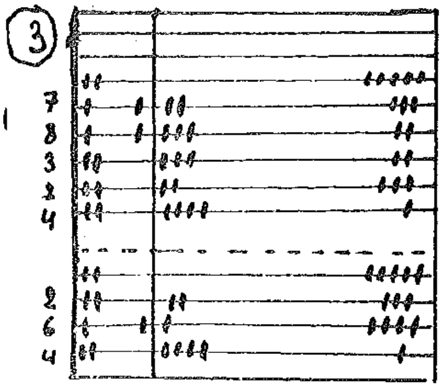


fig. 6

2) Deinde multiplica ultimam per ultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe in loco illius per quem multiplicas. Si vero in decem excreverit scribe super eam figuram nichili et de decem fac unum in antea. Si autem ultra decem fuerit scribe ibi et de decem fac unum in antea. Si vero in duo decena vel in plura excreverit (etc.)

3) Deinde multiplica eandem per penultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe super penultimam illius per quem multiplicas. Si vero in X vel ultra fac sicut de ultima ...

fig.7



4) ... et ita multiplica illam ultimam per omnis

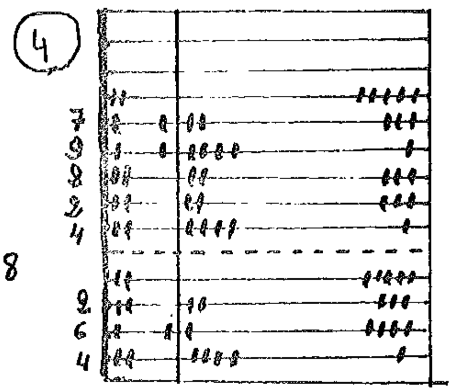


fig.8

usque ad primam. Quando autem multiplicas ultimam per primam dele ultimam (...)

4bis) Deinde protrahe figuras illius per quem multiplicas ita quod prima illius sit sub penultima eius quem multiplicas (...)

5) ... et multiplicata illam penultimam quilibet qui per omnis figuras illius per quem aliquem multiplicas sicut predictum est usque ad primam

6) ...

7) ... et iterum dele illam penultimam (...)

8) 9) 10)
... et sic multiplica omnis figuras illius quod multiplicas per omnis illius per quem multiplicas.

4bis

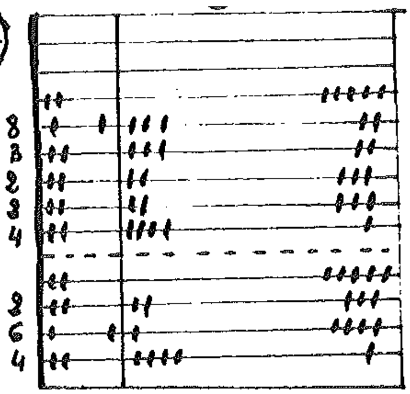


fig. 9

5

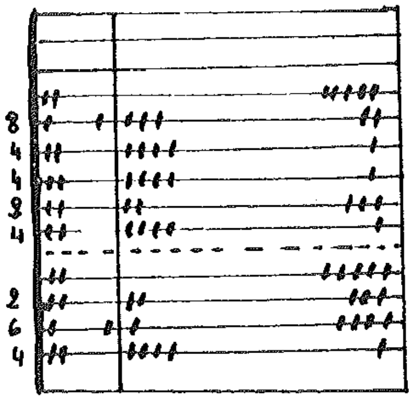


fig. 10

7

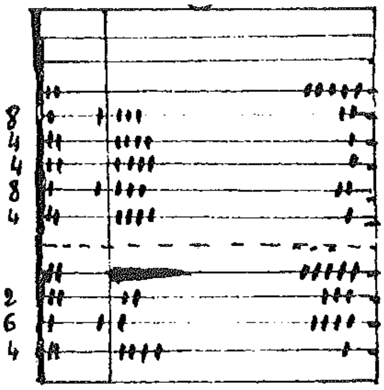


fig. 11

8

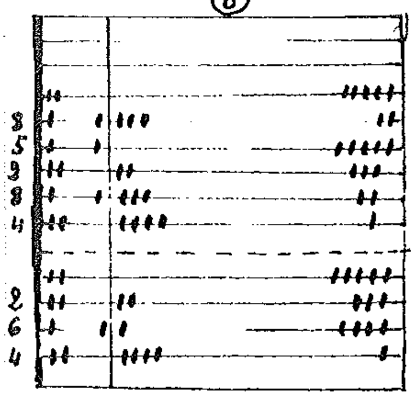


fig. 12

9

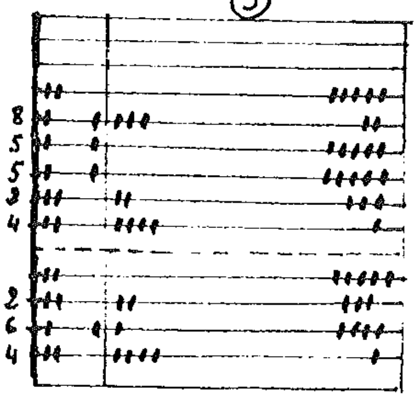


fig. 13

10

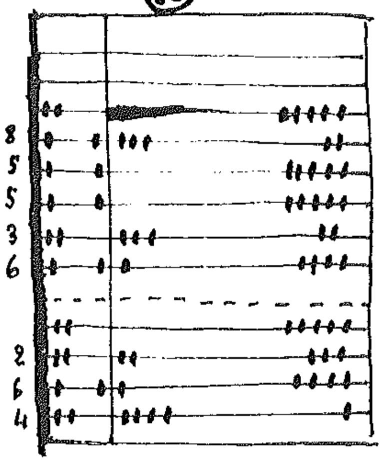


fig. 14

La méthode indiquée pour la division se met aussi directement en oeuvre sur le boulier.

Notons encore qu'Al-Khowarizmi donne séparément, dans la liste des chiffres indiens, 1, 2, 3, 4 d'une part, et 5,6,7,8,9,0, d'autre part. Ce mode de calcul ne devait pas être très ancien en Inde ; en tout cas la méthode d'Aryabatta (+499) est différente, et ne paraît pas s'adapter au boulier. Par contre la méthode décrite dans le Tsi Kou Souan King, traité chinois du VII° siècle, est identique dans son principe à celle d'Al Khowarizmi (Schrimpf, ref. 5 art.Calcul).

R.Schrimpf indique enfin, dans l'article "Abaque", ref 5, qu'on ne trouve pas trace des bouliers (abaques) dans les traités mathématiques chinois antérieurs au VII° siècle.

Il faut insister sur le fait que la position d'un chiffre était utilisée bien avant les Indiens et les Chinois dans la pratique opératoire. Qu'il suffise de dix signes, la position faisant le reste, c'est ce que le boulier a permis aux Chinois et aux Indiens de découvrir.

Il est enfin remarquable que les Romains aient déjà connu l'abaque, de type très semblable, qui s'adapte en effet fort bien à leur système de numération. Mais, l'abaque étant utilisée par les gens de basse condition, ils ne l'ont pas exploitée au-delà de l'addition. On a rarement, en mathématiques, l'occasion de considérations à caractère social très pertinentes ...

VIII.- <u>L'extension de la notion de nombre.</u>

Voir ici Youschkevitch, ref 4, pp 84 ss.

P. 87 : "A l'instar des Anciens, al-Hayyâm (Omar Khayyam) entend par "nombre, au sens propre du terme, un ensemble d'unités indivisibles. Il soulève "en même temps la question du lien existant entre les notions "entre les notions de rapport et de nombre. Ce problème est, selon les termes "d'Al-Khayyam, de nature philosophique et de ce fait n'est pas étudié par les "géomètres : "Un rapport de grandeurs peut-il être par essence un nombre ou "est-il accompagné d'un nombre ou encore le rapport est-il lié à un nombre non "par nature, mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport "est-il lié par nature à un nombre et n'a-t-il besoin de ce fait de rien "d'extérieur ?" Tout en laissant de côté l'aspect "philosophique" de la "question, al-Khayyam considère comme <u>nécessaire d'introduire dans les ma-"thématiques une unité divisible et une nouvelle catégorie de nombres</u>,qui "correspondent à des rapports quelconques de grandeurs. En démontrant la "première propriété des rapports composés,il choisit une certaine unité et "suppose que son rapport avec une grandeur auxiliaire G est égal au rapport de "A avec B. Cette grandeur G, dit-il, nous allons "la concevoir non comme une "ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que "l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres "absolus et véritables car le rapport de A à B peut souvent ne pas être mesu-"rable numériquement c'est-à-dire qu'on peut ne pas trouver deux nombres dont "le rapport soit égal à ce rapport". C'est ainsi, explique Al-Khayyam, que procèdent les calculateurs et les arpenteurs qui parlent de la moitié ou d'une autre partie d'une unité supposée indivisible ou d'une racine de cinq, ou de dix, etc. L'unité choisie est en tout cas divisible et "la grandeur" G, qui est une grandeur arbitraire, est considérée comme un nombre au "sens indiqué."

Ce texte est d'une importance extrême. Une fois encore, il montre comment la réflexion sur l'instrument pratique de travail, ici la chaîne d'arpenteur, conduit à la structure de raisonnement. C'est la manipulation des longueurs qui mène à la définition des réels.

D'autre part, à la découverte intellectuelle, il faut associer un réel courage moral. Sur deux points au moins, ce que dit Al-Khayyam heurte l'orthodoxie musulmane . La nouveauté, c'est l'hérésie ; l'introduction, pour la nécessité du travail humain, d'êtres nouveaux, sans l'intervention divine, est une hérésie caractérisée... ce pourquoi Al-Khayyam s'abstient de la discuter sur le plan philosophique. D'autre part l'atomisme et les indivisibles, depuis Ashari (X° siècle) ont caractère de doctrine officielle.

Sur ce point, je me dois d'ajouter qu'il a soulevé au Colloque Inter-IREM de CAEN une vive et intéressante controverse avec M.T. LEVY et Melle MIKOL de l'IREM de PARIS-NORD. Il est évident que le point de vue de Louis MASSIGNON (ref 1), sur lequel ils s'appuient, a et doit avoir une grande autorité, par sa connaissance incomparable de l'Islam et de la langue arabe.

"(Le) caractère de la langue arabe, écrit-il (I,p. 458) a eu "pour résultat d'infléchir les connaissances qu'elle exprimait dans le sens "d'une pensée analytique, atomistique, occasionaliste et apophtegmatique. Une "Une étude récente sur "l'involution sémantique du concept" (tadhmin), expose "comment les langues sémitiques tendent à la formulation abrégée et abstraite, "algébrisent" par contraste avec la géométrisation aryenne. En effet, la pensée "peut se projeter, avec son objet, dans l'espace, comme c'est le cas pour la "figuration pythagoricienne des nombres ; elle peut aussi se replier sur elle-"même, dans le temps qui lui est propre et y construire son objet (Cf. le "temps du schématisme kantien).

" La langue arabe, qui favorise cette intériorisation de la "pensée, était particulièrement apte à exprimer les sciences axactes et à les "développer dans le sens qui a été historiquement celui du progrès des mathé-"matiques : passage d'une arithmétique et d'une géométrie intuitives, presque "contemplatives, qui préfigurent, chez Platon, la contemplation des natures "et des essences intelligibles, à une science des constructions algébriques, "où finissent par s'unifier arithmétique et géométrie ...

Que dire de ces érudites considérations ??? Les arabes n'ont pas algébrisé plus que les Grecs et les Indiens, Platon ne compte pas pour le présent problème. Les Arabes l'ont fort peu connu, par rapport à Aristote, Euclide, Archimède, Diophante. Il y a peu de rapports entre la poésie romantique anglaise, et l'article scientifique écrit par Japonais dans une revue américaine spécialisée; encore ce Japonais peut-il, rentré chez lui, écrire des poèmes, avec pinceau et kimono ... L'arabe a été langue internationale, et Al Khayyam écrivait ses poèmes en persan. Al Tusi a écrit son principal traité en persan, puis l'a traduit en arabe.

Melle Nikou et M. Lévy, pour approfondir cette discussion, m'ont signalé les réflexions de L. Gardet sur les "Ad'dad", les mots arabes pouvant avoir des significations contraires (exemple français : louer un appartement). De tels mots sont assez nombreux en arabe, et un type est pour nous particulièrement intéressant à cause de la "muqabala" d'Al-Khowarizmi, c'est le "muqabal" qui désigne la mise en opposition symétrique de deux termes, ou de deux concepts. Est-ce le mot qui a créé l'idée mathématique, ou l'usage de la balance qui a trouvé un mot bien adapté, ou la pratique algébrique déjà en usage qui a trouvé ainsi à se codifier. Le rapprochement est en tout cas légitime et évocateur, au même titre que celui de Bhaskara avec l'infini et la transmigration des âmes. Mais les exposés arabe et indien de l'algèbre sont trop proches pour que nous en tirions de trop grandes conclusions. (L'ambivalence dans la culture arabe. Authropos 1967;pp. 121 s s).

Avec la langue arabe, L. Massignon et R. Arnaldez donnent aussi un rôle spécifique et positif à l'Islam. Ainsi, loc. cit. p. 523 :

"Après les invasions des Barbares, qui avaient assombri la "brillante civilisation gréco-romaine, l'Occident fut réchauffé par le rayon- "nement de cette autre civilisation méditerranéenne, qui avait su, pour exploi- "ter les dons d'Allah, prendre le meilleur héritage grec, en le marquant d'un "esprit nouveau qui doit beaucoup, d'une part à la grande pensée syncrétique "et mystique de l'Iran, de l'autre au génie propre des Arabes et de l'Islam sunnite."

La science des savants musulmans s'exprimant en arabe est un fait historique auquel, actuellement encore, des historiens des Sciences connus ne rendent pas suffisamment justice. Voir, par exemple, KLINE, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford U.P. 1972). Mais si l'on donne une place spécifique importante à la langue et à la religion dans le déterminisme de son éveil, il faut alors aussi expliquer son déclin. Sinon c'est faire litière du puissant désir de réforme qui anima certains penseurs musulmans à la fin du XIX° siècle, venus chercher même une partie de leur inspiration à Paris. Ainsi Jamal addin Al-Afghani, dont, écrit L. Gardet (Introduction à la Théologie Musulmane, p. 79), "la puissante figure de penseur prophétique domine toute la pensée religieuse musulmane moderne", a pu écrire : "A la vérité, "la religion musulmane a cherché à étouffer la science et à en arrêter les "progrès. Elle a réussi ainsi à enrayer le mouvement intellectuel ou philosophique "et à détourner les esprits de la recherche de la vérité scientifique. Pareille "tentative, si je ne me trompe, a été faite par la religion chrétienne, et les "chefs vénérés de l'Eglise Catholique n'ont point encore désarmé que je sache... "Il est permis de se demander comment la civilisation arabe, après avoir jeté "un si vif éclat sur le monde, s'est éteinte tout à coup ; comment ce flambeau "ne s'est pas rallumé depuis, et pourquoi le monde arabe reste toujours enseveli "dans de profondes ténèbres.

"Ici la responsabilité de la religion musulmane apparaît tout "entière. Il est clair que, partout où elle s'est établie, cette religion a "cherché à étouffer les sciences, et elle a été merveilleusement servie dans "ses desseins par le despotisme..." (Journal des Débats, vendredi 18 mai 1883 ; publié par A.-M. Goichon sur communication de L. Massignon dans son édition de la "Réfutation des Matérialistes, pp. 178-184).

Nous n'insisterons pas. S'il est vrai que ce flambeau s'est éteint vers le XV° siècle, il n'en résulte assurément pas qu'il n'ait point brillé, comme d'assez nombreux historiens des sciences l'ont peu ou prou écrit. L'Islam a pu représenter la liberté : "Man aslama fa-awlayka taharrou rachidan" Ceux qui se sont soumis à Dieu se sont libérés vraiment. (Coran, 72,14).

Mais enfin le milieu des philosophes, auquel les mathématiciens appartenaient, n'a pas réussi dans l'ensemble à faire authentifier ses apologies fondées sur le Coran. Voir encore L. Gardet; loc. cit. pp 320 ss. Ce qui est en cause, ce n'est pas L'Islam ; c'est la puissance répressive de l'Institution constituée en orthodoxie religieuse ... et aussi bien antireligieuse.

Je ne sais pas s'il existe un déterminisme linguistique ou religieux pour expliquer ou appuyer la démarche d'Omar Khayyam ; mais, en ce qui concerne la définition des réels, il s'agit d'un apport théorique. Les Grecs connaissaient les fractions continues, et la définition d'un rapport, par précisément l'Algorithme d'Euclide :

$$a = bq + r \ , \quad r \quad b-1 \quad : \quad a/b = q + r/b$$

$$b = rq' + r' \quad r-1 \quad ; \quad b/r = q' + r'/b$$

$$a/b = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{r'}{b}}$$

Lorsque le rapport est rationnel, la théorie du p.g.c.d. montre que l'opération s'arrête ; sinon elle se poursuit indéfiniment, et on ne connaît du nombre que des valeurs approchées fournies par les réduites. C'est ainsi qu'en 230 avant Jésus-Christ Apollonius donne pour π la valeur : 377/120, correspondant à

$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{17}}$ pour la troisième réduite, qui s'esprime simplement dans le système sexagésimal :
$3,8'\ ,\ 30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$

la valeur exacte 333/106 de la 3° réduite, correspond à $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$

Les mathématiciens indiens Brahmagupta (7° siècle) et Bhaskâra (XII°) ont étudié l'équation connue sous le nom d'équation de Pell

$D.x^2 + 1 = y^2$, et le second en donne la solution sous la forme :
$x_n = 2n / D - n^2$, $y_n = D+n^2 / D-n^2$ n étant un entier convenablement choisi. (G.R.KAYE,10,t.2,pp 336ss).

Dans ces conditions, l'apport d'Omar Khayyam est défini avec une grande précision par A. Youschkevitch (p. 85)

"Al-Hayyam élargit (...) la définition euclidienne de la relation : "plus grand que". (A/B et C/D étant définis par les suites de quotients partiels "q_o, p_1 , ...q_m ; q'o , q'_1 , ... q'_m) D'après Al-Hayyam, on a A/B$>$C/D si, "lorsque $q'_k = q_k$ pour k m, les inégalités q_m q'_m pour m impair et q_m q'_m "pour m pair sont satisfaites. Notons qu'Al-Hayyam étend aussi cette définition "au cas où un seul des deux rapports est incommensurable et l'autre commensurable " (c'est-à-dire lorsque la décomposition de ce dernier en fraction continue " s'arrête à un certain seuil) ; il donne ainsi un critère permettant de comparer " un nombre irrationnel avec un nombre rationnel.

"La définition de l'égalité des rapports, telle qu'al-Hayyam l'a « donnée, est identique à certaines définitions données par ses prédécesseurs. « La définition de l'inégalité des rapports, par contre, semble pouvoir lui être « attribuée. De plus, al-Hayyam s'est particulièrement efforcé d'établir l'équi- « valence des deux théories : la sienne d'une part et celle d'Eudoxe et d'Euclide « d'autre part. Dans toute une série de propositions, al-Hayyam démontre que des « rapports qui sont égaux ou inégaux au sens d'Euclide, le sont aussi dans son « sens et inversement". (Et il donne une place fondamentale, dans ses démonstrations, au principe de continuité).

Autrement dit, al-Khayyam a donné le premier exemple conscient d'extension d'un ensemble muni d'une certaine structure. Les rationnels sont un sous-corps du corps des réels. Il est aussi le premier à avoir compris la mathématique de l'inégalité.

Sans vouloir épuiser le débat philosophique, on peut encore ajouter que, si l'on cherche le mot "realis", d'où procède "réel", dans un dictionnaire latin classique, on ne l'y trouvera pas. Ce mot est un néologisme du XII° siècle, et se rattache au débat sur les "universaux". Un nombre est dit "réel" parce qu'il est pour nous davantage qu'un outil de calcul : il est vraiment une chose donnée par la nature. La nature nous donne les "réels" par les chaînes d'arpenteur ... étymologiquement, un "irrationnel" n'est pas "réel", un "négatif" n'est pas "réel", comme le montrent bien les bilans usuels des conférences sur le désarmement... Si le résultat est dit "négatif", c'est qu'il n'y a pas de résultat.

On peut ici esquisser une reconstitution épistémologique, et penser à la belle conclusion que G. Bachelard donnait, dans "Le nouvel esprit scientifique", à son étude de l'épistémologie non-cartésienne :

"Chacun peut revivre ces mutations spirituelles en se rappelant le « trouble et l'émoi apportés par les nouvelles doctrines dans la culture personnelle: « elles réclament tant d'efforts qu'elles ne paraissent point naturelles. Mais « la <u>nature naturante</u> est à l'oeuvre jusque dans nos âmes ; un jour on s'aperçoit « qu'on a compris. A quelle lumière reconnaît-on d'abord la valeur de ces synthèses « subites ? A une clarté indicible qui met en notre raison <u>sécurité</u> et bonheur. « Ce bonheur intellectuel est la marque première du progrès." (p.178)

On pourrait encore observer que, d'une certaine façon, G. Bachelard se mettait ici en contradiction avec certaines de ses thèses antérieures. Dans son livre sur "La formation de l'esprit scientifique", il consacrait un important chapître à "l'obstacle substantialiste", à ce besoin qu'on avait autrefois, avant l'ère scientifique de l'humanité, de donner une substance intuitive, naturelle, aux notions introduites dans les raisonnements. Nous voyons que cette tendance est de toujours. Un exemple très frappant, parce qu'encore récent, nous est fourni par les nombres "imaginaires". C'était le terme de Descartes, qui lui assura une belle longévité. Son remplacement par le terme de "complexes" correspond à une "substantification" incontestable dans les esprits.

IX.- Les calculs approchés.

Ici encore, l'ouvrage de référence est celui de M. Youschkevitch, et je n'ai rien d'original à apporter. Il nous apparaît qu'avec les idées d'Omar Khayyam une étape importante est franchie. Dans le cadre des programmes actuels du Second degré, nous pouvons concevoir quelques thèmes de problèmes ayant une histoire.

A.- L'Intégration

Entre la réflexion algébrique sur les surfaces d'Al-Khowarizmi et la définition numérique de grandeurs continues par Omar Khayyam, il faut faire une place à Thabit ben Qurrah (822-900). Ce n'est pas un musulman, mais un sabéen de Harran (ou Caran). Une bonne partie des résultats étaient déjà connus d'Archimède. Mais la méthode des intervalles inégaux est originale, ainsi que la progression des résultats partiels. (Youschkevitch, pp. I24ss).

1° Sommations.

On se ramène évidemment toujours à une expression de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$. Mais le modèle graphique n'a pas perdu sa valeur pédagogique.

a) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

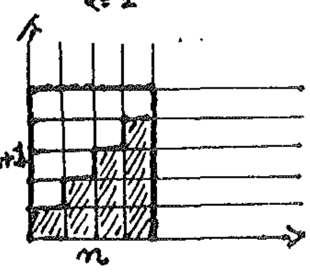
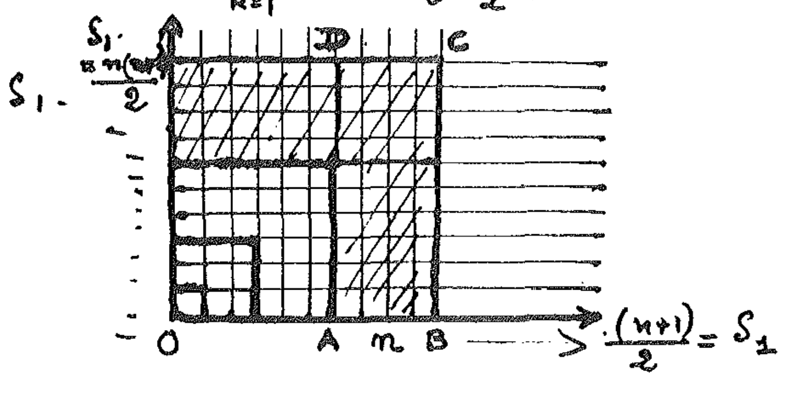


fig. 15.

b) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$



La surface du rectangle ABCD est n.(n(n+1)/2) ; la réunion des rectangles ABCD et A'B'C D' a donc pour surface : 2.n2(n+1)/2 - n2 = n3.
La formule de sommation en résulte.

(Al-Karadji, contemporain d'Ibn Qurrah ; Youschkevitch, p. 63)
une formule dérivée des précédentes est :

$$S_3 - S_1 = \quad (n^3 - n) = \quad (n + 1)\ n\ (n - 1)$$

Al Karadji reconnaît n'avoir pas réussi à donner de démonstration pour la formule relative à la somme des carrés. Le modèle géométrique nous permet d'en concevoir plusieurs. Mais avec Ibn al Haytham (Alhazen), d'une vingtaine d'années plus jeune, le principe d'une démonstration générale est trouvé : Soit à trouver S_n , on porte en abscisse S_{n-1} et n en ordonnée, la surface p. S_{p-1} est une combinaison linéaire de S_1 S_2 ...., S_{p-1}, $S_{p.1}$bn al Haytham explicite les calculs complètement pour S_1, S_2, S_3, S_4est donné pour la première fois, et il est probable que nous avons aussi la première démonstration véritable de S_2, dont l'expression était connue depuis Archimède : donc le premier cheminement complet vers l'intégration des surfaces et des volumes (cf.H.Suter, Die Abhandlung uber die Ausmessung des paraboloides von Ibn al Haythan Bibliotheca Mathematica, 1912,P.292 sz).

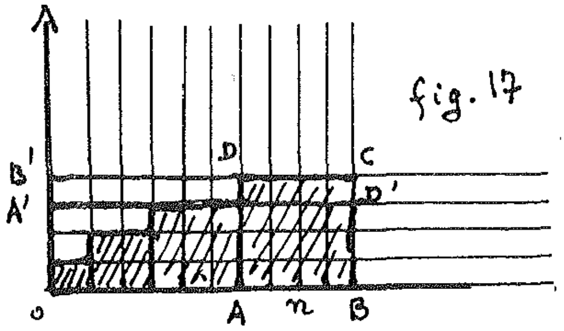


fig. 17

Dans la figure correspondant au calcul de S_2 , la réunion du carré ABCD et du rectangle A'B'CD' a pour surface : $n^2 + n(n - 1)/2$; donc $n.n(n+1)/2 = 3.S_2 /2 - S_1/2$.

quoi qu'il en soit de cette acquisition, concernant S_2, Thabit Ibn Qurrah l'utilisait pour donner la somme des n premiers carrés impairs.

La somme des n premiers nombres impairs est : $(2k-1) = n^2$

et celle des carrés correspondants : $(2k-1)^2 = \dfrac{4n^3}{3} - \dfrac{n}{3}$

2°. Convergence vers l'intégrale.

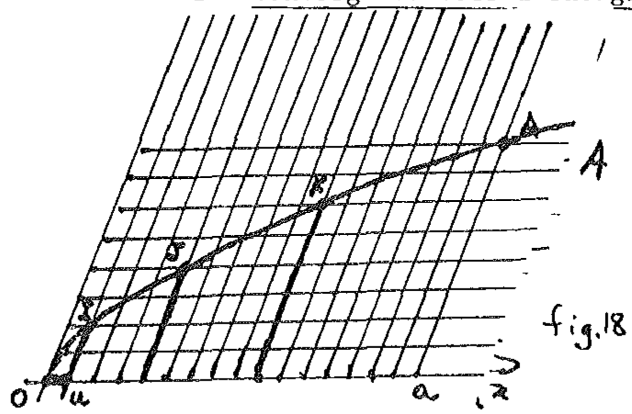


fig.18

Soit, d'après les équations d'Apollonius, en axes orthogonaux ou obliques, la parabole

$$y^2 = 4\ px$$

pour calculer la surface comprise entre la parabole (y positif), Ox, et l'abscisse a, Thabit Ibn Qurrah partage a en n^2 parties égales, u ; puis il considère les intervalles u, 3u, 5u ..., (2n-1)u consécutifs. Les ordonnées sont alors proportionnelles à 2,4,6, etc. Soit alors s la surface du parallélogramme construit sur u et pu, la surface du polygone inscrit OIJK ... Aa est :

$$s(1 + 3^2 + \ldots. \quad (2n - 1)2) = s.(4\, n^3/3 - n/3)$$

D'autre part la surface du parallélogramme OaAa' est $s.2n^3 = S$

La surface cherchée est donc :

$$(2/3).S - \quad S.(1/_{6n2})$$

Dans sa proposition n° 14, Thabit Ibn Qurrah a préalablement démontré que, pour n suffisamment grand, ce rapport peut être rendu inférieur à tout rapport A/B fixé d'avance. Donc, proposition 18, la différence entre (2/3)S et la surface cherchée peut être rendue plus petite que toute surface fixée d'avance.

Quelques années plus tard, Ibn al Haytham suit la même démarche pour calculer le volume du paraboloide.

Il est donc clair qu'aux environs de l'an mille, la science arabe a bien pris conscience de la notion de limite, et de son application au calcul de l'intégrale définie.

B.- <u>Résolution approchée de certaines équations</u>.

1° <u>Equation du 3° degré</u>.

Omar Khayyam avouait que tous ses efforts pour résoudre numériquement ces équations étaient restés vains : "La démonstration de ces formes pour le cas où l'bjet du problème est un nombre absolu, n'est possible ni pour nous, ni pour aucun de ceux qui sont passés maîtres en cette science. Peut-être qu'un de ceux qui viendront après nous la réalisera."(Youschkevitch, p.96).

Par des considérations de géométrie analytique, il démontrait que, dans certains cas, l'équation avait certainement une solution positive, et deux solutions positives dans certains autres cas. Ce problème était directement lié à celui de la trisection de l'angle :

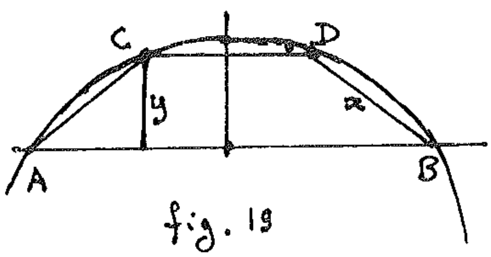


fig. 19

$AB = a \quad ; \quad AC = CD = DB = x$

$BC^2 - y^2 = \left(\frac{a + x}{2}\right)^2 \quad ; \quad x^2 - y^2 = \left(\frac{a - x}{2}\right)^2 \quad ;$

$BC^2 - x^2 = ax \quad ; \quad BC^2 = ax + x^2$ (théorème de Piolémée)

On a ensuite, appelant D le diamètre du cercle :

$$BC^2 = \frac{4x^2.(D^2 - x^2)}{D^2}$$

D'où l'équation : $x^3 - (3D^2/4).x + (D^2/4).a = 0$

Pour étudier ce problème, Omar Khayyam le ramène, dans le style d'Al-Khowarizmi pour le second degré, au type : $x^3 + a = b.x$
Et il considère l'intersection de deux coniques :

- La parabole $x^2 = y.\ b$
- L'hyperbole équilatère $y^2 = x^2 - (a/b).x$

Il y aura sur la branche de droite (gauche pour Al-Khayyam, l'axe Ox étant pour lui orienté vers la gauche) 0 ou 2 solutions.

Il est clair qu'il en existe une voisine de (a/b) et légèrement supérieure, lorsque cette quantité est petite. Avec les notations de la trisection de l'angle, cette valeur approchée est a/3.

Al-Kasi, au XV° siècle, en donne un procédé de calcul par itération.

On pose $x_1 = a/b$, puis la suite définie par $x_n = \frac{a + x^3(n-1)}{b}$

qui converge si, au voisinage de la racine, $3.x^2/b$ est inférieur à une quantité fixe plus petite que 1.

Appliqué au problème de la trisection de l'angle, le procédé permet d'atteindre le sinue de 1 degré. On peut en effet déterminer les fonctions circulaires de 3 degrés, à partir de $\pi/12$ et de $\pi/10$.
Un élève d'Al-Kasi a obtenu :

$$\sin.1° = 0{,}017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571$$

2° EQuation dite de Kepler.

Le procédé de calcul par itération est ici bien antérieur à al-Kasi, et remonte au IX° siècle.

Soit à résoudre : $t = \theta - e \sin\theta$

On pose $\theta_0 = t$

$$\theta_n = t + e \sin \theta_{(n-1)}(t).$$

si e est petit, la suite converge rapidement.

C.- Le Calcul d'erreurs.

Al-Kasi a franchi une étape de plus, dans l'analyse du phénomène de convergence vers une limite. Il détermine en effet le nombre de côtés nécessaires au polygone régulier qui permettra d'obtenir la longueur d'une circonférence de diamètre égal à 600.000 fois celui de la terre avec une erreur inférieure à un crin de cheval. Du point de vue théorique, le principe est analogue à celui que représente, dans l'intégration de la parabole, la proposition 14 de Thabit Ibn Qurrah. Mais il y a en plus toute la technique d'un génial calcul d'erreur.

Sans entrer dans les questions d'unités, disons que le crin de cheval correspond environ à 1/2 millimètre. On peut vérifier, en évaluant le tour de la terre à 40.000 km, que, sur un cercle 600.000 fois plus grand, l'angle de $1°/60^8$ correspond à 0,4 millimètre environ sur la circonférence. Pour l'homogénéité, prenons un rayon r, dont la valeur numérique sera 60, et posons la condition relative aux périmètres p et p' des polygones réguliers inscrit et circonscrit :

$$p' - p \qquad r.60^{-9}$$

On a ensuite :

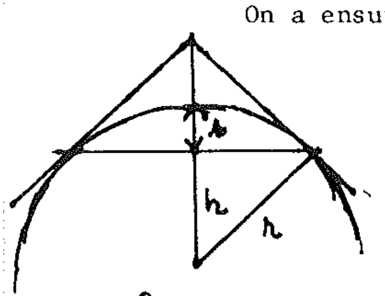


fig. 20

$$\frac{p'}{p} = \frac{r}{h} \qquad\qquad \frac{p'-p}{p} = \frac{r-h}{h} = \frac{s}{h}$$

à ce niveau, on peut écrire

$$p' - p \ \# \ s.\frac{C}{r}$$

On voit en effet qu'Al-Kasi néglige les erreurs du second ordre ; de même il prend, pour le rapport C/r, les valeurs approchées d'Archimède, 6 par défaut et 44/7 par excès.

On a donc

$$s < \frac{r}{6 \times 60^9} \sim \frac{10}{60^9}$$

Une évaluation plus précise, un peu inconséquente, donne $8.\ 60^{-9}$

Le demi-côté du polygone inscrit est alors très voisin du côté du polygone obtenu en boudlant le nombre des côtés ; on obtient dans ces conditions :

$$\frac{C^2}{4} = s.\ 2r \quad ; \qquad c \sim \frac{8.\ 8.60}{10^9} = \frac{8}{60^4}$$

Al-Kasi détermine alors combien de fois il faut doubler le nombre des côtés du triangle équilatéral, pour obtenir, dans un cercle de rayon 60, un côté inférieur à la quantité indiquée.

Il trouve que le nombre de côtés doit être 3.2^{28}. Nous pouvons ajouter que l'utilisation d'un calculateur programmable permet de suivre aisément ce raisonnement.

Ensuite, Al-Kasi cherche à évaluer avec quelle précision doivent être calculés les côtés successifs, pour obtenir la précision voulue au bout du 28° calcul de côtés. Il apparaît que son raisonnement n'est pas encore inattaquable ; mais Al-Kasi s'en tire en prenant une précision largement supérieure ($1/60^{18}$: 60-18 ...).

Ayant alors obtenu p et p', et constaté que ces valeurs répondaient à la condition posée, il prend la demi-somme, et obtient la valeur de π, qu'il convertit en fraction décimale :

$$2\pi = 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

... Et il affirme que cette valeur est beaucoup plus exacte que celle donnée par Archimède. (Youschkevith,p.153 ss).

D.- La trigonométrie.

Il était intéressant il y a vingt ans, pour un professeur des classes terminales, particulièrement dans un Lycée franco-musulman en Algérie, de dire que toutes les formules de transformations trigonométriques ou d'autres équivalentes étaient connues aux environs de l'an Mille par des savants tels qu'Abu-l-Wafa ou Ibn Yunus ; de dire que tous les problèmes de résolution de triangles avaient été résolus au XIII° siècle par Nasir ed-din al-Tusi ; de dire encore, la Cosmographie figurant alors dans les programmes, quelques mots sur les résolutions de triangles sphériques. Nous ne savions pas alors, mais nous l'apprenons par A.P. Youschkevitch (p. 143), que notre souci de justice en matière de propriété scientifique pouvait se protéger contre tout soupçon de complaisance envers le chauvinisme de nos élèves : Al-Tusi lui-même souligne tout ce que la trigonométrie sphérique doit aux anciens, c'est-à-dire à Ptolémée.

Notre rupture complète avec la géométrie des grecs, et les progrès de la rigueur dans la définition des fonctions circulaires, sans parler de la suppression de la Cosmographie, effacent pour le moment de notre horizon ce large pan de la science arabe et indienne.

Il reste que l'astronomie fournit l'axe moral du développement mathématique arabe en direction de l'Analyse. Derrière tout les calculs approchés, en peut voir l'approximation croissante des fonctions circulaires. Au fond, ce sont les seules fonctions qui donnent à la science l'idée de fonction, les seules comportant l'idée de variable. La trame visible de tout ce travail, nous pouvons la voir dans la succession des tables trigonométriques et astronomiques toujours perfectionnées :

IX° siècle : Al Khowarizmi, Al Hasib (Bagdad)
X° " : Al Battani (Harran), Ibn Yunus (Le Caire)
Abu-l-Wafa (Khorassan)
XI° " : Al Biruni (Kharezm) , Al-Khayyam (Merv)
XII° " : Al Mawazi (Merv)
XIII° " : Al Tusi (Maragha)
XV° " : Ecole de Samarcande (Al Kasi)

Il faut, bien sûr, mentionner les traités indiens (Siddhantas), traduits en arabe au 8° siècle. Mais, si l'article de J.D. Bond dans ISIS, t.IV, p. 303ss "The development of trigonometric methods" ne commet pas une grossière erreur, il faut admettre que les Indiens ne maîtrisaient pas encore les formules de transformations trigonométriques.

Les savants arabes ont établi la concordance complète entre notre trigonométrie et celle de Ptolémée, et cherché des formules d'analyse qui économiseraient des calculs laborieux. On ne peut pas dire qu'ils aient réussi. Youschkevitch signale, p. 176, comment Thabit Ibn Ourrah et Al Biruni se sont approchés de la notion de vitesse instantanée.
Mais on peut voir dans les travaux d'Al Tusi, qui était plein d'admiration pour Al Biruni, la preuve que cet intermédiaire indispensable à l'étude des fonctions n'est pas encore dégagé :
Al-Tusi a consacré d'importantes études aux épicycloides sans y faire apparemment la moindre allusion. (ISIS,1971,pp.490-498.Cl.Kren)

E.- L'idéal de la précision.

Biruni s'est occupé du perfectionnement des astrolabes, de contrôler les déterminations du diamètre de la terre, de mesurer les poids spécifiques (Journal Asiatique, 1858, J.J. Clément Mullat). Compare les poids spécifiques de l'eau chaude et de l'eau froide. Il affirme, sur un poids de 2kg, 2 pouvoir obtenir la précision de 0,06 gr...

CONCLUSION

Le savant arabe, médecin, philosophe, astronome et mathématicien, soucieux de connaître non pas tellement une spécialité, que le savoir global de ses maîtres, nous offre un type de "l'honnête homme" accessible au niveau de nos programmes du Second Degré. Au XVIII° siècle encore, certes, l'homme vraiment cultivé connaît les Mathématiques Supérieures ; mais le niveau dépasse déjà souvent nos programmes. La Mathématique Arabe est un bon domaine de réflexion pour nous, sur ce que le point de vue historique peut nous apporter.

On a beaucoup parlé de "pédagogie de la redécouverte" ; l'histoire de la découverte vraie, avec ses curieux illogismes parfois, peut rendre leur visage humain à certaines théories qui paraissent nées comme Minerve du crâne de Jupiter, munies du casque et de la lance. Ces théories intéressent pourtant l'historien et le philosophe également, parfois aussi le linguiste. Certaines listes d'exercices de nos manuels n'ont pas de valeur culturelle ; mais le coup d'oeil comparatif sur les listes des tablettes cunéiformes en a une.

Nous avons négligé quelques discussions classiques.

En quoi peut-on parler de science ARABE ? Eh oui ... parmi les Arabes, il y a les Persans ; parmi les Musulmans, certains ne sont pas Musulmans. Que faire ? Songer simplement que, dans 8 siècles, on discutera ainsi des savants français qui publiaient en anglais....

Ceux-là même qui contestent l'existence d'une découverte proprement arabe affirment le rôle d'intermédiaire que la civilisation arabe a joué. Intermédiaires entre nations, intermédiaires entre le passé et le présent ; les experts scientifiques font partie des missions diplomatiques ; le sage et cruel Gengis Khan pille rationnellement les bibliothèques ... Al Tûsi sera le plus célèbre bénéficiaire de ce pillage ...

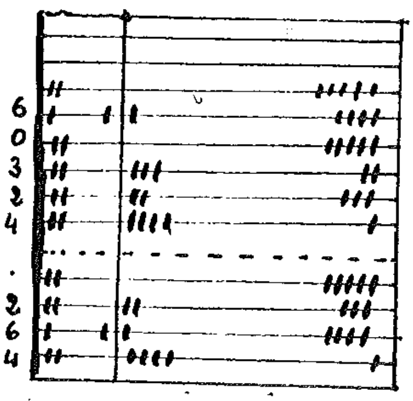
Cependant le professeur de Mathématiques, s'il n'est pas indifférent à ces questions, ne peut que les trouver très en dehors de son rayon d'action normal ; ne cherchons pas le "gadget". Il souhaite ici le relais de ses collègues historiens. D'ailleurs, alors que nous aimons des vérités stables, cette histoire évolue avec ce que nous apprenons des relations internationales ; la découverte de nombreux manuscrits contribue à cette évolution. (Voir par exemple : History of science, 1967,pp 40-58,Youschjevitch, "Recherches sur l'Histoire des Mathématiques au Moyen Age dans les pays d'Orient ; Bilans et perspectives). Bien plus qu'il y a vingt ans, il devient clair que, dans le courant international, l'acquis mathématique se conserve et se transmet d'un pays à l'autre.

Mais alors, pourquoi n'avoir pas parlé davantage de l'Inde, presque rien dit de la Chine ??? n'avoir rien dit, non plus, comme nous l'a fait remarquer T. LEVY à la rencontre Inter-Irem de Caen, de la Science Juive, et notamment de Lévy Ben Gershon (XIV°) ?

La ligne de ce travail a été fixée par nos programmes actuels des Lycées, comme peut-être la ligne d'Al-Khowarizmi fut fixée par les besoins des juristes calculant leurs héritages. Là est notre seule chance, dans la France scolaire actuelle, de n'être pas tout à fait inutiles. Sauf quelques réflexions sur Omar Khayyam, nous en sommes restés à un aspect collectif et assez impersonnel de la progression scientifique. La science juive ne s'intègre pas aisément dans ce cadre. "L'Histoire Générale des Sciences" (ref I) consacre un article à part à la "Science hébraïque médiévale" (Is. Simon, pp.568-58I) : pourquoi "hébraïque", comme si les auteurs étaient différents suivant qu'ils s'expriment en hébreu ou en arabe ? Pourquoi pas un chapître sur la "Science Persane"? On voit pourquoi nous préférons nous arrêter sans trop chercher à nous justifier, même pas par une attitude comparable de A.P. Youschkevitch dans sa conférence citée quelques lignes plus haut. Nous souhaiterons que notre collègue, qui en a la compétence, puisse prochaînement nous éclairer sur la Mathématique Juive, et aussi sur ce problème. Elle avait une importance, puisqu'au Moyen-Age un traducteur français considère Al Khowarizmi comme un mathématicien juif. Sans le suivre jusque-là, nous écouterons pourtant le conseil qu'il donne, après l'énoncé des épuisantes règles en cas de retenues pour la multiplication :"

"Quant ch'auras fait, repren t'allaine...(ton souffle...) (EGRWaters, A thirteenth century algorithm in french verse, ISIS 1930, P45-84).

M. Causse, ancien professeur au Lycée France-musulman d'Alger-Ben Aknoun ; 1954-1962. Ala mémoire de ses anciens élèves, vivants ou disparus.



LES EQUATIONS A PARTIR DE VIETE ET WALLIS

Odette DEPAIX (IREM de NANCY).

ZETETIQUE XIV.

Faire que Aq moins G plan soit egal à un quarré, lequel soit plus petit que DA & plus grand que BA.

Soit supposé le quarré de A−F, *donc* Aq −2FA+Fq *sera egal à* Aq−Gp, *& par consequent* $\frac{Fq + Gq}{2F}$ *egal à* A: *mais pour autant que* Aq−Gp *est moindre que* DA, *aussi* Aq *sera moindre que* DA+Gp. *Derechef* Aq−DA *sera moindre que* Gp; *& partant* A *sera faict moindre* $v(\frac{1}{4}Dq + Gp) + \frac{1}{2}D$. *or soit posé* S, *estre egal à* $v(\frac{1}{4}Dq + Gp) + \frac{1}{4}D$. *ou moindre selon les conditions suivantes, donc* A, *sera moindre que* S. *au contraire, pour autant que* Aq − Gp, *est plus grand que* BA, Aq *est plus grand* BA+Gp; *c'est pourquoy* A *est plus grand que* $v(\frac{1}{4}Bq + Gp) + \frac{1}{2}B$. *& soit posé* R, *estre egal ou plus grand que* $v(\frac{1}{4}Bq + Gp) + \frac{1}{2}B$. *moindre neantmoings que* S, *donc* A *sera plus grand que* R, & sera constitué en-

Les équations à partir de Viète et Wallis.

par Odette Depaix (Nancy)

Secrétaire: Marie-Claude Werquin (Paris-Nord)

L'I.R.E.M. de Nancy a tenté durant l'année 1976-1977 une expérience d'utilisation de l'histoire des mathématiques dans la formation d'enseignants. Le travail s'est fait en trois groupes destinés à des professeurs de premier cycle, essentiellement des P.E.G.C. Les séances avaient lieu dans des villes différentes, mais les animateurs se réunissaient régulièrement.
Le thème de l'année, équations algèbriques, a été choisi en fonction des programes.
Dans la mesure du possible, les animateurs on systèmatiquement utilisé des problèmes classiques et des textes originaux. Il est souvent difficile de se procurer des documents, les mathématiciens n'ont aucune formation d'archivistes. Surtout, il se pose fréquemment des problèmes de traduction.
Les buts de l'expérience étaient divers :

- Retrouver l'origine de raisonnements que l'on fait encore actuellement dans les classes.
- Donner (ou redonner) aux enseignants l'habitude de lire des livres (ou des documents I.R.E.M.)
- Résoudre des problèmes.
- Chercher si les grosses difficultés des élèves coïncident avec les difficultés historiques qui ont longtemps arrêté les mathématiciens.

A la première séance, Mme Depaix est arrivée avec un stock de problèmes. Après un bref laius historique, le groupe s'est lancé avec ardeur dans la résolution de problèmes classiques du premier degré, de quelques problèmes ouverts, de quelques problèmes de Diophante.

La deuxième séance a été consacrée à l'étude du papyrus Rind (ex Brunschwig: Philosophie mathématique). Le texte sumérien était le suivant:

" Tu additionne l'aire et le côté d'un champ carré, tu trouve 45mn. Quel est le côté du champ? (i.e. $x^2 + x = 3/4$) . La solution est donnée sur le papyrus, non par un algorithme mais par une recette, valable seulement avec les valeurs numériques données. Des professeurs de maths du XX^{ème} siècle en sont tout déconcertés.

Ensuite le groupe a étudié des problèmes du premier degré de Diophante, tirés de l' Histoire des Mathématiques de Montucla. Montucla donne les énoncés (sans solution) en latin; ils ont été traduits par une classe d'un C.E.S. avec la collaboration du professeur de latin, puis résolus avec le professeur de maths. Les élèves ont été enchantés d'avoir à traduire autre chose que les éternels exploits guerriers de Jules César.

En ce qui concerne l'équation du second degré, l'interprétation géomètrique a été violemment refusée. Pour des enseignants ayant une formation récente, une solution géomètrique "à la règle et au compas" n'est <u>pas</u> une démonstration.

Pour l'équation du troisième degré, il y a eu de gros ennuis avec les nombres complexes et les racines cubiques. Par exemple $(a + i\ b)^{1/3}$ est considéré comme une réponse satisfaisante. Pour les complexes, Mme Depaix a utilisé un cours de l'Ecole Polytechnique, datant d'environ 1800, c'est à dire d'une époque où l'interprétation géomètrique n'existe pas encore.

Le groupe a ensuite étudié un texte de Wallis "On imaginary numbers" (tiré de : Source book in mathematics. D.E. Smith. Dover Publication Inc.) Le texte (9 pages) a été traduit de l'anglais par un des P.E.G.C. Il porte sur une construction géomètrique des nombres complexes. Les stagiaires ont très vite perdu toute révérence envers les grands mathématiciens et ont fait preuve dans les commentaires qu'ils ont rédigés d'une sévèrité pour le moins excessive: Wallis n'a pas vu que...; il est d'autant plus inexcusable que...;il est domage que Wallis n'aît pas essayé de préciser ....

Mais ce n'est rien à côté de ce qui attend Viète! Les stagiaires sont ensuite passés à deux textes de Viète. Le premier est la résolution d'un problème simple: trouver deux nombres dont on connait la différence et le produit (Premier livre des Zètétiques, traduction de Durival 1664). Le second (Quatrième livre des Zètétiques, traduction de Durival 1664) porte sur le problème des vins de Diophante. Ils ont été complètement déroutés, non seulement par le langage du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, mais surtout par le style. En effet, l'écriture de Viète est très proche de l'expression orale: on dit ce genre de chose, mais on ne l'écrit pas. Ils ont enfin "noté" le texte de Viète comme une copie d'élève. Alors là!... On trouve en marge: Très mal posé! Données? Inconnues? Paramètre de discussion? Faute d'écriture etc...

Suivant une suggestion des animateurs, les stagiaires ont essayé de détermi- ner ce qu'est une équation. Il semble qu'une équation, ce soit un algorithme à suivre. Même les solutions évidentes sont souvent recalculées suivant la technique officielle. Le tatonnement est en général refusé.

A ce moment, la discussion est devenue générale et la secrétaire de séance a renoncé à prendre des notes. Il surnage encore une bibliographie: Le groupe d'histoire des maths de l'I.R.E.M. de Dijon béníficie de la richesse de la bibliothèque municipale d'Auxerre et de celle du lycée; Deux publications:

"égale zéro" Aperçu historique de la notion d'équation.

Huyghens "Traité de la lumière"

Sur Cardan, cf Documents et Recherche. Heuristique et Méthodologie. chez Hatier

Sur le calcul de la racine cubique, l'I.R.E.M. de Rouen a indiqué un texte de Stevin : Second livre d'arithmètique. Opérations p.25-32 . Il a été obtenu comme beaucoup d'autres en demandant par correspondanceune photocopie à la bibliothèque de l'I.H.P. qui a un fond important de textes anciens.

QUELQUES TEXTES DE VIÈTE ET WALLIS POUR ILLUSTRER UNE ETUDE SUR LES EQUATIONS.

Durant l'année scolaire 76-77 un groupe de professeurs de permier cycle de l'enseignement secondaire s'est intéressé au développement chronologique de la notion d'équation. Cette étude avait pour objectifs essentiels :

- la recherche de modes de raisonnement les plus variés possibles
- un moyen d'analyser les difficultés rencontrées par les élèves, d'une part parce qu'elles sont en relation étroite avec celles, d'ordre historique rencontrées dans la construction des mathématiques mais aussi parce qu'une partie du travail personnel demandé aux professeurs du groupe (résolution d'exercices, lecture de textes anciens) leur a imposé le même type d'activité intellectuelle que celle qu'ils exigent de leurs élèves.
- et accessoirement la transmission aux jeunes enseignants d'une certaine culture classique.

Pour illustrer cette étude il fallait donc trouver - en dehors des textes de reflexion "à lire" - des extraits de livres anciens, simples, courts, faciles à dégager de leur contexte, proposant un exercice à résoudre et si possible peu connus. Nous désirions avant tout, ne pas nous laisser influencer par des commentaires savants mais officiels et préserver notre liberté de jugement quitte à nous tromper et à interpréter différemment l'intention de l'auteur suivant que le problème était étudié isolé de tout - ou réintégré dans son contexte. Aussi nos commentaires (actuels) des textes étudiés restent-ils provisoires et sujets à caution.

Pour trouver de tels textes nous avons utilisé d'abord les "Source Book" de Smith ,
dont nous avons lu quelques textes. Nous nous sommes plus particulièrement attachés à l'extrait : "à propos des nombres imaginaires" de Wallis qu'un professeur a traduit en français que nous avons discuté et dont quelques collègues ont tiré des exercices pour la classe. Le texte présente une première interprétation géométrique ingénieuse mais discutable des nombres complexes (un résumé de cette interprétation est parue dans le bulletin AMQ du Canada Volume XVII n° 1 p 11). Mieux qu'un texte définitif il permet de découvrir sur un exemple simple la genèse d'une découverte

mathématique, avec toute l'imagination qu'elle exige mais aussi la théorie incomplète et tout le travail de mise au point restait à faire.

Les autres textes utilisés proviennent d'une traduction en français de l'oeuvre de Viete par Durival.

Le premier texte tiré du premier livre des zététiques très clairement exposé est particulièrement simple puisqu'il s'agit de trouver deux segments connaissant leur différence et leur quotient. Néanmoins au premier abord il a rebuté plusieurs professeurs qui ont ensuite découvert combien un langage inhabituel est inhibant pour la compréhension.

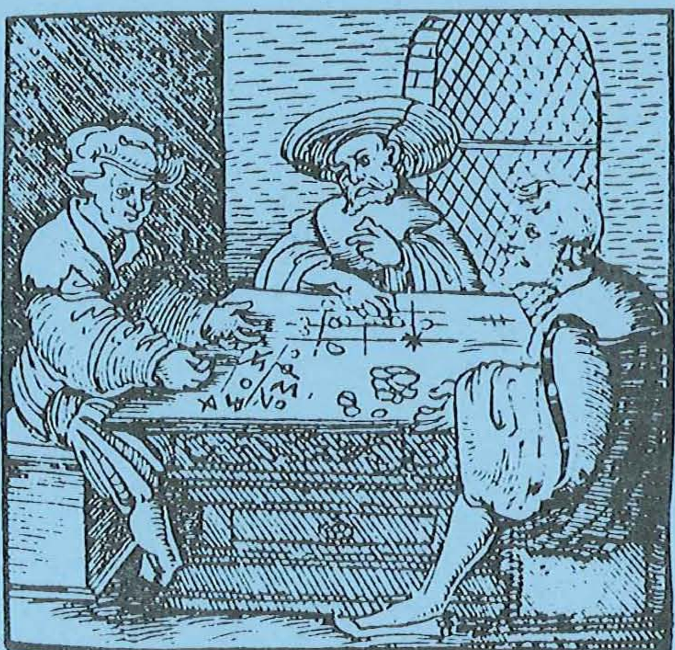
Le deuxième texte tiré du 4ème livre des zętétiques est le commentaire par Viète d'un ancien problème très connu et que nous avions étudié précédemment dans le groupe à propos d'équations diophantiennes; L'étude de la discussion de Viete, non formalisée mais très rigoureuse a mis en évidence les difficultés relatives aux notions d'inégalités, valeurs approchées, majorants et minorants...

Enfin le dernier texte tiré de l'algèbre et effections géometriques propose la résolution par approximations successives de certaines équations du second degré. (C'est une extension de la méthode d'extraction des racines carrées). On y trouve un effort de présentation en tableau des résultats, une analyse de la méthode utilisée qui tient plus de la description de l'algorithme que de sa justification et un début de discussion et de généralisation de la méthode (tout en trouvant l'exposé de Viete peu "mathématique", les professeurs du groupe n'ont toujours pas réussi à en rédiger un autre qui les satisfasse !).

Cet ensemble très restreint de textes a néanmoins été la source de beaucoup de travail. Ce fut même parait-il dans certains CES l'occasion d'une collaboration interdiciplinaire fructueuse ! Mais la recherche de textes aussi simples n'est pas facile. Le hasard en -l'occurence une bibliothèque riche de traductions des textes algébriques de Viete- y a joué un rôle important et à l'occasion de cette recherche on se prend à rêver de documentation IREM riche et facile à consulter !

L'HISTOIRE DES MATHS DANS LA FORMATION DES MAITRES

Groupe de travail animé par Maurice GLAYMANN (IREM de LYON).



COMPTE-RENDU DU TRAVAIL DU GROUPE

HISTOIRE DES MATHS DANS LA FORMATION DES MAITRES

Nous préférons ce titre à celui prévu, en reconnaissant une spécificité à l'histoire des maths dans l'histoire des Sciences.

Une collègue de philo participe aux débats.

Voir le texte de Rais : "il s'agit d'histoire des maths" dans le poly-Tailleville ; nous essayons de répondre à ses questions.

POURQUOI PARLER D'HISTOIRE DES MATHS ?

La science mathématique est une création humaine ; il a existé et il existe des mathématiciens ; certaines branches des maths ont disparu complètement puis ont eu un regain nouveau grâce à de nouveaux outils.

Or dans l'enseignement actuel (pas seulement en maths) on note une tendance à l'évacuation de l'histoire.

Alors qu'en physique la correspondance entre le développement de la technologie et l'évolution de la science n'échappe pas à la plupart des élèves, en maths, "il ne se passe rien" (et la presse n'intervient pas contre cette affirmation du grand public).

Quels exemples de pratique de l'enseignement de l'histoire dans l'enseignement supérieur connaissent les participants ?

- → Sous le ministère Fouchet, une histoire des maths à la fac, mais "barbant !"
- → Interessant : des documents publiés par Godement qui faisaient référence à des faits d'actualité ; soit polémiques, soit philosophiques, soit historiques.
- → A Nancy un certificat intédpendant du CAPES : des "conférences sur l'histoire des maths" perçues par les étudiants comme "plaquées", "à côté" de l'enseignement des maths
- → A Paris VI Dugac sur continuité uniforme
- → A Paris VII Verley sur variables complexes.

→ la collègue de philo signale que l'institut de l'histoire des sciences (13 rue du Fourg 2ème étage à Paris) contient dans sa bibiothèque de véritables richesses.

→ Une remarque : dans le bulletin APM, 3 articles en 5 ans sur l'histoire des maths... pour s'intéresser à quelque chose il faut y avoir goûté !

→ il serait intéressant d'effectuer des enquêtes auprès de mathématiciens (vivants de préférence) : comment "fabriquent"-ils la mathématique ? à condition d'aller plus loins que le niveau "travaillez-vous après diner ?" (référence à une telle enquête aux environs de 1900)

L'HISTOIRE DES MATHS, POUR QUOI FAIRE ?

Outre que la réponse à la question (toujours ouverte) : "un obstacle épistémologique correspond-il à obstacle didactique ?" pourrait en partie montrer la nécessité pour l'enseignant de connaître l'histoire des maths, nous voyons les objectifs suivants :

→ l'analyse à travers l'histoire des maths de <u>l'évolution de la notion de rigueur</u>

le public pense à tort, sans connaissance d'histoire que les maths constituent un domaine fini, achevé

→ apporter à la littérature mathématique actuelle la dimension qui lui manque totalement de <u>création humaine</u> : montrer l'évolution (entre autres par la recherche d'outils), relier les théories à leur <u>contexte historique</u>.

L'HISTOIRE DES MATHS PEUT-ELLE AVOIR UNE VERTU PEDAGOGIQUE ?

Voici les vertus essentielles qu'en attendent les participants :

→ apporter une <u>sécurité aux élèves</u> en leur montrant les tatonnements les errements historiques.

→ plusieurs collègues (un autre pas d'accord du tout) insistent sur le fait qu'ils espèrent, grâce à un enseignement de l'histoire des maths dans la formation des maîtres, un <u>changement de comportement du "prof de maths"</u> vis à vis de l'élève : actuellement, il ne tolère pas l'échec et se réfère à des canons étroits de rédaction ; la correction qu'il donne d'un problème est toujours la plus léchée, mais pas nécessairement celle q'uil a trouvée la première ! (pourquoi des élèves trouvent-ils en "club" de maths, là où le maître intervient moins en redresseur de torts, des exercices qu'ils ne trouvent pas en "cours" de maths ?) il devrait pouvoir donner le goût de l'invention à ses élèves.

→ pouvoir répondre aux demandes de certains élèves :
Comment a-t-on eu l'idée d'inventer çà ? Pourquoi ? Quand ?
(ex : comment a-t-on calculé les nombres de la table de log ?)

→ et à cette occasion leur faire repenser historiquement certains problèmes amenant l'élaboration d'outils.
(par ex : voir une page de calcul de LEVERRIER : avant de se lancer, il élaborait une théorie qui lui permettait de minimiser ses calculs).

COMMENT LES PARTICIPANTS VOIENT-ILS CETTE FORMATION DES MAITRES ?

Au début, la discussion tourne plutôt autour des thèmes :
- comment actuellement apporter à nos élèves du 2e degré une teinte historique ?On signale l'expérience intéressante d'interdisciplinarité de Descartomania.

- comment concilier cet apport intéressant avec le carcan de "nos" programmes, "nos" examens ,"nos" coefficients.
Quelques réalistes précisent qu'on n'envisage pas l'AVENIR dans la perspective de la réforme Haby !

RE-QUESTION : MAIS AU NIVEAU DE LA FORMATION DES MAITRES ?

→ ne pas introduire une nouvelle discipline qui serait l'enseignement des maths.
→ envisager des projets communs (philo-maths-histoire ...)
par exemple pendant l'année de CPR ou dans des groupes d'IREM.
→ attention : danger du plaquage d'une discipline sur une autre.
→ pas si on pense "équipeé qui élabore un langage commun.
→ Cette interdisciplinarité réclamée pourrait concrètement se réaliser dans la formation des maîtres dans l'étude en commun par des étudiants de disciplines différentes d'un même thème. Comme tous seraient à la même étape de leur formation, ils n'attendraient pas un "apport" théorique des autres.
→ Veiller à maintenir la valeur scientifique de la formation
EN TOUT CAS UNE PREMIERE ETAPE A ATTEINDRE :

DONNER L'IDEE AUX MAITRES QU'IL EXISTE UNE HISTOIRE DES MATHS.

En résumé, beaucoup d'idées à collecter (d'exemples où l'apport de l'histoire des maths est fructueuse) pour faire murir notre projet.

P.S. Trouvé sur une table, le "texte libre" suivant :

par le fleuve écoulé du sein de notre mère
glissant nous allons vers l'immuable mort
la mort qui le fit rond ce sein plein de chaleur
et l'accrocha non loin de cette aisselle noire.

(anonyme)

IL S'AGIT D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

M.RAIS (Poitiers)

La première question qu'on peut se poser est la suivante : Qu'est-ce que l'Histoire des Mathématiques ? Et en fait, il me semble qu'on ne peut avoir une réponse unique à cette question si on ne tente pas en même temps de répondre à celle-ci : Pourquoi faire ? Admettons que l'Histoire des Mathématiques soit une sorte d'index qui attribue avec exactitude les théorèmes à leurs auteurs et qui attribue à ces résultats une date précise. (C'est ainsi que nous apprenions l'Histoire à l'école primaire ou au lycée).

Que peut-on faire d'une telle Histoire ? Une seule réponse : mettre dans nos cours des dates et des noms d'auteurs partout où cela est possible.
Exemple 1 : Dans le livre de Lesieur et Lefèvre de MPC, au début du chapitre 4 (Dérivées et Différentielles, tome II) on lit : Ce sont les besoins de la mécanique... GALILEE (1564 - 1642) ,... maxima et minima DESCARTES (1596 - 1650), FERMAT (1601-1665) ,...
NEWTON (1642 - 1727) et LEIBNITZ (1646 - 1716)...
Exemple 2 - Exercice : Combien y-a-t-il de dates dans le cours de premier cycle de DIXMIER ?
Pourquoi le théorème 05.11.1 s'appelle-t-il d'ALEMBERT-GAUSS ?
Pourquoi le théorème 14. 3.4 s'appelle-t-il de BOLZANO-WEIERSTRASS ?
Toujours dans DIXMIER, est-ce qu'ils se sont bagarrés ?

Il est bien évident que ceci n'a rien de bien exaltant. Alors, on se dit qu'on va avancer d'un pas et dire que l'Histoire des Mathématiques ne peut se contenter d'être chronologique au sens le plus élémentaire et qu'elle doit aussi décrire des mouvements amples et continus, bien sûr le mouvement des idées, la naissance des notions et concepts etc... On pense bien sûr aux notices historiques de Bourbaki. D'où vient alors que la lecture de ces notices ne (me) procure aucune satisfaction ? J'ai envie de dire que ces notices ont deux défauts : Le premier est d'être reléguées en fin de texte (elles sont donc superflues et ne sont pas envisagées comme partie intégrante d'un texte où on lit et apprend des mathématiques). Le deuxième est d'être trop abstraites, on a l'impression qu'elles concernent les Mathématiques et pas du tout les Mathématiciens qui ont créé ou transmis les Mathématiques.

Bien sûr, on répondra à ce dernier reproche en disant que ce serait trop long de faire autrement mais cette réponse amène aussitôt la rispote suivante : Je voudrais sans me soucier pour le moment d'aucune contrainte un texte d'Histoire des Mathématiques qui m'intéresse, qui me retienne, qui me fasse comprendre les Mathématiques sous la forme chapitre I, théorème, définition, corollaire etc...

Autrement dit, je voudrais des textes d'Histoire qui soient des outils pédagogiques. On est ainsi amené à se poser la question suivante : l'Histoire des Mathématiques peut-elle avoir une utilité pédagogique ? La question se pose à tout niveau d'enseignement, et il me semble qu'il n'est peut-être pas raisonnable de hurler oui uniquement parce que cela semble évident. En tout cas, si la réponse est oui, d'où vient que nos professeurs, nous-mêmes, les auteurs de manuels font comme si cette question n'a jamais été posée ? Avant de répondre à cette question, on a le droit de contester le bien-fondé de cette question. Autrement dit, peut-être que c'est par ignorance que j'affirme que nos Professeurs... font comme si... etc ?

Alors, il me semble qu'il faut d'abord se renseigner et collecter partout où cela est possible des éléments de réponse : Quels sont les textes d'Histoire des Maths ? Quels sont ceux qui ont des préoccupations pédagogiques ? Ont-ils été testés dans l'enseignement, etc... Existe-il des textes mathématiques (idéaux) où se trouvent enseigné un programme de mathématiques au sens classique du mot et où se trouvent en même temps harmonieusement mélangés au reste des éléments d'Histoire des idées, d'Histoire des individus ?

Je connais deux exemples qu'on ne peut écarter de cette catégorie avant d'y avoir bien regardé : Au niveau 1er cycle le livre de OTTO TOEPLITZ intitulé "The Calculus, A Genetic Approach", the University of Chicago Press, 1963) Je me contenterai sans le juger définitivement de renvoyer par hasard au paragraphe 22, dont le titre est NAPIER. (un titre de paragraphe qui est le nom d'un homme !) on y trouve des choses intéressantes sur les tables de logarithmes, sur les malheurs d'un nommé BORGI qui avait calculé des tables peut être avant NAPIER, qui malgré les objurgations de KEPLER qui en avait besoin, refusa de les publier pour ne pas révéler son secret prématurément et se retrouva le bec dans l'eau après la publication de NAPIER... L'autre exemple est d'un niveau supérieur : Il s'agit de LEBESGUE's Theory of Integration its Origin and Development, par T. HAWKINS, (The University J. Winsconsin Press, 1970). Si on ouvre au hasard ce livre (mon hasard donne page 46) on trouve deux pages sur les fonctions continues sans dérivée, avec les noms de DARBOUX, DUBOIS-REYMOND, WEIERSTRASS, SCHWARZ, DINI, RIEMANN etc...

Ma question est la suivante : est-ce qu'un étudiant moyen peut lire ce livre ; et après l'avoir lu, a-t-il le niveau des étudiants ayant suivi un cours classique sur l'Intégrale de LEBESGUE, autrement dit ; sera-t-il reçu à l'examen ? J'ignore la réponse.

Il me semble qu'il faut donc attirer l'attention des gens sur la question : est-il possible de créer de tels textes mathématiques idéaux ? Peut-on en faire usage dans notre enseignement tel qu'il est ? Ou bien après tout comment modifier notre enseignement pour l'adapter à un usage de tels textes (je pense par exemple au fait qu'un cours d'intégration fait sur le modèle du livre de HAWKINS doit être fait par une seule personne, Cours et TD mélangés ?)

Bien entendu il ne faut pas craindre de poser les mêmes questions pour l'enseignement dans le secondaire mais là encore je suis tout à fait ignorant. D'une façon pratique, on peut essayer de considérer le programme d'une maîtrise ès - Sciences mathématiques et de se poser la question à propos de chaque certificat ou U.V. en faisant partie. Pour l'Intégration, ce pourrait être LEBESGUE qui est l'homme central et peut être HAWKINS a-t-il déjà fait le travail que nous demandons. Pour les fonctions de variables complexes, peut-être faut-il étudier la vie de RIEMANN et celle de WEIERSTRASS, pour l'analyse fonctionnelle élémentaire HILBERT et BANACH (?) etc...

Je suggère donc qu'il soit effectué une enquête (et) ou une réunion pour discuter de ces questions. On peut essayer d'en faire une liste qui regroupe celles plus ou moins fumeuses que j'ai posées ci-dessus :

1 - Qu'est-ce que l'Histoire des Mathématiques ?

2 - L'Histoire des Mathématiques pour quoi faire ?

3 - l'Histoire des Mathématiques ou de la Science peut-elle avoir une vertu pédagogique ? Si oui, sous quelle forme ?

4 - Faut-il enseigner un certificat d'Histoire des Mathématiques aux étudiants en Mathématiques ?

5 - Faut-il plutôt tenter dans chaque certificat de mélanger le texte mathématique traditionnel avec un texte parlant des mathématiciens de leur environnement géographique et historique, de l'évolution des idées etc..., de leurs bagarres, de leurs inimitiés politiques etc... ?

6 - Connaissez-vous des exemples de textes idéaux au sens décrit dans la question précédente qu'on peut recommander aux étudiants ou aux enseignants ?

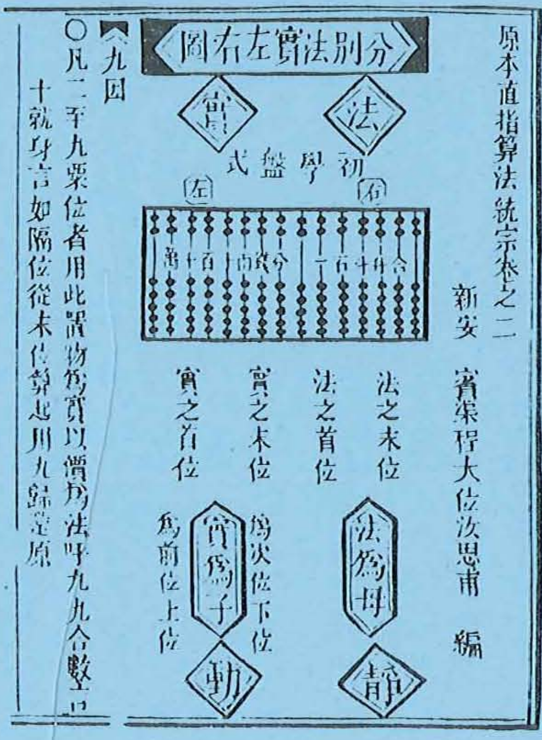
7 - Peut-on en faire usage dans notre enseignement tel qu'il est, ou faut-il modifier notre manière d'enseigner ?

8 - L'I.R.E.M. de POITIERS met au "concours" l'élaboration d'un tel texte idéal ayant pour sujet : "les nombres réels en première année de premier cycle des Universités" ou (en terminale) ou bien "le calcul des fractions en 5è ou 4è...)

(le premier prix recevra une certaine fraction de son poids en fromage de chèvre + un chien offert par WALLET).

LE GROUPE INTER-IREM

HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE



PRESENTATION DU GROUPE INTER-IREM Histoire et Epistémologie AU COLLOQUE DE CAEN (11 juin 1977)

Présents dans ce groupe de travail :

Desq(Toulouse) Lefort(Nantes) Pourprix(Lille) De Gandt(Paris) Bécue,Delon(Paris-Nord) Houdebine(Rennes) LeRest Evelyne - Michel(Rouen) Depaix(Nancy) Bonnefoy, Rochaud, Malet (Lyon) Régnier(Dijon) Wallet,Borowczyk(Poitiers)

Borowczyck décrit la vie du groupe Inter-IREM: d'histoire et Epistémologie des maths. C'est une structure légère de rencontre entre les participants à des groupes de travail sur l'histoire et l'épistémologie des mathématiques. Ce groupe prend en charge la diffusion et la reproduction de divers documents. Le bilan de tous ces documents est donné à la fin de la bibliographie en annexe I. Ces documents sont donc en principe disponibles dans tous les IREM.
Diverses critiques sont faites au sujet des documents diffusés : le traité des fluxions, par exemple, est incomplet et les manques ne sont pas indiqués ; L'IREM reproduisant le document devrait être signalé ; il faudrait soigner plus ces publications et si possible faire un sommaire. Les réunions du groupe inter-IREM d'épistémologie permettent aussi l'échange de divers renseignements : ouvrages parus qui ont été lu par des participants ; compte-rendus de lectures diverses ; ouvrages à paraître ; vie des groupes dans les divers IREM ; recensement de livres intérêt historique dans les lycées anciens ... etc...etc...
Le groupe tente également d'établir une bibliographie thématique (voir annexe I)
D'autre part des invités viennent exposer divers sujets : par exemple Houzel (sur Analysis infinitorum d'Euler) - Raymond Brousseau - Les obstacles épistémologiques et didactiques ...etc
Il n'existe cependant pas de plan d'ensemble. On répond au fur et à mesure aux demandes. Un tel mode de fonctionnement est critiqué par Bécue comme étant subjectif donc antidémocratique. Autre reproche formulé par Houdebine : il faut briser notre isolement et essayer de toucher de "prof moyen". Wallet (Poitiers) regrette la pré-dominance d'une tendance philosophique et souhaiterait entendre s'exprimer d'autre conceptions ou styles. Des noms comme Bouveresse, Desanti, De Rouilhan, sont cités.....

Le groupe inter-IREM étant conscient des faiblesses de la liste bibliographique (Annexe I) proposée tente de mettre au point une "grille d'analyse sommaire d'un document". La suite de la réunion est une critique de la grille proposée par J.L Ovaert (voir Annexe II). Deux exemples d'applications sont donnés. L'un rédigé par Michel Evelyne Lerest (Rouen) sur le livre d'histoire de Kline (voir Annexe III) , l'autre par Bernard Vittori (Lille) sur le traité des Coniques d'Apollonius(voir Annexe IV)
A propos de la division objectif /subjectif on suggère de considérer les renseignements objectifs comme étant techniques. Certains pensent que pour la partie I (identification et nature du texte) on pourrait choisir les normes classiques utilisées par les bibliothécaires. On oonstate également que cette partie est incomplète : il faut rajouter un I_4' pour dire si les notations utilisées par l'auteur sont originales ou si étant retranscrites en "langue moderne" l'auteur fournit un "dictionnaire"(c'est le principal défaut reproché au livre de Kline par De Gandt). Michel et Evelyne Le Rest nous indiquent ensuite qu'il est assez contraignant de suivre le découpage proposé dans la "partie subjective" Bernard Vittori a, dans sa rédaction groupé les parties II et IV sous la même rubrique : intérêt du texte. Marie Claire Bécue nous signale également qu'on peut se procurer Le bulletin signalétique Histoire des Sciences et des Techniques en s'abonnant au CNRS.

Le secrétaire de séance : BONNEFOY.G

ANNEXE I

ASSEMBLEE des DIRECTEURS d'I.R.E.M. *20 Novembre 1975*

Groupe Inter-IREM d'épistémologie

BIBLIOGRAPHIE

SUR L'HISTOIRE DES SCIENCES

N. BOURBAKI	*Eléments d'histoire des mathématiques 1974 nouvelle édition corrigée et augmentée - 384 pages - 42 F*	*1969 HERMANN*
C. BOYER	*The history of the calculus and its conceptual development*	*DOVER NEW-YORK*
BIRKHOFF	*A source book in classical analysis 158 F*	*HARVARD*
P. RAYMOND	*L'histoire et les sciences 96 pages - 10 F*	*MASPERO*
P. RAYMOND	*De la combinatoire aux probabilités 1975 - 175 pages - 20 F*	*MASPERO*
A. BADIOU	*Le concept de modèle*	*MASPERO*
M. FICHANT *M. PECHEUX*	*Sur l'histoire des Sciences - 15 F*	*MASPERO*
J. ITARD	*Les livres arithmétiques d'Euclide*	*HERMANN*
J. Cl. PONT	*La topologie algèbrique des origines jusqu'à POINCARE - 197 pages - 48 F*	*P.U.F.*
E. DICKSON	*History of the theory of numbers 3 volumes*	*CHELSEA*

SUR L'EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

DESCARTES	*Les règles pour la direction de pensée*	
DESANTI	*La philosophie silencieuse ou critique de la philosophie des sciences*	*LE SEUIL*
DESANTI	*Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels - (dans Logique et connaissance scientifique)*	*Col. LA PLEIADE*
DESANTI	*Les idéalités mathématiques 1968 35 F*	*LE SEUIL*

J. VUILLEMIN	*Philosophie de l'algèbre 1962 - 56 F*	*P.U.F.*
J. VUILLEMIN	*Mathématiques et métaphysique chez Descartes.*	
CAVAILLES	*Méthode axiomatique et formalisation (Thèse 1938)*	
CAVAILLES	*Philosophie mathématique 1962 - 18 F*	*HERMANN*
CAVAILLES	*Logique et théories de la Science*	*P.U.F.*
K.R. POPPERT	*La logique de la découverte scientifique - 484 pages - 64,70 F*	*PAYOT*
NEEDHAN	*Le grand tirage -* *La pensée chinoise*	
FREGE	*Les fondements de l'arithmétique*	*LE SEUIL*
HUSSERL	*La logique de l'arithmétique*	*P.U.F.*

SUR LE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

EULER	*Introductia in analysi infinitorum - 2 volumes - 1745*	
EULER	*Institutiones calculi differentialis 1755 - traduit par BUFFON 1740*	
NEWTON	*Traité des fluxions et des suites infinies*	*BLANCHARD*
LEIBNIZ	*Traité de calcul différentiel (Edition originale en latin, traduction en cours)*	
Mac LAURIN	*Traité des fluxions traduit par PEZENAS (Eléments de la méthode des fluxions démontrés à la manière des anciens géomètres 1738)*	
LAGRANGE	*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables - 1772 -* *Leçons sur le calcul des fonctions 1800* *Théorie des fonctions analytiques 1777*	
D'ALEMBERT	*Article "différentielle" dans l'encyclopédie*	
CAUCHY	*Cours d'analyse de l'école royale polytechnique 1821 3 volumes :* *Analyse algébrique -* *Calcul intégral -* *Calcul différentiel*	

BOLZANO	*Sur le paradoxe de l'infini 1861 Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Dans l'article de JAN SEBESTIK de la revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 17 n° 2 Avril - Juin 1964.*	*PRAYNE*
ABEL	*Oeuvres complètes, Christiana, 1881*	
WEIERSTRASS	*Eléments d'analyse Archives from History of exact sciences, volume 10, 1963, p. 41 - 176*	
R. DEDEKIND	*Stetigkeit and Irrationnellen Zahlen Was sind die Zahlen und was sie sollen sein*	
R. BAIRE	*Leçons sur les fonctions discontinues 1930*	*GAUTHIER-VILLARS*
LEBESGUE	*Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives 1905*	*GAUTHIER-VILLARS*
	Article sur "EULER" dans l'Encyclopédi Universalis.	
Jan SEBESTIK	*Bernard BOLZANO et son mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse Revue d'histoire des sciences et de leurs applications tome 17 n° 2 Avril - Juin 1964*	

Deux ouvrages didactiques :

G. de l'HOSPITAL	*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes Paris, de l'imprimerie Royale 1696 1600 F.*	*Lib. MONGE*
LACROIX	*Traité de calcul différentiel et intégral 1800 (3 volumes)*	

SUR LA GEOMETRIE

F. KLEIN	*Programme d'Erlangen*	*GAUTHIER VILLARS*
J. DIEUDONNE	*Devons-nous enseigner les "mathématiques modernes" Bulletin APM n° 292 p 69-79*	

SUR LA TRILOGIE COMBINATOIRE - PROBABILITES - STATISTIQUES

LEIBNIZ	*De arte combinatoria (traduit)*
D'ALEMBERT	*Oeuvres complètes*

Le groupe Inter-IREM d'épistémologie a diffusé les textes suivants :

DIJON

I. BACHMAKOVA	*Sur l'histoire de l'algèbre commutative actes du XIIe Congrès international d'histoire des sciences 1970*	*BLANCHARD*
H. WUSSING	*Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*	
CAUCHY	*Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul Infinitésimal 1823 - 2 volumes Calcul différentiel - Calcul intégral*	

LYON

CAUCHY	*Cours d'analyse de l'Ecole Royale polytechnique (extraits) 1821 Vol. 1 Analyse Algèbrique 2e série - Tome 3*
J. SEBESTIK	*Bernard BOLZANO et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse*

ORLEANS

J.L. LAGRANGE	*Théorie des fonctions analytiques*	*PRAIRIAL an V*

POITIERS

R. DEDEKIND	*Sur la théorie des nombres entiers algèbriques 1876 - 1877 Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (en 3 morceaux)*
J.L. LAGRANGE	*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables 1772.*

J.L. OVAERT
groupe Inter IREM
Epistémologie
Juin 1977

ANNEXE II

GRILLE D'ANALYSE SOMMAIRE D'UN DOCUMENT

Cette grille comporte quatre parties :

I Identification du texte
II Nature et contenu du texte
III Opinion personnelle sur le texte
IV Utilisations possibles du texte

Les parties I et II visent une description objective du texte, la partie III (parfois difficile à séparer du II) comporte une analyse du texte qui n'engage que la responsabilité de l'auteur de ladite analyse ; elle n'est pas nécessairement très approfondie. Enfin, dans la partie IV, il convient de distinguer clairement ce qui est du domaine des suggestions pour des utilisations à venir de ce qui a déjà été expérimenté, auquel cas il convient de préciser par qui et dans quelles conditions.

L'objectif de ces analyses de documents est double :

- faciliter le travail de documentation des personnes ou groupes effectuant des travaux en épistémologie ou histoire des sciences.
- permettre à des groupes travaillant sur l'enseignement des mathématiques de prendre en compte une réflexion d'ordre historique ou épistémologique.

A cet effet, un double classement des fiches d'analyse, alphabétique et thématique, devra être élaboré.

PROJET DE GRILLE D'ANALYSE

Analyse effectuée par :

Adresse :

Date :

I - Identification du texte

I. 1 - Auteur : nom - prénoms - dates de la naissance et de la mort - nom éventuel du rédacteur si le document (cours...) n'a pas été rédigé par l'auteur.

I. 2 - Titre complet de l'oeuvre (y compris sous-titres éventuels).

I. 3 - Editeur, dates des différentes éditions.

I. 4 - Langue dans laquelle le texte est écrit - traductions éventuelles.

I. 5 - Importance du texte e.g. .

- il comporte n volumes d'environ p pages
- article de p pages extrait d'oeuvres plus importantes (donner le titre)
- chapitre ou extrait d'un livre (titre)
- article de revue (titre)

I. 6 - Accessibilité de l'ouvrage : existe-t-il dans le commerce ? sous quel titre, quel éditeur ? prix approximatif. Sinon, où est-il disponible ?

I. 7 - Date et langue de l'édition utilisée par l'auteur de l'analyse

I. 8 - Remarques diverses.

Pour II et III, deux cas à distinguer :

A - <u>Il s'agit d'une oeuvre mathématique, scientifique, philosophique...</u>
(Ranger ici les livres ou articles consacrés essentiellement à la publication d'oeuvres inédites ou d'extraits).

II. A - <u>Nature et contenu du texte</u>

II. A. 1 - C'est une oeuvre de recherche, un traité didactique original, un manuel, une correspondance, etc...

II. A. 2 - Objectifs visés par le texte, selon les déclarations mêmes de l'auteur (Analyser ici les préfaces éventuelles).

II. A. 3 - Analyse <u>brève</u> du contenu et des moyens (théoriques, expérimentaux, idéologiques..) mis en oeuvre. Le texte considéré présente-t-il un caractère intersectoriel, interdisciplinaire ?

II. A. 4 - Ce texte comporte-t-il des analyses historiques et épistémologiques ? sur quels points ? (préciser les paragraphes et les pages).

II. A. 5 - Comporte-t-il des références bibliographiques ? sur quels sujets ?

II. A. 6 - Bibliographie succinte liée au texte.

III. A - <u>Opinion personnelle sur le texte</u> (dans la mesure du possible, et avec toutes les réserves d'usage)

III. A. 1 - Comment le texte s'insère-t-il dans la problématique de l'auteur, de la discipline considérée, dans le contexte général (philosophique, scientifique, social, politique,..) de l'époque visée ? Position de l'auteur par rapport aux prédécesseurs.

III. A. 2 - Décalage éventuel entre les objectifs de l'auteur et la mise en oeuvre.

III. A. 3 - Principaux effets produits par le texte (éviter ici les récurrences trop abruptes) ? Les principaux concepts mis en oeuvre, l'architecture générale sont-ils conservés, abandonnés, repris ?

par qui et dans quelles oeuvres ? (Ranger ici l'évolution du texte dans les éditions successives et les correspondances au sujet du texte).

III. A. 4 - Exploitation éventuelle du texte par l'auteur (polémique, apologétique, ...)

B - <u>Il s'agit essentiellement d'un ouvrage d'analyse historique et épistémologique</u>

II. B - <u>Nature et contenu du texte</u>

II. B. 1 - C'est un article de recherche, un ouvrage didactique ; une monographie, un ouvrage de synthèse.

II. B. 2 - Objectifs visés par le texte, selon les déclarations mêmes de l'auteur (Analyser ici les préfaces éventuelles)

II. B. 3 - Préciser le champ (scientifique et historique) couvert par le texte.

II. B. 4 - Le texte comporte-t-il des références précises aux oeuvres utilisées, des extraits de ces oeuvres ?

II. B. 5 - Comporte-t-il une bibliographie précise sur le champ considéré ?

II. B. 6 - Bibliographie succinte liée au texte.

III. B - <u>Opinion personnelle sur le texte</u> (dans la mesure du possible et avec toutes les réserves d'usage)

III. B. 1 - Orientations générales (s'intéresse-t-on à la chronique des hommes, des idées, des productions scientifiques et philosophiques, à l'histoire des recherches, à la construction, au développement, aux reprises des concepts scientifiques, aux représentations liées à ces concepts, à l'architecture générale du secteur considéré, etc.). Quelles sont les principales thèses de l'auteur ?

III. B. 2 - Le texte se rattache-t-il (explicitement ou non) à une école philosophique, épistémologique, ou historique ?

III. B. 3 - Effets produits par le texte.

III. B. 4 - Utilisation éventuelle du texte par l'auteur (polémique, apologétique, ...).

IV - Utilisations possibles du texte

IV. 1 - Niveau de technicité scientifique du texte et conséquences pour son exploitation éventuelle (prérequis...)

IV. 2 - Lisibilité, attrait du texte.

IV. 3 - Exemples d'utilisations possibles (déjà effectuées ou non)

- pour des recherches épistémologiques, didactiques ;
- pour la formation des maîtres ;
- pour l'enseignement.

Pour chaque exemple :

- spécifier s'il s'agit de suggérer des problématiques, d'introduire une perspective historique, de dégager un terrain de travail intersectoriel, de situer les concepts mis en jeu, etc.
- Préciser autant que possible les références des utilisations déjà effectuées, ou en cours d'étude.

Annexe III

Analyse effectuée par Evelyne LE REST
I.R.E.M. de Rouen
5 Juin 1977

I - Identification

I.1 - Auteur : Morris Kline
I.2 - Titre : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
I.3 - Editeur : Oxford University Press
Date de la 1ère édition : 1972. Edition utilisée : 3ème en 1974
I.4 - Langue : Anglais
I.5 - Ouvrage de 1238 pages
I.6 - L'ouvrage est disponible dans le commerce au prix approximatif de 350 F.

II.B - Nature et contenu du texte

II.B-1 Il s'agit d'un ouvrage d'analyse historique traitant du développement des mathématiques depuis les mathématiques babyloniennes jusqu'au premier quart de notre siècle.

II.B-2 Les objectifs de l'auteur sont clairement exprimés dans la préface. Kline vise à présenter les idées centrales, en insistant en particulier sur les courants d'activités qui ont occupé le premier plan dans les principales périodes de la vie des mathématiques et qui ont eu de l'influence dans l'avancement et le développement futur des mathématiques.

Kline accorde un grand intérêt au concept même des mathématiques, aux changements de ce concept dans différentes périodes et aux idées des mathématiciens sur leur travail. Il insiste donc plutôt sur les thèmes que sur les hommes ; ce sont les idées de ces hommes qui sont importantes, leur biographie est secondaire.

Kline espère donner une perspective de toute l'histoire des mathématiques.

.../

II.B-3 Kline avertit qu'il ne peut présenter dans son livre que des exemples, choisis les plus représentatifs possibles, parmi toutes les réalisations dans les différents domaines mathématiques. Dans le but de ne pas perdre de vue les idées principales, il ne traite, pour la période après 1700, chaque développement mathématique qu'au moment où il atteint maturité, proéminence et où il influence l'univers mathématique. Ainsi, il ignore les mathématiques chinoises, japonaises et mayas puisqu'elles n'avaient pas eu d'impact sur la ligne de pensée principale des mathématiques. De même, il ne porte pas beaucoup d'attention à la théorie des probabilités, par exemple, car elle n'a eu un développement important qu'aujourd'hui.

II.B-4 Kline ne donne pas les énoncés originaux, il explique les méthodes et les démonstrations dans le langage actuel. Il n'hésite pas, par exemple, à donner le contenu détaillé des treize livres d'Euclide. Kline avertit également dans sa préface qu'en énonçant des théorèmes et des résultats, il a pu omettre des conditions mineures toujours dans le but de ne pas perdre de vue les idées principales.

II.B-5 Pour combler certaines de ces lacunes, inévitables dans un tel ouvrage, Kline établit à la fin de chaque chapitre une importante bibliographie donnant les références des textes originaux et les références d'ouvrages traitant des thèmes abordés dans le chapitre. Cette bibliographie comportant l'année et l'éditeur de chaque article ou ouvrage peut permettre de prolonger l'étude d'un sujet.

III.B - Opinion personnelle sur le texte

III.B-1 Le livre de Kline n'est pas un exposé, prétendu objectif, des réalisations mathématiques passées et s'adressant à des spécialistes de l'histoire des mathématiques. Kline se place sur le terrain de la lutte des idées.

Cet ouvrage concerne tous ceux qui s'intéressent à l'origine, la nature et la portée des mathématiques. Qu'est-ce que les mathématiques ?

A chaque époque correspond une ou des conceptions des mathématiques. Il est intéressant de les connaître et de voir comment elles influent sur les travaux des mathématiciens. Quand situer l'origine des mathématiques ? Il n'y a pas de raison d'associer à l'idée de mathématique celle de démonstration et donc de

.../

les faire débuter avec les mathématiques grecques. Quelle est l'origine des différentes branches mathématiques ? Les motivations des mathématiciens proviennent souvent d'autres domaines tels que le commerce, la physique ou l'astronomie ; il est intéressant de voir les rapports entre les différentes sciences.

Pour chaque période, Kline donne l'état et l'avancement des différents thèmes mathématiques. Par exemple, pour la période couvrant les 16ème et 17ème siècles des titres de chapitre sont : le statut du système numérique, l'arithmétique, le symbolisme algébrique, la résolution des équations des 3ème et 4ème degré, la théorie des équations, le théorème du binôme, la théorie des nombres, les débuts de la géométrie projective, la géométrie analytique, etc... Les relations entre ces différents thèmes et les relations entre ces thèmes et les idées des mathématiciens de l'époque sont aussi largement développées : relation entre l'algèbre et la géométrie, la renaissance de la géométrie, l'émergence de nouveaux principes, les motivations des mathématiciens pour la géométrie analytique, etc... Un chapitre concerne les rapports avec les autres sciences à travers, en particulier pour cette période, le concept de la Science de Descartes et l'approche de la Science de Galilée. Kline donne ensuite les traits lui semblant marquants du monde et de la pensée mathématique de cette période. C'est ainsi qu'il consacre un chapitre à la communication entre les mathématiciens. Kline termine en donnant tout ce qui lui semble être des aspects positifs de cette période, il la rapproche des précédentes et envisage les perspectives pour la suivante.

III.B-4 Kline essaie donc de donner une vue large et complète de l'histoire des mathématiques. Ceci dans le but, en particulier, de comprendre les mathématiques d'aujourd'hui et de demain. Cette idée est exprimée dans la phrase de Poincaré placée en tête de la préface : "Pour prévoir l'avenir des mathématiques, la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent". Les conclusions tirées ne seront pas celles de tout le monde ! En tout cas son livre a le mérite de nous faire poser des problèmes et de nous faire envisager les questions de manière plus élargie.

.../

Pour montrer le caractère polémique de l'oeuvre de Kline, prenons l'exemple des mathématiques grecques. Certains font commencer les mathématiques avec celles-ci en restreignant l'idée de mathématique à celle de démonstration. Kline, comme nous l'avons dit, reconnaît les mathématiques babyloniennes et égyptiennes. Mais bien plus, là où certains ne reconnaissent que des mérites aux mathématiques grecques, Kline trouve aussi des limitations aux mathématiques. Il s'agit de la conception pure, logique et déductive des mathématiques. Kline dit que l'insistance des grecs sur des concepts et des démonstrations exactes fut une entrave à la création mathématique. Il étaie longuement sa théorie sur des exemples précis.

Il se trouve encore conforté dans son idée en remarquant que la période du 17 ème siècle, au cours de laquelle les mathématiciens se libérèrent des contraintes imposées par niveau de rigueur, fut une période de grande créativité. Kline dit alors que le progrès des mathématiques demande presque toujours une complète indifférence aux scrupules logiques et qu'heureusement, les mathématiciens osèrent à cette époque placer leur confiance dans l'intuition et la perception physique.

Quelle conclusion Kline tire-t-il de tout ceci pour les mathématiques d'aujourd'hui et de demain ? Dans le dernier chapitre, il explique rapidement les problèmes soulevés actuellement par le fondement logique des mathématiques. Il rapproche cette crise de celle des mathématiques grecques dont la rigueur était devenue un but et dont les efforts pour poursuivre cette rigueur à l'extrême avaient conduit à une impasse. Les mathématiques dit-il, restent vivantes et vitales, mais seulement sur une base pragmatique.

IV.- Utilisations possibles du texte

IV.1 - Cet ouvrage ne nécessite pas un niveau particulier de technicité scientifique.

IV.2 - L'anglais y est facile à lire, l'organisation du livre est claire et pratique.

.../

IV.3 - On peut penser avec Kline que son livre peut aider d'une part les professionnels des mathématiques et d'autre part les étudiants en mathématiques.

Kline remarque : les professionnels des mathématiques, obligés de consacrer beaucoup de leur temps et de leur énergie à leur spécialité, ont peu l'occasion de se familiariser avec l'histoire de leur sujet. Pourtant c'est important, dit-il, car les racines du présent sont dans les profondeurs du passé et presque rien de ce passé n'est indifférent pour les hommes qui cherchent à comprendre comment le présent est devenu ce qu'il est.
D'autre part, Kline s'inquiète de la prolifération des branches mathématiques. Le plus sûr moyen pour combattre les dangers de la fragmentation des mathématiques est de connaître les réalisations et les objectifs des mathématiques du passé, afin de pouvoir diriger les recherches dans des chemins fructueux.

Quand aux cours donnés aux étudiants en mathématiques, ils présentent habituellement des parties des mathématiques ne semblant pas avoir de relations entre elles. Les cours sont également trompeurs. Ils donnent une présentation organisée logiquement qui laisse l'impression que les mathématiciens vont aisément de théorème en théorème, que les mathématiciens peuvent maîtriser toute difficulté, et que les sujets sont complètement épuisés et mis en place. La succession de théorème submerge les étudiants. L'histoire, au contraire, nous enseigne que le développement d'un sujet s'est fait morceaux par morceaux avec des résultats venant de différentes directions. Nous apprenons que souvent des dizaines et des centaines d'années d'effort ont été nécessaires avant que des pas importants soient faits. Au lieu de l'impression de sujets complètement épuisés, nous trouvons que ce qui est atteint n'est souvent qu'un départ, que beaucoup de trous doivent être bouchés, ou que de très importantes extensions restent à faire. Kline dit encore que les présentations bien polies des cours négligent de montrer les luttes, les frustrations et le difficile chemin que les mathématiciens doivent emprunter avant d'atteindre une plus grande généralité. Son livre peut servir comme une introduction historique aux mathématiques.

Mathematical Thought from ancient to Modern Times est utilisé par le groupe Epistémologie et Histoire des mathématiques de l'I.R.E.M. de Rouen comme ouvrage de référence historique et également de réflexion. S'intéressant aux idées et aux concepts, il peut suggérer de nombreuses problématiques d'ordre épistémologique.

B. VICTORRI
U.E.R de Math
Université de Lille 1

Annexe IV

I.R.E.M de Lille

I - Identification

Auteur : Apollonius de Perge (230 ? - 170 avant JC.)

Titre : les Coniques

Traduction française sous le titre : "les Coniques d'Apollonius de Perge" par Paul VER EECKE de la première édition intégrale du texte grec par l'astronome HALLEY (vers 1700).

Editeur : Albert Blanchard - Paris -

Date première édition : 1922. Edition utilisée pour l'analyse : 1963 (sans modifications)

Ouvrage de 700 pages comprenant une introduction de 50 pages et de très nombreuses notes de Paul VER EECKE . C'est la première traduction intégrale en langue française.

II - Description :

a) Apollonius présente une synthèse de la plupart des résultats obtenus par les Grecs avant lui sur les coniques en y insérant une foule de résultats nouveaux.

La présentation et l'organisation de ces résultats sont entièrement nouvelles : en effet, pour la première fois les coniques sont définies comme sections planes quelconques d'un cône circulaire (alors qu'avant Apollonius, on utilisait les sections par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône), pour la première fois aussi, les deux branches de l'hyperbole sont considérées comme une seule et même courbe. Enfin dans la plupart des démonstrations la conique est rapportée à deux diamètres conjugués quelconques (plus précisément un diamètre et une tangente dans la direction conjuguée), et non plus aux axes de la conique.

b) Pratiquement tous les résultats classiques sur les coniques y sont démontrés : depuis les propriétés des tangentes, des asymptotes, des sécantes et de leur division harmonique, jusqu'aux intersections de 2 coniques et les propriétés des normales à la conique issues d'un poirt.

Seule exception notable : la génération des coniques par foyer et directrice, qui pourtant devaient sans doute être déjà connues des Grecs.

c) l'introduction de Paul VER EECKE présente Apollonius et l'ensemble de son oeuvre, analyse ensuite le contenu des "Coniques" en le situant dans l'ensemble de la mathématique grecque, enfin décrit de façon détaillée l'histoire du manuscrit et de ses diverses traductions.

D'autre part, dans de courts préambules (pages 1, 117, 281 , 331, 479, 549) Apollonius donne de précieuses indications sur l'analyse qu'il fait du contenu de l'ouvrage et de sa place dans l'histoire de la mathématique grecque.

d) la traduction de Paul VEREECKE essaie d'être absolument littérale, le texte étant agrémenté de nombreuses notes "traduisant" en langage mathématique moderne les énoncés et les démonstrations d'Apollonius.

e) la lecture du texte est assez difficile, non pas à cause du niveau de connaissances mathématiques qu'il réclame, mais parce que la compréhension du langage algébrico-géométrique des Grecs demande une certaine habitude. Une lecture préalable des "Eléments" d'Euclide facilite grandement la tâche.

III - Intérêt

a) Cet ouvrage a été d'une importance considérable dans l'histoire des mathématiques. D'abord utilisé et commenté par les auteurs latins et arabes, il a été un ouvrage de base durant tout le 17ème siècle et même bien au-delà, et il a joué un rôle considérable dans les développements ultérieurs de la géométrie (aussi bien de la géométrie analytique que de la géométrie projective).

b) C'est dans le cadre d'un travail collectif sur l'Histoire de la géométrie que j'ai été amené à étudier cet ouvrage. Son intérêt me semble avant tout d'ordre "épistémologique".

On peut dire en effet que ce texte est la première étude affine des coniques. Apollonius dégage tout de suite, de la figure formée par un cône et un plan sécant, une symétrie oblique qui lui permet de définir la notion de diamètres conjugués de la conique, et il travaille ensuite systématiquement dans une sorte de repère formé par deux directions conjuguées. Il donne dans ce repère "l'équation" de la conique (dans son langage algébrico-géométrique, bien entendu), et donne même les formules de changement de repère. Il utilise bien sûr les notions métriques tout au long de l'ouvrage, mais il ressort quand même nettement de cette étude une "vision affine" des coniques. Cette impression est confirmée par le peu de place qui y est donné aux propriétés purement métriques des coniques (foyers - axes).

Cette "vision affine" n'est évidemment pas due à une intuition géniale d'Apollonius ; elle est le produit de son souci de présenter les coniques de la façon la plus synthétique possible en donnant à ses énoncés le maximum de généralité. La leçon est d'importance pour l'enseignant : la structure affine du plan, comme toutes les autres structures mathématiques n'ont pas besoin d'être imposées de l'extérieur comme un "deus ex machina" ; elle apparait naturellement lors de synthèses, de bilans des propriétés géométriques des figures. C'est en tout cas comme cela qu'elle s'est progressivement dégagée au cours de l'histoire de la géométrie.

FAUT-IL BRULER LES OEUVRES DE DESCARTES ?

Exposé de Catherine LEHMAN (IREM de Basse Normandie).

Faut-il brûler les oeuvres de Descartes ?

1°) Après plusieurs séances de travail inter-disciplinaires sur Descartes, une petite feuille de papier a circulé dans la classe de T2. Il s'agissait d'une pétition exigeant "la crémation immédiate des oeuvres de Descartes". C'est dire l'extraordinaire audience que notre expérience rencontrait ! Mon propos ici ne sera donc pas d'insister sur l'intérêt intrinsèque d'introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, mais sur les difficultés d'un tel projet.

2°) Du côté des élèves.

Face à de tels refus, le professeur moyen, comme je le suis, dispose d'un arsenal tout prêt de parades et d'interprétations immédiates.
La première étant de déplorer la baisse du niveau, les rappels émus des bons vieux temps, puis viennent les arguments classiques de la télévision et de la vie trop facile des jeunes d'aujourd'hui, on peut aussi mettre en cause les collègues qui ne font pas leur métier. Enfin, on peut regretter le manque de formation scientifique des terminales A ou le manque de temps des T.C.... Mais tous ces arguments ont quelque chose de rituel, ils ne nous apportent ni une véritable analyse de ce que nous vivons, ni, ce qui est plus grave, aucune solution concrète.

Je tenterai ici de pousser un peu plus l'analyse, je ne sais si le progrès accompli permettra des interventions plus efficaces.

Partons donc du quotidien, ces élèves qui ne s'intéressent pas à l'histoire des mathématiques, que la géométrie de Descartes ennuie, ou que la crise des fondements laissent parfaitement indifférents.

3°) Histoire fermée et histoire ouverte.

Je me fonderais sur un paradoxe et sur une thèse :

a) Notre enseignement est d'une part complètement historique, et de ce fait tue le sens de l'histoire.

b) Les réactions des élèves à l'enseignement sont des produits de l'institution scolaire.

Le premier paradoxe est issu de mon travail sur Descartes et l'histoire, l'exemple cartésien peut nous éclairer puisque c'est avec lui que s'affirme l'idée de mathématiques comme d'un ordre de raisons négateur d'histoire, d'une pratique scientifique comme exercice de pure pensée, éliminant le sujet concret, l'anecdote, le fait et sa contingence.

On ne peut construire la Mathesis universalis, qu'en dégageant par le doute et la réflexion le sujet pur de la science ; ce qu'après Kant on appelera le sujet transcendental, sujet idéal et universel, fondement de toute connaissance objective. De ce point de vue l'histoire n'est qu'un préambule, Descartes ne raconte que ses erreurs de jeunesse, après il écrit la Géométrie.

Pourtant je rappelerai les définitions cartésiennes de l'histoire et de la science : "par histoire, j'entendstout ce qui a déjà été inventé et qui est dans les livres , mais par science, j'entends l'habileté à résoudre toutes les difficultés et par là, découvrir par son ingéniosité propre tout ce qui en cette science peut être découvert par l'esprit humain".

Ce qui oppose histoire et science, c'est que cette dernière est ouverte en marche, tandis que l'autre est de l'ordre du tout fait et de l'achevé.

L'exposé axiômatique des mathématiques, comme travail sur des théories déjà finies et parfaites, se rapproche donc plus de ce que Descartes appelle histoire que de qu'il qualifie : science.

Je ferais maintenant jouer ma deuxième Thèse :Les réactions des élèves sont des produits de l'institution scolaire elle-même.

Si les élèves se désintéressent de l'histoire, c'est qu'elle leur paraît morte, coupée de leurs intérêts et sans rapport avec une activité possible. Mais n'est-ce pas un des effets de notre enseignement que d'avoir coupé les différentes disciplines de tout rapport avec la pratique accessible aux élèves et de n'avoir d'autre justification que l'autorité du déjà fait de ce qui est validé et cautionné par l'institution elle-même.

J'illustrerai cette thèse par un exemple que j'emprunterai à l'enseignement de la philosophie parce que telle est ma spécialité, mais aussi parce qu'il me paraît spécifique de l'institution scolaire dans son ensemble.

4°) Du côté du professeur.

Je me permettrai d'abord une digression qui n'est peut-être pas insignifiante dans mon propos général de la difficulté des travaux interdisciplinaires sur l'histoire des sciences.

Travaillant sur Descartes, je fus amenée à faire des recherches bibliographiques et découvrit avec stupeur l'existence d'un ouvrage de 300 pages : " bibliographia cartesiana".

Je faillis alors renoncer à mon projet : jamais, dans le temps dont je disposais je ne pourrais faire un travail défendable ; la recherche est maintenant affaire de spécialiste, seul un petit nombre d'élus peuvent encore prétendre écrire sur Descartes, seuls, ils ont le temps de se mettre à jour de la littérature critique . Le professeur de lycée ne peut que se soumettre à leur autorité, il est institutionnellement évacué de la recherche.

Ce moment de découragement passa lorsque je me mis à analyser la bibliographie elle-même : j'y compris comment l'institution en prenant en charge la gestion de l'oeuvre cartésienne m'en éliminait ainsi que la plupart de mes élèves.

5°) Bibliographia cartesiana.

En gros, on peut distinguer quatre grandes étapes dans la critique cartésienne,

1°) De la publication des Essais à celle des principia de Newton.

2) Le siècle des lumières

3°) La mise en place de l'université par Victor Cousin

4°) La montée à partir de 1 850 des Thèses d'état.

Chaque période a une relation très distincte à la pensée de Descartes. Dans la première période, nous trouvons des apologies et des pamphlets. On prend parti pour ou contre Descartes. Ceux qui le défendent appliquent ses méthodes dans les sciences de la nature, ou commentent et mettent au point sa géométrie ; il répond à des questions que se posent effectiv ement ses lecteurs, son oeuvre est donc poursuivie ; être cartésien c'est en gros faire de la physique, et des mathématiques.

2°) C'est ce qui explique le déclin rapide de la critique cartésienne pendant le s¢iècle des Lumières.

La publication, puis le succès des Principia de Newton rendent périmés les travaux physiques de Descartes, donc sa méthode ; le cartésianisme n'est plus la science en marche, on rend grâce à Descartes comme précurseur, mais on cherche ailleurs les préceptes méthodologiques.

On sait que la mise sur pied de l'université est pour la philosophie l'oeuvre de Victor Cousin. La philosophie universitaire est éclectique, spiritualiste et "nationale". Ce qui est maintenant retenu de Descartes est son idéalisme, plus accessible que celui de Kant et de Hegel, nous aussi avons notre pensée. Face à l'impérialisme allemand, la France se veut maintenant Cartésienne ; Le cartésianisme se constitue alors comme mythe.

4°) Enfin, à partir de 1850, c'est la prolifération des thèses et des coups d'état universitaires. Il n'est pas d'aspect de l'oeuvre de Descartes qui ne soit analysé et étudié. De là un effet paradoxal de dissémination et de concentration :

L'oeuvre se démultiplie à force d'être sollicitée et interrogée sur ces moindres détails, Descartes étudié à propos de tout, devient le penseur universel, où je trouverai réponse à tout : science morale, métaphysique ; la volonté, l'imagination, le temps, l'inconscient, l'amour, etc...

D'autre part de grands conflits se nouent sur l'interprétation de sa pensée : en 1850 un coup d'Etat universitaire : L. Liard affirme que D. loin d'être le métaphysicien qu'on voulait voir en lui est un scientifique, on peut voir depuis les cycles et les modes se répéter inlassablement. Le résultat étant que maintenant les problèmes posés par Descartes ne quittent plus le terrain de l'université, et sont bien entendu coupés de toute pratique autre que la prise de pouvoir dans l'université.

C'est l'institution qui canalise donc dans ce genre de débat la force de travail de l'intellectuel. C'est parce que les oeuvres de Descartes ont été constituées en pur objet universitaire à usage interne, qu'elles semblent si étranges et sans intérêt à ceux de nos élèves qui n'envisagent pas de rester dans le sein de l'alma Mater.

J'imagine qu'un certain nombre d'entre vous ne se sentent guère concernés par ce qui n'est apparemment qu'affaire de philosophes ; et pourtant si l'on y réfléchit bien, ne vous retrouvez vous pas vis à vis de ce qui vient d'être dit, dans la même situation que l'élève x face à votre enseignement ; il ne se sent pas concerné lui non plus. Le seul mode d'expression de ceux qui ne seront pas intégrés dans le système et qui n'ont ni métier ni prestige à attendre de nous est le refus plus ou moins agressif.

Au fond, je pense que si mes élèves ont réagi "contre Descartes" c'est peut-être déjà quelque chose : ils étaient partie prenante au sens où ils s'estimaient en droit d'accepter ou de refuser exactement comme les contemporains de Descartes lui-même.

La digression terminée, je reviendrai à la question initiale. En quel sens faut-il introduire une perspective historique dans l'enseignement math. et peut-être dans l'enseignement tout court ?
Retour à la question initiale.

Si par histoire on entend référence érudite au passé, il est bien évident que dans l'enseignement des Mathématiques il ne pourra s'agir que d'un ornement assez superflu ou du moins réservé aux élèves les moins "besogneux", les moins bloqués par l'urgence d'une réussite problématique et pourtant désirée. Encore une fois les "happy fews", ceux pour qui le luxe de la "culture" désintéressée est possible. Pour les autres cette entreprise sera un des multiples gadgets de la pédagogie nouvelle, un truc pour essayer de retrouver un intérêt ou des motivations que l'institution elle même fait tout pour désamorcer ; soyons clairs ; dans l'enseignement de la philosophie, il n'a jamais été question de faire de tout homme un philosophe, il a fallu discerner les quelques privilégiés qui auraient le temps et le droit de parler de Descartes. En mathématiques, il faut sélectionner les futurs ingénieurs et cadres de la Nation, il ne s'agit pas de faire de chaque élève une personne éclairée et responsable.

Alors que peut signifier véritablement une perspective historique ? D'où vient que nous nous intéressions à l'histoire ?

Au delà de l'anecdote et du divertissement, les grandes énigmes de l'histoire ou la vie héroîque et secrète des savants, au delà de la curiosité de l'archiviste, l'histoire est enracinée dans le souci du présent, si nous nous tournons vers le passé, c'est en ce qu'il peut éclairer notre pratique actuelle, nous permettre de comprendre ce que signifient les choix qui ont été faits pour nous par nos pères, ce qui a été retenu, ce qui a été évacué comme non significatif ou non intéressant et pourquoi. Le culte d'une science intemporelle et objective masque trop souvent ce que l'idéal scientifique occulte ou cautionne dans la société actuelle. L'activité mathématique est intrinséquement une chose bonne. Est-elle la seule formation nécessaire aux futurs gestionnaires de la société ? et d'ailleurs faut-il vraiment ce type de gestionnaires, et faut-il vraiment ce genre de société ?

Réintroduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques ne peut se faire que si l'on réintroduit un sens de l'histoire dans l'enseignement et peut-être aussi dans la vie : rendre nos élèves et nous-mêmes capables d'une pratique active et responsable ; que l'enseignement ne soit plus une série de rituels initiatiques destinés à la reconnaissance entre pairs, mais l'ouverture vers un avenir.

Si tel est notre projet et si les élèves peuvent se dire également partie prenante, alors l'histoire les passionnera, parce qu'ils seront eux aussi acteurs de cette histoire et que le regard sur le passé pourra les éclairer ; autrement, soit qu'elle se présente comme récit, soit qu'elle se déguise dans les théories parfaites et achevées des livres, l'histoire leur restera toujours objet extérieur et indifférent et ils auront le droit de réclamer qu'on brûle ce qui n'est là que pour les éliminer ou les rendre conformes à un modèle préétabli.

LISTE DES PARTICIPANTS (non exhaustive)

NANTES
- LEFORT Xavier

BESANCON
- HENRY Annie

STRASBOURG
- SIDLER J. Claude
- CAMBAS Michel
- GLAESER Georges

NANCY
- BAYER Marie-Thèrèse
- DEPAIX Odette
- BARTHEL Marie-Thèrèse
- MULLER Hélène -LAVIGNE J.Pierre

BREST
- LANGLET Vincent

RENNES
- HOUDEBINE Jean
- DOSTAL Claude

TOULOUSE
- DESQ Roger
- MAILHAS Line
- GRABIAS Christian
- MAYNARD Jean Louis
- LASSAVE Claude

ROUEN
- CHOUCHAN Michèle
- LEREST Evelyne-Michel
- LEMETER Pierette
- CARBONIER Jeanne
- MATTHIEU Claudine
- DELBREIL Brigitte
- BESNIER J. Michel-Martine

POITIERS
- BOROWCZYK Jacques
- DAVIAUD Daniel
- WALLET Guy
- SAVARIAU Jacques
- CAUSSE Maurice
- PARPAY Serge

CAEN
- VAUTTIER Daniel
- LANIER Denis
- BAMIERE Annick
- LEPREVOST Anne-Marie
- BERTRAND Guy
- SENECHAL Brigitte
- LUCAS Gérard
- COUCHOT Francis
- MADELAINE Jacques
- CATHERINE Jacques
- HERVIEU Claudine
- LEHMAN Eric- Catherine
- TAILPIED Anne-Marie
- MARY André
- FOUCAULT Jeanine
- BESNIER Gérard
- DEBART Françoise-Patrice
- TOFFIN Nicole
- ROUSSEL Nathalie
- RENON Chantal
- PIMBÉ
- LEJEUNE Jeannot
- BLONDEL Anne
- DROUET Jean
- LEGOFF Jean Pierre
- BEYNIER Dominique
- BEYNIER Annick
- BEAUFILS Paule
- BEAUFILS François
- LEGALL Maryse
- HUET Eugène
- ROGUES Jean Paul
- VEILLEUX André
- DELAGARDE Claude
- ALCORN David
- DELABROISE Evelyne
- FREREUX René
- HUE Ghislaine
- BOUCHEREAU Joël

DIJON

- DURIEZ Roland
- BELLEMIN Jean Marc
- TOUATI André
- REGNIER Jean-Claude
- BAZAK Françoise

LILLE

- VITTORI Bernard
- CO[illegible]SQUER ELiane
- CHAMONTIN Françoise
- BRASSELET Anne-Marie
- LAGRE[illegible] Bernard
- POURPRIX Marie-Thèrèse
- BKOUCHE Rudolf

LYON

- MAL[illegible]ET Antonio
- GLAYMANN Maurice
- JOBERT Claude-Jacqueline
- BONNETOY Gilles
- ROCHAÙ[illegible] Jeanne
- TAIN Laurence

ORLEANS

- HENRY Joseph
- KALEKA Gérard
- VOISOT Marie Paule
- LEDOUX Françoise
- PIGEONNAT Jean François
- DAUDIN Pierre

PARIS

- B[illegible]REBI Jeannine
- PRADEL Laurence
- WERQUIN Marie Claude
- KERLIDOU Michel
- MIKOU Noufissa
- CHARAUD Nathalie
- BECUE Marie Claire
- COSTES Marie Françoise
- R[illegible]MOND Pierre
- PARIS[illegible]OT Paul
- ROUGET Jeanine
- ROULETTE Christiane
- DE GANDT François
- GUEGAN Dominique

MARSEILLE

- OVAERT Jean Louis
- CHEVALLARD Yves

BELGIQUE

- VALENDUC Gérard
- VERBEKE Claudine

S O M M A I R E

-=-=-=-=-=-=-=-