

La géométrie tropicale, benjamine des géométries

André-Jean GLIÈRE

Introduction

J'ai pour objectif dans cet article d'exposer quelques bases de la géométrie tropicale qui, dans ses prémices, reste abordable pour un lycéen¹ et à *fortiori* pour un jeune étudiant. Elle-même, je veux dire, la géométrie tropicale, est jeune. D'après Ilia Itenberg (Itenberg, 2008), elle a fait ses débuts « théoriques » dans les années 1970 avec G. M. Bergman à propos des ensembles limites logarithmiques² (voir le paragraphe consacré à la déquantification d'une droite du plan et aux amibes). Stéphane Gaubert³ explique que, contrairement à l'habitude qu'ont les mathématiques pures de précéder les mathématiques appliquées, la géométrie et l'algèbre tropicales ont été inventées par des mathématiciens appliqués, des informaticiens et par des chercheurs opérationnels. Ce n'est que depuis une quinzaine d'années, qu'elles intéressent les chercheurs en mathématiques pures (en géométrie algébrique, en géométrie symplectique, en combinatoire, en logique, en calcul formel, en théorie des graphes par exemple). Si le qualificatif tropical a été donné à cette nouvelle géométrie en l'honneur de l'informaticien brésilien Imre Simon⁴,

1. Voir Internet à l'adresse : http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/comptes-rendus/geometrie_tropicale-milan-2013.pdf

2. Ilia Itenberg fait référence à l'article : Bergman G.M., The logarithmic limit-set of an algebraic variety, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), p. 459 – 469.

3. Stéphane Gaubert est directeur de recherche à l'INRIA et professeur associé à l'école polytechnique; voir sa vidéo (Gaubert, 2015). Voir aussi le lien <https://www.inria.fr/centre/saclay/actualites/gestion-des-appels-d-urgence-une-geometrie-tropicale-pour-les-secours-parisiens>

4. Imre Simon (Budapest 1943-Sao Paulo 2009). En 1956, sa famille émigre au Brésil. Il y fait des études d'ingénieur en électronique, puis se consacre à l'informatique. Ses recherches portent sur la théorie des automates finis, sur les réseaux numériques et sur la géométrie tropicale

vivant sous le tropique sud à Sao Paulo, cette branche des mathématiques a été inventée conjointement en France, en Angleterre et en Russie.

La géométrie tropicale fait la part belle aux réseaux de segments et de demi-droites. Nous commencerons par définir les tripodes, réunions de trois demi-droites, appelées à juste titre comme nous l'expliquerons : **droites tropicales**. Nous pourrions en donnant un cadre algébrique à cette géométrie naissante, en munissant $\mathbb{R}$ de deux opérations internes $\oplus$ et $\odot$ que l'on interpréterait grâce à la fonction logarithme. Nous visualiserons cette interprétation en déquantifiant une droite du plan, la droite tropicale apparaissant alors comme le squelette d'une amibe. Familiarisés avec les opérations tropicales, nous pourrions tout naturellement représenter par des courbes tropicales (réseaux de segments et de demi-droites) les polynômes tropicaux qu'ils soient d'une ou deux variables, qu'ils soient de degré 2 ou de degré 3. En passant, nous donnerons du sens à la notion de racine tropicale. Encore plus fort, nous associerons à chaque courbe tropicale un polygone de Newton, qui jouera un rôle clef lorsqu'il s'agira de retrouver un polynôme tropical associé à une courbe tropicale donnée. Pour terminer ce voyage sous les tropiques (!) et pour montrer que la géométrie tropicale s'ancre dans l'histoire des mathématiques, nous exposerons tout d'abord une version tropicale simplifiée du théorème de Bézout, pas le Bézout arithmétique, mais le Bézout algébrique qui comptabilise le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques planes. Puis, nous irons chercher le 16^e problème de Hilbert, celui qui demande de faire la liste des arrangements possibles des composantes connexes d'une courbe algébrique plane, et nous expliquerons la technique du Patchwork qui permet de recréer par un procédé de quantification une courbe algébrique à partir d'une courbe tropicale.

L'ambition est belle. J'espère que vous prendrez goût à cette nouvelle géométrie. Cet exposé n'a été possible que grâce aux nombreux articles que j'ai lus dans des journaux spécialisés et aux mémoires que j'ai trouvés sur Internet. Mes sources sont listées dans les références bibliographiques. Enfin, je remercie tout particulièrement Stéphane Gaubert et Erwan Brugallé qui ont bien voulu répondre à mes questions.

Les droites tropicales

Exemple 1

Partons du petit problème suivant (Gaubert, 2015) : *Un exposé est prévu à 10 heures à l'Université. L'orateur part de chez lui à l'heure x et met 30 minutes pour s'y rendre. La personne qui filme l'exposé part de chez lui à l'heure y et met 1 heure pour s'y rendre. À quelle heure h commence l'exposé ?*

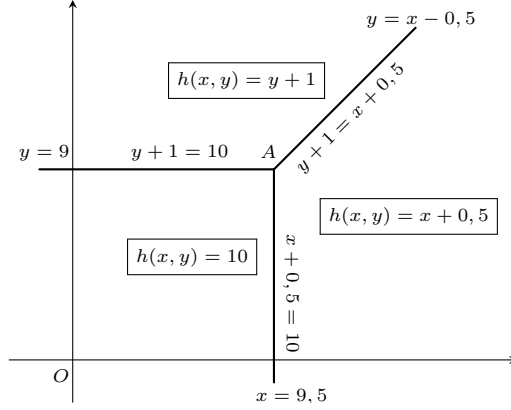
La réponse est la fonction h de deux variables définie par

$$h(x, y) = \max(x + 0, 5; y + 1; 10)$$

La représentation graphique de h dans le plan (Oxy) est formée par trois régions correspondant à trois systèmes :

dont il est l'un des pionniers. Voir l'article : *Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring* dans *Mathematical Foundations of Computer Science (Carlsbad, 1988)*, Springer, 1988.

$$\begin{aligned}
 1) \quad h(x, y) = 10 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,5 \leq 10 \\ y + 1 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9,5 \\ y \leq 9 \end{cases}, \\
 2) \quad h(x, y) = y + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 \geq 10 \\ y + 1 \geq x + 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 9 \\ y \geq x - 0,5 \end{cases}, \\
 3) \quad h(x, y) = x + 0,5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0,5 \geq 10 \\ x + 0,5 \geq y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9,5 \\ x - 0,5 \geq y \end{cases}.
 \end{aligned}$$


 FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction h

La réunion des trois demi-droites frontières des trois régions est appelée une droite tropicale. Les points de la droite tropicale sont les points du plan pour lesquels au moins deux des monômes 10, $y + 1$ et $x + 0,5$ sont égaux et réalisent le maximum de la fonction h .

Cas général

On considère la fonction p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$p(x, y) = \max(a + x, b + y, c)$$

Sa représentation graphique dans le plan (Oxy) est formée par trois régions correspondant à trois systèmes :

$$\begin{aligned}
 1) \quad p(x, y) = c &\Leftrightarrow \begin{cases} a + x \leq c \\ b + y \leq c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq c - a \\ y \leq c - b \end{cases}, \\
 2) \quad p(x, y) = b + y &\Leftrightarrow \begin{cases} a + x \leq b + y \\ c \leq b + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x + a - b \\ y \geq c - b \end{cases}, \\
 3) \quad p(x, y) = a + x &\Leftrightarrow \begin{cases} c \leq a + x \\ b + y \leq a + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq c - a \\ x + a - b \geq y \end{cases}.
 \end{aligned}$$

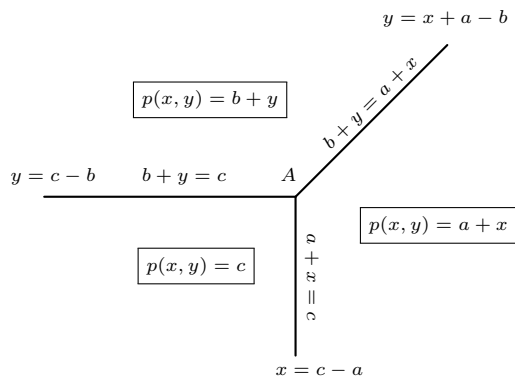


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction p

La droite tropicale est la réunion des trois demi-droites d'origine le même point, appelé point central, une de direction ouest $(-1, 0)$, une de direction sud $(0, -1)$ et une de direction nord-est $(1, 1)$. C'est aussi l'ensemble des points où le maximum des trois monômes $a + x$, $b + y$, et c est atteint au moins deux fois.

Qu'Euclide se rassure, le vocable de « droite » n'est pas usurpé. En effet, on peut vérifier que, par deux points indépendants, c'est-à-dire deux points qui ne sont pas tous les deux sur un même axe sud, ouest ou nord-est, il ne passe qu'une seule droite tropicale et que deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un point.

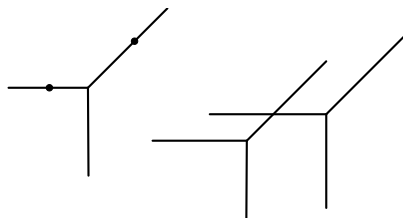


FIGURE 3 – Propriétés des droites tropicales

Exemple 2

Par analogie avec la droite affine d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on peut caractériser la droite tropicale, lieu des « coins » de la fonction $\max(a + x, b + y, c)$, par le polynôme dit tropical $P(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = "ax + by + c"$.

Pour cela, on doit remplacer l'addition et la multiplication usuelles des réels respectivement par le max et l'addition.

Par exemple, la droite tropicale associée au polynôme tropical :

$$P(x, y) = 2 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus \frac{1}{2} = "2x + (-5)y + \frac{1}{2}" = \max(2 + x, -5 + y, \frac{1}{2})$$

est la réunion des trois demi-droites frontières des trois régions définies respectivement par $P(x, y) = 2 + x$, $P(x, y) = -5 + y$ et $P(x, y) = \frac{1}{2}$.

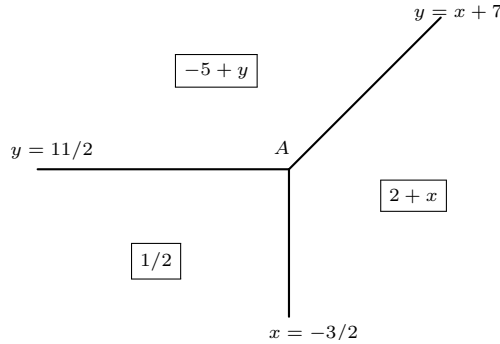


FIGURE 4 – Droite tropicale ou tripode associée au polynôme tropical :

$$P(x, y) = 2 \odot x \oplus (-5) \odot y \oplus \frac{1}{2}$$

Algèbre tropicale

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni des deux lois internes $\oplus$ et $\odot$ suivantes :

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ et } a \odot b = a + b$$

On vérifie que la loi $\oplus$ est commutative, associative, qu'elle possède un élément neutre $-\infty$ (à rajouter), qu'elle ne peut pas être symétrique (pas de soustraction) et qu'enfin elle est idempotente. La loi $\odot$ confère à $\mathbb{R}$ une structure de groupe abélien. Elle est de plus distributive par rapport à $\oplus$.

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des deux opérations $\oplus$ et $\odot$ est le semi-corps T des nombres tropicaux. En remarquant que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^{\odot n} = na$, on peut vérifier facilement que $(a \oplus b)^{\odot 2} = a^{\odot 2} \oplus b^{\odot 2}$, puis de manière générale que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a \oplus b)^{\odot n} = a^{\odot n} \oplus b^{\odot n}$. Par exemple, on obtient $(3 \oplus 6)^{\odot 4} = 24$. Étrange, non ? En tout cas, nos collégiens et lycéens font parfois de l'algèbre tropicale sans le savoir !

La multiplication devenant l'addition, il n'est pas surprenant que les opérations tropicales aient à voir avec les fonctions logarithmes. Plus précisément, la fonction $\log_b$, logarithme en base b , est une bijection du semi-corps $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ dans le semi-corps $(T, \oplus_b, \odot_b)$. On pose :

$$x \odot_b y = x + y \quad \text{et} \quad x \oplus_b y = \log_b(b^x + b^y)$$

Pour retrouver l'addition tropicale, on fait tendre la base b vers $+\infty$. Si $\max(x, y) = x$, alors $b^x \gg b^y$ et $x \oplus_b y = x$ (idem si $\max(x, y) = y$). Ainsi : $x \oplus_\infty y = \max(x, y)$. Donc les opérations tropicales peuvent être vues comme des opérations limites et la géométrie tropicale comme l'image de la géométrie classique par la fonction logarithme de base ∞ .

Déquantification d'une droite du plan : Amibes

L'amibe de V , ensemble des racines communes d'un nombre fini de polynômes à deux indéterminées, est son image par la fonction :

$$\text{Log} : (x_1, x_2) \rightarrow (\ln |x_1|, \ln |x_2|) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in V$$

Exemple

Cherchons l'amibe de V , ensemble des zéros du polynôme $P(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1$.

L'image de V par la fonction valeur absolue, autrement dit $(r_1, r_2), r_1 = |x_1|, r_2 = |x_2|, |x_2|, |x_2| = |x_1 + 1|$, est la réunion des trois frontières du domaine en gris ci-contre.

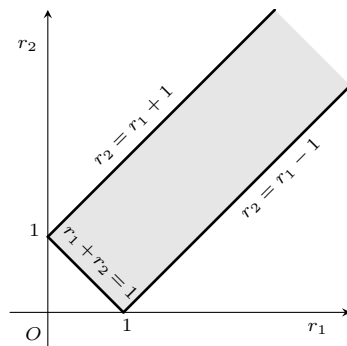


FIGURE 5 – Exemple d'amibe ...

En posant $x = \ln r_1$ et $y = \ln r_2$, on peut représenter les images des trois frontières du domaine en gris (segment et demi-droites) par la fonction Log :

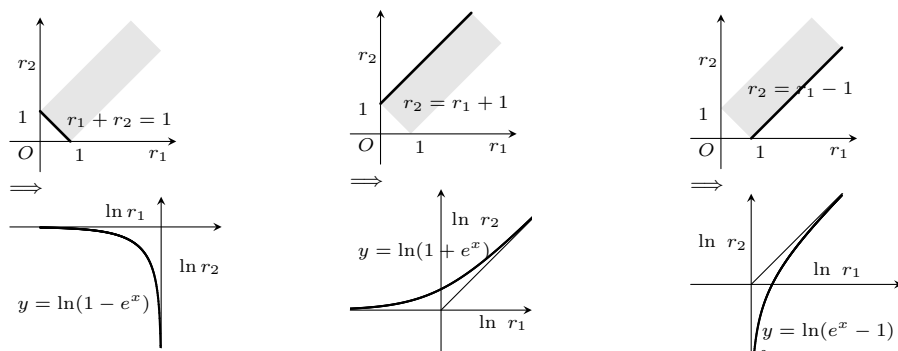


FIGURE 6 – ... et les représentations de ses frontières

En conclusion, lorsque l'on procède de même avec la fonction $\log_b$ et que l'on fait tendre b vers l'infini, l'amibe « tend » vers les trois asymptotes, son squelette, réunion des trois demi-droites : $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = y \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Nous remarquons que le squelette de l'amibe est une droite tropicale de polynôme tropical : $P(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 = \max(x, y, 0) = "x + y + 0"$. Voici un

résumé graphique de la déquantification tel qu'on peut le trouver dans (Brugallé, 2009, p. 11) ou dans (Arnal, Legrand, 2015, p. 18) :

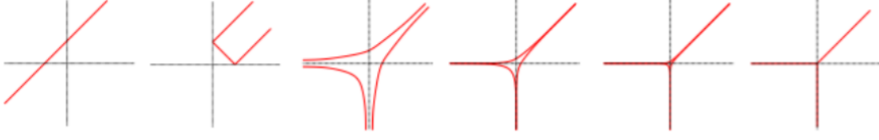


FIGURE 7 – Résumé graphique de la déquantification d'une droite

Polynômes tropicaux

Polynômes tropicaux du second et du troisième degré

Exemple 1

$$y = P(x) = "2x^2 + x + 1" = (2 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot x) \oplus 1 = \max(2 + 2x, x, 1).$$

Pour le représenter graphiquement, on distingue trois cas :

$$\max(2 + 2x, x, 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 2 + 2x \\ 1 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\max(2 + 2x, x, 1) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 + 2x \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

$$\max(2 + 2x, x, 1) = 2 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2x \geq x \\ 2 + 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

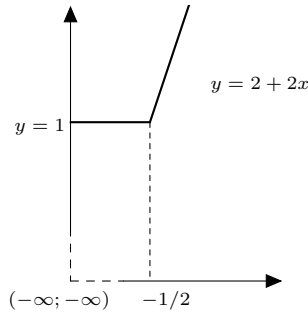


FIGURE 8 – Représentation graphique du polynôme tropical " $2x^2 + x + 1$ "

Exemple 2

$$y = P(x) = "(1)x^2 + 3x + 1" = (1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (3 \odot x) \oplus 1 = \max(1 + 2x, 3 + x, 1).$$

Pour le représenter graphiquement, on distingue à nouveau trois cas :

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1 + 2x \\ 1 \geq 3 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2$$

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 3 + x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + x \geq 1 + 2x \\ 3 + x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\max(1 + 2x, 3 + x, 1) = 1 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x \geq 3 + x \\ 1 + 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

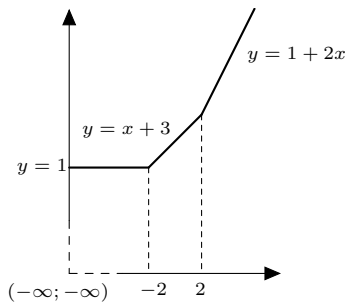


FIGURE 9 – Représentation graphique du polynôme tropical ” $(1)x^2 + 3x + 1$ ”

Remarque

En utilisant les règles d’algèbre tropicale, on vérifie les factorisations suivantes :
 Pour l’exemple 1, $(2 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot x) \oplus 1 = 2 \odot (x \oplus (-\frac{1}{2}))^{\odot 2}$.
 Pour l’exemple 2, $(1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (3 \odot x) \oplus 1 = 1 \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus (-2))$.
 On peut donc légitimement définir les racines d’un polynôme tropical de degré 2 comme les abscisses des points anguleux de sa représentation graphique.

Généralisation

Les racines du polynôme tropical $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^{i\odot} = \max_{i=0,\dots,d} (a_i + ix)$ sont les nombres tropicaux x_0 pour lesquels $\exists i \neq j, P(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$. Le max est donc atteint au moins deux fois en toute racine x_0 . Par définition, l’ordre de x_0 est le $\max|i - j|$.

Exemple 3

Le polynôme tropical de degré 3 défini par $y = P(x) = \max(x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)) = (0 \odot x^{\odot 3}) \oplus (2 \odot x^{\odot 2}) \oplus (3 \odot x) \oplus (-1) = \max(3x, 2 + 2x, 3 + x, -1)$ a pour représentation graphique la courbe ci-après.

Il se factorise en $(x \oplus (-4)) \odot (x \oplus 1) \odot (x \oplus 2)$.

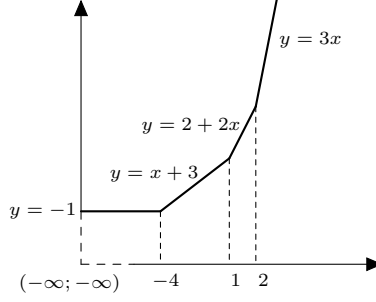


FIGURE 10 – Représentation graphique du polynôme tropical
 $x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)$

Polynômes tropicaux à deux variables

Définitions

Un polynôme tropical à deux variables (x, y) est de la forme :

$$P(x, y) = \bigoplus_{i,j} a_{ij} \odot x^{\odot i} \odot y^{\odot j} = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = \max_{i,j} (a_{ij} + ix + jy), \text{ où } (i, j) \in \mathbb{N}^2$$

La courbe tropicale définie par $P(x, y)$ est l'ensemble des points (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tels que : $\exists (i, j) \neq (k, l), P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0 = a_{kl} + kx_0 + ly_0$, autrement dit l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où le maximum est atteint par au moins deux monômes de la forme $a_{ij} + ix + jy$.

Exemple

Représentons graphiquement la conique tropicale définie par le polynôme
 $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 4 = 4 \oplus (0 \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot y^{\odot 2}) \oplus (2 \odot x \odot y)$
 $= \max(4, 2x, 2y, 2 + x + y)$.

Pour l'étudier, on distingue six cas :

$$2x = 4, 2y = 4, 4 = 2 + x + y, 2y = 2x, 2x = 2 + x + y, 2y = 2 + x + y.$$

Un cas étant impossible (le quatrième dans la liste ci-dessous), on représente les quatre demi-droites et le segment composant la conique tropicale.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x = 4 \\ 4 \geq 2y \\ 4 \geq 2 + x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y \leq 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2y = 4 \\ 4 \geq 2x \\ 4 \geq 2 + x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 4 = 2 + x + y \\ 4 \geq 2x \\ 4 \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x \leq 2 \\ y = 2 - x \end{cases} & 4) \begin{cases} 2y = 2x \\ 2x \geq 4 \\ 2x \geq 2 + x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 \geq 2 \end{cases} \quad \emptyset \\ 5) \begin{cases} 2x = 2 + x + y \\ 2x \geq 4 \\ 2x \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = x - 2 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2y = 2 + x + y \\ 2y \geq 4 \\ 2y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \end{array}$$

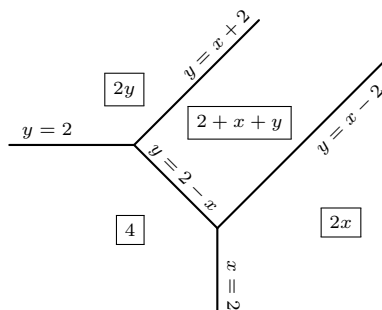


FIGURE 11 – Représentation graphique de la conique tropicale
 $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 4$

Généralisation

De manière générale, le polynôme tropical d'une conique tropicale est de la forme :

$$P(x, y) = a_{00} \oplus (a_{10} \odot x) \oplus (a_{01} \odot y) \oplus (a_{20} \odot x^{\odot 2}) \oplus (a_{02} \odot y^{\odot 2}) \oplus (a_{11} \odot x \odot y)$$

Sa représentation graphique est, de manière générale, formée par le réseau des segments et demi-droites, frontières des différentes régions « max des monômes » (voir figure de gauche ci-dessous). Sur la figure de droite est représenté le polynôme $P(x, y) = \max(5, 5 + x, 5 + y, 2x, 1 + 2y, 4 + x + y)$

$$P(x, y) = 5 \oplus (5 \odot x) \oplus (5 \odot y) \oplus (0 \odot x^{\odot 2}) \oplus ((1) \odot y^{\odot 2}) \oplus (4 \odot x \odot y).$$

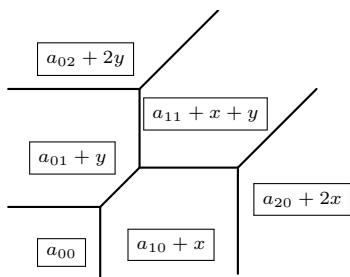


FIGURE 12 – Représentation graphique d'une conique tropicale

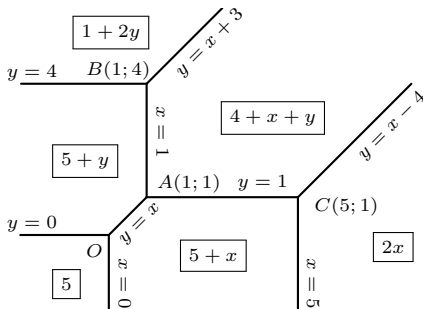


FIGURE 13 – Représentation graphique de la conique tropicale
 $P(x, y) = x^2 + 1y^2 + 5x + 5y + 4xy + 5$

Remarque

Certaines régions peuvent disparaître de la représentation graphique suite à l'absence des monômes correspondants dans le polynôme comme dans l'exemple

suivant :

$$P(x, y) = \max(0, x, -1 + 2x, 2y) = (0) \oplus (0 \odot x) \oplus ((-1) \odot x^{\odot 2}) \oplus (0 \odot y^{\odot 2}).$$

Ici les monômes $a_{01} + y$ et $a_{11} + x + y$ sont absents et les régions disparues sont repérées par le poids 2 des deux arêtes, conformément à la définition suivante : le poids d'une arête est le pgcd des nombres $|i - k|$ et $|j - l|$ correspondant à l'arête $a_{ij} + ix + jy = a_{kl} + kx + ly$.

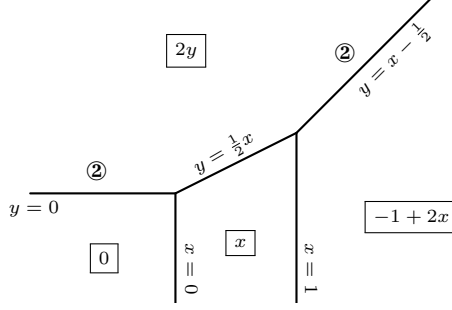


FIGURE 14 – Représentation graphique de la conique tropicale
 $P(x, y) = {}''(-1)x^2 + y^2 + x + 0$

Remarquons également que le degré de la courbe tropicale se lit sur le dessin. Il s'agit de la somme des poids des arêtes dans une direction « infinie », autrement dit de la somme des poids des arêtes dans une des directions $(1,0)$, $(0,1)$ ou $(1,1)$. Dans notre exemple, le degré vaut 2.

Polygone de Newton d'un polynôme tropical

Exemple 1

Le polynôme tropical :

$$P(x, y) = {}''2x + (-5)y + \frac{1}{2}''$$

de représentation graphique la droite tropicale (voir exemple 2 du paragraphe *Droites tropicales*) a trois monômes tropicaux $\frac{1}{2}$, $2 \odot x$ et $(-5) \odot y$ qui ont la même valeur $\frac{1}{2} = 2 + x = -5 + y$ au sommet $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Les trois couples d'exposants $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ des monômes correspondants $\frac{1}{2}x^0y^0$, $2x^1y^0$ et $(-5)x^0y^1$ définissent un triangle Δ dont les trois côtés sont respectivement perpendiculaires aux arêtes de la droite tropicale. Δ est appelée la subdivision duale de la droite tropicale.

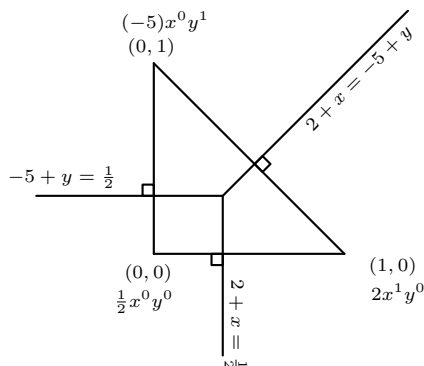


FIGURE 15 – Subdivision duale de la droite tropicale de polynôme $P(x, y) = 2x + (-5)y + \frac{1}{2}$

Exemple 2

La conique tropicale de polynôme tropical :

$$P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2 = \max(3, 2 + x, 2 + y, 3 + x + y, 2x, 2y)$$

a pour représentation graphique la figure ci-dessous, conformément au réseau général des segments et demi-droites, frontières des différentes régions « max des monômes », vu précédemment.

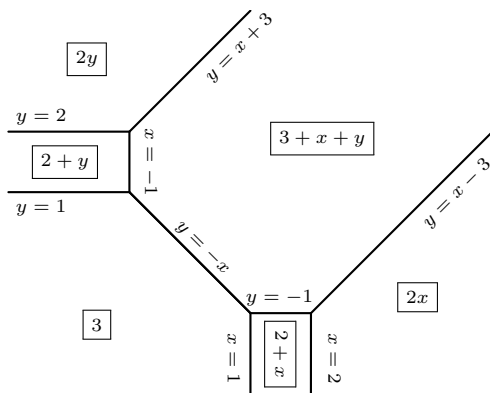


FIGURE 16 – Représentation graphique de la conique tropicale $P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2$

Les six couples d'exposants des monômes : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ et $(0, 2)$ définissent un triangle Δ « quadrillé » dont les côtés sont respectivement perpendiculaires aux arêtes de la conique tropicale. Δ est la subdivision duale de la conique tropicale.

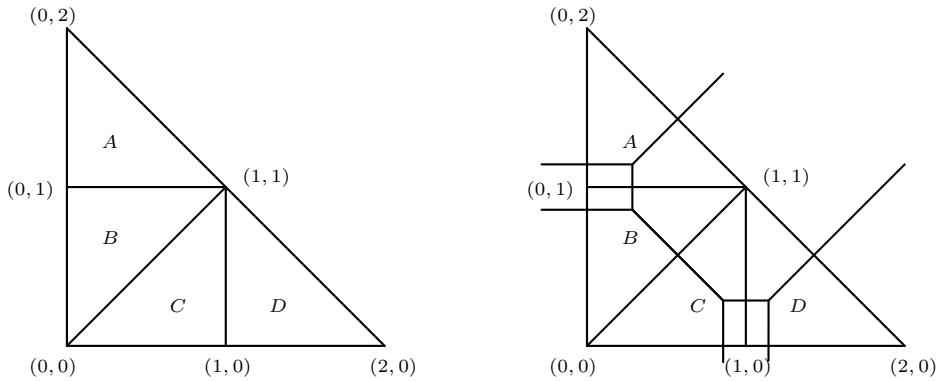


FIGURE 17 – Subdivision duale de la conique tropicale
 $P(x, y) = 3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2$

Propriétés

1. À chaque sommet d'une courbe tropicale correspond un « triangle » de la subdivision duale.
2. De manière duale, à chaque sommet de la subdivision duale correspond une région délimitée par la courbe tropicale. Par exemple, le sommet $(1, 1)$, point de concours de cinq côtés de Δ , correspond à la région Nord-est $ABCD$ Nord-est délimitée par cinq segments et demi-droites.
3. Les segments ou demi-droites de la courbe tropicale sont respectivement perpendiculaires aux côtés correspondants de la subdivision duale.

Problème tropical

Le problème posé ici est le problème inverse à savoir trouver un polynôme tropical représentant une courbe tropicale donnée.

Considérons la courbe tropicale C dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On précise d'abord le degré du polynôme tropical $P(x, y)$. Il est de 3. Il est en effet, conformément à la remarque du paragraphe *Polynômes tropicaux à deux variables*, la somme des poids des arêtes dans une direction infinie.

Ensuite on écrit la subdivision duale de la courbe tropicale. Pour ce faire, on se rappelle qu'à chaque point de C correspond un triangle du polygone dual, qu'à chaque arête de C correspond une arête du polygone dual qui lui est orthogonale et qu'à chaque région délimitée par C correspond un sommet du polygone dual qui a autant de sommets voisins que la région a de régions voisines. Par exemple, on part du triangle élémentaire $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ dont l'intérieur correspond au point I de C . Ses côtés sont deux à deux perpendiculaires aux arêtes de C issues de I et les relations duales de voisinage sont respectées. Ensuite, on continue de proche en proche avec les points E , F , D etc.

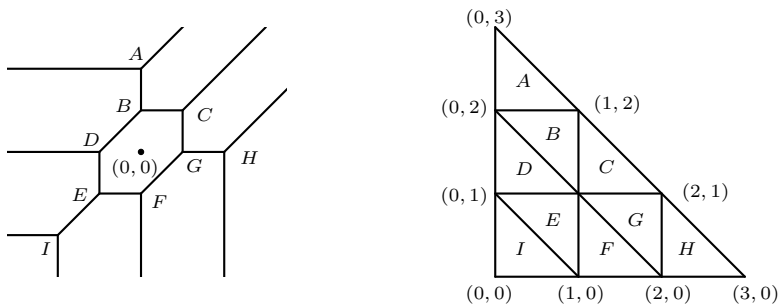


FIGURE 18 – Trouver un polynôme tropical représentant une courbe tropicale

En convenant (quitte à opérer une translation) que le point $O(0,0)$ est au centre de la figure, on déduit alors les monômes correspondants à chaque sommet de C : Le point $A(0,2)$ de C correspond au triangle du polygone dual $(0,3)$, $(0,2)$ et $(1,2)$, qui sont les trois couples d'exposants des monômes $a_{03}x^0y^3$, $a_{02}x^0y^2$ et $a_{12}x^1y^2$. De même pour les autres points.

$B(0,1) : a_{02}x^0y^2, a_{12}x^1y^2 \text{ et } a_{11}x^1y^1$ $C(1,1) : a_{12}x^1y^2, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{21}x^2y^1$
 $D(-1,0) : a_{02}x^0y^2, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{01}x^0y^1$ $G(1,0) : a_{20}x^2y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{21}x^2y^1$
 $H(2,0) : a_{20}x^2y^0, a_{21}x^2y^1 \text{ et } a_{30}x^3y^0$ $F(0,-1) : a_{10}x^1y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{20}x^2y^0$
 $E(-1,-1) : a_{10}x^1y^0, a_{11}x^1y^1 \text{ et } a_{01}x^0y^1$ $I(-2,-2) : a_{10}x^1y^0, a_{00}x^0y^0 \text{ et } a_{01}x^0y^1$

Enfin, on utilise le fait qu'au voisinage d'un sommet de la courbe, la valeur du polynôme recherché est donnée uniquement par les monômes correspondant à ce sommet.

Soit le sommet $A(x_0, y_0)$ où $(x_0, y_0) = (0, 2)$ de monômes $a_{03}x^0y^3$, $a_{02}x^0y^2$ et $a_{12}x^1y^2$. Puisqu'en ce point les trois monômes sont égaux, il vient : $a_{03} + 3y_0 = a_{02} + 2y_0 = a_{12} + x_0 + 2y_0$, autrement dit : $a_{03} + 6 = a_{02} + 4 = a_{12} + 4$. Posons $a_{03} = 0$. Il découle $a_{02} = a_{12} = 2$ et, comme nous l'avons dit, au voisinage de A le polynôme $P(x, y) = \max(a_{03} + 3y = a_{02} + 2y = a_{12} + x + 2y)$. Ainsi $P(x, y) = "y^3 + 2y^2 + 2xy^2"$.

On recommence avec le sommet $B(x_0, y_0)$ où $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Il vient : $a_{02} + 2y_0 = a_{12} + x_0 + 2y_0 = a_{11} + x_0 + y_0$ autrement dit $2 + 2 = 2 + 0 + 2 = a_{11} + 1$ et $a_{11} = 3$. Au voisinage de B le polynôme $P(x, y) = "2y^2 + 2xy^2 + 3xy"$.

Ainsi de suite avec $C(1,1) : a_{21} = 2$, avec $D(-1,0) : a_{01} = 2$, avec $G(1,0) : a_{20} = 2$, avec $H(2,0) : a_{30} = 0$, avec $E(-1,-1) : a_{10} = 2$, avec $I(-2,-2) : a_{00} = 0$ (le point $F(0,-1)$ permet de vérifier la cohérence des calculs mais n'apporte aucun renseignement nouveau).

Conclusion, on obtient le polynôme défini par :

$P(x, y) = "x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 2xy^2 + 2x^2y + 3xy + 2x + 2y + 0"$.

Autrement dit $\max(3x, 3y, 2+2x, 2+2y, 2+x+2y, 2+2x+y, 3+x+y, 2+x, 2+y, 0)$.

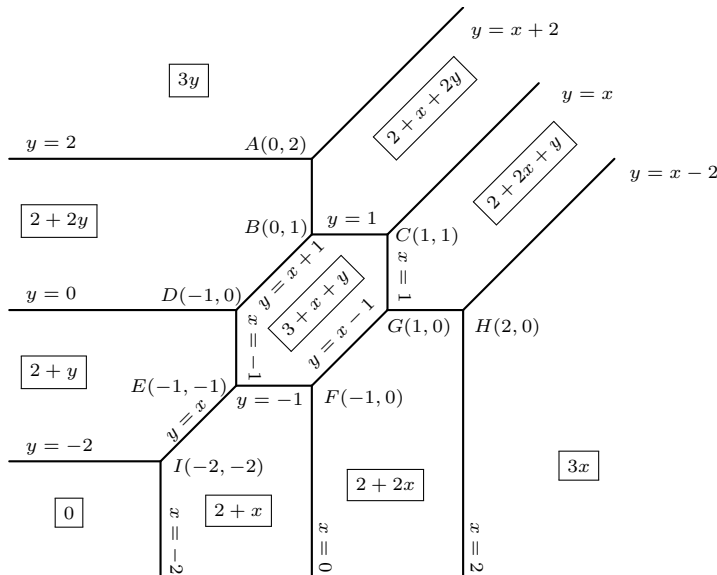


FIGURE 19 – Solution du problème posé

Le théorème de Bézout

En 1764, Étienne Bézout écrit un mémoire d'une cinquantaine de pages *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Equations*, publié dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, dans lequel il détaille des méthodes pour résoudre des équations polynomiales. Il résulte le théorème de Bézout que ce dernier énonce en 1779 à la page XII de la préface de son livre *La théorie générale des équations algébriques* sous la forme suivante :

C'EST en appliquant ces moyens & ces idées aux équations complètes, que nous sommes parvenus à ce théorème général.... Le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues, & de degrés quelconques, est égal au produit des exposants des degrés de ces équations. Théorème dont la vérité n'étoit connue & démontrée que pour deux équations seulement.

FIGURE 20 – Théorème de Bézout (Bézout, 1779, préface p. XII) – Source : BnF

Aujourd'hui, nous pouvons énoncer dans le plan projectif complexe la version géométrie algébrique du théorème de Bézout suivante : Deux courbes algébriques projectives complexes planes, sans composante commune, respectivement de degré n et de degré p , possèdent exactement $n \times p$ points d'intersection, comptés avec leur multiplicité.

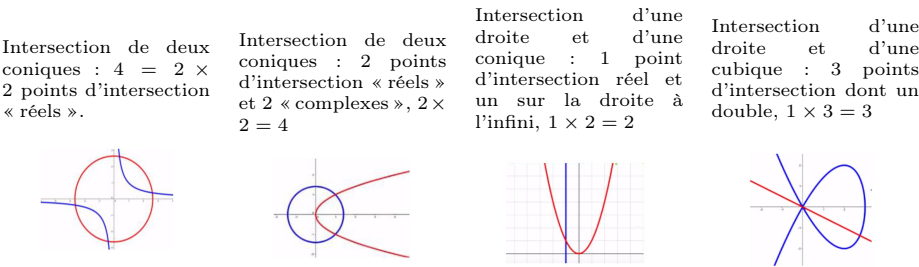


FIGURE 21 – Illustrations du théorème de Bézout⁵

Version tropicale du théorème de Bézout n° 1

Exemples de courbes tropicales dont les intersections sont simples

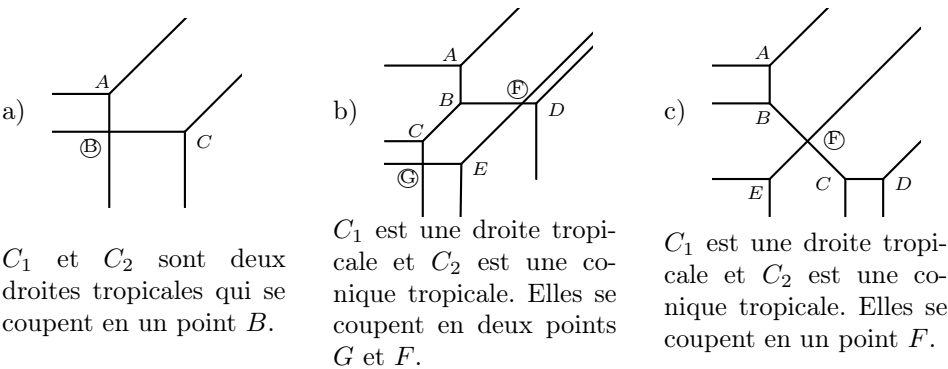


FIGURE 22 – Exemples de courbes tropicales C_1 et C_1 et de leur réunion $C_1 \cup C_2$

Elles ont respectivement pour subdivisions duales :

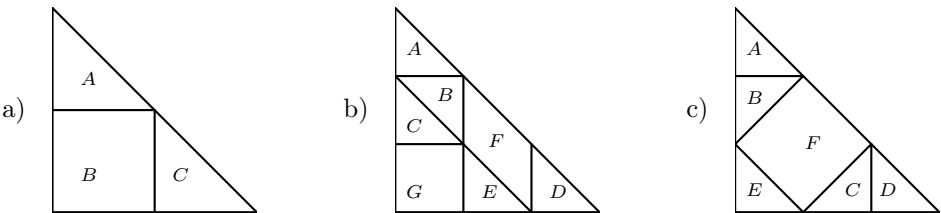


FIGURE 23 – Subdivisions duales des courbes précédentes

5. Ces exemples sont tirées de la vidéo intitulée Deux (deux?) minutes pour... le théorème de Bézout dont l'adresse internet est https://www.youtube.com/watch?v=0_ZzZvxnp0

Pour deux courbes tropicales, on définit la multiplicité de chacun de leurs points d'intersection comme l'aire du parallélogramme dual correspondant. Dans le cas a) l'aire du « carré » vaut 1, dans le cas b) l'aire du « carré G » vaut 1 et l'aire du « parallélogramme F » vaut 1 et dans le cas c) l'aire du « carré F » vaut 2. Dans les trois cas, on remarque que la somme des multiplicités des points d'intersection est égale au produit des degrés. Ceci vaut pour des polynômes complets (aucun coefficient a_{kl} ne vaut $-\infty$ et des intersections simples (elles ne contiennent qu'un nombre fini de points et aucun sommet). Une première version du théorème de Bézout tropical est alors :

Théorème de Bézout tropical 1

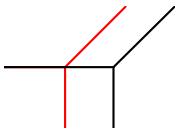
Soit C_1 et C_2 deux courbes tropicales correspondant à deux polynômes complets de degré n_1 et n_2 et d'intersection simple. Alors la somme des multiplicités des points d'intersection vaut $n_1 \times n_2$.

La démonstration est élémentaire : Le polygone dual Δ_1 de la courbe C_1 , définie par un polynôme complet de degré n_1 , est un triangle rectangle isocèle de côté n_1 et d'aire $\frac{n_1^2}{2}$. Idem pour le polygone dual Δ_2 de la courbe C_2 . Il a pour aire $\frac{n_2^2}{2}$. Le polygone dual Δ de la courbe $C_1 \cup C_2$ de degré $n_1 + n_2$ a de la même façon pour aire $\frac{(n_1+n_2)^2}{2}$ et est composé de Δ_1 , de Δ_2 et des parallélogrammes correspondant aux points d'intersection de C_1 et de C_2 . Par conséquent, la somme des multiplicités des points d'intersection de C_1 et de C_2 vaut : $\frac{(n_1+n_2)^2}{2} - \frac{n_1^2}{2} - \frac{n_2^2}{2} = n_1 \times n_2$. CQFD.

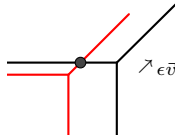
Version tropicale du théorème de Bézout n° 2

Exemples de courbes tropicales C_1 et C_2 dont les intersections ne sont pas simples⁶

a) Deux droites tropicales qui ont une infinité de points d'intersection.



b) On translate l'une des deux droites. Les droites ont un seul point d'intersection. L'intersection est simple.



c) Le polygone dual est la réunion des polygones duals des deux droites et du parallélogramme du point d'intersection devenu simple.

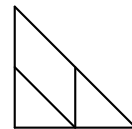
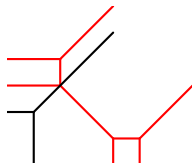


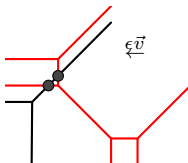
FIGURE 24 – Exemple avec une infinité de points d'intersection

6. Les exemples sont extraits de (Brugallé, oct-déc 2009) et (Arnal, Legrand, 2015, p.11-12).

a) La droite tropicale et la conique tropicale se coupent en un sommet de la conique.



b) On translate la droite. Les courbes se coupent alors en deux points distincts. L'intersection est simple.



c) Le polygone dual est la réunion des polygones duaux des deux courbes et du parallélogramme du point d'intersection simple.

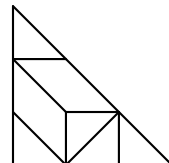


FIGURE 25 – Exemple avec un point d'intersection en un sommet de la conique

Les deux exemples précédents permettent de justifier les deux définitions suivantes :

Un point d'intersection stable de deux courbes est un point limite des points d'intersection simples de l'une des deux courbes avec la translatée de l'autre.

Sa multiplicité est égale à la somme des multiplicités des points d'intersection dont il est la limite.

On déduit l'énoncé général tropical du théorème de Bézout, nettement plus simple que sa version géométrie algébrique rappelée précédemment :

Théorème de Bézout tropical 2 (version générale)

Soit C_1 et C_2 deux courbes tropicales correspondant à deux polynômes complets de degré n_1 et n_2 . Alors la somme des multiplicités des points d'intersection stables vaut $n_1 \times n_2$.

Le 16^e problème de Hilbert

Il s'agit ici de la première partie du 16^e problème parmi les 23, proposés par Hilbert en 1900 à Paris, dont l'énoncé donné par Erwan Brugallé est le suivant : « *Étant donné un entier d , établir la liste des arrangements possibles des courbes algébriques réelles planes de degré d .* » (Brugallé, oct-déc 2009, p. 12) Par arrangement d'une courbe algébrique réelle plane, il faut comprendre la position relative de ses composantes connexes dans le plan.

Voici quatre exemples (Brugallé, oct-déc 2009, p. 12) de courbes algébriques réelles de degré 4 :



FIGURE 26 – De gauche à droite, deux, quatre, deux et enfin quatre composantes connexes

Le Théorème de Axel Harnack ⁷ datant de 1876 permet de majorer le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique lisse projective de degré d par $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$.

Le problème posé par Hilbert est actuellement résolu jusqu'au degré 7, où la classification est connue. Par exemple pour le degré 6, les courbes avec 11 composantes connexes $\left(\frac{(6-1)(6-2)}{2} + 1\right)$ appelées maximales sont les trois courbes suivantes (Voir (Saint-Gervais, 2014-2022) et (Kantor, 1993)) :

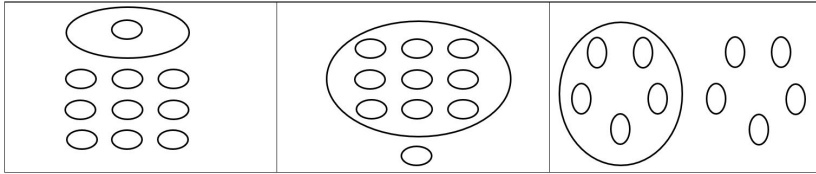


FIGURE 27 – Courbes de degré 6 à 11 composantes connexes

Dans son article de 1891 « *Über die reellen Züge algebraischer Curven* », David Hilbert pense que les deux courbes de gauche sont les seules maximales de degré 6 (celle de Axel Harnack et la sienne). En fait, en 1967, le mathématicien russe Dimitri Gudkov trouve la troisième.

À partir du degré 8, le problème est ouvert. Il est en effet difficile de construire une courbe algébrique réelle d'un degré donné réalisant un arrangement donné. La technique du Patchwork inventée par Oleg Viro dans les années 70 permet de recréer par un procédé de quantification une courbe algébrique à partir d'une courbe tropicale, présentant le même arrangement que la courbe algébrique d'avant la déquantification.

La technique du Patchwork pour une courbe de degré d

1. On dessine le triangle $\Delta : (0, 0), (d, 0)$ et $(0, d)$.
2. On choisit une triangulation de Δ .
3. A chaque sommet (i, j) on lui associe un signe $+$ ou $-$.
4. On fait trois copies de cette triangulation pour obtenir un carré.
5. On signe tous les autres sommets en respectant la règle suivante : Le signe de $(-i, j)$ est celui de (i, j) si i est pair et l'opposé sinon. Idem pour j .
6. On trace alors les segments joignant les milieux des côtés dont les extrémités ont des signes différents.

7. Axel Harnack (1851, Dorpat – 1888, Dresde) est un mathématicien germano balte. élève de Felix Klein, il enseigne l'analyse à Dresde et conduit des recherches sur les séries de Fourier et la théorie des ensembles.

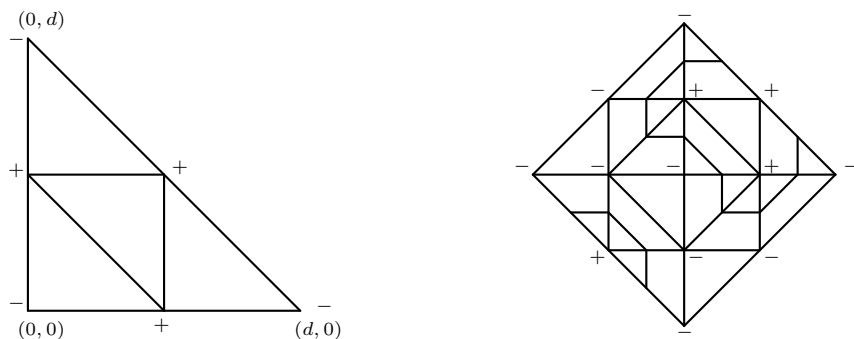


FIGURE 28 – Exemple 1 (Alexandre, Mordant, Mao, 2016, p.V.)

On construit une courbe lisse de degré 6 à partir de la subdivision duale ci-dessous (Bouis, Trannoy, 2018). On a préféré des points colorés en noir et en gris plutôt que des points signés.

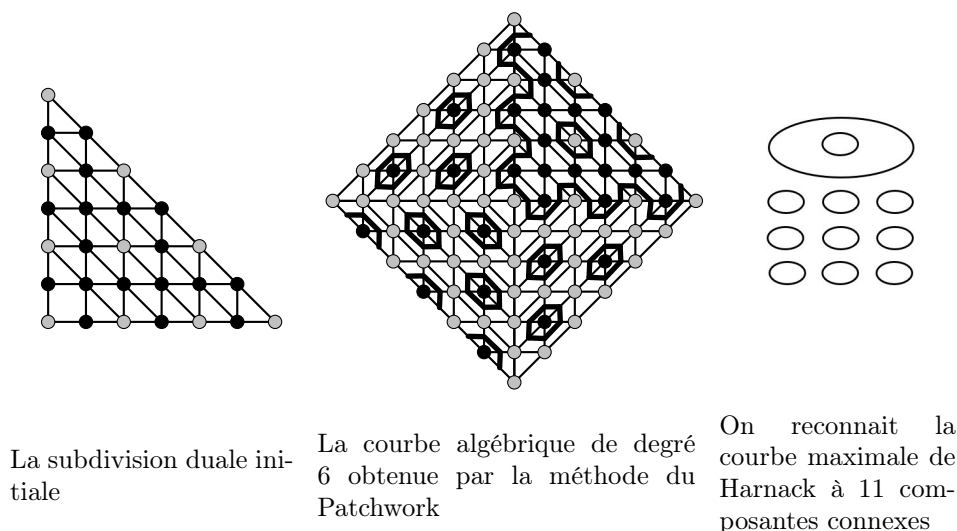


FIGURE 29 – Exemple 2 (Bouis, Trannoy, 2018)

Conclusion

Le voyage sous le tropique sud s'achève sur la technique du Patchwork. Pourtant, comme l'explique Antoine Chambert-Loir dans son article « Quand la géométrie devient tropicale » (Chambert-Loir, 2018), la suite de l'histoire reste à écrire. La géométrie tropicale est toute neuve et prometteuse. En effet, les courbes tro-

picales vues comme dégénérescences d'amibes de courbes algébriques, conservent certaines propriétés de ces dernières. La géométrie tropicale fournit alors des modèles combinatoires plus simples. Les applications sont variées. Stephane Gaubert en donne une liste détaillée (Gaubert, 2015) : Problème de jeux à somme nulle, calcul de région de sécurité, optimisation d'un revenu, optimisation du référencement d'un site web, minimisation du taux de croissance de cellules tumorales, mais aussi vérification de programmes et même de preuves mathématiques !

Références bibliographiques et sitographiques

- ALEXANDRE Raphaël, MORDANT Thomas, MAO Zhouhang, 2016, « Patchwork combinatoire de courbes algébriques », mémoire de L3 encadré par ITENBERG Ilia, École Normale Supérieure, à l'adresse Internet : https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php?fichier=1946 (dernier accès le 20 mai 2019)
- ARNAL Charles, 2017, « Géométrie tropicale et topologie des variétés algébriques réelles », à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/147667371-Geometrie-tropicale-et-topologie-des-varietes-algebriques-reelles.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- ARNAL Charles et LEGRAND Alexandre, 2015, « Géométrie tropicale », à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/150113269-Geometrie-tropicale-alexandre-legrand-charles-arnal-20-juin-2015.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- BÉZOUT Étienne, 1762, « Mémoire sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés, qui admettent une solution algébrique », *Histoire de l'Académie royale des sciences M. DCCLXII*, Paris, Imprimerie Royale, Table pour les mémoires p. 17-52.
- BÉZOUT Étienne, 1764, « Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations », *Histoire de l'Académie royale des sciences M. DCCLXIV*, Imprimerie Royale, Table pour les mémoires p. 288-338.
- BÉZOUT Étienne, 1779, *Théorie Générale des équations algébriques*, Imprimerie PH.- D. Pierres, rue S. Jacques Paris.
- BOUIS Vincent et TRANNOY Matthias, 2018, « Topologie des courbes algébriques réelles », à l'adresse Internet : https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.bouis/topologie_courbes_algebriques_reelles.pdf (dernier accès le 30 avril 2022)
- BRUGALLÉ Erwan, octobre-décembre 2009, « Un peu de géométrie tropicale », *Quadrature journal* n° 74, p. 10-22.
- BRUGALLÉ Erwan, 2009, *Un peu de géométrie tropicale, Solutions des exercices*, Online Material : <https://www.quadrature-journal.org/articles/quadrature/olm/2009/04/q09007/q09007-olm.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- BRUGALLÉ Erwan, 2008, « Géométries énumératives complexe, réelle et tropicale », Journées X-UPS Éditions de l'X (Plagne, Harinck, Sabbah), à l'adresse Internet : <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-02.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)

- CHAMBERT-LOIR Antoine, 2018, « Quand la géométrie devient tropicale », *Pour la science* n° 492, octobre 2018, p. 26-33.
- GAUBERT Stéphane, 2015, « Déterminer des stratégies optimales grâce à l'algèbre tropicale », vidéo à l'adresse Internet : https://www.youtube.com/watch?v=yP5qajIL_YM (dernier accès le 30 avril 2022)
- ITENBERG Ilia, 2008, « Introduction à la géométrie tropicale », Journées X-UPS, Éditions de l'X (Plagne, Harinck, Sabbah), à l'adresse Internet : <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-01.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- KANTOR Jean-Michel, 1993, « Les problèmes de Hilbert et leur devenir », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, Série 2, Tome 3, p. 95-112, à l'adresse Internet : http://www.numdam.org/article/CSHM_1993_2_3__95_0.pdf (dernier accès le 30 avril 2022)
- LEFORT Jean, 2013, « Notions de géométrie tropicale », *Bulletin Vert APMEP* n° 502 p. 79-88. Voir aussi à l'adresse Internet : <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/13-Lefort-C.pdf> (dernier accès le 30 avril 2022)
- NICOTERA Mickaël, 2007, « Amibes et géométrie tropicale », Mémoire encadré par Alain YGER, Université de Bordeaux I, à l'adresse Internet : <https://docplayer.fr/56791661-Amibes-et-geometrie-tropicale.html> (dernier accès le 30 avril 2022)
- SAINT-GERVAIS Henri-Paul de, 2014-2022, « Topologie des courbes algébriques planes réelles », *Analysis Situs, Topologie algébrique des variétés*, site à l'adresse Internet : <http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Topologie-des-courbes-algebriques-planes-reelles.html> (dernier accès le 30 avril 2022)