23

Le père Jésuite Giromalo Saccheri (1677-1733) correcteur d'Euclide et inventeur de résultats de la géométrie hyperbolique à venir

Didier Bessot

Introduction

Le travail du Père Girolamo Saccheri sur le cinquième postulat d'Euclide s'inscrit dans la continuité des tentatives de démonstration de ses prédécesseurs (voir le chapitre précédent). Il est l'objet du premier livre de son traité *Euclides ab omni naevo vindicatus...* (Saccheri, 1733). Ce traité, dont le titre complet est *Euclides ab omni nævo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ Principia* (traduction : Euclide délivré de toute tache, ou essai géométrique par lequel sont établis les tout premiers principes de la géométrie universelle) [1] a été publié en 1733 à Milan. À une brève biographie de Girolamo Saccheri succèderont une description matérielle de l'ouvrage puis un exposé commenté du contenu du premier livre.

Brève biographie de G. Saccheri

Giovanni Girolamo Saccheri est né à San Remo en 1667 et mort à Milan en 1733. Reconnu intellectuellement précoce, il entre dans la Compagnie de Jésus en 1685 où il effectue son noviciat à Gênes jusqu'en 1690. Il est envoyé ensuite à Milan au Collège de La Brera pour enseigner la grammaire et étudier la philosophie et la théologie. Il y aborde également l'étude des mathématiques par la lecture des *Éléments* d'Euclide qui lui a été recommandée par le Père jésuite Tommaso Ceva,

1. Toutes les citations en français apparaissant dans la suite de l'article proviennent d'une traduction en cours par l'auteur de l'article.

frère de Giovanni Ceva, auteur du théorème qui porte son nom. Il publie en 1693 des *Quœsita geometrica*. Ordonné prêtre en 1694, il est envoyé au Collège des Jésuites de Turin pour y enseigner la philosophie et la dispute théologique. Il publie en 1697 la *Logica demonstrativa* avant de partir la même année à l'Université de Pavie où il est chargé d'enseigner la philosophie, la théologie et les mathématiques. Il entame alors une recherche des imperfections contenues dans les *Éléments* d'Euclide. Il en relève, comme certains de ses prédécesseurs, principalement deux, la première à propos du cinquième postulat, la seconde dans la théorie des proportions. La volonté de corriger ces « taches » le conduit à la rédaction et à la publication à Milan en 1733 de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus...* Entretemps, il a publié aussi à Milan en 1708 une *Neo-statica*.

Contenu du traité *Euclides ab omni nævo vindicatus...*

Description matérielle du traité

Le traité édité en 1733 se présente comme un codex de format in-4° partagé en quatre parties : des préliminaires en 16 pages paginées seulement à partir de la page IX, le livre I constitué de 101 pages, le livre II de 41 pages et 6 pages de planches.

Les préliminaires comprennent la page de titre, une lettre dédicatoire au Sénat de Milan de 3 pages, 1 page d'approbation des Supérieurs, 1 page pour l'Imprimatur, une introduction destinée au lecteur de 3 pages, une description sommaire du contenu en 4 pages et enfin 1 page d'errata.

Le livre premier est divisé en deux parties : la première, de 86 pages, contient 33 propositions entourées de 3 définitions, 5 lemmes, 17 corollaires et 12 scholies. Les quatre premières planches contenant 41 figures s'y rapportent. La seconde partie, de 15 pages, contient 6 propositions, 1 corollaire et 3 scholies auxquels s'ajoute la planche V composée de 7 figures.

Le livre second est aussi divisé en deux parties : la première, de 31 pages, la seconde, de 11 pages. Il est complété par la planche VI composée de 7 figures.

Aperçu du contenu : examen des préliminaires

Dans l'introduction destinée au lecteur, Saccheri rappelle la place de tout premier plan reconnue aux *Éléments* d'Euclide par les mathématiciens autant anciens que contemporains. Mais cette prééminence ne les a pas empêchés de relever dans cet ouvrage des imperfections, principalement au nombre de trois. La première, dit-il, concerne la définition des droites parallèles et l'axiome figurant dans l'édition de Clavius du premier livre des *Éléments*[2] sous le numéro 13 (plus souvent nommé cinquième postulat) que Saccheri cite alors. Il ajoute que, bien que personne ne doute de sa vérité, certains ont reproché à Euclide de l'avoir rangé parmi

2. C'est très probablement par l'édition de Clavius parue à Rome en 1589 que Saccheri a eu connaissance des *Éléments* d'Euclide.

les axiomes comme si une compréhension correcte des termes de son énoncé suffisait à emporter la conviction. Plusieurs ont alors tenté de le démontrer à partir des seules propositions du premier livre précédant la proposition 29 qui est la première où ce postulat est utilisé. Devant le peu de réussite de ces tentatives, d'autres ont proposé de modifier la définition des droites parallèles en la remplaçant par celle de droites équidistantes. Mais, parmi eux, certains ont commis, selon Saccheri, « un grand péché à l'égard de la rigueur logique » en admettant l'équivalence entre le parallélisme euclidien et l'équidistance ce qui, d'après lui, nécessite une démonstration.

Annonçant que le premier livre de son traité est consacré à la recherche d'une démonstration du cinquième postulat, Saccheri ajoute qu'il veut développer plus en détail les commentaires précédents dans des scholies placés après la proposition XXI de son traité. Ayant divisé le premier livre en deux parties, il se propose dans la première de démontrer le postulat à la manière des Anciens, sans avoir recours à la notion d'équidistance, et en n'utilisant pour cela que les propositions du premier livre des *Éléments* antérieures à la proposition 29. Il ajoute même qu'il évitera de se servir des propositions 27 et 28 ainsi que des propositions 16 et 17, excepté, dit-il, dans certains cas bien spécifiques [3].

La seconde partie du premier livre se veut une confirmation du résultat de la première par une autre voie de démonstration, qui consiste à prouver qu'une ligne équidistante à une droite est de même longueur que cette droite. Saccheri réintroduit donc l'équidistance dans son argumentation, mais, contrairement à ses prédécesseurs, il ne cherche pas à montrer qu'une équidistante à une droite est une droite.

Le second livre [4] du traité est aussi divisé en deux parties : la première porte sur l'examen de la définition 6 (numérotée 5 dans (Euclide, 1994, p. 41), elle définit l'égalité des rapports) du cinquième livre des *Éléments* d'Euclide, la seconde sur celui de la définition 5 du sixième livre des *Éléments* (Euclide, 1994, p. 150) qui définit la composition des rapports. Saccheri annonce déjà que, selon lui, Euclide a été injustement attaqué sur ces deux points.

Exposé et examen du Livre I

Configurations et hypothèses (Prop. I-XI)

Elle commence sans préambule par deux propositions mettant en œuvre un quadrilatère ABDC où les angles en A et B sont égaux ainsi que les longueurs AC et BD (figure 1). La proposition I montre que les angles en C et D sont égaux et la proposition II que la droite joignant les milieux M et H de AB et de CD est perpendiculaire à ces deux côtés.

3. En réalité, dans la suite du premier livre de son ouvrage, Saccheri a recours une fois à la proposition 27, quatre fois à la proposition 28, quatorze fois à la proposition 16 et vingt-quatre fois à la proposition 17. L'emploi de la proposition 16 est problématique dans le cas de l'hypothèse de l'angle obtus en particulier, car cette proposition ne ressort pas de la géométrie absolue puisqu'elle n'est pas vraie en géométrie sphérique.

4. Ce second livre n'est pas examiné dans le présent article.

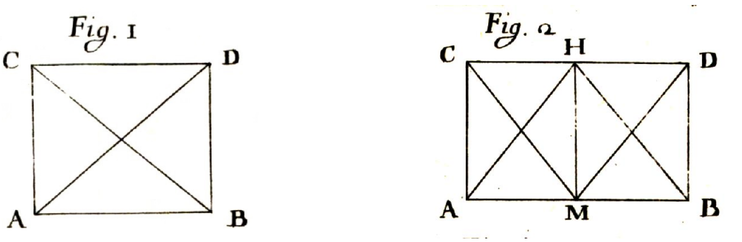


FIGURE 1 – Figures *1* et *2* de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus...*
Contrairement à l'apparence, les angles en A et B ne sont pas nécessairement droits

La proposition III particularise le quadrilatère en imposant aux angles en A et B d'être droits (il est nommé ici S-quadrilatère). Elle institue une relation comparative entre le caractère des angles égaux en C et D et la longueur des droites AB et CD : la droite CD est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à la droite AB selon que les angles en C et D sont droits (resp. obtus, resp. aigus).

La proposition III est suivie de trois corollaires dont le premier montre que dans un quadrilatère trirectangle, tel AMHC, les côtés adjacents à l'angle en C non droit, CA et CH, sont plus petits (resp. plus grands) que les côtés opposés, MH et AM, lorsque l'angle en C est obtus (resp. aigu).

La proposition IV est réciproque de la proposition III : si la droite CD est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à la droite AB, les angles en C et D sont droits (resp. obtus, resp. aigus).

Suivent alors des définitions de ce que Saccheri appelle l'hypothèse de l'angle droit, de l'angle obtus, de l'angle aigu, selon que les angles aux sommets d'un S-quadrilatère, comme C et D dans les figures précédentes, sont droits, obtus ou aigus. Saccheri développe les conséquences des hypothèses de l'angle obtus et de l'angle aigu aussi loin que nécessaire pour aboutir à une contradiction, ce qui valide alors l'hypothèse de l'angle droit, et par conséquent le postulat euclidien.

À ces définitions succède un groupe de trois propositions qui peuvent être résumées en une seule qui serait : « si l'une des trois hypothèses est vraie dans un seul cas, alors elle est vraie dans tous les cas », autrement dit : « si un S-quadrilatère relève d'une des hypothèses, tous les S-quadrilatères relèvent de la même hypothèse ». Les propositions V et VI, concernant respectivement l'hypothèse de l'angle droit, puis de l'angle obtus reçoivent des démonstrations d'ordre géométrique en deux parties. Dans un premier temps, Saccheri montre que, étant un S-quadrilatère vérifiant une des deux hypothèses, tous les S-quadrilatères construits sur la même base (AB dans les figures *1* et *2* de Saccheri), obtenus en allongeant puis en accourcissant les côtés égaux perpendiculaires à la base, vérifient la même hypothèse ; dans un second temps, il montre qu'un S-quadrilatère construit sur une base différente, à savoir un des côtés perpendiculaires à la base produit dans un des S-quadrilatères précédents, vérifie aussi la même hypothèse. La proposition VII, qui traite de l'hypothèse de l'angle aigu reçoit une démonstration purement logique, à savoir : s'il existe un S-quadrilatère relevant de l'hypothèse de l'angle aigu, le fait qu'un autre S-quadrilatère ne relève pas de cette hypothèse conduit à ce que (d'après les deux propositions précédentes) tous les S-quadrilatères relèvent d'une autre hypothèse que de celle de l'angle aigu, ce qui est contraire à la donnée. La preuve faite du caractère universel de chaque hypothèse, à l'exclusion des deux autres, preuve que Saccheri est le premier à établir, conduit à penser qu'il aurait été plus logique de placer les définitions après la proposition VII. En outre, ce caractère universel fait de la proposition IV un critère de reconnaissance de chaque hypothèse.

Les propositions VIII et IX se rapportent aux angles aigus d'un triangle rectangle (figure 2). La première montre que, en prenant les notations de la figure dans laquelle les angles ABD et BAH sont droits et AX le prolongement de DA à partir de A, l'angle extérieur XAH est égal (resp. inférieur, resp. supérieur) à l'angle intérieur opposé ADB, selon qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) ainsi que la réciproque qui constitue un critère supplémentaire de reconnaissance de l'hypothèse en cours de validité. La seconde montre que, dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à un angle droit selon qu'est vraie l'hypothèse de l'angle droit (resp. aigu, resp. obtus).

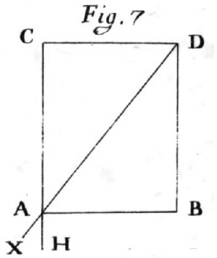


FIGURE 2 – Figure 7 de l' *Euclides ab omni nævo…* illustrant les propositions VIII et IX

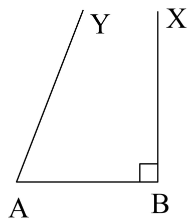


FIGURE 3 – Configuration fondamentale

Les propositions XI, XII et XIII préparent la proposition XIV dans laquelle est montrée la fausseté de l'hypothèse de l'angle obtus. Dans la proposition XI Saccheri met en place une configuration [5] qui aura une place fondamentale dans la suite de ses raisonnements ; elle consiste en une droite AB recevant en B une droite perpendiculaire susceptible d'être prolongée autant que nécessaire, BX, et d'une droite faisant en A avec AB un angle aigu et située du même côté que BX par rapport à AB (figure 3). Cette configuration est une particularisation de celle du cinquième postulat ; ici un des angles intérieurs est droit, l'autre alors nécessairement aigu. Saccheri montre alors que, sous l'hypothèse de l'angle droit, les droites AY et BX se rencontrent en un point à distance finie. La proposition XII parvient à la même conclusion sous l'hypothèse de l'angle obtus. La proposition XIII énonce :

5. Cette configuration est celle qu'a introduite Lobatchevski dès le début de son traité *La théorie des parallèles* ((édition en allemand, Berlin, 1840, traduction française par Jules Hoüel en 1866, republication par les éditions Monom, 1980) en considérant non pas une seule droite passant par A, mais toutes ces droites. Cet ouvrage de Lobatchevski sera mentionné dans la suite par (Lobatchevski, 1980).

« Si la droite XA (d'une longueur donnée aussi grande qu'on veut), rencontrant deux droites AD, XL, fait avec elles des angles internes du même côté XAD, AXL (fig. 11) moindres que deux droits, je dis que ces deux droites (même si aucun de ces angles n'est droit) se rencontreront à terme en quelque point situé du côté de ces angles, et sûrement à une distance finie, c'est-à-dire déterminée, que l'hypothèse soit celle de l'angle droit ou de l'angle obtus. » (Saccheri, 1733, p. 16-17).

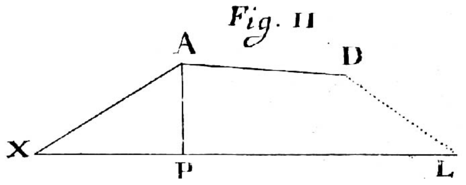


Figure 4 – Figure *11* de l' *Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition xiii. Les points A, D et L doivent être conçus comme alignés

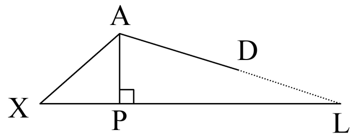


Figure 5 – Explicitation de la figure *11*

Cette proposition ne fait qu'énoncer le cinquième postulat dans une formulation plus compliquée et en l'étendant à l'hypothèse de l'angle obtus. La démonstration est en substance la suivante : puisque la somme des angles XAD et AXL est inférieure à deux droits, l'un d'eux, en l'occurrence AXL, est aigu. Alors la perpendiculaire abaissée de A vers XL tombe dans XL, en P. Dans le triangle rectangle en P, APX, la somme des angles aigus PXA et PAX est supérieure ou égale à un angle droit, en vertu de la proposition ix ; la soustraction des angles PXA et PAX à la somme des angles XAD et AXL produit l'angle restant PAD qui est donc inférieur à un angle droit. Alors, d'après les propositions xi et xii, les droites AD et XL se rencontrent en un point à distance finie, sous l'hypothèse de l'angle droit comme sous celle de l'angle obtus. Suit le scholie i dans lequel Saccheri note « une différence notable à propos de l'hypothèse de l'angle aigu. En effet dans ce cas le concours de telles droites ne saurait être démontré en toute généralité...» (Saccheri, 1733, p. 17), à savoir qu'il peut parfois se produire et parfois ne pas se produire. Ainsi ne peut-il se produire si la droite AD est perpendiculaire à AP même si alors la somme des angles XAD et AXL est inférieure à deux angles droits puisque celle des angles aigus PXA et PAX est inférieure à un angle droit, en vertu de la proposition ix. Saccheri met ici en évidence un cas où le postulat euclidien ne s'applique pas dans l'hypothèse de l'angle aigu. Il ajoute que, si ce concours pouvait être démontré en toute généralité, l'hypothèse de l'angle aigu serait ruinée.

La proposition xiv affirme que : « L'hypothèse de l'angle obtus est absolument fausse, puisqu'elle se détruit elle-même. » (Saccheri, 1733, p. 18). En effet, si l'hypothèse de l'angle obtus est vraie, elle permet de valider, en vertu de la proposition xiii, le cinquième postulat, qui, lui, assure la validité de l'hypothèse de l'angle droit, à l'exclusion donc de celle de l'angle obtus. Saccheri double cette démonstration purement logique par une seconde, qualifiée de plus directe, bâtie sur des arguments géométriques appliqués à la configuration de la proposition xiii.

Les propositions XV, XVI, XVIII et XIX présentent des critères supplémentaires de reconnaissance de l'hypothèse valide. En substance elles montrent que l'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) est établie par le fait qu'il existe un triangle dont la somme des angles est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à deux angles droits (proposition XV), ou un quadrilatère dont la somme des angles est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à quatre angles droits (proposition XVI) ou un triangle inscrit dans un demi-cercle dont l'angle opposé au diamètre est égal (resp. supérieur, resp. inférieur) à un angle droit (proposition XVIII). La proposition XIX présente un triangle ABC rectangle en B où, par le milieu D de AC, est menée la perpendiculaire à AB qu'elle rencontre en H (figure 6). L'hypothèse de l'angle droit (resp. obtus, resp. aigu) est établie si la droite HB est égale (resp. supérieure, resp. inférieure) à la droite AH.

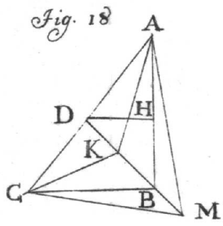


FIGURE 6 – Figure *18* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XIX

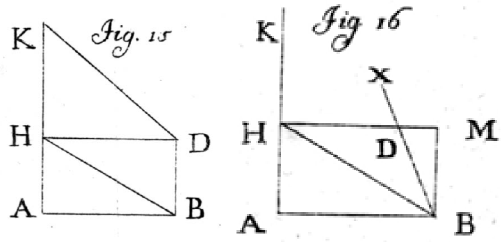


FIGURE 7 – Figures *15* et *16* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XVII

Retour en arrière vers la proposition XVII : Saccheri y montre la remarque qu'il a faite dans le scholie I suivant la proposition XIII à propos de l'hypothèse de l'angle aigu. Il reprend une configuration analogue à celle de la figure 3, dite « fondamentale » ; elle consiste ici (figure 7) en une droite AB sur laquelle est élevée à partir de A la perpendiculaire AH et est menée à partir de B une droite BD, du même côté que AH, faisant avec AB un angle aigu. Saccheri montre alors qu'il n'est pas possible d'assurer, contrairement à ce qui est certain sous l'hypothèse de l'angle droit, que les droites AH et BD, prolongées autant que nécessaire se rencontreront en un point à distance finie. Saccheri en donne deux démonstrations. La première est illustrée par la figure *15* dans laquelle il faut comprendre que l'angle BAH est droit, l'angle ABD est aigu et l'angle BDH droit. La droite BD n'est pas donnée à priori mais construite de sorte que l'angle ABD est aigu. Saccheri suppose ensuite que les droites BD et AH prolongées se rencontrent en un point K, supposé donc aligné avec B et D, puis en déduit une absurdité concernant des angles de la configuration. Saccheri a ainsi prouvé l'existence d'une droite, menée à partir de B à angle aigu avec BA, qui prolongée n'est pas sécante à AH prolongée. La seconde démonstration est illustrée par la figure *16* où les angles BAH, ABM et AHM sont droits si bien que l'angle BMH est aigu et qu'alors la perpendiculaire BX à HM par B coupe HM en D entre H et M ; alors l'angle ABX est aigu. Puisque les angles DHK et HDX sont droits, les droites AK et BX ne peuvent se rencontrer à distance finie.

Il faut noter ici que l'apparence des figures peu conforme à la réalité des données n'empêche pas Saccheri de raisonner juste. Cette proposition est tout à fait remarquable en ce qu'elle est révélatrice de l'acuité et de la maîtrise logique de la pensée de Saccheri, et elle est la porte ouverte vers l'exploration qui va suivre des propriétés issues de l'hypothèse de l'angle aigu.

La proposition XX illustrée de la figure *19* (figure 8) montre que, dans un triangle ACM rectangle en C, la perpendiculaire abaissée du milieu B de MA sur AC en D n'est pas supérieure à la moitié de MC, sous condition de l'hypothèse de l'angle aigu. La proposition XXI montre, en reprenant les données de la précédente, que, si les droites AM et AC sont prolongées indéfiniment à l'opposé du point A, alors, sous condition de l'hypothèse de l'angle droit ou aigu, leur distance devient plus grande que toute longueur finie, cette distance étant évaluée par les perpendiculaires à AC prolongée, menées par un point de AM aussi prolongée. En effet, le point P étant pris sur le prolongement de AM en sorte que AM et MP sont égales, et N étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur le prolongement de AC, la droite PN est supérieure ou égale au double de MC, elle-même supérieure ou égale au double de BD, en vertu de la proposition précédente.

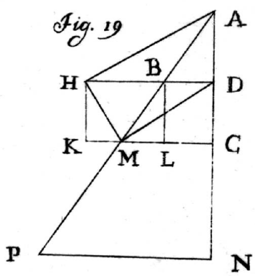


FIGURE 8 – Figure *19* de l'*Euclides ab omni nævo…*
illustrant les propositions XX et XXI

Scolies historico-épistémologiques

Comme il l'avait annoncé dans l'introduction, Saccheri propose quatre scholies « historico-épistémologiques » dans lesquels il examine des tentatives antérieures de démonstration du postulat euclidien. Le premier porte sur l'essai de Proclus et le deuxième sur celui de Giovanni Borelli dans l'*Euclides restitutus…*[6]. Le troisième est le plus intéressant sur le plan historique car il donne des indications sur l'essai de John Wallis et, par ce dernier, sur celui de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, désigné par son nom latin de Nassaradinus, et peut-être sur ceux plus anciens de Ibn al-Hayṯam et de ʻUmar al-Ḫayyām dont Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī avait fait la critique (voir le chapitre précédent). C'est certainement par ce canal que Saccheri a eu connaissance des travaux des savants médiévaux arabo-islamiques, auxquels

6. Borelli, Giovanni Alfonso, *Euclides restitutus…*Pise, 1658.

il a très probablement emprunté l'outil du quadrilatère birectangle isocèle, la démarche de démonstration selon les trois hypothèses (angle droit, obtus, aigu) ainsi que le plan général du traité en trois parties (cinquième postulat, définition 6 du Livre 5, définition 5 du Livre 6), facteurs de forte ressemblance avec notamment l'*Opuscule sur l'explication des postulats problématiques...* de 'Umar al-Ḫayyām. Dans ce scholie III, Saccheri expose une critique de la démonstration de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī en tous points analogue à celle qui est présentée dans le chapitre précédent. Saccheri rappelle le procédé de construction de perpendiculaires successives, alternativement à la base et au sommet d'un quadrilatère birectangle isocèle, mais ajoute :

> « Mais ici se dissimule une équivoque. En effet pourquoi [...] les angles des perpendiculaires suivantes, tous aigus du même côté, ne seraient-ils pas toujours plus grands, jusqu'à ce que l'une [des perpendiculaires] tombe selon un angle droit en telle perpendiculaire qui soit la perpendiculaire commune à chacune des deux droites précitées ? Et certes si cela se produit, la préparation obscure de Nassaradinus disparait [...]. » (Saccheri, 1733, p. 39)

Saccheri commente ensuite la tentative de Wallis fondée sur la possibilité de figures semblables, en montrant qu'il suffit de postuler l'existence de deux triangles équiangles mais non égaux (figures 9 et 10).

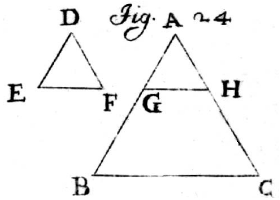


FIGURE 9 – Figure *24* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant le scholie III Contrairement à l'apparence, les triangles ne sont pas équilatères, ni même isocèles

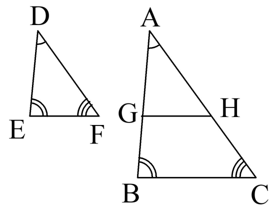


FIGURE 10 – Adaptation de la figure *24*

En supposant les côtés du triangle ABC plus grands que ceux du triangle DEF, le point G est placé sur AB de sorte que AG = DE, et le point H sur AC de sorte que AH = DF ; compte tenu de l'égalité des angles GAH et EDF, les triangles AGH et DEF sont égaux en vertu de la proposition 4 du premier livre des *Éléments* d'Euclide, donc les angles AGH et DEF, ainsi que les angles AHG et DFE, sont égaux, alors les angles AGH et ABC, ainsi que les angles AHG et ACB, sont égaux. Or la somme des angles AGH et HGB, ajoutée à la somme des angles AHG et GHC, vaut quatre angles droits, donc la somme des quatre angles GBC (égal à AGH), HGB, HCB (égal à AHG) et GHC est égale à quatre angles droits. Donc en vertu de la proposition XVI sur la somme des angles d'un quadrilatère, l'hypothèse de l'angle droit est alors valide et le postulat euclidien est démontré. Le quatrième scholie examine une figure à laquelle, selon Saccheri, Euclide aurait pu penser pour démontrer son postulat.

Hypothèse de l'angle aigu : première réfutation (Prop. XXII-XXXIII)

La suite de cette première partie du premier livre est décisive dans le développement de l'argumentation de Saccheri. Celui-ci y examine la disposition relative de deux droites sous l'hypothèse de l'angle aigu, en utilisant à répétition la configuration apparue dans les propositions XI puis XVII, consistant en une droite aux extrémités de laquelle sont menées, du même côté de cette droite, une perpendiculaire et de l'autre une droite faisant avec la première droite un angle aigu du côté de la perpendiculaire (figure 3).

Dans la proposition XXII, Saccheri met en œuvre un quadrilatère ABDC où AB et CD sont perpendiculaires à BD, en B et D respectivement, et où les angles en A et C sont aigus (figures 11 et 12). Il montre qu'alors les droites AC et BD ont une perpendiculaire commune située à l'intérieur du quadrilatère. Cette configuration généralise celle de la proposition II (voir figure 1) où les côtés AB et CD, ainsi que les angles en A et C, sont égaux et où la droite joignant les milieux de AB et de CD est perpendiculaire à ces droites.

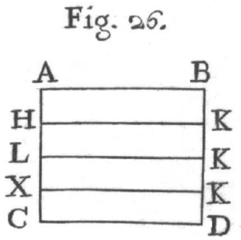


FIGURE 11 – Figure *26* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXII

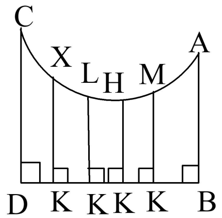


FIGURE 12 – Adaptation de la figure *26*

Un point L étant pris n'importe où sur AC, de ce point est abaissée la perpendiculaire LK vers BD. Saccheri précise que le point K est bien sur la droite BD – i.e. entre B et D –; sinon la droite LK couperait l'une des droites AB ou CD, ce qui est impossible en vertu de la proposition 17 du premier Livre des *Éléments* d'Euclide, puisque ces deux droites sont elles-mêmes perpendiculaires à BD. Si en L les angles ne sont pas droits, l'un est aigu, l'autre obtus, par exemple celui du côté de C, KLC. Mais les angles formés par les perpendiculaires élevées d'un point de BD vers AC et AC, et du côté de C comme KHC, ne peuvent pas être tous obtus, sinon l'angle BAC serait obtus, ce qui est faux. Donc il existe un point M entre A et L où la perpendiculaire abaissée de ce point vers BD fait avec AC, du côté de C, un angle qui n'est pas obtus. S'il est droit, la proposition est acquise ; s'il est aigu, il existe un point intermédiaire entre L et M, comme H, où la perpendiculaire abaissée de H vers BD est aussi perpendiculaire à AC. Ce qui achève la démonstration qui toutefois fait appel à un principe du continu implicitement admis [7].

La proposition XXIII marque une nouvelle étape dans la progression de l'argumentation de Saccheri en montrant que, toujours sous l'hypothèse de l'angle aigu, deux droites ont, l'une vis-à-vis de l'autre, un des trois comportements suivants : ou bien elles ont une perpendiculaire commune, ou bien elles se rencontrent en un point à distance finie, ou bien elles s'approchent, d'un même côté, toujours plus l'une de l'autre. Reste à préciser comment un tel rapprochement mutuel se produit : de manière asymptotique ou en conservant un écart supérieur à une longueur donnée non nulle ?

Dans un scholie suivant cette proposition, Saccheri donne une construction de la perpendiculaire commune à deux droites pourvu que celles-ci soient coupées par une troisième droite selon des angles internes du même côté de cette droite de somme égale à deux droits (figures 13 et 14). Les droites AX et BX sont coupées par la droite PD respectivement en H et F de sorte que la somme des angles AHF et BFH vaut deux droits.

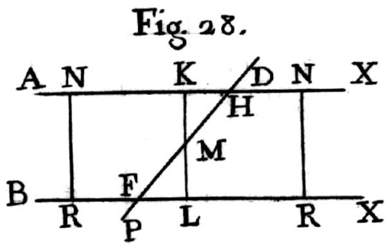


FIGURE 13 – Figure *28* de l'*Euclides ab omni nævo... illustrant le scholie de la proposition* XXIII

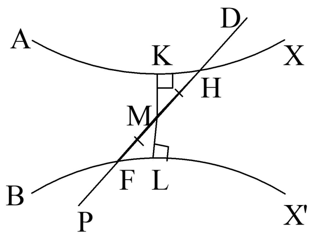


FIGURE 14 – Adaptation de la figure *28* où les deux points X sont distingués

M étant le milieu de FH, les perpendiculaires abaissées de M vers AX et BX rencontrent ces droites respectivement en K et L. Par des considérations d'angles, Saccheri montre que les points K, L et M sont alignés, ce qui achève la construction.

Dans un corollaire suivant ce scholie, Saccheri montre que, dans la configuration du scholie (figure 14), les droites AX, BX' et PD vérifient, d'une part l'égalité des angles alternes, internes AHF et X'FH ou externes DHA et PFX', ainsi que d'un angle externe comme DHX avec l'angle interne et opposé comme HFX', mais aussi pour AX et BX' l'impossibilité de se rencontrer « même dans leur prolongement à l'infini ». Les droites ayant une perpendiculaire commune ne sont donc ni sécantes ni asymptotes.

La proposition XXIV précise la configuration étudiée dans la proposition XXIII (figure 15). Des perpendiculaires étant abaissées à partir de points de AX, comme D, H et L vers la droite BX aux points K, la somme des angles des quadrilatères proches de la base AB, comme KDHK, est inférieure à celle des angles des quadri-

7. Saccheri ne se préoccupe pas de l'unicité de cette perpendiculaire commune, qui est facile à établir. En effet l'existence d'une seconde perpendiculaire commune conduit à celle d'un quadrilatère à quatre angles droits, ce qui est impossible sous l'hypothèse de l'angle aigu (proposition XVI du traité).

latère plus éloignés, comme KHLK, du moins tant que AX et BX ne se rencontrent pas ou n'ont pas de perpendiculaire commune. Il reste que, du côté des points X, ces droites AX et BX peuvent soit se rencontrer, soit, sinon, se rapprocher toujours plus l'une de l'autre ou admettre une perpendiculaire commune, auquel cas elles s'éloignent ensuite toujours plus l'une de l'autre.

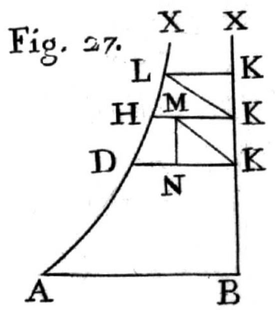


Figure 15 – Figure *27* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition xxiv

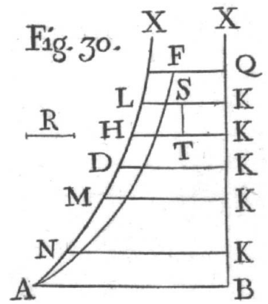
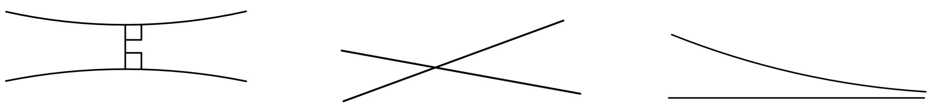


Figure 16 – Figure *30* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition xxv

Sous les mêmes hypothèses, la proposition xxv énonce que, si les droites AX et BX se rapprochent toujours plus l'une de l'autre en gardant une distance supérieure à une longueur donnée, « l'hypothèse de l'angle aigu est ruinée ». En d'autres termes, sous l'hypothèse de l'angle aigu, si deux droites se rapprochent toujours plus l'une de l'autre – sans toutefois se rencontrer à distance finie – elles ne peuvent le faire qu'en devenant asymptotes. Saccheri a donc par cette proposition affiné le résultat de la proposition xxiii en donnant une caractérisation plus précise de la disposition relative de deux droites (figure 17) : a) ou bien elles ont une perpendiculaire commune et s'éloignent l'une de l'autre des deux côtés au-delà de toute grandeur finie, b) ou bien elles sont sécantes en un point à distance finie, c) ou bien elles s'approchent asymptotiquement l'une de l'autre d'un côté pour s'éloigner au-delà de toute grandeur finie de l'autre.



a. Perpendiculaire commune — b. Sécantes — c. Asymptotes d'un côté

Figure 17 – Les trois cas de disposition relative de deux droites sous l'hypothèse de l'angle aigu

Dans le second corollaire de la proposition xxv Saccheri remarque donc que si deux droites n'admettent pas de perpendiculaire commune, elles doivent se rencontrer à distance finie ou infinie. Il lui suffirait alors de montrer que deux droites en rencontrant une troisième en faisant avec elle des angles internes du même côté de somme inférieure à deux droits (i.e. vérifiant les conditions du postulat euclidien) n'ont pas de perpendiculaire commune, pour établir la Géométrie Euclidienne, ce qu'il se propose de faire plus loin dans le traité.

Dans les propositions et corollaires suivants, Saccheri va chercher à préciser la disposition des droites AX et BX dans le cas où elles ne se rencontrent qu'en leur prolongement à l'infini du même côté, à savoir lorsqu'elles sont asymptotes, et ce toujours sous l'hypothèse de l'angle aigu. La proposition XXVI (figure 18) énonce « qu'il n'y aura pas de point déterminable T sur AB [finie], duquel une perpendiculaire élevée du côté de AX ne rencontrera pas à distance finie [...] cette droite AX en quelque point F ». En des termes plus simples, toute perpendiculaire élevée à partir d'un point quelconque situé à l'intérieur de AB, et du côté de AX, sera sécante à AX, ou encore, il est impossible d'intercaler entre AX et BX une perpendiculaire à AB menée d'un point de AB. Le corollaire I ajoute que toute perpendiculaire élevée d'un point M de AB prolongée du côté de B ne rencontrera pas AX, même si ces droites AX et MZ sont prolongées à l'infini.

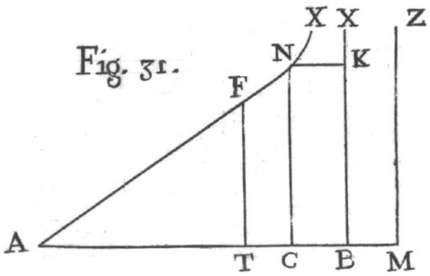


FIGURE 18 – Figure *31* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXVI

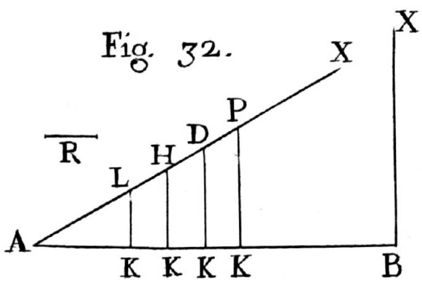


FIGURE 19 – Figure *32* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXVII

La proposition XXVII (figure 19) veut prouver que, si deux droites comme AX et BX, menées du même côté d'une droite AB, la première selon un angle aussi petit que l'on veut, la seconde perpendiculairement à AB, se rencontrent ne serait-ce qu'à l'infini, alors l'hypothèse de l'angle aigu est invalidée. Mais cette proposition est fausse car, sous l'hypothèse de l'angle aigu, il existe des droites asymptotes. Dans la démonstration présentée par Saccheri, celui-ci partage l'espace entre AB et AX par des perpendiculaires KL, KH, KD, KP, ... à AB, régulièrement espacées d'un intervalle R, formant ainsi des quadrilatères birectangles. Par des considérations sur la somme des angles de tous ces quadrilatères, il montre que la somme des angles du premier d'entre eux, KLHK, est déficiente par rapport à quatre angles droits d'un angle moindre que le quotient d'un angle droit par le nombre de quadrilatères. En multipliant les quadrilatères à l'infini, cette portion d'angle droit tendrait vers zéro, et alors la somme des angles du quadrilatère KLHK serait égale ou supérieure à quatre droits, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de l'angle aigu. Ici Saccheri manipule l'infini et le passage à la limite d'une façon qui pourrait être qualifiée de « sauvage ». D'ailleurs il est possible que Saccheri n'ait pas été satisfait de ce résultat car il aurait pu considérer à ce stade avoir atteint son but. Or il continue à développer les conséquences de l'hypothèse de l'angle aigu sur six propositions accompagnées de cinq lemmes avant de conclure la première partie du premier livre de son traité.

La proposition XXVIII (figure 20) montre que, dans la même configuration des droites AB, AX et BX, les deux dernières étant asymptotes du côté de X, les perpendiculaires abaissées des points L, H, D, ... de AX vers BX font avec AX du côté de A, en L, H, D, ...des angles obtus qui diminuent à mesure que les perpendiculaires s'éloignent de A, en se rapprochant toujours plus, en deçà de toute grandeur finie, de l'égalité avec l'angle droit.

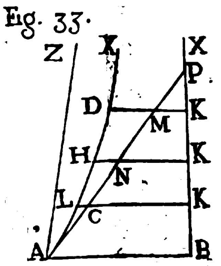


Figure 20 – Figure *33* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant les propositions XXVIII, XXIX et XXXII

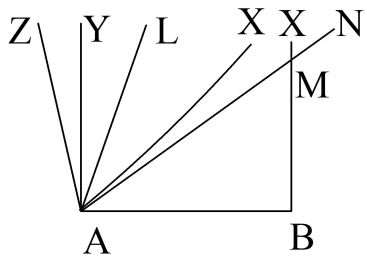


Figure 21 – Adaptation simplifiée de la figure *36* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXX

Saccheri ajoute un corollaire dont la conclusion sera une pièce essentielle dans la réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu. Il énonce en effet qu'« il s'ensuit manifestement que les droites AX, BX, prolongées à l'infini, auront à terme une perpendiculaire commune, soit en deux points distincts, soit en un même point X éloigné à l'infini. » Il rejette le fait que cette perpendiculaire commune soit établie en deux points distincts, car dans ce cas les droites AX et BX s'écarteraient de plus en plus l'une de l'autre après leur perpendiculaire commune, ce qui est contraire à leur caractère asymptotique. À nouveau Saccheri use d'un passage à la limite contestable en accordant aux droites asymptotes une propriété établie pour les non sécantes qui ont une perpendiculaire commune.

La proposition XXIX (figure 20) établit que, dans les mêmes conditions que celles de la proposition XXVIII, toute droite issue de A, située à l'intérieur de l'angle BAX et suffisamment prolongée comme AC, rencontrera la droite BX à distance finie, en P sur la figure *33*. Un premier corollaire ajoute qu'aucune droite issue de A faisant avec AB un angle aigu plus grand que BAX ne sera ni sécante ni asymptote à BX. Le second corollaire énonce « qu'aucun angle aigu déterminé ne sera le plus grand de tous ceux sous lesquels une droite menée du point A rencontre BX à distance finie. » Plus clairement, toute droite menée à partir de A selon un angle avec AB compris entre l'angle nul et l'angle BAX exclu est sécante à BX. La proposition XXX (figure 21) complète la proposition XXIX et ses corollaires en montrant que dans la configuration de base – BX perpendiculaire à AB, AX asymptote à BX

– 1°) la droite AY perpendiculaire à AB du côté de AX et BX est la limite de celles qui admettent une perpendiculaire commune avec BX, à savoir qu'une droite AZ faisant avec AB un angle obtus du côté de AX ne peut avoir de perpendiculaire commune avec BX de ce côté, 2°) il n'y a pas d'angle aigu minimum sous lequel une droite menée de A, comme AL, admet une perpendiculaire commune en deux points distincts avec BX, à savoir toutes les droites menées de A faisant un angle avec AB compris entre l'angle droit et l'angle BAX exclus, et elles seules, ont une perpendiculaire commune avec BX et toutes les droites menées de A faisant un angle avec AB inférieur à l'angle BAX, comme AN, sont sécantes à BX.

La proposition XXXI qui affirme qu'« il n'est pas toujours possible de parvenir (dans l'hypothèse de l'angle aigu) à telle perpendiculaire commune en deux points distincts qui soit plus petite qu'une longueur R fixée à volonté » n'a pas de rôle décisif dans la suite de l'argumentation.

La proposition XXXII résume en les complétant les propositions XXIII à XXX, exceptée la proposition XXVII, en ces termes :

> « Je dis maintenant qu'il y aura (dans l'hypothèse de l'angle aigu) un unique angle aigu déterminé BAX sous lequel la droite menée AX (fig. 33) ne rencontrera pas BX si ce n'est à distance infinie et est à cause de cela la frontière entre ce qui est vers l'intérieur et ce qui est vers l'extérieur : d'une part entre toutes les droites qui menées sous des angles aigus plus petits rencontrent la précitée BX à distance finie, et d'autre part les autres droites qui menées sous des angles aigus plus grands, jusqu'à l'angle droit inclus, ont une perpendiculaire commune en deux points distincts avec cette droite BX. » (Saccheri, 1733, p. 68)

Ainsi, sous l'hypothèse de l'angle aigu, la droite AX est l'unique asymptote à BX (figure 20), du côté des points X, et constitue la droite de partage, parmi les droites issues de A, entre les sécantes à BX, comme AC, et les non sécantes, comme AL, qui ont une et une seule perpendiculaire commune avec BX.

Après cette caractérisation finale des dispositions relatives possibles de deux droites, Saccheri en vient à ce qui devrait être la conclusion définitive de son propos, à savoir :

> « Proposition XXXIII.
>
> L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse parce qu'elle va à l'encontre de la nature de la ligne droite.
>
> Démonstration. [...] on peut établir que l'hypothèse de l'angle aigu hostile à la Géométrie Euclidienne nous conduit à devoir reconnaître que deux droites situées dans un même plan AX, BX, prolongées à l'infini du côté des points X, doivent à terme se réunir dans une seule et même ligne droite admettant assurément en un seul et même point à distance infinie une perpendiculaire commune située dans le même plan qu'elles. [8] »

8. Plusieurs traductions en français de cette proposition donnent : « L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse parce qu'elle *répugne* à la nature de la ligne droite. » Le verbe « répugner » a une connotation péjorative, quasi moralisante, que ne possède pas, selon moi, le verbe latin « re-pugnare » qui signifie littéralement « combattre en retour » et n'exprime qu'un fait.

Mais à nouveau, Saccheri se garde de conclure définitivement et diffère la fin de la démonstration après s'être « intéressé aux tout premiers principes » sous la forme d'énoncés et de démonstrations longues et embarrassées de cinq lemmes tous valides sous l'hypothèse de l'angle aigu :

> « Lemme I. Deux lignes droites ne comprennent pas un espace. [...]
>
> Lemme II. Deux lignes droites ne peuvent avoir un et même segment en commun. [...]
>
> Lemme III. Si deux droites AB, CXD se rencontrent l'une l'autre en quelque point intermédiaire X, elles ne se touchent pas l'une l'autre en cet endroit, mais l'une coupera l'autre en ce lieu même. [...]
>
> Lemme IV. Tout diamètre partage en deux parts égales son cercle et la circonférence de celui-ci. [...]
>
> Lemme V. Parmi les angles rectilignes, tous les angles droits sont exactement égaux entre eux, sans aucune différence, même infiniment petite. »

Le lemme V donne lieu à un corollaire important pour la suite de l'argumentation : « Alors de là vient que la ligne droite élevée perpendiculairement dans un plan à quelque ligne droite à partir d'un point donné de cette dernière, est dans ce plan très exactement la seule et ne peut se diviser en deux. »

Saccheri reprend alors sa démonstration de la réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu en rappelant que dans cette hypothèse, d'après le corollaire de la proposition XVIII, deux droites asymptotes admettent en leur point à l'infini une perpendiculaire commune, si bien que de ce point à l'infini deux droites distinctes pourraient être élevées perpendiculairement à cette perpendiculaire commune, en contradiction avec le corollaire du lemme V.

Saccheri termine cette première partie du premier livre par : « Et je pourrais m'en tenir là en sûreté. » mais, comme pris d'un remords ou au moins d'une incertitude, il ajoute : « Mais je ne veux laisser aucune pierre sans qu'elle soit bougée, afin que je montre que l'hypothèse, ennemie, de l'angle aigu, arrachée à partir de ses racines premières, s'oppose à elle-même. Et ce sera l'unique but des Théorèmes suivants du présent Livre » annonçant ainsi la seconde partie du premier livre, intitulée « Dans laquelle le même postulat euclidien est démontré contre l'hypothèse de l'angle aigu par la réfutation de celle-ci. »

Hypothèse de l'angle aigu : deuxième réfutation (Prop. XXXIV-XXXIX)

Cette seconde partie commence par la proposition XXXIV qui décrit la construction d'une courbe et en donne des propriétés. À partir d'un S-quadrilatère ABCD, de base AB, de côtés égaux perpendiculaires à AB, AC et BD, et de droite de sommet CD (figure 22), plus grande que AB (d'après la proposition III de la première partie), les milieux respectifs de AB et CD, M et H sont joints ; la droite MH est perpendiculaire à AB et à CD et est plus petite que AC (d'après la proposition II et le corollaire I de la proposition III). Dans le prolongement de MH du côté de H, le point K est tel que MK est égale à AC. Ce point K est un point de la courbe cherchée. Mais alors le quadrilatère AMKC est un S-quadrilatère de base AM. Il est donc possible de reprendre la même procédure : L et X milieux respectifs de AM et CK, point F dans le prolongement de LX du côté de X tel que LF est égale à AC (donc aussi à MK) de sorte que F est un point de la courbe cherchée et que ALFC et LMKF sont des S-quadrilatères à partir desquels la même procédure est appliquée, et ainsi de suite par dichotomies successives dans AB. Les points obtenus de la même manière que K et F forment un ensemble de points dont la complétude donne la courbe cherchée. Saccheri ajoute que plus généralement « la courbe CKD, émanant de l'hypothèse de l'angle aigu, est la ligne joignant les extrémités de toutes les perpendiculaires égales élevées du même côté sur la même base [...] » Ces perpendiculaires sont dites « appliquées de manière ordonnée » sur la même base vers la courbe CFKD. La courbe obtenue CFKD est bien sûr la ligne équidistante à AB passant par les points C et D. En outre cette courbe est toujours concave du côté de la base AB.

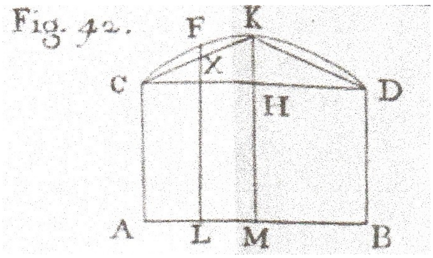


FIGURE 22 – Figure *42* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXIV

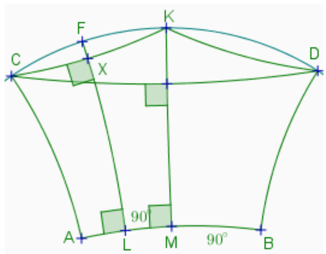


FIGURE 23 – Transcription de la figure *42* dans le modèle du disque de Poincaré

La proposition XXXV (figures 24 et 25) montre que, une perpendiculaire à AB en un de ses points L coupant la courbe CKD en F, la perpendiculaire NX à LF en F est toute entière située du côté convexe de la courbe CKD. Saccheri assure alors que NX est tangente à cette courbe en F en admettant implicitement que le point F n'est pas un point anguleux de la courbe CKD.

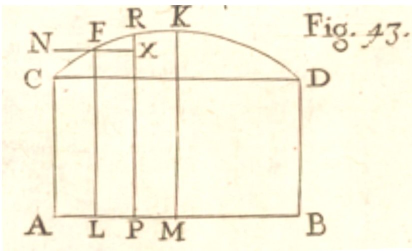


FIGURE 24 – Figure *43* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXV

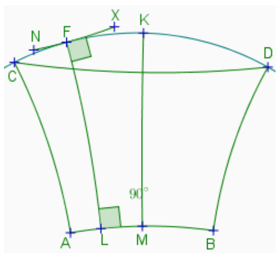


FIGURE 25 – Transcription de la figure *43* de l'*Euclides ab omni nævo...* dans le modèle du disque de Poincaré

La proposition XXXVI complète ce résultat en montrant que, si une droite d est menée du point F faisant avec FL un angle aigu du côté de AB, il existe un segment d'extrémité F de cette droite d entièrement contenu dans la concavité de la courbe CKD. Il s'en déduit un corollaire selon lequel aucune droite passant par F ne peut être intercalée entre la droite NX et la courbe CKD en étant entièrement située du côté convexe de cette courbe. NX peut être alors vraiment qualifiée de tangente à CKD.

Saccheri utilise ensuite ces propositions et le corollaire, tout à fait exacts sous l'hypothèse de l'angle aigu, pour chercher à montrer dans la proposition XXXVII que la courbe CKD a une longueur égale à la base AB. La démonstration, bien sûr fausse, est construite sur la supposée égalité entre trois infinitésimaux : une portion infinitésimale de la courbe au point F, la portion infinitésimale correspondante de la tangente FX au même point F et la portion infinitésimale correspondante de la base AB au point L. Pour tenter de convaincre le lecteur de la correction de sa démonstration, Saccheri ajoute deux scholies où il développe une argumentation par laquelle, comme le fait remarquer J.-C. Pont, il serait possible de montrer que deux cercles concentriques seraient de périmètres égaux (Pont, 1986, p. 366-367). À nouveau Saccheri révèle ici sa connaissance incertaine des infinitésimaux et de leur utilisation.

La proposition XXXVIII montre : « L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse parce qu'elle se détruit elle-même. » (figures 26 et 27). La longueur de la ligne polygonale CKD est supérieure, d'après la proposition 20 du premier livre des *Éléments*, à celle de la droite CD. Les perpendiculaires à AB élevées par les milieux de AM et de MB coupent la courbe CKD en F et G ; alors la longueur de la ligne polygonale CFKGD est supérieure à celle de la ligne polygonale CKD, donc à celle de la droite CD. La poursuite du processus par dichotomie des segments de AB ad infinitum produit une suite de lignes polygonales C...F...K...G...D, constituées de 2^n segments, chacune plus longue que la précédente, et dont la limite est la courbe CKD qui est donc plus longue que la droite CD. Or cette droite est plus longue que la base AB, d'après la proposition III du traité, donc la courbe équidistante CKD est plus longue que la base AB, en contradiction avec la proposition XXXVII. Saccheri conclut alors à la fausseté absolue de l'hypothèse de l'angle aigu.

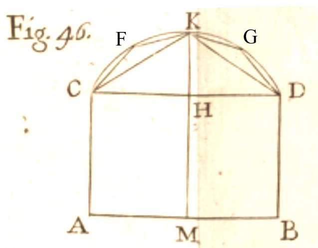


FIGURE 26 – Figure *46* de l'*Euclides ab omni nævo...* illustrant la proposition XXXVIII

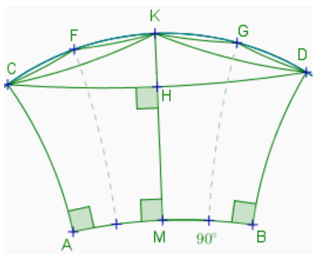


FIGURE 27 – Transcription de la figure *46* de l'*Euclides ab omni nævo...* dans le modèle du disque de Poincaré

Dans le scholie qui suit cette proposition, Saccheri remarque qu'il est tout à fait possible de construire, sous l'hypothèse de l'angle obtus, la ligne équidistante à AB passant par C et D, de montrer que sa convexité est tournée vers AB et que sa longueur est supérieure à celle de la droite CD. Mais comme la droite CD est, sous cette hypothèse, plus courte que la droite AB, aucune contradiction n'apparaît dans ce cas.

La proposition XXXIX, dernière du premier livre, énonce le cinquième postulat, dans la forme euclidienne, et donne sinon une démonstration qui est alors évidente, mais plutôt un exposé abrégé du cheminement conduisant à ce résultat.

Mais Saccheri semble encore pris de scrupule à propos de sa seconde réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu. Dans un dernier long scholie, il note qu'« il est bon de considérer ici une notable différence entre les réfutations des deux précédentes hypothèses ». Pour lui, celle de l'hypothèse de l'angle obtus est « plus claire que la lumière de midi » mais la réfutation de l'hypothèse de l'angle aigu a nécessité la preuve de l'égalité de longueur de la courbe CKD et de la droite AB, preuve qui, selon Saccheri, ne semble pas avoir été obtenue « à partir des viscères de l'hypothèse elle-même comme cela aurait dû être pour une réfutation parfaite ». Suit un rappel des précautions prises dans la proposition XXXVII et ses scholies pour justifier cette égalité. Il ajoute que qualifier des droites de parallèles [9] sous prétexte d'équidistance est une définition fallacieuse qui ne peut absolument pas conduire à la découverte de la vérité. Et il termine le premier livre par ces mots : « Sed hæc jam satis. » (Mais c'en est assez désormais).

Conclusion : un échec fertile

La tentative de démonstration du cinquième postulat conduite par Saccheri est certes un échec si elle est jugée à l'aune des connaissances actuelles, mais elle doit cependant être créditée de plusieurs résultats remarquables, autant de méthode que de matière.

S'il est très probable que Saccheri a hérité, par l'intermédiaire de Wallis, des idées de ‘Umar al-Ḫayyām, reprises par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, sur l'emploi d'un quadrilatère birectangle isocèle et la division en trois cas du problème étudié, il en a fait un usage plus intense. Il a été le premier à montrer l'universalité de chacune des trois hypothèses et à développer les conséquences des hypothèses de l'angle obtus et surtout de l'angle aigu jusqu'à parvenir, avec succès dans le premier cas, à une contradiction qui le satisfasse. Il a ainsi établi, sous l'hypothèse de l'angle aigu, de nombreuses propositions qui, un siècle plus tard ont intégré le corpus de la géométrie hyperbolique élaboré par Lobatchevski entre 1835 et 1840. En particulier, il a mis en évidence la notion de perpendiculaire commune à deux droites non sécantes, sans en montrer l'unicité (voir note 7), ce qui lui a permis de donner une catégorisation de la disposition des paires de droites en trois cas : sécantes, non sécantes admettant une perpendiculaire commune et non sécantes asymptotes. Il a en outre dégagé des propriétés de la courbe équidistante à une

9. Le terme « parallèle » est rarement utilisé par Saccheri, peut-être en raison de l'imprécision de sa signification dans le contexte de sa recherche.

droite, dont il se garde, à juste titre, de montrer qu'elle est une droite. Le traité n'est cependant pas exempt de défaillances dans les raisonnements, comme l'emploi de la proposition 16 du premier Livre des *Éléments* (voir note 3), l'extension, sans véritable justification, à un point à l'infini de propriétés assurées à distance finie et surtout de notions de calcul infinitésimal insuffisamment maîtrisées.

Quelle a pu être l'influence de l'ouvrage de Saccheri sur les travaux ultérieurs concernant le cinquième postulat ? Pour certains historiens des mathématiques, son traité serait vite tombé dans l'oubli ; cette opinion semble quelque peu exagérée puisque ce traité a fait partie de nombreuses bibliothèques, a été l'objet de comptes rendus dès sa publication dans le *Journal des Savants* (1734) et les *Nova Acta Eruditorum* (1736) et a été examiné dans la thèse de Georg Simon Klügel publiée en 1763 et donnant une recension des tentatives de démonstration du cinquième postulat. Cette thèse a été connue de Johann Heinrich Lambert qui y trouva peut-être l'idée d'employer un quadrilatère trirectangle, « moitié » d'un quadrilatère birectangle isocèle (voir proposition II), dans son essai sur la théorie des lignes parallèles où il n'est cependant fait nulle mention ni de Saccheri, ni de son traité. Ce traité est en revanche mentionné dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla parue en 1799. La parenté manifeste entre la configuration employée à répétition par Saccheri – segment de droite à une extrémité duquel est menée une perpendiculaire et à l'autre extrémité une droite à angle aigu – et celle mise en œuvre dès le début de son essai par Lobatchevski [10] permet d'envisager que le second ait pu être inspiré par le premier.

Après une éclipse relative au milieu du XIXe siècle, le traité de Saccheri fut étudié par Eugenio Beltrami qui publia en 1889 dans les *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* un article de huit pages intitulé « Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewski ». Une traduction en allemand de l'*Euclides ab omni naevo...* a été donnée dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss...*en 1895 par Paul Stäckel et Friedrich Engel (p. 50-135). Giovanni Boccardini a publié en 1904 une traduction en italien, annotée, de l'ouvrage de Saccheri sous le titre *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*. Après avoir examiné le traité de Saccheri dans un article intitulé « Non-euclidean geometry, historical and expository » publié dans *American mathematical monthly* en 1894, George Bruce Halsted (1853-1922) a publié en 1920 une édition bilingue du traité comportant le texte latin et une traduction en anglais sous le titre *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*. L'intérêt et l'admiration qu'éprouva, semble-t-il, Halsted pour l'œuvre de Saccheri le conduisirent à émettre l'opinion selon laquelle « Saccheri construisit délibérément une géométrie non euclidienne, la déguisant juste assez pour obtenir l'autorisation d'Ignatius Videcomas, Provincial de l'ordre des Jésuites [...] ». Saccheri aurait alors camoufler ce qui était son intention première, créer une nouvelle géométrie, sous la recherche d'une démonstration du cinquième postulat, en réfutant l'hypothèse de l'angle aigu par des arguments peu convaincants, pour éviter les foudres de la censure ecclésiastique qu'avaient subi certains de ses prédécesseurs au XVIIe siècle. Ce point de vue paraît peu vraisemblable parce que, d'une part la censure ecclésiastique n'était plus ce qu'elle avait été, d'autre part le contexte

10. Cette parenté a fait écrire à Jean-Luc Chabert dans (Chabert, 1987, p. 12) : « Ainsi Lobatchevski commence par ce par quoi Saccheri achève. »

intellectuel de l'époque de Saccheri ne permettait pas d'envisager la coexistence de deux géométries, conçues comme description raisonnée du monde des formes, si différentes. La tentative de Saccheri fut d'ailleurs suivie de plusieurs autres, dont celles de Lambert et d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833) avant l'invention de la géométrie hyperbolique par Lobachevski, ce qui montre l'attachement des mathématiciens du XIXᵉ siècle à la géométrie euclidienne reconnue comme seule vraie [11].

L'ouvrage de Saccheri continue de susciter l'intérêt au XXIᵉ siècle, sinon des mathématiciens, à tout le moins des historiens des mathématiques comme en témoignent, outre les rééditions en 1986 puis 2014, revues et augmentées, du livre édité par G. B. Halsted en 1920, deux éditions critiques récentes en italien, l'une en 2001 aux soins de Pierangelo Frigerio, l'autre en 2011 aux soins de Vincenzo De Risi.

Que le présent écrit, aussi modeste soit-il, en soit un témoignage de plus.

Sed hæc satis hodie.

Références bibliographiques

Source première

SACCHERI Girolamo, 1733, *Euclides ab omni nævo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometricæ Principia*, Milan, Paolo Antonio Montani.

Éditions, traductions de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus...* (par ordre chronologique)

SACCHERI Girolamo, 1895, « Der von jedem Makel befreiete Euklid ... » *in* ENGEL Friedrich, STÄCKEL Paul, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss...*, Leipzig, Teubner, p. 43-136.

BOCCARDINI Giovanni, 1904, *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, traduction en italien de l'*Euclides ab omni nævo vindicatus...* Milan, Ulrico Hoepli.

HALSTED George Bruce, 1920, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*, Édition bilingue latin – anglais, Chicago, Londres, The Open Court publishing Company. Cette édition ne comporte que le premier livre du traité, concernant le cinquième postulat.

HALSTED George Bruce, 1986, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus*, 2ᵉ édition bilingue latin – anglais, complétée des notes de Paul Stäckel et Friedrich Engel traduites de l'allemand en anglais par F. Steinhardt, New-York, Chelsea publishing Company. Cette édition ne comporte que le premier livre du traité, concernant le cinquième postulat.

11. Seul Carl-Friedrich Gauss a envisagé la possibilité de cette autre géométrie, comme en témoigne sa correspondance avec Heinrich Christian Schumacher entre 1831 et 1846 (Lobatchevski, 1980, p. 53-64).

SACCHERI, Girolamo, 2001, *Euclide liberato da ogni macchia*, édition bilingue latin – italien par les soins de Pierangelo Frigerio, Introduction par Imre Toth et Elisabetta Cattanei, Milan, Bompani, coll. « Il pensiero occidentale ».

SACCHERI, Girolamo, 2011, *Euclide vendicato da ogni neo.* Traduit du latin en italien par Vincenzo De Risi, Pise, éditions de la Scuola Normale Superiore.

SACCHERI Girolamo, 2014, *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Édition préparée et annotée par Vincenzo De Risi avec la traduction en anglais de G. B. Halsted revue par L. Allegri, Bâle, Birkäuser.

Études, ouvrages de référence (par ordre alphabétique d'auteur)

BRIN Philippe, BÜHLER Martine, 2002, « Histoire des géométries non euclidiennes : la théorie des parallèles d'Euclide à Lobatchevski » *in* BARBIN Évelyne (dir.), *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (Actes du treizième colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques, 6-7-8 mai 2000), IREM de Rennes, p. 313-340.

BONOLA Roberto, 1906, *La geometria non-euclidea*, Bologna, Zanichelli. Traduction anglaise, avec une analyse synthétique du traité de Saccheri (p. 22-44) : *Non-Euclidean Geometry*, Chicago, The Open Court Publishing Company, 1912.

CHABERT Jean-Luc, 1987, *Les géométries non euclidiennes*, IREM de Picardie, Université de Picardie.

CHABERT Jean-Luc, 1993, « La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat » *in* BARBIN Évelyne (dir.), *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, éditions Ellipses, coll. « Commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques », p. 277-297.

LOBATCHEVSKI Nicolaï, 1980, *La théorie des parallèles*, Coubron, Monom.

PONT Jean-Claude, 1986, *L'aventure des parallèles, histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés*, Berne, Peter Lang.

Sites Internet

http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DSB/Saccheri.pdf

http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Saccheri.html

http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri_(Dizionario-Biografico)

http://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-girolamo-saccheri_(Il-Contributo-italiano-alla-storia-del-Pensiero:-Scienze)

Remerciements

Je voudrais remercier les relecteurs et relectrices, en particulier Jacqueline et Jean-Paul Guichard, pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour organiser ces deux chapitres.