22

De quelques notables tentatives de démonstrations du cinquième postulat d'Euclide : de l'Antiquité au XVII^{e} siècle

Didier Bessot

Introduction

Plusieurs problèmes ont hanté l'histoire des mathématiques et l'esprit des savants pendant des siècles, voire des millénaires, avant d'être ou de ne pas être résolus. Il en fut ainsi pour des problèmes de constructibilité « à la règle et au compas », comme la quadrature du disque, la duplication du cube, la trisection de l'angle ou les polygones réguliers, posés dès l'Antiquité grecque au moins et dont la résolution définitive n'est intervenue qu'au XIX^{e} siècle grâce au développement de la théorie des nombres et des équations algébriques, pour la grande conjecture de Fermat résolue par Andrew Wiles et Richard Taylor en 1994 par la résolution de la conjecture plus générale dite STW (Shimura-Taniyama-Weil), ou pour la question de l'existence de nombres parfaits impairs qui demeure irrésolue à ce jour, même si la communauté mathématique est plutôt en faveur d'une inexistence en raison des conditions très restrictives que ces nombres devraient vérifier.

Mais un des problèmes qui a été parmi les plus débattus depuis l'Antiquité concerne la démontrabilité du cinquième postulat, dit aussi postulat des parallèles, figurant au début du premier livre des *Éléments* d'Euclide d'Alexandrie (IV^{e}-III^{e} siècle av. J.-C.). Ce postulat, ou demande, énonce :

> « Et que, si une droite [1] tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. »(Euclide, 1990, p. 175)

1. Dans tout cet article, le mot « droite » désigne ce qui est appelé aujourd'hui « segment de droite ».

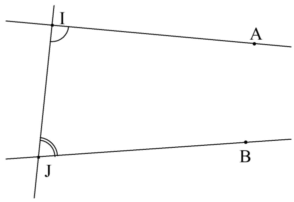

FIGURE 1 – Si angle AIJ + angle BJI < 2 droits alors (IA) et (JB) prolongées se rencontrent du côté des points A et B

Si le statut de postulat de cet énoncé a été dès l'Antiquité mis en question, c'est qu'il revêt par rapport aux problèmes cités plus haut une importance particulière puisqu'il touche aux fondements de la géométrie ; en effet tout le contenu des livres géométriques des *Éléments*, à partir de la proposition 29 du premier livre, à l'exception de quelques propositions des livres suivants, en dépend. En outre ce postulat présente des particularités qui ont certainement sollicité l'attention des lecteurs géomètres : d'une part son énoncé apparait compliqué en regard de la simplicité des quatre précédents postulats, d'autre part sa réciproque est l'objet de la proposition 17 du premier livre dont la démonstration ne requiert pas l'emploi du postulat [2] : « Dans tout triangle, deux angles, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits. » (Euclide, 1990, p. 228)

Enfin, ce postulat n'est utilisé qu'à partir de la proposition 29 du premier livre, qui constitue la réciproque des propositions 27 et 28 qui la précèdent et dont les démonstrations ne requièrent pas l'emploi du postulat.

Quelques-unes des plus notables tentatives de démonstration du cinquième postulat seront présentées dans cette histoire abrégée de ces essais de l'Antiquité au XVIIe siècle. Ces tentatives se sont appuyées dans presque tous les cas sur l'une des trois démarches suivantes : soit remplacer le cinquième postulat par un autre plus évident d'apparence, paraissant plus « naturel », soit donner une autre définition des droites parallèles, soit une combinaison des deux démarches précédentes. Ne sont présentés ici que les travaux considérés les plus notables et les plus développés sur ce sujet [3].

Antiquité

Les tentatives effectuées au cours de l'Antiquité gréco-romaine sont principalement connues par l'ouvrage de Proclus de Lycie (410-485), *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide.*

Dans son commentaire de la définition des droites parallèles d'Euclide, Proclus rapporte celle qu'en aurait donné Posidonius d'Apamée ou de Rhodes (IIe-Ier siècle

2. Ce fait est relevé à deux reprises par Proclus de Lycie dans (Proclus, 1948, p. 169 et p. 312), texte traduit par Paul Ver Eecke.

3. Le lecteur désirant une information plus complète, même quasi exhaustive, sur cette histoire pourra consulter avec profit l'ouvrage (Pont, 1986).

av. J.-C.) : « [...] les parallèles sont celles qui ne se rapprochent ni ne s'éloignent pas dans un seul et même plan, mais ont toutes les perpendiculaires amenées de points de l'une à l'autre égales. » (Proclus, 1948, p. 153).

Cette définition contient la notion désignée par la suite par le terme « d'équidistante » qui n'est pas sans soulever d'objection : en effet, si elle assure bien le fait que deux lignes équidistantes ne peuvent se rencontrer, elle admet implicitement, dans l'emploi qui en a été fait dans diverses tentatives de démonstration du cinquième postulat, qu'une ligne équidistante à une droite est une droite. Or le fait d'admettre la rectitude d'une équidistante à une droite induit le cinquième postulat, ou inversement la preuve de cette rectitude nécessite ce postulat. Proclus ne développe pas plus les travaux éventuels de Posidonius sur les parallèles mais fait remarquer qu'il existe des lignes qui se rapprochent l'une de l'autre en deçà de toute grandeur finie sans pour autant se rencontrer, comme par exemple la conchoïde de Nicomède et sa directrice, opérant ainsi une parenté entre parallèles et asymptotes puisque, dit-il, pourquoi ce qui est vrai pour des lignes en général ne pourrait-il pas l'être pour des droites ? Cette réflexion apparait dans son commentaire du postulat V (Proclus, 1948, p. 168-170) qui débute ainsi : « Cela [le cinquième postulat] aussi doit être absolument rayé des postulats ; car c'est un théorème qui offre de nombreuses difficultés, que Ptolémée s'est proposé d'éluder dans un certain livre [...] ».

En conséquence Proclus considère qu'il faut absolument chercher une démonstration du cinquième postulat, mais il renvoie cette tâche « à l'endroit où l'Auteur des *Éléments* sera dans l'obligation de mentionner ce théorème, en l'utilisant comme étant évident [...] », c'est-à-dire à son commentaire de la proposition 29.

Ce commentaire (Proclus, 1948, p. 311-319) présente, comme Proclus l'a annoncé, la démonstration proposée par Claude Ptolémée dans son ouvrage *Sur la rencontre de droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux angles droits*, connu de Proclus mais aujourd'hui perdu. Selon Proclus, Ptolémée se propose de démontrer, sans avoir recours au cinquième postulat, la proposition 29 des *Éléments* énoncée en ces termes : « [...] je dis donc [...] que, si des lignes droites sont parallèles et coupées par une ligne droite, les angles internes [entre les parallèles] et situés d'un même côté [de la sécante] sont égaux à deux droits, » (Proclus, 1948, p. 312).

Ptolémée précise aussitôt la démarche qu'il va suivre : « En effet, il est nécessaire que la droite qui coupe les parallèles forme les angles internes et situés d'un même côté égaux à deux angles droits ou plus petits ou plus grands que deux angles droits. » (Proclus, 1948, p. 312-313).

Ptolémée cherche alors à montrer que les deux dernières éventualités conduisent à des contradictions, mais son raisonnement est grossièrement erroné puisqu'il considère que la disposition des angles internes (plus petits ou plus grands que deux droits) se produit de chaque côté de la sécante, ce qui est absurde. Bien évidemment, convaincu d'avoir démontré la proposition 29, Ptolémée parvient aisément à prouver le cinquième postulat.

Proclus critique négativement le travail de Ptolémée en prenant « position contre Ptolémée [...] car la faiblesse de sa démonstration est manifeste [...] » (Proclus, 1948, p. 315) et propose ensuite sa propre résolution. Il fait appel pour cela à une proposition d'Aristote qualifiée « d'axiome » et tirée de l'ouvrage *Du Ciel* (liv. I, chap. 5, §2) : « Si deux droites formant un angle à partir d'un point sont prolongées à l'infini, l'intervalle de ces droites prolongées à l'infini dépasse toute grandeur finie. » dont Proclus déduit la proposition : « [. . .] lorsqu'une droite coupe l'une des [deux] parallèles, elle coupe aussi l'autre ». (Proclus, 1948, p. 318).

Cependant, « l'axiome » d'Aristote demande une démonstration (il est faux en géométrie sphérique), mais surtout la démonstration de la proposition avancée par Proclus suppose implicitement que la distance entre des parallèles demeure bornée. Or cette propriété admise induit le cinquième postulat ou, inversement, sa preuve le nécessite.

D'autres tentatives de démonstration ont eu lieu au cours de cette période mais, pas plus que celles qui viennent d'être mentionnées, elles n'ont apporté de réponse satisfaisante au problème étudié.

Moyen Âge : aire arabo-musulmane [4]

Les traductions en arabe des *Éléments* d'Euclide entreprises à partir de la fin du VIII^e^ siècle et durant le IX^e^ siècle ont amené les savants des pays d'Islam à s'intéresser au problème déjà soulevé concernant le cinquième postulat. Les travaux les plus développés sur cette question sont, dans l'ordre chronologique, ceux de Ṯābit ibn Qurra (826-901), Ibn al-Hayṯam (965-1030), 'Umar al-Ḫayyām (c.1045-c.1125) et Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201-1274) [5].

Ṯābit ibn Qurra

Ṯābit ibn Qurra a écrit deux textes sur ce sujet : l'*Opuscule sur la démonstration du célèbre postulat d'Euclide* (Jaouiche, 1986, p. 145-149) et l'*Opuscule sur <le fait> que si deux droites sont menées suivant deux <angles> moindres que deux droits, elles se rencontrent* (Jaouiche, 1986, p. 151-160), rédigés dans cet ordre selon K. Jaouiche, en raison de la qualité d'exposition et de raisonnement moindre du premier texte (Jaouiche, 1986, p. 45).

Dans le premier opuscule contenant cinq propositions, Ṯābit ibn Qurra n'emploie ni le mot de « parallèle » ni la définition qu'en donne Euclide mais utilise la notion de « droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent [l'une de l'autre] d'aucun de leurs deux côtés » (Jaouiche, 1986, p. 145), définition voisine de celle proposée par Posidonius mais sans allusion à l'équidistance. La proposition 1 reprend une partie de la proposition 28 du premier livre des *Éléments* dans laquelle l'égalité des angles alternes-internes assure le « parallélisme », proposition indépendante du cinquième postulat. À la suite de cette proposition, Ṯābit ibn Qurra ajoute sous forme de postulat :

4. Le lecteur désirant une information plus complète sur l'histoire de cette période pourra consulter (Jaouiche, 1986). Une grande partie des considérations exposées ici sur cette période provient de cet ouvrage.

5. Dans ce chapitre et le suivant, la translittération utilisée pour ces noms est celle de (Jaouiche, 1986). Il existe d'autres translittérations souvent utilisées comme Thābit ibn Qurra, Ibn al-Haytham,'Umar al-Khayyām et Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī.

> « Mais il est clair et l'on admet que si une ligne droite coupe deux lignes droites et que ces deux droites se rapprochent <l'une de l'autre> d'un de leurs côtés, elles s'éloignent <l'une de l'autre> de l'autre côté et que leur rapprochement du côté où elles se rapprochent ainsi que leur éloignement du côté où elles s'éloignent augmentent. » (Jaouiche, 1986, p. 146).

La proposition 2 est la réciproque de la proposition 1 et correspond donc à la première partie de la proposition 29 du premier livre des *Éléments* : « Si une droite coupe deux lignes droites qui ne se rapprochent ni ne s'écartent <l'une de l'autre> d'aucun de leurs deux côtés, alors les <angles> alternes sont égaux » (Jaouiche, 1986, p. 146).

Dans la démonstration de cette proposition, Ṯābit ibn Qurra fait appel à la propriété que Jaouiche formule ainsi : « il est impossible que deux droites qui se coupent ne se rapprochent ni ne s'écartent toutes les deux d'une troisième » (Jaouiche, 1986, p. 47). Cette propriété qui est une autre forme de l'axiome dit de Pasch[6] permet de démontrer l'unicité d'une parallèle à une droite par un point donné et induit le cinquième postulat. Ṯābit ibn Qurra peut alors « démontrer » ce postulat dans la proposition 5.

Dans le second opuscule *sur* <le fait> *que si deux droites…*, contenant sept propositions, Ṯābit ibn Qurra ne donne pas de définition explicite de la notion de parallèle mais en introduit une implicite dans l'énoncé des hypothèses de la proposition 1 :

> « <Lorsque> deux lignes droites [AB et DG] se trouvent dans un même plan et que l'on mène entre elles deux lignes droites [AG et EW] en étant égales et en formant avec l'une de deux premières droites deux angles égaux [AGD et EWD] <situés> d'un même côté, alors deux perpendiculaires quelconques [AZ et TK] abaissées sur cette <première> droite à partir de deux points de l'autre sont égales. » (Jaouiche, 1986, p. 153) (figure 2).

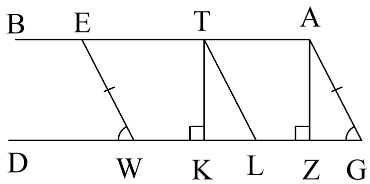

FIGURE 2 – *Opuscule sur <le fait> que si deux droites…* Proposition 1

Le fait de postuler l'existence de droites comme AB et DG vérifiant les hypothèses d'égalité de longueur et d'angle conduit à considérer les parallèles comme

6. Axiome de Pasch : Étant donné un triangle, une droite du même plan, ne passant par aucun des sommets du triangle, passant par un point intérieur à l'un des côtés, passe par un point de l'un des deux autres côtés.

équidistantes, ce qui induit la cinquième postulat et ruine donc la démonstration qu'en donne Ṯābit ibn Qurra à la proposition 7.

La proposition 2 mérite cependant d'être relevée en raison de la configuration qu'elle introduit et qui apparaitra à d'autres moments de l'histoire du cinquième postulat, en particulier dans l'ouvrage de Saccheri : « <Dans> toute surface quadrilatère [ABGD] dont deux angles <situés> sur un même côté [BAD et GDA] sont égaux et dont les deux côtés [AB et DG] en contact avec ce côté sont aussi égaux, les deux angles restants [ABG et DGB] sont aussi égaux. » (Jaouiche, 1986, p. 154) (figure 3).

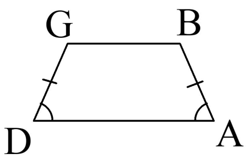

Figure 3 – Proposition 2

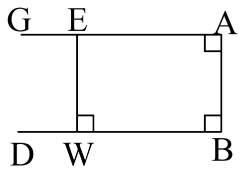

Figure 4 – Proposition 5

Enfin la proposition 5 introduit un quadrilatère ABWE dont les angles en A, B et W sont droits et conclut à la rectitude de l'angle en E et à l'égalité des droites EW et AB (figure 4). Cette proposition est équivalente au cinquième postulat et le quadrilatère trirectangle qui y est utilisé apparait aussi dans les travaux d'Ibn al-Hayṯam.

Ibn al-Hayṯam

Ibn al-Hayṯam s'est intéressé à deux reprises à la démonstration du cinquième postulat, successivement dans le *Livre expliquant les postulats d'Euclide dans les* Éléments (Jaouiche, 1986, p. 161-175).puis dans le *Livre sur la résolution de ce qui est douteux dans les* Éléments *d'Euclide* (Jaouiche, 1986, p. 177-184).

Le premier de ces ouvrages commence par une longue critique de la définition des droites parallèles d'Euclide à cause de l'intervention dans cette définition du prolongement à l'infini des droites, ce qui, selon Ibn al-Hayṯam, « n'est pas représentable » (Jaouiche, 1986, p. 161). Ibn al-Hayṯam va alors s'attacher à trouver « un moyen par lequel il peut exister deux droites ayant cette propriété » (Jaouiche, 1986, p. 162), à savoir celle de ne jamais se rencontrer même prolongées indéfiniment des deux côtés. Et ce moyen est en fait de construire, une droite étant donnée, une ligne engendrée dans « un mouvement un et simple », à savoir uniforme et non composé, par l'extrémité libre d'une droite donnée établie perpendiculairement sur la première droite. Pour Ibn al-Hayṯam, cette ligne ne peut être qu'une droite, et il montre que ces deux droites, la donnée et la construite, correspondent bien à la définition euclidienne des parallèles. Mais il a de cette façon conçu les droites parallèles comme des lignes équidistantes, ce qui induit le cinquième postulat.

Dans sa progression vers la démonstration de ce postulat, Ibn al-Hayṯam introduit dans un lemme un quadrilatère ABDG dont les angles en A, B et D sont droits et montre que les droites AB et DG sont égales, puis que l'angle en G est aussi droit. Cette proposition, avec le quadrilatère trirectangle (voir figure 4), apparaissait déjà comme proposition 5 dans le second traité de Ṯābit ibn Qurra et ce quadrilatère est aujourd'hui désigné par l'expression « quadrilatère de al-Hayṯam – Lambert » en raison de l'emploi fondateur qu'en a fait Johann Heinrich Lambert (1728-1777) dans sa *Theorie der Parallellinien* probablement rédigée vers 1766 et publiée seulement en 1895 par P. Stäckel et F. Engel dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss...*

Le second ouvrage d'Ibn al-Hayṯam, considéré par lui comme un complément au premier, reprend, dans une première partie, le schéma de construction des parallèles décrit dans l'ouvrage précédent et remplace le postulat d'Euclide « par une autre proposition qui joue le même rôle et qui est plus claire pour le sens et plus prégnante pour l'esprit et qui est : deux lignes droites qui se coupent ne sont pas parallèles à une troisième. » (Jaouiche, 1986, p. 178). Ibn al-Hayṯam montre que cette proposition implique le cinquième postulat mais s'appuie alors sur la démonstration qu'il a donnée de celui-ci dans son premier ouvrage pour en déduire que le postulat d'Euclide implique le sien, ce qui constitue un cercle vicieux. Dans la seconde partie de l'ouvrage, Ibn al-Hayṯam propose des démonstrations des propositions 27, 28 et 29 du premier livre des *Éléments*, d'abord dans l'ordre euclidien, puis en commençant par la proposition 29, dont il a relevé le caractère de réciprocité avec les deux précédentes. Mais, comme le relève Jaouiche, dans la première démonstration de la proposition 27, Ibn al-Hayṯam commet à nouveau une grave erreur logique en affirmant un fait qu'il ne démontre qu'ultérieurement dans la proposition 29 où il utilise pour une unique fois son postulat remplaçant celui d'Euclide mais aussi une propriété établie dans la proposition 27, nouveau cercle vicieux (Jaouiche, 1986, p. 73).

Ce second opuscule apparait donc plus confus et comportant plus d'incohérences et d'erreurs logiques élémentaires que le premier et n'apporte donc pas de véritable nouvel élément au sujet étudié.

ʻUmar al-H̱ayyām

L'*Opuscule sur l'explication des postulats problématiques du Livre d'Euclide* rédigé par ʻUmar al-H̱ayyām comporte une première partie consacrée à la théorie des parallèles (Jaouiche, 1986, p. 185-199), les deux suivantes concernant la définition des proportions et de la composition des rapports, qui ne seront pas examinées ici. La première partie commence par des considérations d'ordre historique, philosophique et épistémologique. ʻUmar al-H̱ayyām y décrit en les critiquant les travaux de ces prédécesseurs, en particulier ceux d'Ibn al-Hayṯam à qui il reproche le recours au mouvement dans sa construction-définition des parallèles comme équidistantes. Il y énonce comme prémisses nécessaires à la géométrie deux propositions admises s'apparentant au postulat avancé par Ṯābit ibn Qurra et constituant le postulat de ʻUmar al-H̱ayyām :

> « Deux droites qui se coupent s'écartent <l'une de l'autre> à partir de l'angle d'intersection », puis « Deux droites qui se rapprochent <l'une de l'autre> se coupent et deux droites qui se rapprochent ne peuvent s'écarter pendant qu'elles se rapprochent. » (Jaouiche, 1986, p. 190).

‘Umar al-Ḫayyām entreprend ensuite la démonstration de huit propositions qu’il veut insérer dans le premier livre des *Éléments* après la proposition 28, la septième de ces propositions correspondant à la proposition 29 d’Euclide et la huitième au cinquième postulat, alors démontré.

La proposition 1 reprend la configuration de la proposition 2 du second opuscule de Ṯābit ibn Qurra en la particularisant. En effet les angles en A et B du quadrilatère ABDG (figure 5) sont ici non seulement égaux mais droits, les côtés AG et BD étant aussi égaux. ‘Umar al-Ḫayyām montre, comme Ṯābit ibn Qurra, que les angles en D et G sont égaux. Ce quadrilatère, utilisé plus tard par Saccheri dès le début de son traité [7], est aujourd’hui appelé « quadrilatère de al-Ḫayyām – Saccheri ». La démonstration de ‘Umar al-Ḫayyām n’utilise pas l’orthogonalité en A et B et fait appel à deux cas d’égalité des triangles (propositions 4 et 26 des *Éléments*) ainsi qu’aux propriétés réciproques des triangles isocèles (propositions 5 et 6 des *Éléments*) (Jaouiche, 1986, p. 191).

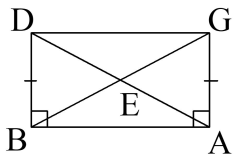

Figure 5 – *Opuscule sur l’explication...* Proposition 1

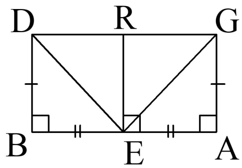

Figure 6 – Proposition 2

La proposition 2 reprend le même quadrilatère en considérant le milieu E de AB et la perpendiculaire à AB en E, rencontrant DG en R (figure 6). Alors R est le milieu de DG et ER est perpendiculaire à DG. La démonstration n’utilise pas non plus l’orthogonalité en A et B et fait appel aux deux mêmes cas d’égalité des triangles ainsi qu’au fait que, si une droite rencontre une autre droite en faisant des angles adjacents égaux, alors ces angles sont droits (définition 10 des *Éléments*). (Jaouiche, 1986, p. 191-192).

Les propositions 1 et 2 sont bien indépendantes du cinquième postulat, mais il n’en est pas ainsi pour la proposition 3. Reprenant la même configuration que la précédente, elle conclut que les angles en D et G sont droits. Ici l’orthogonalité en A et E est utilisée pour montrer que les droites AG et ER sont parallèles (proposition 27 ou 28 des *Éléments*), ce qui ne requiert pas l’emploi du cinquième postulat. Mais ‘Umar al-Ḫayyām ajoute aussitôt : « Or la distance entre deux parallèles quelconques ne varie pas. » (Jaouiche, 1986, p. 192-193). Il assimile donc des droites parallèles à des droites équidistantes, ce qui, comme cela a déjà été mentionné, implique le postulat euclidien. L’affirmation admise en cet endroit de l’équidistance des parallèles est d’autant plus étrange qu’elle fait l’objet de la proposition 6 de l’ouvrage. Même si cette affirmation ruine la démonstration de la proposition 3, la suite de cette démonstration demeure intéressante. ‘Umar al-Ḫayyām propose une démonstration par l’absurde divisée en trois cas : soit les

7. Ce traité de 1733, intitulé Euclides ab omni naevo vindicatus,..., est examiné dans le chapitre suivant.

angles en D et G sont droits, ce qui achève la preuve, soit ils sont aigus, soit ils sont obtus. ‘Umar al-Ḫayyām va alors montrer que chacune des deux dernières hypothèses conduit à une contradiction, en se servant du postulat qui lui a été attribué ci-dessus. Ce procédé de trichotomie jouera plus tard un rôle fondamental dans l'organisation des travaux de Saccheri puis de Lambert sur ce sujet.

Le traité de ‘Umar al-Ḫayyām, après ceux d'Ibn al-Hayṯam, a été examiné et critiqué par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, principalement sur la distinction entre propositions philosophiques et propositions géométriques, qui lui paraît peu pertinente.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

Le traité de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī exposant sa théorie des parallèles, rédigé vers 1250, s'intitule *Traité qui délivre du doute concernant les droites parallèles.* Un autre texte, très certainement apocryphe selon Jaouiche, sur cette question figure dans un ouvrage attribué à Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, intitulé *Rédaction des Éléments d'Euclide* et publié en arabe à Rome en 1594.

Dans le premier texte (Jaouiche, 1986, p. 201-226), après un exposé sur les raisons pour lesquelles le cinquième postulat doit être démontré, puis un examen critique des travaux de certains de ses prédécesseurs sur ce sujet, Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī développe sa théorie en deux versions ; la première comporte sept propositions, la seconde reprenant les cinq premières précédentes et substituant trois nouvelles propositions aux propositions 6 et 7.

Dans la proposition 1, Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī définit la distance d'un point à une droite et montre qu'elle est obtenue par la droite perpendiculaire à la droite donnée issue du point donné. La proposition 2 est une reprise à l'identique de la proposition 1 du texte de ‘Umar al-Ḫayyām sur le quadrilatère rectangle isocèle ABDG où la rectitude des angles en B et D et l'égalité des droites AB et GD permet de montrer l'égalité des angles en A et G. Comme la proposition 3 de ‘Umar al-Ḫayyām, la proposition 3 du présent texte conclut, sous les mêmes hypothèses à la rectitude des angles en A et G (figure 7) [8].

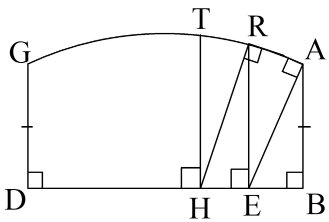

FIGURE 7 – *Traité qui délivre du doute...*
Proposition 3 – Cas des angles obtus

8. La droite AG y est représentée courbe pour une meilleure visualisation des angles obtus en A et G et des perpendiculaires successives.

La démonstration est organisée comme dans le texte de ʿUmar al-Ḫayyām par division en trois cas. Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī examine d'abord celui où les angles en A et G sont obtus ; en construisant deux séries de perpendiculaires, les unes à la droite AG par un point de cette droite (A puis R, etc.), les autres à la droite BD par un point de cette droite (E puis H, etc.), il montre, par des considérations sur les angles des triangles ainsi formés et les côtés qu'ils sous-tendent, que les perpendiculaires élevées d'un point de BD vers AG augmentent constamment en s'éloignant de AB ($BA < ER < HT < \ldots$). En répétant cette construction et ce raisonnement à partir de DG, il obtient que ces mêmes perpendiculaires augmentent constamment en s'éloignant de DG, c'est-à-dire en s'approchant de BA ($HT < ER < BA$), ce qui est en contradiction avec le résultat antérieur. L'argumentation de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī est superfétatoire en plus d'être erronée : superfétatoire, car il lui aurait suffi de remarquer que l'augmentation constante des perpendiculaires à BD est contradictoire avec l'égalité des droites BA et DG ; erronée, car lorsque le point de BD, duquel est élevée la perpendiculaire vers AG, est le milieu de BD, cette droite est aussi perpendiculaire à AG en son milieu, comme l'a montré ʿUmar al-Ḫayyām dans sa proposition 2. Le processus d'itération des perpendiculaires produit alors à répétition la même perpendiculaire commune à BD et AG en leurs milieux, ce qui met un terme au processus. Il faut d'ailleurs noter l'absence d'une proposition analogue à la proposition 2 de ʿUmar al-Ḫayyām mettant en évidence l'axe de symétrie du quadrilatère. Le cas de l'angle aigu est traité de la même façon, avec cette différence que les droites comme BA, ER, HT, ... diminuent en s'éloignant de AB, mais souffre de la même erreur [9].

La proposition 5 correspond à la proposition 29 du premier livre des *Éléments* que Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī démontre sans recours au cinquième postulat, mais en définissant implicitement les parallèles comme des équidistantes. Enfin la proposition 7 démontre le cinquième postulat. Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī ajoute ensuite trois propositions inspirées des travaux al-Ǧauharī (IXᵉ siècle), qui ne sont connus d'ailleurs que par la relation qu'en donne Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Ces propositions doivent remplacer les propositions 6 et 7 précédentes : la deuxième, remplaçant la proposition 7, montre que si un point est situé entre les côtés d'un angle rectiligne, il est possible de joindre ces côtés par une droite passant par ce point, mais sa démonstration utilise implicitement l'axiome de Pasch. (Jaouiche, 1986, p. 225).

Le second texte attribué à Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī sur la théorie des parallèles (Jaouiche, 1986, p. 233-241) figure dans la *Rédaction des Éléments d'Euclide* publiée en arabe à Rome en 1594. Il comporte la démonstration du postulat précédée de trois lemmes, chacun équivalent au postulat. Le premier de ces lemmes formalise l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 3 du *Traité qui délivre du doute...* en construisant une succession de droites perpendiculaires à une droite donnée vers une droite aussi donnée et permettant de montrer que ces deux droites se rapprochent l'une de l'autre d'un côté puis de l'autre côté aussi, ce qui est contradictoire. Mais ce lemme est évidemment sujet à la même critique que la démonstration de la proposition 3, négligeant la possibilité d'une perpen-

9. Dans le cas de l'angle aigu, les droites « en accordéon » AB, BR, RE, ET, TH , etc. tendent, en se serrant de plus en plus les unes aux autres, vers la perpendiculaire aux milieux de AB et CD sans l'atteindre.

diculaire commune entre les deux droites. Toutefois, si ce lemme est admis, il implique le cinquième postulat. Le deuxième lemme montre la rectitude des angles aux sommets d'un quadrilatère birectangle isocèle, ainsi que l'égalité entre la base et la droite joignant ces sommets, regroupant les propositions 3 et 4 du premier traité. Le troisième lemme montre que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits. Suit la démonstration du postulat euclidien, divisée en trois cas selon le caractère des angles intérieurs de somme inférieure à deux droits : droit et aigu, aigus tous deux, obtus et aigu.

Si les recherches des savants des pays de l'Islam médiéval n'ont pas abouti à des résultats satisfaisants sur la démontrabilité du cinquième postulat, elles ont néanmoins produit des outils (quadrilatère birectangle isocèle dit depuis de al-Ḫayyām – Saccheri, quadrilatère trirectangle dit de al-Hayṯam – Lambert) et des processus de démonstration (la considération de trois cas : angle droit, obtus, aigu dans l'organisation de la preuve) qui ont été mis en œuvre avec profit par les géomètres ultérieurs comme Saccheri et Lambert.

Époque moderne : XVI^e^-XVII^e^ siècles

Les travaux les plus notables sur le cinquième postulat durant cette période sont le fait de deux mathématiciens, l'un allemand, Christophorus Clavius (1538-1612), l'autre anglais, John Wallis (1616-1703).

Christophorus Clavius

Clavius publie en 1574 une traduction latine des *Éléments* d'Euclide augmentée de ses propres commentaires. Il y propose deux méthodes de démonstration du cinquième postulat qui, dans son édition, figure en tant qu'axiome 13.

La première méthode comporte cinq théorèmes : les deux premiers établissent qu'une ligne équidistante à une droite est une droite ; le troisième montre que, dans un quadrilatère birectangle isocèle ABCD, où AD est perpendiculaire à AB, BC est perpendiculaire à AB et AD est égale à BC, toute perpendiculaire élevée d'un point E de AB vers un point F de CD est égale à AD et à BC. Le quatrième théorème montre que, dans un tel quadrilatère, les angles en C et D sont droits. Enfin le dernier théorème donne une preuve du postulat euclidien. Cette démarche n'apporte rien de neuf par rapport à certaines déjà rencontrées précédemment.

La seconde méthode repose sur le théorème suivant : étant données trois droites d_1, d_2 et d_3 telles que d_3 est perpendiculaire à d_1 et fait avec d_2, du côté de d_1, un angle aigu, alors d_1 et d_2 se rapprochent l'une de l'autre du côté de l'angle aigu et s'éloignent de l'autre côté. La démonstration a recours à la construction d'une succession de droites perpendiculaires à d_1 vers d_2, puis de d_2 vers d_1, procédure présente auparavant dans les textes de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, et donc susceptible des mêmes critiques. Là encore aucune nouveauté.

John Wallis

Les réflexions de John Wallis sur le cinquième postulat ont été publiées dans le deuxième volume de ses *Opera mathematica*[10] et avaient été préalablement diffusées sous la forme de deux conférences en latin. La première, en 1651, exposait les considérations de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī sur le cinquième postulat, et la seconde, prononcée à Oxford le soir du 11 juillet 1663[11] celles de Wallis lui-même. Le fondement des réflexions de Wallis consiste en l'admission du principe de similitude qui est formulé dans le lemme 8 : « *Datæ cuicunque Figuræ, Similem aliam cujuscunque magnitudinis possibilem esse.* » (Wallis, 1693-1699, vol. 2, p. 676). Traduction : « Étant donnée une figure quelconque, une autre semblable de grandeur quelconque est possible. »

Ce principe a été commenté par Saccheri dans l'examen qu'il a rédigé sur la tentative de Wallis en expliquant qu'il suffit de supposer l'existence de deux triangles semblables de grandeur différente pour pouvoir démontrer le cinquième postulat. Ce faisant, il a montré que le principe de similitude est équivalent au dit postulat.

Conclusion

Si la tentative de Wallis n'a pas plus abouti que les précédentes à une conclusion satisfaisante, elle a certainement permis à Saccheri de connaître, non seulement cette tentative, mais aussi les travaux de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et, par son intermédiaire, peut-être ceux de Ibn al-Hayṯam et de ʻUmar al-Ḫayyām dont Naṣīr avait fait la critique.

Le travail de Saccheri sur le cinquième postulat d'Euclide, qui est présenté dans le chapitre suivant de cet ouvrage, va élaborer des concepts et des résultats qui ont intégré depuis le corpus de la géométrie hyperbolique.

Références bibliographiques

Les textes

Clavius Christophorus, 1574, *Euclidis elementorum libi* xv, Rome, apud Vincentium Accoltum.

Euclide, 1990, *Les Éléments*, traduits du grec en français par Bernard Vitrac. Vol. 1. Paris, Presses universitaires de France.

Jaouiche Khalil, 1986, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin.

Proclus de Lycie, 1948, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduits du grec en français par Paul Ver Eecke, Bruges, Desclée de Brouwer et Cie.

10. Le texte de la conférence du 11 juillet 1663 est reproduit, traduit et commenté dans *Wallis, le Cinquième postulat et la Similitude*, (Chabert et Neuberg, 1986).

11. Datation selon le calendrier julien, l'Angleterre n'ayant pas encore adopté à cette époque le calendrier grégorien.

WALLIS John, 1693, « Demonstratio postulati Quinti Euclidis » (Démonstration du cinquième postulat d'Euclide), conférence prononcée en public à Oxford le soir du 11 juillet 1663 (calendrier julien) et publiée dans *Opera mathematica*, vol. 2, Oxford, p. 674-678.

Études

BRIN Philippe, BÜHLER Martine, 2002, « Histoire des géométries non euclidiennes : la théorie des parallèles d'Euclide à Lobatchevski » *in* BARBIN Évelyne (dir.), *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (Actes du treizième colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques, 6-7-8 mai 2000), IREM de Rennes. p. 313-340.

CHABERT Jean-Luc, NEUBERG Jean, 1986, *Wallis, le Cinquième Postulat et la Similitude*, IREM de Picardie, Université de Picardie.

CHABERT Jean-Luc, 1987, *La préhistoire des géométries non euclidiennes ou l'histoire du Cinquième Postulat*, IREM de Picardie, Université de Picardie.

CHABERT Jean-Luc, 1987, *Les géométries non euclidiennes*, IREM de Picardie, Université de Picardie.

CHABERT Jean-Luc, 1993, « La vraie fausse démonstration du Cinquième postulat » *in* BARBIN Évelyne (dir.), *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, éditions Ellipses, coll. « Commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques », p. 277-297.

PONT Jean-Claude, 1986, *L'aventure des parallèles, histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés*, Berne, Peter Lang.