21

Des recherches en histoire pour comprendre le contenu des manuels d'aujourd'hui ? La révolution de l'ère Meiji et les manuels de géométrie actuels dans les collèges japonais

Marion COUSIN

Ces recherches sur les preuves dans les manuels de mathématiques sont le résultat d'une collaboration avec Takeshi Miyakawa, didacticien à l'Université de Jōetsu au Japon. Elles ont pour but de réfléchir à la forme de nos cours actuels de mathématiques en France et au Japon.

Lors de recherches antérieures, Miyakawa a comparé les contenus, les formes et les fonctions des démonstrations dans les manuels de mathématiques japonais et français actuels. J'ai pour ma part étudié les manuels de géométrie durant l'époque d'Edo (*Wasan*, mathématiques développées au Japon, en se basant sur les travaux chinois) et l'ère Meiji (introduction des mathématiques occidentales).

En France et au Japon, les démonstrations telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui posent de nombreuses difficultés aux élèves. Nous avons croisé nos travaux sur l'histoire de l'enseignement et sur la didactique des mathématiques pour mieux comprendre leurs caractéristiques.

Les premiers résultats obtenus, que nous présentons dans cet article, montrent que certaines particularités de la langue japonaise ont eu un impact sur l'utilisation des démonstrations : elles sont devenues au Japon un moyen de justifier par écrit mais pas à l'oral.

Introduction

Depuis l'antiquité grecque, les démonstrations constituent un élément fondamental des textes mathématiques occidentaux. Or dans le *Wasan*, c'est-à-dire les mathématiques japonaises qui se développent principalement durant l'époque d'Edo (1603-1868), on ne trouve aucune trace de démonstrations avant la deuxième moitié du XIX^e siècle. Dans la continuité des travaux des mathématiciens chinois, les mathématiciens japonais élaborent des procédures pour résoudre des problèmes mais ils ne prouvent pas leurs affirmations. Néanmoins, suite aux réformes de l'éducation menées durant l'ère Meiji (1868-1912), la géométrie axiomatique d'Euclide et ses démonstrations sont intégrées dans les programmes de mathématiques des écoles secondaires japonaises.

Dans les études que j'ai menées jusqu'à présent, je m'intéresse à l'évolution des textes mathématiques dans les manuels des écoles secondaires rédigés et utilisés durant cette période (voir (Cousin, 2013), (Cousin, 2017-1) et (Cousin, 2017-2)).

Aujourd'hui, au Japon, les élèves apprennent à démontrer en mathématiques au collège et ils rencontrent souvent des difficultés lors de cet apprentissage ((MEXT, 2009) et (Kunimune et al., 2009)), comme dans plusieurs autres pays (voir (Mariotti, 2006) et (Hanna & De Villiers, 2012)).

Miyakawa a montré que les difficultés des élèves varient selon le pays, principalement pour deux raisons liées aux contextes social et culturel de l'enseignement. La première concerne ce qui est enseigné : Miyakawa a souligné dans un article de 2017 que le contenu et la fonction de la démonstration à enseigner sont par exemple différents en France et au Japon ((Miyakawa, 2017)). La seconde raison vient de l'emploi et de la compréhension qu'ont les étudiants de la justification dans leur vie quotidienne, qui ont un impact sur leur approche de la démonstration mathématique en classe. En effet, celles-ci diffèrent également d'une culture à l'autre (voir (Sekiguchi & Miyazaki, 2000)).

Dans cet article, je présenterai les études que nous avons engagées avec Miyakawa pour comprendre la forme des démonstrations dans les manuels actuels japonais en étudiant leur évolution dans l'histoire. Ces travaux permettent de mieux comprendre la forme, les caractéristiques et la fonction des démonstrations dans les manuels japonais. Nous espérons qu'engager de tels travaux sur les démonstrations enseignées au Japon et en France permettra de mieux comprendre les différences entre ces deux pays et les difficultés auxquelles font face les élèves pour comprendre cet aspect de l'étude des mathématiques. Le but étant à long terme de donner des outils aux professeurs pour faciliter la tâche des élèves dans ces deux pays.

Corpus et méthodologie d'analyse des manuels

Nous nous sommes demandé quelles sont les conditions et les contraintes sociales et culturelles qui ont déterminé la nature et la forme des démonstrations mathématiques à enseigner dans les collèges japonais actuels. Pour déterminer ces conditions et ces contraintes, nous nous sommes intéressés à l'évolution des démonstrations dans les manuels des collèges japonais, depuis leur apparition durant l'ère Meiji jusqu'à aujourd'hui.

Mes études sur l'ère Meiji et celles que nous avons effectuées avec Miyakawa montrent que la forme des démonstrations au Japon a été déterminée par de nombreux facteurs linguistiques, éditoriaux, humains, culturels et qu'elle est également liée à la fonction que les auteurs de manuels associent aux démonstrations dans l'enseignement de la géométrie. Dans cet article, nous nous concentrons sur les facteurs linguistiques et culturels et nous montrons que la forme des démonstrations a aussi une influence sur la vision que les élèves ont de celles-ci.

Concernant le corpus, il a fallu sélectionner un ensemble de manuels pertinent pour répondre à nos questions parmi la multitude de manuels publiés entre le début de l'ère Meiji et aujourd'hui.

Les manuels des ères Meiji (1868-1912) et Taishō (1912-1923) ont une place particulière puisque c'est durant cette période que les premières démonstrations japonaises sont écrites et que la façon dont les démonstrations sont présentées et enseignées évolue le plus.

Pour l'ère Meiji, nous avons sélectionné les manuels les plus utilisés dans les écoles secondaires en nous basant sur des recherches antérieures (études utilisées : (Neoi, 1997) et (Tanaka & Uegaki, 2015)).

Mais entre l'ère Taishō et la Seconde Guerre mondiale, nous n'avons pas trouvé de statistiques précises sur l'utilisation des manuels dans les classes. Nous avons donc sélectionné des manuels qui sont restés connus aujourd'hui, notamment parce qu'ils ont été le sujet d'étude de plusieurs travaux historiques.

Concernant les périodes après la Seconde guerre mondiale, nous avons sélectionné un ou deux manuels publiés et utilisés à la suite de chaque réforme importante sur les programmes nationaux.

Le système actuel de sélection des manuels a été établi en 1965 et après cette date, nous avons accès aux pourcentages des ventes des ouvrages scolaires et ce sont les parutions de *Keirinkan* et *Tōkyō Shoseki* qui sont les plus importantes. Ce sont donc ces manuels que nous avons considérés.

L'analyse de ces manuels se fait en trois étapes.

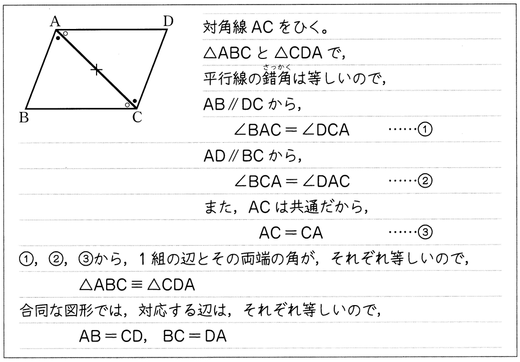
Premièrement, nous déterminons la place de la démonstration dans l'enseignement de la géométrie présenté dans les manuels : Est-ce que les manuels reflètent une stratégie générale concernant l'enseignement des démonstrations ? Si c'est le cas quelle est cette approche ? Et les démonstrations ont-elles une place importante dans l'enseignement de la géométrie ?

Deuxièmement, pour chaque manuel, nous avons analysé la forme de certaines démonstrations spécifiques liées aux parallélogrammes puisque que nous avons trouvé ces démonstrations dans la plupart des manuels : nous nous sommes intéressés à la mise en forme, à l'organisation générale, à l'utilisation des symboles et aux formulations employées dans les propositions (théorèmes, axiomes, définitions, etc.) et dans les assertions des démonstrations.

Troisièmement, nous nous intéressons aux commentaires des auteurs sur les démonstrations et leur enseignement.

Les démonstrations dans les manuels actuels

Aujourd'hui, au Japon, le terme « démonstration » (*shōmei*) est introduit pour la première fois dans les cours de géométrie de 4e. Nous donnons ci-dessous un exemple de démonstration extrait d'un manuel de 4e édité par *Keirinkan* où l'on prouve que les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Nous proposons également une traduction littérale de la démonstration pour analyser de manière précise le langage et pour que les traductions des différentes démonstrations soient uniformes.



対角線 AC をひく。
△ABC と △CDA で,
平行線の錯角は等しいので,
AB∥DC から,
∠BAC＝∠DCA ……①
AD∥BC から,
∠BCA＝∠DAC ……②
また, AC は共通だから,
AC＝CA ……③
①, ②, ③から, 1 組の辺とその両端の角が, それぞれ等しいので,
△ABC≡△CDA
合同な図形では, 対応する辺は, それぞれ等しいので,
AB＝CD, BC＝DA

Tracer la diagonale AC.
Dans ΔABC et ΔCDA,
Etant donné que les angles alternes-internes de droites parallèles sont égaux,
Comme AB // DC,
$\angle$BAC = $\angle$DCA . . . (1)
Comme AD // BC,
$\angle$BCA = $\angle$DAC . . . (2)
Et, comme AC est commune [aux deux angles],
AC = CA . . . (3)
Comme (1), (2), et (3), étant donné qu'une paire de côtés et les angles de leurs deux extrémités sont égaux,
ΔABC $\equiv$ ΔCDA
Etant donné que les côtés correspondants de figures congruentes sont respectivement égaux,
AB = CD, BC = DA

FIGURE 1 – Exemple d'une démonstration actuelle issue du manuel de *Keirinkan* (Okamoto et al., 2016, p. 133)

On constate que des symboles mathématiques sont employés pour exprimer les égalités, le parallélisme, les triangles, les angles et la congruence (des figures). Des expressions mathématiques composées uniquement de symboles sont également mobilisées pour les assertions des hypothèses ou pour les assertions déduites dans les différentes étapes de la démonstration (ex : $\angle$BAC = $\angle$DCA). Les assertions déduites sont par ailleurs données séparément et parfois numérotées pour être utilisées ensuite.

En revanche, les propriétés générales utilisées dans la démonstration sont exprimées grâce à des phrases en japonais, sans symboles mathématiques. Notons que, contrairement à ce qui est fait dans les manuels français, les auteurs n'utilisent pas systématiquement la forme Si-Alors pour citer ces propriétés (voir (Miyakawa 2017)).

Ainsi, cette démonstration est un mélange de phrases japonaises et de phrases mathématiques écrites grâce à des symboles [1]. Nos travaux s'intéressent à l'origine et à l'histoire de ce type de démonstrations.

Les textes mathématiques dans les manuels de géométrie avant l'ère Meiji

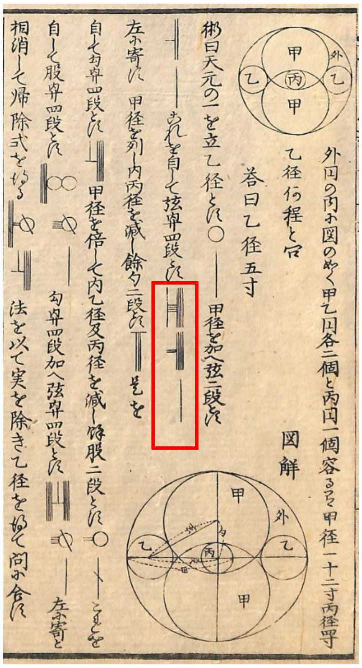
Durant l'époque d'Edo (1603-1868), les savants japonais s'inspirent des travaux chinois pour écrire des ouvrages mathématiques adaptés à une société japonaise en plein essor économique et culturel. À la veille de la Restauration Meiji (1868),

1. Dans la continuité des travaux de Miyakawa, nous appelons ce type de démonstrations des « semi-paragraph proof ».

les pratiques associées au *wasan* continuent d'être enseignées dès le primaire et d'évoluer dans les établissements privés d'enseignement supérieur. L'éducation se développe également considérablement durant cette période et, à la fin de l'époque d'Edo, il existe un patchwork d'écoles de divers niveaux sur l'ensemble du territoire, au sein desquelles des pratiques pédagogiques communes sont transmises par l'usage et la tradition. Si aucune politique nationale n'est établie, ce patchwork d'écoles et leurs enseignants serviront de base à la mise en place d'un système éducatif moderne durant l'ère Meiji.

Dans la grande majorité des textes du *wasan* (et dans les mathématiques chinoises), un énoncé de mathématique est un problème mathématique présenté à l'aide d'un problème souvent concret (1), de sa solution (2) et de la procédure (3) qui permet d'obtenir cette solution, souvent exécutée à l'aide d'un instrument de calcul tel que les baguettes à calculer (*sangi* 算木) ou le boulier (*soroban* 算盤). L'enseignement de la géométrie métrique du *wasan* est ainsi centré sur la résolution de problèmes : des questions sur les mesures des figures géométriques sont posées et les tâches des élèves consistent à mobiliser ou à imaginer des procédures (qui emploient parfois des outils algébriques et analytiques) pour obtenir la réponse.

Nous donnons ci-dessous un exemple de texte mathématique enseigné à la veille de la Restauration Meiji : un texte d'Hasegawa Hiroshi 長谷川寛 (1782-1839) publié dans le manuel *Kika shinron* 幾何新論 (*Nouvelles théories sur la géométrie*, 1830).



On insère à l'intérieur du cercle externe deux cercles *kō* 甲 et deux cercles *otsu* 乙 ainsi qu'un cercle *hei* 丙 de la manière indiquée sur la figure. Le diamètre de *kō* 甲 vaut 12 *sun* et le diamètre de *hei* 丙 , 4 *sun*.

On **demande** combien vaut le diamètre de *otsu* 乙 .

On dit pour la **réponse** : Le diamètre de *otsu* 乙 est 5 *sun*.

On dit pour la **procédure** : On **pose** le diamètre de *otsu* 乙 comme unité du *tengen* 天元 (inconnue) [x]. On y ajoute le diamètre de *kō* 甲 [$12+x$], ce qui donne 2 fois l'hypoténuse (*gen* 弦). On le multiplie par lui-même, ce qui donne 4 fois l'hypoténuse au carré [$144+24x+x^2$]. Le placer à gauche. Disposer le diamètre de *kō* 甲 . On lui retranche le diamètre de *hei* 丙 . Le reste donne 2 fois la hauteur (*kō* 甲) [8]. On le multiplie par lui-même. Cela donne 4 fois la hauteur au carré [64]. On double le diamètre de *kō* 甲 et on lui retranche le diamètre de *otsu* 乙 et le diamètre de *hei* 丙 . Le reste donne 2 fois la base (*kō* 甲) [$20-x$]. On le multiplie par lui-même, ce qui donne 4 fois la base au carré [$400-40x+x^2$]. On ajoute 4 fois la hauteur au carré. Cela donne 4 fois l'hypoténuse au carré [$464-40x+x^2$]. Annuler avec ce qui est placé à gauche. On obtient la configuration pour la division [$-320+64x$]. On divise et l'on obtient le diamètre de *otsu* 乙 , ce qui correspond à la question.

FIGURE 2 – Exemple d'un texte mathématique de la fin de l'ère Meiji issu du manuel d'Hasegawa (Hasegawa, 1830, feuillet 82). Le cadre rouge a été ajouté par nos soins.

Vers la fin de l'époque d'Edo, les problèmes du *wasan* sont de moins en moins proches de la vie quotidienne. Il s'agit souvent de figures imbriquées et de figures dont l'aspect esthétique a de plus en plus d'importance. Cet aspect des manuels a amené certains historiens à décrire le *wasan* comme un art éloigné des autres domaines que l'on qualifierait aujourd'hui de scientifiques. Mais les travaux d'Horiuchi montrent au contraire que certains mathématiciens du *wasan* ont travaillé aux côtés de « scientifiques », comme les spécialistes du calendrier (voir (Horiuchi, 1994)).

On voit que le texte d'Hasegawa est structuré comme la plupart des textes mathématiques chinois ou japonais avant l'intégration des mathématiques occidentales : un problème est énoncé (« on demande... »), la solution est donnée (« on dit pour la réponse... ») puis la procédure qui a permis d'obtenir cette solution est proposée (« on dit pour la procédure... »). Le verbe « poser » fait référence à l'outil de calcul (une surface de calcul et des baguettes) même si, à la fin de l'ère Meiji, il est probable que ce ne soit pas l'outil lui-même qui soit mobilisé mais des représentations de celui-ci. Dans cette procédure, l'outil de calcul est utilisé pour représenter les coefficients de ce que nous appellerions aujourd'hui des polynômes : le coefficient constant est placé en haut puis les coefficients de degrés supérieurs sont placés au-dessous. Par exemple, les représentations de baguettes encadrées dans la figure 2 se traduiraient aujourd'hui grâce au polynôme $144 + 24x + x^2$.

On remarque par ailleurs que cet extrait ne contient aucun texte permettant de prouver la validité du résultat. En effet, bien que certains mathématiciens chinois et japonais discutent de la validité des résultats, les démonstrations telles qu'on les connait aujourd'hui ne font pas partie des textes mathématiques avant l'introduction des mathématiques occidentales durant l'ère Meiji (Voir (Chemla, 2012)).

L'étude des textes du *wasan* révèle enfin que les mathématiciens japonais de l'époque d'Edo accordaient moins d'importance au langage mathématique que leurs homologues européens. Si certains mathématiciens tels que Takebe Katahiro (1664-1739) insistent sur l'importance d'un langage précis dans ce domaine, il existe beaucoup moins de conventions à respecter pour écrire les mathématiques au Japon que dans les pays occidentaux.

Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère Meiji : l'ère Meiji (1868-1912)

Avec le Décret de l'éducation (*Gakusei*, 1872), le gouvernement japonais impose l'abandon de l'enseignement du *wasan* et l'apprentissage exclusif des connaissances occidentales en suivant des méthodes d'enseignement occidentales. Par exemple, l'enseignement individualisé fait place à l'enseignement magistral. De nombreux manuels occidentaux sont alors traduits pour qu'ils soient utilisés dans les nouvelles écoles et c'est dans ce contexte qu'apparaissent les premières démonstrations japonaises. Comme les démonstrations sont nouvelles dans le paysage mathématique japonais, il n'existe aucune convention pour les écrire ou les mettre en forme. Et, dans les manuels occidentaux ou dans les manuels japonais, leur forme varie beaucoup : l'analyse des différents manuels révèle une grande disparité, notamment du point de vue du langage utilisé dans les démonstrations.

Par exemple, comme nous pouvons le voir sur la figure 3, dans une traduction japonaise de la version américaine d'un manuel de Legendre, *Shōgaku kikayōhō*, Nakamura écrit les démonstrations uniquement grâce à des phrases japonaises et le symbolisme est peu mobilisé [2].

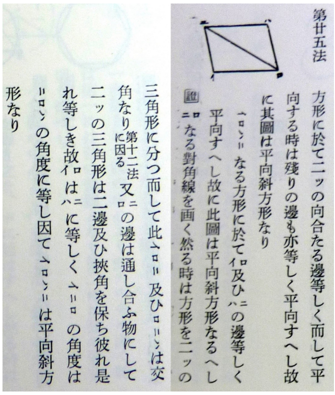

第廿五法
方形に於て二ッの向合たる邊等しく而して平向する時は殘りの邊も亦等しく平向すへし故に其圖は平向斜方形なり
イロハニなる方形に於てイロ及ひハニの邊等しく平向すへし故に此圖は平向斜方形なるへし
證 ニロなる對角線を画く然る時は方形を二ッの三角形に分つ而して此イロニ及ひロニハは交角なり第十二法に因る又ロニの邊は通し合ふ物にして二ッの三角形は二邊及ひ挾角を保ち彼れ是れ等しき故イロはハニに等しくイニロの角度はニロハの角度に等しく因てイロハニは平向斜方形なり

FIGURE 3 – Extrait de *Shōgaku kikayōhō* (Nakamura, 1873).

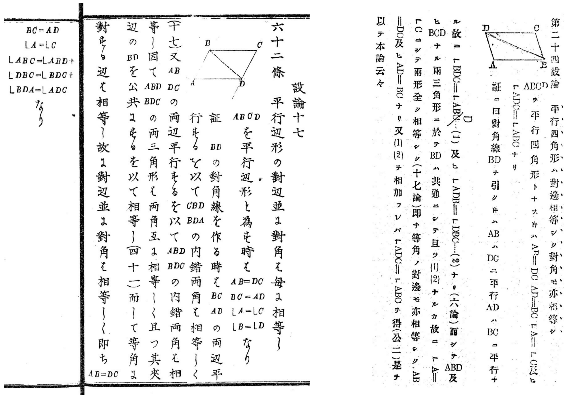


FIGURE 4 – Extraits de *Kika shinron* (Miyagawa, 1876) et de *Kikagaku* (Shibata, 1879).

Alors que, dans d'autres traductions de manuels américains comme *Kika shinron et Kikagaku*, les expressions symboliques sont souvent mobilisées (voir figure 4).

En analysant les manuels de cette période, on constate également que les auteurs-traducteurs japonais ne font aucune remarque sur les démonstrations et sur les raisonnements en géométrie. Ils suppriment même parfois des remarques données dans les ouvrages originaux sur la nature des énoncés mathématiques.

Ces constats et les disparités que nous avons relevées dans l'écriture des démonstrations nous amènent à penser que les savants de l'ère Meiji accordent peu d'importance à l'enseignement des démonstrations. Cette situation est probablement due au besoin rapide de traductions des ouvrages occidentaux afin de mener les réformes du gouvernement. Ainsi, il est probable que les traducteurs cherchent tout d'abord à développer un vocabulaire basique pour pouvoir traduire rapidement des manuels utilisables dans les écoles et qu'ils négligent certains aspects des mathématiques occidentales, peu importants à leurs yeux.

Pour finir sur les premières démonstrations japonaises, j'ai rencontré lors de mes recherches de doctorat des manuels où certaines fonctions des démonstrations étaient moins visibles que dans la source originale. Par exemple, alors que Davies respecte l'aspect systématique de l'argumentation en géométrie en démontrant chaque énoncé et en justifiant chaque assertion des démonstrations dans son ouvrage, la version traduite abrégée de Nakamura (voir figure 3) ne préserve pas

2. Ces démonstrations sont appelées *paragraph prooves* dans nos travaux, pour reprendre le terme utilisé par Miyakawa dans ses recherches en didactique.

cette mise en valeur. Dans cet ouvrage, les chaines déductives étant brisées ou floues, la démonstration ne sert ainsi plus à justifier de manière rigoureuse chaque propriété, fonction qu'elle a dans l'ouvrage de Davies (Davies, 1870).

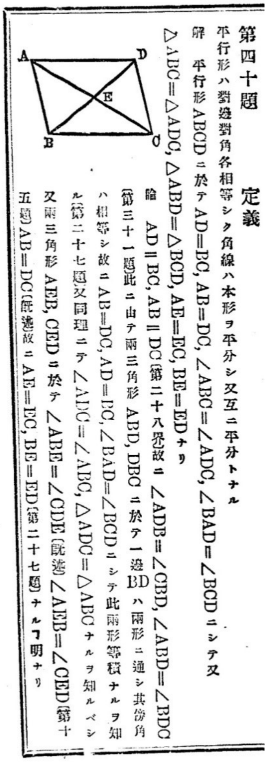

第四十題　定義
平行形ハ對邊對角各相等シク角線ハ本形ヲ平分シ又互ニ平分トナル
解　平行形ABCDニ於テAD=BC, AB=DC, ∠ABC=∠ADC, ∠BAD=∠BCDニシテ又
△ABC=△ADC, △ABD=△BCD, AE=EC, BE=EDナリ
論　AD∥BC, AB∥DC（第二十八界）故ニ∠ADB=∠CBD, ∠ABD=∠BDC
（第三十一題）此ニ由テ兩三角形ABD, DBCニ於テ一邊BDハ兩形ニ通シ其傍角
ハ相等シ故ニAB=DC, AD=BC, ∠BAD=∠BCDニシテ此兩形等積ナルヲ知
ル（第二十七題）又同理ニテ∠ADC=∠ABC, △ADC=△ABCナルヲ知ルベシ
又兩三角形AEB, CEDニ於テ∠ABE=∠CDE（既述）∠AEB=∠CED（第十
五題）AB=DC（既述）故ニAE=EC, BE=ED（第二十七題）ナルヿ明ナリ

FIGURE 5 – Extrait de *Shōgaku kikayōhō* (Nakamura, 1873).

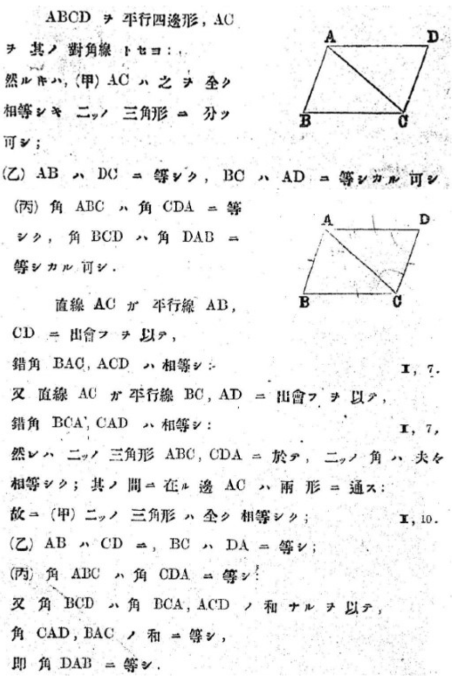
Durant les années 1880, Tanaka Naonori (1853- ?) réalise une série de manuels utilisée dans la plupart des écoles secondaires japonaises en s'inspirant d'ouvrages anglais, américains, français mais aussi de traductions réalisées par les savants chinois et jésuites dès le début du XVII^{e} siècle en Chine (voir (Cousin, 2013, p. 277-282)). Tanaka a une meilleure formation en mathématiques occidentales que les auteurs des années 1870 et il a déjà enseigné le sujet avant d'écrire ses manuels, ce qui lui permet d'avoir un regard critique sur les sources qu'il utilise et sur la langue mathématique employée par ses prédécesseurs.

Comme on peut le voir sur la figure 5, il utilise peu de formules dans ses démonstrations mais, pour clarifier les hypothèses et les conclusions à établir grâce à la démonstration, il exprime l'exposition et la détermination [3] uniquement grâce à des expressions symboliques. De plus, dans ses démonstrations, contrairement aux auteurs précédents, à chaque fois qu'il justifie une assertion grâce à une proposition prouvée précédemment, il cite le numéro de cette proposition. Il souligne ainsi l'importance de justifier systématiquement chaque assertion dans une démonstration. De plus, c'est le premier auteur des différents corpus que j'ai utilisé pour mes travaux sur l'ère Meiji et probablement le premier auteur de l'ère Meiji qui donne des explications sur la nature des démonstrations, sur leur rôle en géométrie et qui insiste sur le fait que « les propositions doivent être démontrées grâce aux axiomes, aux postulats et aux propositions qui ont déjà été démontrées. » (Tanaka, 1882, p. 15).

Les analyses des premières démonstrations japonaises que j'ai effectuées m'ont permis de montrer que l'utilisation des symboles mathématiques est surtout un moyen pour exprimer des phrases qui sont difficiles à écrire dans une langue mathématique japonaise encore mal appropriée et pour simplifier cette langue qui pose encore problème au lecteur.

3. Nous rappelons que l'exposition et la détermination sont les parties de la démonstration où les hypothèses et les conclusions de la proposition sont explicitées en donnant des noms aux éléments de la figure considérée. Dans les ouvrages occidentaux importés au Japon, la détermination et l'exposition d'une proposition sont, contrairement à son énoncé général, exprimées grâce à des structures de langage fixes pour mettre en relief l'hypothèse et la conclusion.

À la fin des années 1880, la publication des manuels de Kikuchi Dairoku (1855-1917) marque un tournant dans la production des manuels de géométrie. Kikuchi fixe dans ces ouvrages une nouvelle langue mathématique et une nouvelle forme des démonstrations qui seront utilisées durant des dizaines d'années : ses manuels seront massivement utilisés jusqu'au début de l'ère Taishō.


ABCD ヲ 平行四邊形，AC ヲ 其ノ 對角線 トセヨ：
然ルトキハ，(甲) AC ハ 之 ヲ 全ク 相等シキ 二ツノ 三角形 ニ 分ツ 可シ；
(乙) AB ハ DC ニ 等シク，BC ハ AD ニ 等シカル 可シ
(丙) 角 ABC ハ 角 CDA ニ 等シク，角 BCD ハ 角 DAB ニ 等シカル 可シ．

直線 AC ガ 平行線 AB, CD ニ 出會フ ヲ 以テ，
錯角 BAC, ACD ハ 相等シ： I, 7.
又 直線 AC ガ 平行線 BC, AD ニ 出會フ ヲ 以テ，
錯角 BCA, CAD ハ 相等シ： I, 7.
然レハ 二ツノ 三角形 ABC, CDA ニ 於テ，二ツノ 角 ハ 夫々 相等シク；其ノ 間ニ 在ル 邊 AC ハ 兩 形 ニ 通ス：
故ニ (甲) 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シク； I, 10.
(乙) AB ハ CD ニ，BC ハ DA ニ 等シ；
(丙) 角 ABC ハ 角 CDA ニ 等シ：
又 角 BCD ハ 角 BCA, ACD ノ 和 ナル ヲ 以テ，
角 CAD, BAC ノ 和 ニ 等シ，
即 角 DAB ニ 等シ．

Soit ABCD le parallélogramme et AC sa diagonale ;
Alors (1) AC le divise en deux triangles complètement égaux ;
(2) AB est égal à DC, BC est égal à AD ;
(3) L'angle ABC est égal à l'angle CDA, l'angle BCD est égal à l'angle DAB.
Étant donné que la droite AC coupe les droites parallèles AB et CD, les angles alternes-internes BAC et ACD sont égaux ; I, 7.
Et étant donné que la droite AC coupe les droites parallèles BC et AD, les angles alternes-internes BCA et CAD sont égaux ; I, 7.
Maintenant, dans les triangles ABC et CDA, deux paires d'angles sont respectivement égales, et le côté AC entre eux est commun aux deux figures.
Donc (1) les deux triangles sont complètement égaux ; I, 10.
(2) AB est égal à CD, et BC est égal à DA ;
(3) L'angle ABC est égal à l'angle CDA : et étant donné que l'angle BCD est la somme des angles BCA et ACD, il est égal à la somme des angles CAD et BAD, qui est l'angle DAB.

FIGURE 6 – Exemple de démonstration dans le manuel de Kikuchi (Kikuchi, 1889, p. 53-54)

Selon ce mathématicien formé à Cambridge, il est nécessaire de créer une langue mathématique qui unifie les langues orales et écrites japonaises afin d'écrire les démonstrations uniquement avec des phrases japonaises, sans s'appuyer sur des symboles mathématiques. Comme ses professeurs à Cambridge, il pense que l'argumentation enseignée en mathématiques permet aux élèves d'apprendre à argumenter leurs points de vue et, de manière plus générale, à raisonner. Dans *Of liberal education* publié en 1845, Whewell dit : « Wherever Mathematics has formed a part of a Liberal Education, as a discipline of the Reason, Geometry has been the branch of mathematics principally employed for this purpose. [...] For Geometry really consists entirely of manifest examples of perfect reasoning : the reasoning being expressed in words which convince the mind, in virtue of the special forms and relations to which they directly refer » (Whewell, 1845, p. 29). Nous voyons ici que, selon les éducateurs anglais qui ont inspiré Kikuchi, le langage employé pour démontrer, argumenter en mathématiques a un rôle fondamental pour former les élèves à raisonner.

Par conséquent, selon Kikuchi, il est nécessaire que la tâche de démontrer soit réalisée par les élèves dans leur propre langue et non grâce à des symboles purement mathématiques afin que les compétences acquises puissent être réexploitées dans d'autres matières ou dans leur vie professionnelle. Il est donc important pour cet auteur d'élaborer une langue mathématique japonaise fonctionnelle et précise qui puisse être utilisée aussi bien à l'oral qu'à l'écrit [4].

De plus, comme Tanaka, il souligne l'aspect systématique de l'argumentation et des justifications dans les démonstrations en indiquant, à droite, le numéro de la proposition mobilisée à chaque étape du raisonnement déductif, en réorganisant de manière minutieuse les propositions des manuels dont il s'inspire et en portant une attention particulière au langage qu'il emploie.

Pour finir, dans un guide du professeur, Kikuchi donne des explications détaillées sur les raisonnements logiques en géométrie, sur les différentes étapes essentielles d'une démonstration, sur l'importance de la précision de la langue mathématique et sur les différents types de démonstrations, tel que le raisonnement par contraposée ou le raisonnement par l'absurde.

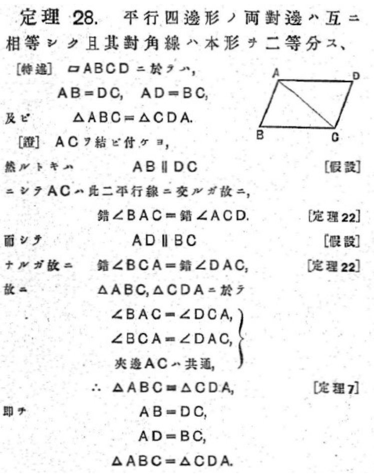
Il est clair que nous avons affaire à un auteur bien différent des auteurs précédents qui, grâce à une formation poussée en mathématiques, a une idée précise des buts à atteindre pour que la géométrie occidentale et ses démonstrations soient introduites dans l'enseignement japonais. Notons que, influencé par son éducation en Angleterre, il pense que la principale fonction des démonstrations dans l'enseignement de la géométrie voire des mathématiques est de former les élèves à raisonner, à argumenter leurs propos de manière rigoureuse. Et que c'est pour cette raison que les démonstrations doivent être écrites uniquement en japonais.

Néanmoins, la forme des démonstrations de Kikuchi a rapidement été critiquée par ses contemporains car elle était difficile à enseigner, notamment à cause du langage employé. Nagasawa Kamenosuke (1861-1927), dans son propre manuel, critique sévèrement le fait que Kikuchi n'utilise que des phrases en japonais et refuse l'utilisation des symboles : « Écrire les démonstrations des théorèmes avec des phrases complètes et parfaites est le vice de ceux qui sont d'accord avec le mouvement d'Euclide en Angleterre [5] » (Nagasawa, 1896, p. 3-4).

4. Durant Meiji, les expressions orales et écrites sont encore très différentes en japonais. Ainsi, quand un enseignant dit un énoncé mathématique à l'oral, il est impossible pour l'élèves de noter exactement ce qu'il dit à l'écrit et inversement. Selon Kikuchi, le passage de l'oral à l'écrit et l'inverse amènent des imprécisions et donc des possibilités d'erreurs dans le raisonnement.

5. En Angleterre, et notamment à Cambridge où l'enseignement de la géométrie reste très traditionnel, il existe des conflits entre les « partisans d'Euclide » et les partisans d'une modernisation de l'enseignement de la géométrie. Mais Kikuchi a assisté à ces débats et il utilise, pour rédiger ses manuels, les manuels rédigés par l'Association for the Improvment of Geometrical Teaching, qui est l'association qui mène ce combat contre Euclide. Cette confusion dans le propos de Nagasawa est probablement due au fait que, d'un point de vue plus général, si on regarde ce qui est fait à la même époque ailleurs en Europe, les manuels rédigés par cette association restent encore très proches de l'écrit antique, même s'ils souhaitent s'en détacher.

Contrairement à Kikuchi, Nagasawa propose des démonstrations où les symboles mathématiques sont beaucoup mobilisés (voir figure 7). La forme des démonstrations ainsi que leur usage dans l'enseignement changent ainsi complètement.



定理 28. 平行四邊形ノ兩對邊ハ互ニ相等シク且其對角線ハ本形ヲ二等分ス、

[特述] ▱ABCD ニ於テハ、
AB=DC, AD=BC,
及ビ △ABC=△CDA.

[證] ACヲ結ビ付クヲ、
然ルトキハ AB ∥ DC [假設]
ニシテ AC ハ此二平行線ニ交ハルガ故ニ、
錯∠BAC=錯∠ACD. [定理22]
而シテ AD ∥ BC [假設]
ナルガ故ニ 錯∠BCA=錯∠DAC, [定理22]
故ニ △ABC, △CDA ニ於テ
∠BAC=∠DCA,
∠BCA=∠DAC,
夾邊ACハ共通,
∴ △ABC≡△CDA, [定理7]
即チ AB=DC,
AD=BC,
△ABC=△CDA.

Théorème 28. Les deux paires de côtés opposés d'un parallélogramme sont égales entre elles, et leur diagonale le divise en deux parts égales.

[Exposition] Dans ▱ABCD, AB = DC, AD = BC, et ΔABC = ΔCDA.

[Démonstration] Relier A et C,

Dans ce cas,AB || DC [Hypothèse]

Et étant donné que AC coupe ces deux droites parallèles,

alt. int. $\angle$BAC = alt. int.$\angle$ACD. [Theorème 22]

Et étant donné que, AD || BC [Hypothèse]

alt. int. $\angle$BCA = alt. int.$\angle$DAC, [Theorème 22]

Donc dans ΔABC, ΔCDA,
$\angle$BAC = $\angle$DCA,
$\angle$BCA = $\angle$DAC,
Le côté AC est commun,
$\therefore$ ΔABC $\equiv$ ΔCDA, [Théorème 7]

Donc, AB = DC,
AD = BC,
ΔABC = ΔCDA.

FIGURE 7 – Exemple de démonstration dans le manuel de Nagasawa (Nagasawa, 1896, p. 53)

En particulier, pour Nagasawa, les démonstrations sont avant tout des objets mathématiques écrits et la langue mathématique qui y est employée ne peut être utilisée pour la justification orale étant donné certaines caractéristiques de la langue japonaise et la structure des expressions symboliques. Par exemple, en japonais l'assertion 'AB || DC' est normalement lue à l'oral 'AB hēkō DC' ('AB parallèle DC' où hēkō pourrait être assimilé, en français, à un adjectif qualificatif dérivé d'un nom). Mais il s'agit uniquement ici de prononcer chaque symbole l'un à la suite de l'autre puisque cette phrase mathématique n'a aucune ressemblance avec une phrase japonaise grammaticalement correcte. Pour qu'elle soit grammaticalement correcte, il faudrait dire 'AB wa DC ni hēkō' ('AB est parallèle à DC'), ce qui serait abrégé en 'AB DC ||'. Cela est dû au fait que les adjectifs sont, en japonais, toujours placés à la fin de la phrase lorsque leur fonction est attribut du sujet [6].

À partir de la fin de l'ère Meiji, ce type de démonstration incluant de nombreuses expressions symboliques apparaît dans de nombreux manuels de géométrie (voir par exemple (Nagasawa, 1896) et (Kuroda, 1917)) et même dans ceux de Kikuchi (voir (Kikuchi, 1916)). Ainsi, l'objectif de Kikuchi de créer une langue mathématique japonaise qui permettrait d'énoncer les propositions et les démonstrations géométriques sans utiliser des expressions symboliques et qui unifierait les expressions orales et écrites est abandonné.

6. Je simplifie ici en utilisant les termes grammaticaux français pour que le lecteur comprenne nos propos.

Évolution des démonstrations dans les manuels de géométrie de l'ère Meiji : après l'ère Meiji

Jusqu'à la fin de l'ère Meiji, les auteurs de manuels écrivent leurs démonstrations de diverses manières mais ils suivent tous un modèle classique d'enseignement de la géométrie : les théorèmes et les problèmes sont énoncés les uns après les autres et, à partir des années 1880, chaque assertion des démonstrations est justifiée en citant la proposition utilisée. Mais, à partir de l'ère Taishō, une approche « pratique » de la géométrie apparaît dans les manuels : sous l'influence des travaux de Peter Treutlein (1845-1912) (voir (Treutlein, 1911)), les auteurs japonais prennent leurs distances avec les modèles classiques issus de la tradition euclidienne pour proposer un enseignement de la géométrie plus proche de la vie quotidienne.

Par exemple, dans la première partie du manuel de Kuroda Minoru 黒田稔 , *Kikagaku kyōkasho* (*Manuel de géométrie*, 1917), les instruments de mesure sont présentés et des résultats de géométrie sont introduits sans théorème ni démonstration. Puis, dans la deuxième partie, des questions pratiques sont posées.

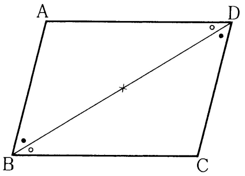
Cette évolution de l'enseignement de la géométrie a également une influence sur la forme des démonstrations : alors que dans le manuel de Kikuchi de 1889, toutes les démonstrations sont exprimées sans utiliser de symboles mathématiques et que les justifications sont données en citant précisément le numéro de la proposition utilisée, dans un ouvrage de Yamamoto Sansei 山本三生 rédigé en 1943 (Yamamoto, 1943), les nouvelles assertions sont exprimées grâce à des symboles mathématiques et les justifications de ces assertions sont données en japonais, sans symboles et sans donner le numéro de la proposition utilisée. Avec cette approche plus pratique, l'aspect systématique de la justification en géométrie est moins souligné que dans les manuels précédents.

Avec la réforme des programmes de 1942, les programmes nationaux incluent explicitement cette approche pratique de la géométrie. La méthode axiomatique qui consiste à déduire des axiomes, des postulats et des propositions précédentes les nouvelles propositions est de moins en moins visible dans les manuels et de plus en plus de problèmes liés à la vie quotidienne y apparaissent. En particulier, dans *Chūtō sūgaku* (Mathématiques pour le secondaire), manuel publié par le Ministère de l'éducation en 1947, on ne trouve pas du tout de démonstration.

Entre 1949 et 1955, les démonstrations réapparaissent néanmoins petit à petit dans les manuels. Puis, dans les années 60, les démonstrations commencent à être enseignées en début de 4ᵉ. On peut remarquer que, alors que les concepts enseignés en géométrie n'ont que très peu changé depuis cette période, la forme des démonstrations continue d'évoluer légèrement. Par exemple, durant la période des mathématiques modernes, les auteurs utilisent très peu de phrases japonaises dans leurs démonstrations.

Comme on peut le voir dans la démonstration de la figure 8, les symboles mathématiques sont plus utilisés que jamais. Plus tard, les auteurs (qui sont parfois les mêmes que ceux de la période des maths modernes) reviendront vers la stratégie que nous avons observée dans les manuels des années 40 mais qui est aussi la stratégie employée de nos jours : les symboles mathématiques sont utilisés pour exprimer les assertions des démonstrations mais des phrases en japonais sont mobilisées pour citer les propriétés qui justifient ces assertions.

証明



$\triangle$ABD と $\triangle$CDB で,
AB // DC だから,
$\angle$ABD $=$ $\angle$CDB ……①
AD // BC だから,
$\angle$ADB $=$ $\angle$CBD ……②
また, BD $=$ DB ……③
①, ②, ③ から, $\triangle$ABD $\equiv$ $\triangle$CDB
だから, AB $=$ CD, AD $=$ CB

FIGURE 8 – Exemple de démonstration dans les manuels publiés durant la période des mathématiques modernes (Shoda et al., 1979, p. 123)

Conclusions et prolongements

Les études que nous avons faites avec Miyakawa sur l'évolution des démonstrations dans l'enseignement de la géométrie au Japon nous ont permis de montrer à quel point la nature des démonstrations enseignées aujourd'hui peut être déterminée par des facteurs culturels et historiques. Par exemple, nous avons vu que, dans le cas japonais, les caractéristiques de la langue japonaise ont significativement influencé l'évolution de la forme des démonstrations dans les manuels.

Kikuchi essaye, durant l'ère Meiji, de développer une langue mathématique japonaise qui unifie pour la première fois les langues orale et écrite afin de former les étudiants à penser et argumenter de manière rigoureuse. Pour réaliser ce projet, il est selon lui nécessaire d'écrire les démonstrations (et l'ensemble de son manuel) grâce à des phrases japonaises qui ne contiennent pas de symboles mathématiques.

Néanmoins, les démonstrations écrites uniquement grâce à des phrases japonaises proposées par Kikuchi disparaissent car elles sont considérées comme trop difficiles à enseigner. Elles sont alors remplacées par des démonstrations où phrases japonaises et expressions symboliques mathématiques sont mélangées, démonstrations qui sont toujours utilisées au Japon aujourd'hui.

Une des conséquences de cela est que les écarts entre la forme de la démonstration écrite et celle de la justification orale sont encore aujourd'hui beaucoup plus importants dans l'enseignement japonais que dans l'enseignement français ou anglais par exemple. Une autre conséquence est que les assertions écrites grâce à des symboles dans les démonstrations japonaises ne peuvent être utilisées directement à l'oral pour justifier.

Cela nous a amené à penser que les élèves japonais voient les démonstrations comme des objets mathématiques écrits particuliers, similaires par exemple aux équations algébriques. Selon nous, les élèves japonais considèrent ces objets mathématiques comme des objets formels, qui ont peu de rapport avec les justifications orales « réelles », l'argumentation ou le débat.

J'aimerais ici soumettre quelques réflexions et hypothèses qui nécessiteraient de mener de nouvelles recherches. Je m'interroge sur les raisons qui font que, depuis la fin de l'ère Meiji et l'abandon des écrits de Kikuchi pour l'enseignement, toutes les démonstrations des manuels japonais sont un mélange de phrases en japonais et de phrases mathématiques rédigées à l'aide de symboles qui ne peuvent être dites à l'oral avec des phrases grammaticalement correctes. Je rappelle que cela implique que ces démonstrations ne sont pas rédigées de façon à ce que leur enseignement forme les élèves à argumenter/défendre un point de vue de manière rigoureuse. Nous avons vu que la langue japonaise telle qu'elle était durant l'ère Meiji était mal adaptée pour écrire des démonstrations utilisables dans l'enseignement, mais mes études historiques ont révélé que Kikuchi est l'un des seuls auteurs japonais depuis la fin de l'ère Meiji qui ont essayé d'utiliser une langue mathématique qui emploie le moins possible les symboles mathématiques pour rédiger ses démonstrations.

On peut se demander pourquoi aucun auteur n'a décidé, plus tard, de suivre la démarche de Kikuchi ? D'après ce que nous avons vu plus haut, les débats (notamment entre Kikuchi et Nagasawa) durant l'ère Meiji reviendraient à adopter le point de vue de tel ou tel courant de pensée occidentale (le point de vue anglais étant, selon Nagasawa, dépassé), mais je pense que cela touche à des raisons plus profondes, liées aux caractéristiques de la culture japonaise.

En effet, dans la culture japonaise, le débat a une place largement moins importante que dans les cultures européennes (et notamment la culture française) où, depuis leur plus jeune âge, on apprend aux enfants à débattre : le débat prend une place importante dans les programmes français dès le primaire. Ainsi, en France, une des fonctions principales des démonstrations dans l'enseignement est d'apprendre aux élèves à argumenter et, par conséquent, elles sont écrites grâce à une langue similaire à celle utilisée dans la vie quotidienne : le français.

Mais au Japon, il semblerait que le débat ait une place peu importante dans l'enseignement : dans le *wasan* par exemple, il n'est pas besoin de justifier les résultats avancés dans les manuels puisque le professeur qui a rédigé ce manuel est d'une grande renommée et que cela suffit à convaincre le lecteur. Ainsi, la fonction de la démonstration dans l'enseignement est bien différente... Cela pourrait expliquer que la forme de la démonstration a peu évolué depuis l'ère Meiji. Les auteurs de manuels n'auraient pas cherché à faire évoluer la forme des démonstrations puisque que, former les élèves au débat n'étant pas important au Japon, la forme qu'ont les démonstrations depuis le milieu du XX^e siècle (voire depuis la fin de l'ère Meiji) convient aux fonctions qu'ils attribuent aux démonstrations dans l'enseignement.

Pour finir, il me semble important de mener ce type d'enquêtes plus générales sur les écarts entre les démonstrations écrites et les justifications orales dans différents pays car elles nous permettraient de mieux exploiter les recherches, en didactique, sur l'argumentation et les démonstrations mathématiques.

Le langage utilisé dans les démonstrations étant un élément déterminant pour comprendre les difficultés que les élèves rencontrent, ce type d'étude pourrait permettre de mieux identifier et comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. Par exemple, les élèves japonais ont, de par la forme de leurs démonstrations, une meilleure vision des différents arguments utilisés dans les démonstrations puisque les expressions symboliques « sautent aux yeux » dans le texte mathématique. Donc les chaines déductives sont plus faciles à identifier pour les élèves japonais que pour les élèves français qui doivent lire précisément la démonstration pour comprendre la chaine déductive d'une démonstration.

En outre, dans les démonstrations, les élèves français utilisent une langue qu'ils connaissent relativement bien puisqu'elle est proche de la langue qu'ils utilisent dans leur vie quotidienne. Une des difficultés des élèves français consiste donc à utiliser un vocabulaire et des structures de langage précis et régulier pour employer la langue française à bon escient dans les démonstrations. L'élève japonais doit, lui, apprendre à utiliser une nouvelle langue utilisant des symboles mathématiques et dont la « syntaxe » est tout à fait différente de celle qu'il utilise dans la vie de tous les jours. Il doit aussi comprendre dans quel cas il doit utiliser cette langue et dans quel cas il utilise le japonais. Les difficultés des élèves concernant le langage dans les démonstrations sont donc de nature différente.

Références bibliographiques

Baba Takuya, Iwasaki Hideki, Ueda Atsumi & Date Fumiharu, 2012, « Values in Japanese mathematics education : Their historical development », *ZDM*, 44, n°1, p. 21-32.

Bosch Mariana & Gascón Josep, 2006, « Twenty-five years of the didactic transposition », *ICMI Bulletin*, 58, p. 51-65.

Chemla Karine (dir.), 2012, *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge, Cambridge University Press.

Cousin Marion, 2013, *La « révolution » de l'enseignement de la géométrie dans le Japon de l'ère Meiji (1868-1912) : Une étude de l'évolution des manuels de géométrie élémentaire,* Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

Cousin Marion, 2017-1, « Les manuels de géométrie dans le Japon de l'ère Meiji (1868-1912) : Des témoins des révolutions du livre et de l'enseignement des mathématiques », *Revue d'histoire des sciences*, 70, n°1, p. 109-145.

Cousin Marion, 2017-2, « Sur la création d'une nouvelle langue mathématique japonaise pour l'enseignement de la géométrie élémentaire durant l'ère Meiji (1868-1912) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 23, n°1, p. 5-70.

Davies Charles (1870). *Elements of geometry and trigonometry, with applications in mensuration*, New York-Chicago, A.S. Barnes.

Hanna Gila & De Villiers Michael (dir.), 2012, *Proof and proving in mathematics education : The 19th ICMI study*, Dordrecht, Springer.

Horiuchi Annick, 1994, *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo*, Paris, Vrin.

Kikuchi Dairoku, 1889, *Shotō kikagaku kyōkasho* [Manuel de géométrie élémentaire], Tokyo, Monbushō henshūkyoku.

KIKUCHI Dairoku, 1916, *Kikagaku shinkyōkasho* [New geometry textbook], Tokyo, Dainihon honzu kabushiki kaisha.

KUNIMUNE Susumu, FUJITA Taro & JONES Keith, 2009, « Why do we have to prove this ? Fostering students' understanding of proof in geometry in lower secondary school » *in* LIN Fou-Lai *et al.* (dir.) *Proceedings of the ICMI study 19 conference*, Vol. 1, p. 256-261.

KURODA Minoru, 1917, *Kikagaku kyōkasho* [Manuel de géométrie], Tokyo, Baifūkan.

MARIOTTI Maria Alessandra, 2006, « Proof and proving in mathematics education » *in* GUTIÉRREZ Angel & BOERO Paolo (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, p. 173-204.

MEXT, 2009, *Zenkoku gakuryoku gakusyū jōkyō chōsa chūgakkō hōkokusyo* [Rapport sur les résultats au test national de réussite : collèges], Tokyo, NIER.

MIYAKAWA Takeshi, 2017, « Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry : The cases of French and Japanese lower secondary schools », *Educational Studies in Mathematics*, 94, n°1, p. 37-54.

MIYAGAWA Honzen, 1876, *Kika shinron* [Nouvelles théories en géométrie], Tokyo, Ōmura chōei.

NAGASAWA Kamenosuke, 1896, *Chūtō kyōiku kikagaku kyōkasho* [Manuels de géométrie pour l'enseignement secondaire], Osaka, Miki shōten.

NAKAMURA Rokusaburō, 1873, *Shōgaku kikayōhō* [Règles d'utilisation de la géométrie dans les écoles élémentaires], Tokyo, Chūgai dōbotsuda.

NEOI Makoto, 1997, « Meiji ki chūtō gakkō no sūgaku kyōkasho ni tsuite » [Sur les manuels de mathématiques utilisés dans les écoles secondaires de l'ère Meiji], *Journal of History of Mathematics*, 152, p. 26-48.

OKAMOTO Kazuo et al, 2016, *Mirai he hirogaru sūgaku 2* [*Passerelle vers les futures mathématiques 2*]. Osaka, Keirinkan.

SEKIGUCHI Yasuhiro & MIYAZAKI Mikio, 2000, « Argumentation and mathematical proof in Japan », *The Proof Newsletter*, janvier/février 2000.

SHIBATA Kiyosuke, 1879, *Kikagaku* [Géométrie]. Tokyo, Chugaido.

SHODA Kenjiro *et* al, 1979, *Shintei sūgaku 2* [Mathématiques nouvellement révisées 2], Osaka, Keirinkan.

TANAKA Naonori, 1882). *Kika kyōkasho* [Manuel de géométrie]. Tokyo : Shirai renichi.

TANAKA Nobuaki & UEGAKI Wataru, 2015, « On the aspects of mathematics textbooks for secondary schools in the late Meiji era », *Bulletin of the Faculty of Education, Mie University*, 66, p. 309-324 (en japonais).

TREUTLEIN Peter, 1911, *Der geometrische Anschauungsunterricht*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner.

WHEWELL William, 1845, *Of liberal education*, London, J. W. Parker.

YAMAMOTO Koichi, 1943, *Sūgaku (chūgakkō yō) 2 dai ni rui* [Mathématiques pour le permier cycle des écoles secondaires, catégorie 2], Tokyo, Chūtō gakkō kyōkasho kabushiki kaisha.