18

Tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XXe siècle

Anne Boyé

Introduction

L'enseignement de la géométrie a connu de nombreux soubresauts au cours du XXe siècle, en France et ailleurs, posant des questions récurrentes : pourquoi enseigner la géométrie ? Quelle géométrie ? Comment l'enseigner ? Géométrie pour tous – et toutes ?

En ce début de XXIe siècle, ces questions restent pertinentes. Les débats d'hier éclairent-ils ceux d'aujourd'hui ?

Pour apporter quelques réponses, nous proposons une promenade à travers les programmes de l'enseignement secondaire [1], un certain nombre de manuels, les échanges relatés par exemple dans la revue *L'enseignement mathématique*, ou des extraits significatifs de la revue de l'APMEP.

Premier moment : la réforme de 1902-1905-1907

Le contexte international

Le passage du XIXe siècle au XXe siècle constitue un moment de crise pour l'enseignement des mathématiques dans le monde entier, dans un contexte d'internationalisation des sciences. L'année 1908 voit la création, à Rome, de la CIEM (Commission internationale de l'enseignement des mathématiques), à la demande du CIM (Congrès International des Mathématiciens), né lui en 1897, à Zurich. En

1. Le lecteur ou la lectrice souhaitant élargir le sujet aux autres domaines des mathématiques, aux sciences en général pourra consulter avec profit des ouvrages spécifiques sur les programmes et l'enseignement comme (Belhoste, 1995), (D'Enfert, 2003), (Gispert, Hulin, Belhoste, 1996), (Gispert, Hulin, Robic, 2007) ou (Hulin, 2007).

1899 Charles Ange Laisant et Henri Fehr ont fondé la revue *L'enseignement mathématique*, lieu de réflexion et d'échange à l'échelle internationale. Les fondateurs émettent aussitôt le projet d'une grande enquête sur l'enseignement des mathématiques, aux différents niveaux, tant sur le plan des contenus, des méthodes, que de l'organisation de cet enseignement.

Très rapidement se font jour trois lignes argumentatives pour justifier les évolutions des curricula de géométrie dans les enseignements de niveau secondaire [2] :

— tenir compte des domaines de la vie pratique, et développer en particulier l'intérêt pour les questions techniques et économiques ;
— développer les conceptions spatiales en présentant la géométrie de façon plus intuitive (ou expérimentale) et en centrant l'étude de la géométrie sur celle de transformation géométrique ;
— introduire la pratique des représentations graphiques.

Nous notons aussi de nombreux échanges sur les « méthodes actives », sur l'importance à accorder à la rigueur, . . ., selon les différents niveaux d'enseignement, et face à l'accroissement des élèves dans l'enseignement moyen.

Le contexte national

À cette même époque, en France, autour des années 1900, s'engage un débat national sur l'avenir de l'enseignement secondaire, sur sa mission, sur son fonctionnement, au point qu'une enquête est confiée à une commission parlementaire. Il en résulte une réforme d'ensemble, en 1902, qui donnera à l'enseignement secondaire un visage qu'il conservera jusqu'à la fin des années 1950.

L'idée centrale qui préside aux débats est celle de l'adaptation de l'enseignement secondaire au monde moderne. Carlo Bourlet le souligne particulièrement dans sa conférence à la CIEM de 1908 sur *La pénétration réciproque des mathématiques pures et appliquées dans l'enseignement secondaire* :

> « L'enseignement des mathématiques, dans nos lycées, collèges, gymnases de tous pays, passe actuellement par ce que d'aucuns nomment une crise et qui n'est en somme qu'une fièvre de croissance, un malaise né de la rapidité même de l'évolution du savoir humain. [. . .] L'industrie, fille de la science du XIX^e siècle règne en maîtresse dans le monde. Notre devoir impérieux est donc de préparer nos jeunes gens, à connaître, à pratiquer et à faire progresser les sciences expérimentales. » (Bourlet, 1910)

Et, de façon durable, les sciences se voient placées au même rang que les disciplines littéraires. Il s'agit donc de fonder des « humanités scientifiques » aussi formatrices que les humanités littéraires. Cet enseignement doit tenir compte du progrès des sciences, tout en restant accessible aux élèves quel que soit leur niveau. Ceci implique une réforme importante des méthodes et des programmes, en réaction contre des contenus considérés comme routiniers, dogmatiques et abstraits.

2. Pour une étude détaillée des contenus des articles de *L'Enseignement mathématique* sur la géométrie, on pourra consulter (Bkouche, 2003).

L'enseignement dit secondaire (de la sixième à la première, puis classe de philosophie ou de mathématiques) se donne dans les collèges [3] et les lycées et s'adresse au demeurant à une très petite minorité d'élèves : environ 5% d'une classe d'âge et uniquement des garçons. C'est un enseignement payant, qui est sanctionné par le baccalauréat. La majorité des enfants s'arrêtent à la fin de l'école primaire, à 12 ans. L'élite des classes populaires va dans les écoles primaires supérieures ou dans des cours complémentaires. Ils et elles peuvent alors obtenir, au bout de 4 ans, le brevet simple ou le brevet d'enseignement primaire supérieur. Il existe aussi un enseignement technique, de 11 à 15 ans, à la fois manuel et théorique. Depuis 1880 les filles ont leurs lycées publics, d'une durée de 5 ans, avec des programmes spécifiques, en particulier en mathématiques, qui ne leur permettent pas de passer le baccalauréat. Il faudra attendre 1924, pour que les filles aient accès au même enseignement que les garçons.

Depuis 1902, dans les collèges et lycées de garçons, se succèdent un premier cycle, de la sixième à la troisième, puis un second cycle, deux ans, sanctionné par le premier bac, suivi de la classe de philosophie ou de mathématiques, et le second bac. Dans chaque cycle existent plusieurs filières, plus littéraires, ou plus scientifiques. Les mathématiques y sont toujours présentes, avec des programmes plus ou moins développés et des méthodes en conséquences [4].

Les programmes, les contenus, les méthodes

La réforme de 1902 subira des ajustements en 1905 puis en 1907. Nous en retraçons les grands principes.

Voici ce que l'on peut lire, en ce qui concerne la géométrie dans les instructions relatives à l'enseignement des mathématiques (31 mai 1902), pour les premiers cycles A et B (plus littéraires) :

> « Les exercices pratiques devront être multipliés et porter sur des données réelles et non factices. La théorie sera réduite à des explications faites sur des exemples concrets, tout au moins au début ; ce n'est que peu à peu que l'on pourra avec de grandes précautions habituer les élèves aux notions abstraites les plus simples, en montrant sur des exemples la nécessité d'une définition précise, d'un raisonnement purement logique, en insistant à l'occasion sur les erreurs que l'on peut commettre si l'on raisonne sur des objets mal définis, sur des figures dont on n'a pas déterminé exactement les éléments et leur position. » (Cité dans Belhoste, 1995, p. 672)

Et un peu plus loin :

> « Le peu de temps dont dispose le professeur ne lui permettant pas de développer longuement son cours, il devra surtout s'attacher à donner en géométrie une idée de la forme des corps et pourra laisser de côté s'il le juge à propos, toute théorie un peu abstraite. [...] L'important est

3. Les collèges (municipaux jusqu'en 1960) et les lycées (d'État), comportent, jusqu'en 1975, des classes de la sixième à la terminale.

4. Sur les différents cycles, voir (Belhoste, 1990), (Belhoste, 1995) et (D'Enfert, 2003).

> qu'il forme des élèves pouvant comprendre les mathématiques ; qu'ils en sachent beaucoup n'est pas nécessaire, ce qui est indispensable c'est qu'ils aient compris les principes et qu'ils soient habitués au raisonnement logique. » (Cité dans Belhoste, 1995, p. 675)

A contrario pour le second cycle C et D (scientifique) :

> « Les programmes ont été conçus pour permettre aux élèves de posséder à fond les éléments de géométrie, d'algèbre et de trigonométrie. Les études faites dans le premier cycle ayant préparé les élèves à recevoir un enseignement logique, on ne perdra pas de vue que c'est en faisant de nombreux exercices que l'on habitue les élèves à manier avec sûreté les éléments dont ils disposent. » (Cité dans Belhoste, 1995, p. 675)

Et dans la classe de mathématique (terminale) :

> « Une heure au moins par semaine doit être consacrée exclusivement aux problèmes, aux épreuves pratiques de calcul, de géométrie descriptive, de mécanique et aux exercices sur le cours. » (cité dans Belhoste, 1995, p. 676).

Le programme de géométrie est de fait complètement transformé, par rapport à ce qui précédait. Il sera influencé, particulièrement dans la refonte de 1905, par les idées de Charles Méray, professeur à la faculté des sciences de Dijon, qui sont expérimentées et plébiscitées à l'étranger ainsi qu'en France, dans quelques établissements, Écoles normales, Écoles primaires supérieures, quelques écoles dites « nouvelles », telle l'École des Roches [5].

La « méthode de M. Méray pour l'enseignement de la géométrie » est exposée dans un article de *L'enseignement mathématique* par Élie Perrin, en 1903 :

> « 1° l'enseignement simultané de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace fait gagner un temps très sensible sur la durée totale de l'enseignement géométrique ;
> 2° la nouvelle méthode rétablit la concordance en bien des points, entre les diverses matières du programme de mathématiques et celles des enseignements théoriques et pratiques qui s'y rattachent ;
> 3° elle fait appel à l'intelligence des élèves plutôt qu'à leur mémoire ;
> 4° elle les habitue à penser par eux-mêmes et non plus seulement par leur professeur ou par un livre. » (Perrin, 1903)

Carlo Bourlet insistera sur la nécessité d'instituer un mode d'exposition plus concret et plus accessible, sans abandonner la rigueur. « Classons l'antique édifice d'Euclide, admirable d'harmonie et de perfection, au rang des monuments historiques, et bâtissons, suivant un plan nouveau, une œuvre homogène conforme aux nécessités du jour. » (Bourlet, 1910, p. 384) La notion de déplacement occupera une place centrale.

5. École privée fondée en 1899, qui est basée sur l'autonomie des élèves, et la pédagogie dite active.

> « La possibilité du déplacement étant la condition primordiale de l'existence même de la géométrie, n'est-il pas naturel de faire de ce déplacement le moyen de recherche et de démonstration dans notre nouvelle méthode ? [...] Et alliant sans cesse l'exercice graphique à la démonstration théorique, nous les [les déplacements] réaliserons sous les yeux des élèves avec les instruments du dessin. La théorie et l'application marcheront ainsi de front. » (Bourlet, 1910, p. 385)

Cette géométrie débouche de fait sur la théorie des groupes de transformations. Et, à l'instar d'Émile Borel, ou de quelques autres mathématiciens de haut rang, il met en pratique ses idées dans des manuels à l'usage du secondaire, et nous lisons dans l'avertissement de son *Cours abrégé de géométrie* de 1907 :

> « La réforme de méthode consiste dans l'abandon de la Géométrie classique d'Euclide pour lui substituer une Géométrie plus moderne où les déplacements jouent un rôle prépondérant. Cette nouvelle méthode consiste essentiellement à rattacher la notion de parallélisme à celle de translation. Elle présente le double avantage d'être beaucoup plus intuitive, et, par suite, plus facilement accessible aux jeunes cerveaux dans un ordre de complication graphique croissante. » (Bourlet, 1907)

Émile Borel, dans *L'enseignement mathématique*, en 1905 avait déjà précisé :

> « Il s'agit de la réforme de l'enseignement de la géométrie élémentaire. Je crois que presque tout le monde est d'accord pour reconnaître que les méthodes purement euclidiennes ne sont plus en rapport avec les progrès des mathématiques modernes. "La géométrie est l'étude du groupe des mouvements" cette vérité fondamentale doit de plus en plus pénétrer l'enseignement. » (Borel, 1905, p. 326)

Très étrangement nous retrouverons presque les mêmes mots dans la période dite des « maths modernes » que nous aborderons un peu plus loin, en dépit cependant de points de vue très différents. Les transformations ici sont liées de façon explicite au mouvement, qui marque une conception dynamique de la géométrie, contrairement au point de vue statique de la géométrie d'Euclide. La géométrie est considérée comme une science expérimentale. Et il s'agit bien de géométrie élémentaire. Soulignons que les exercices graphiques ont une très grande place et que le dessin géométrique occupe la majeure partie de l'enseignement en classe de 6e. En revanche, même si la géométrie « plane » est plongée dans l'espace, les ajustements de 1905 et 1907 dissocieront les deux enseignements.

Ce siècle verra la naissance des recherches en psychologie de l'enfant, qui influenceront largement les idées sur l'enseignement. En ce début du XXe siècle, deux personnages accompagnent ces réflexions : John Dewey (1859-1952) et Edouard Claparède (1873-1940). John Dewey, psychologue et philosophe américain, est inventeur du « Hands-on learning », apprentissage par l'action. Avec le neurologue et psychologie suisse Edouard Claparède, ils sont souvent considérés comme les inspirateurs de « l'éducation nouvelle » [6].

6. Pour en savoir plus sur ces deux auteurs et ce mouvement du début du siècle qui aura de larges prolongations, vous pouvez consulter (Dewey, 1900) ; (Dewey, 1916) ; (Claparède, 1905).

Quelques exemples marquants au fil des manuels

Dans les programmes officiels du 27 juillet 1905, on peut lire :

> « Un appel constant à la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie ; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation ; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion simple d'orientation. »

Prenons par exemple, le manuel de Carlo Bourlet, cité plus haut. Du chapitre II destiné aux élèves de cinquième B et de quatrième A [7], nous extrayons la partie translation parallèle qui est particulièrement évocatrice.

> « Définition – Le plus simple des déplacements est la translation rectiligne dont le glissement du T le long de la planche, ou le glissement d'une équerre le long d'une règle nous fournissent une idée très exacte. Précisons.
> Soit P un plan fixe et D une droite fixe tracée dans ce plan. Imaginons un second plan p et une droite d tracée dans ce plan p. Plaçons le plan p sur le plan fixe P de façon que la droite d coïncide avec la droite D. Nous pourrons alors faire glisser le plan mobile p sur le plan fixe P de façon que la droite d, appelée glissière mobile, glisse sur la droite D, appelée glissière fixe ; nous réalisons ainsi un mouvement de translation rectiligne. » (Bourlet, 1907, p. 65-67)

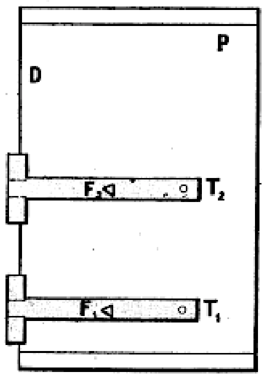


Figure 1 – Translation rectiligne le long de la planche

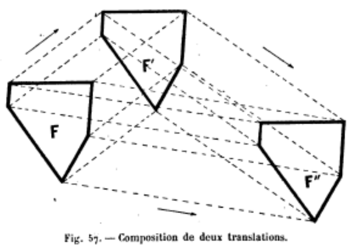


Figure 2 – Composition de deux translations

Nous trouvons à la fois le côté expérimental, la géométrie plane plongée dans l'espace, et bien sûr la notion de mouvement.

7. Le premier cycle des lycées est alors partagé entre les sections A avec latin et les sections B sans latin.

Un peu plus loin nous lirons :

> « 86 – Principe [8] – Dans toute translation rectiligne, un point du plan mobile (ou de la figure mobile) décrit une droite et cette droite est une glissière.
>
> Pour mettre ce principe en évidence expérimentalement, plaçons sur une planche une règle R que nous maintiendrons fixe ; puis à côté d'elle, une seconde règle R' identique. Traçons au crayon la droite D suivant le côte libre G' de la règle R'. Faisons glisser la règle R' le long de la règle R dans le sens de la flèche f. Nous constatons : 1° qu'un point quelconque M du bord G' de la règle R décrit la droite D ; 2° que la droite G' coïncide toujours avec D sur laquelle elle glisse. D est donc une glissière. » (Bourlet, 1907, p. 69-70)

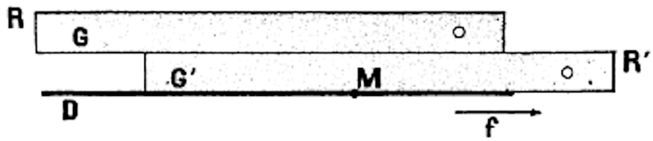


FIGURE 3 – Une droite est une glissière

> « 88 – Droites parallèles – définition – deux droites, situées dans un même plan sont dites parallèles lorsque l'une se déduit de l'autre par une translation. » (Bourlet, 1907, p. 70)

Nous sommes dans un monde étrange, d'autant plus que le vocabulaire est en gestation. Chaque manuel a le sien. Carlo Bourlet, par exemple, fait précéder son cours par une « note sur la terminologie » :

> « Quelques-uns des termes employés dans cet ouvrage [...] méritent quelques explications justificatives. Au lieu des mots demi-droite et demi-plan, j'emploie les mots semi-droite et semi-plan, pour éviter toute confusion dans l'esprit des élèves qui sont trop facilement portés à croire qu'une demi-droite est une moitié de droite. Une droite indéfinie n'a pas de moitié. » (Bourlet, 1907, p. VII – VIII)

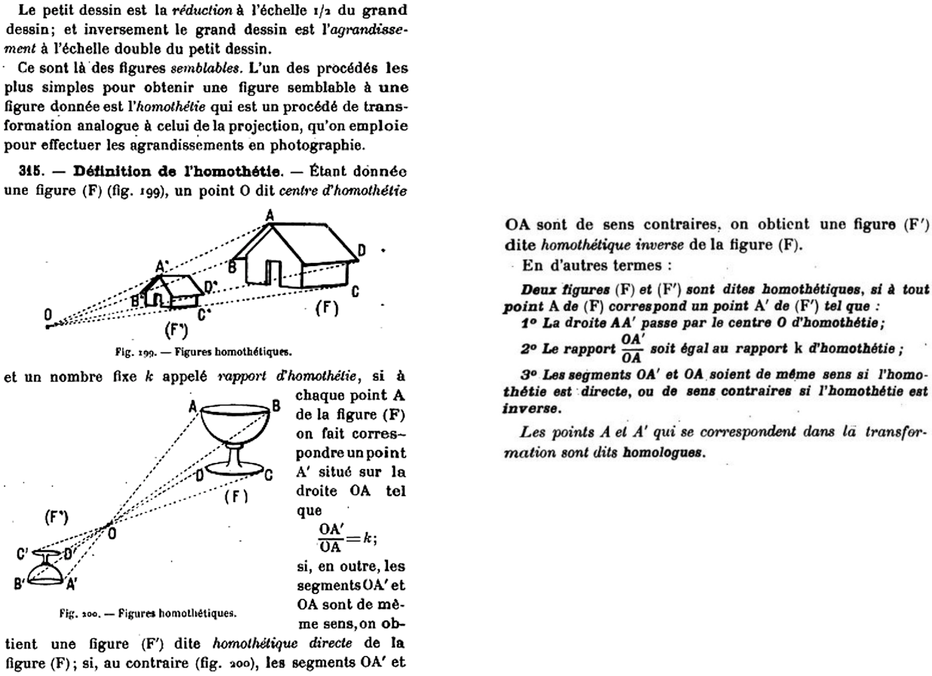
Il continuera sur l'opportunité de trouver des mots pour cercle ligne et cercle surface, etc. toute chose qui ne déparerait pas dans les rubriques « mots » de l'APMEP [9] quelques soixante-dix ans plus tard, lors de la réforme dite des maths modernes.

Dès les chapitre IV et suivants, destinés aux élèves de quatrième B et de troisième A, nous retrouvons du « classique ». La présentation des similitudes ou des

8. Carlo Bourlet a précisé qu'il nommerait principe un théorème dont la démonstration serait peu accessible aux élèves de ce niveau, mais dont ils doivent savoir que cela peut se démontrer.

9. La collection « mots » comporte 9 tomes, publiés par l'APMEP, de 1974 à 1992. Il s'agissait au départ de définir les mots mathématiques, dont beaucoup étaient nouveaux pour les enseignantes et enseignants. Ils sont accessibles sur *Publimath*.

homothéties, pourrait presque se trouver dans nos livres actuels, sans grands changements.



Le petit dessin est la *réduction* à l'échelle 1/2 du grand dessin ; et inversement le grand dessin est l'*agrandissement* à l'échelle double du petit dessin.

Ce sont là des figures *semblables*. L'un des procédés les plus simples pour obtenir une figure semblable à une figure donnée est l'*homothétie* qui est un procédé de transformation analogue à celui de la projection, qu'on emploie pour effectuer les agrandissements en photographie.

315. — Définition de l'homothétie. — Étant donnée une figure (F) (fig. 199), un point O dit *centre d'homothétie*

Fig. 199. — Figures homothétiques.

et un nombre fixe *k* appelé *rapport d'homothétie*, si à chaque point A de la figure (F) on fait correspondre un point A' situé sur la droite OA tel que

$$\frac{OA'}{OA} = k;$$

si, en outre, les segments OA' et OA sont de même sens, on obtient une figure (F') dite *homothétique directe* de la figure (F) ; si, au contraire (fig. 200), les segments OA' et OA sont de sens contraires, on obtient une figure (F') dite *homothétique inverse* de la figure (F).

Fig. 200. — Figures homothétiques.

En d'autres termes :

Deux figures* (F) *et* (F') *sont dites homothétiques, si à tout point* A *de* (F) *correspond un point* A' *de* (F') *tel que :

1° La droite AA' passe par le centre O d'homothétie ;

2° Le rapport $\frac{OA'}{OA}$ soit égal au rapport* k *d'homothétie ;

3° Les segments OA' et OA soient de même sens si l'homothétie est directe, ou de sens contraires si l'homothétie est inverse.

Les points A et A' qui se correspondent dans la transformation sont dits **homologues.**

Figure 4 – Homothéties

La notion de similitude est une idée fondamentale de la géométrie, à tel point que le rapporteur de l'ouvrage d'Émile Borel dans *L'enseignement mathématique* a été marqué par une remarque [10] qui suggère de la prendre comme postulat :

> « La troisième partie commence par la théorie de la similitude, présentée comme nous l'avons déjà vu dans l'introduction, en temps qu'idée intuitive toute naturelle. Deux figures semblables sont la même forme, non les mêmes dimensions et M. Borel remarque très justement qu'admettre l'existence de telles figures revient à admettre le postulatum d'Euclide. N'y aurait-il pas par suite avantage, au moins au point de vue de la simplicité, à postuler l'idée de similitude ? » (Buhl, 1906)

Pour terminer ce tour d'horizon de cette première période, nous nous devons de dire un mot de l'enseignement des jeunes filles, en laissant la plume à Melle Amieux [11], auteure de *L'enseignement des jeunes filles*, citée et commentée dans *L'enseignement mathématique*, en 1912 :

10. Cette remarque apparait en note de bas de page de (Borel, 1905b page 232.)

11. Anne Amieux (1871-1961), fut directrice de l'ENSJF de Sèvres de 1919 à 1936. Elle s'est beaucoup préoccupée des méthodes d'enseignement, en particulier de celui des jeunes filles. *L'enseignement des jeunes filles est un rapport* élaboré pour la sous-commission française de la commission internationale de l'enseignement mathématique, au congrès de 1911.

> « Mlle Amieux expose ensuite l'organisation générale des 2 cycles [...] Le programme de chaque année d'étude est accompagné de considérations sur le but de l'enseignement et la manière dont le programme est interprété.
>
> En géométrie, pendant les deux premières années l'enseignement doit "initier les élèves aux constructions et à la connaissance des formes géométriques et leur permettre de mieux appliquer le système métrique". La troisième année a pour but "d'initier les élèves à la culture logique de l'intelligence, exercer leur faculté de raisonnement, les habituer à la rigueur de la pensée, à la précision et à la clarté de l'expression". La question de la valeur respective des trois méthodes d'Euclide, de Méray et de la méthode mixte est encore très controversée, aussi toute liberté est laissée au corps enseignant. » (Masson, 1912, p. 65)

Jusqu'à l'unification des deux enseignements secondaires féminin et masculin, en 1924, les lycées de jeunes filles sont souvent, parce que soumis à moins d'exigences, des terrains d'expérimentation, pas seulement en géométrie. Nous pourrions faire la même remarque sur les établissements d'enseignement professionnels, plus axés sur les exercices pratiques, ou les écoles primaires supérieures.

Nous devrions bien sûr évoquer aussi les programmes des classes du second cycle, celui de la classe terminale de mathématiques en particulier, où tout ce qui a été appris en premier cycle est réétudié de façon cette fois théorique, et assez classique, et où nous trouvons aussi une introduction poussée à ce que l'on nomme couramment la géométrie supérieure : puissance d'un point par rapport à un cercle ou une sphère, axes et plans radicaux, inversion, projections centrales, perspective, ... Et bien sûr les coniques, sans oublier la géométrie descriptive.

Nous devrions aussi évoquer les classes littéraires, y compris la classe de philosophie, dont le programme de mathématiques n'a rien de négligeable.

Cette réforme des programmes, particulièrement ceux du premier cycle, ne va pas tarder à avoir ses détracteurs. En 1923, Pierre Chenevier exprime par exemple dans l'introduction de son *Cours de géométrie* ses réticences sur l'utilisation des transformations :

> « [...] j'ai dû choisir entre l'édifice euclidien et celui de Méray. De ce que la géométrie est le groupe des déplacements d'aucuns ont conclu qu'il fallait introduire ces notions dès le début. C'est en effet parfait, harmonieux et simple ; mais cela ne rend pas en matière d'enseignement élémentaire. Cette méthode est parfaite pour coordonner des connaissances acquises, pour classer des choses déjà apprises lors d'un de ces arrêts que l'on utilise pour faire un retour en arrière et dresser un bilan de ses connaissances en épurant son acquis, mais l'expérience a montré que, pour des enfants qui débutent, elle dépasse leurs moyens. [...] Quant à la translation, je n'ai pas voulu en faire un point de départ, parce que c'est le déplacement le plus mystérieux pour l'enfant. [...] Si l'enseignement doit reposer sur un mystère, s'il faut avoir la foi pour continuer, supprimons la géométrie de nos programmes. Je suis donc redevenu euclidien pour les parallèles. » (Chenevier, 1923)

Nous pourrions presque arrêter là nos tours et détours de l'enseignement de la géométrie au XX^{e} siècle. Cette période de 1900 à 1925 résume presque les réformes successives qui secoueront les années suivantes, particulièrement pour la géométrie.

Deuxième moment : 1925-1960

L'égalité scientifique

Hormis la remise en question des programmes de 1905, des événements extérieurs, et non des moindres, vont, au moins provisoirement, bouleverser l'organisation de l'enseignement secondaire. La Grande Guerre a laissé des traces, économiquement, et politiquement. Un souci de défendre la Culture Française, exacerbé par un certain nationalisme, fait naitre la nécessité de « relever les humanités agonisantes ». En 1919, avec le succès électoral du « Bloc national », le ministre de l'instruction publique Léon Bérard, propose d'abandonner la réforme de 1902 et de rétablir l'obligation de la culture classique. La nécessité cependant de fournir à toutes [12] et tous un bagage scientifique va donner jour, en 1925, à la réforme de « l'égalité scientifique ». Jusqu'en classe de première inclusivement, toutes les sections reçoivent les mêmes horaires et les mêmes programmes scientifiques.

> « Mais, du moment que les programmes scientifiques sont les mêmes pour tous, il faut bien qu'ils soient réduits à ce qu'ils comportent d'essentiel pour la formation de l'esprit, et dégagés de toutes les connaissances qui ne sont que des connaissances, qui n'ont qu'une importance technique ou n'intéressent que des spécialistes. [...]. Aussi la méthode de "redécouverte" est-elle de plus en plus en faveur dans les classes où les horaires et les programmes permettent son application : les tâtonnements, les recherches souvent infructueuses des élèves sur une question déterminée donnent une image, évidemment sommaire, mais cependant réelle, des difficultés de la recherche scientifique ; les communications entre maîtres et élèves, plus directes et plus étroites que dans l'enseignement dogmatique, fournissent au professeur des occasions fréquentes de faire comprendre que la science, loin d'être une œuvre morte, est au contraire un corps vivant, aux aspects et aux transformations multiples. La construction logique, que réalise la mise au point des résultats acquis un peu au hasard des découvertes est rendue ici nécessaire non seulement pour la satisfaction de l'esprit, mais aussi pour étayer de nouvelles recherches, pour permettre un progrès nouveau. » (Iliovici, Desforge, 1933, p. 234-235)

Cette longue citation résume la situation et permet de comprendre les vives réactions qui surgiront en particulier du côté des enseignants et enseignantes de mathématiques. La classe terminale de mathématiques sera aussi en conséquence soumise à un programme extrêmement chargé, puisqu'il faudra rattraper tout ce qui n'aura pas été vu précédemment. L'enseignement technique, et l'enseignement

12. Rappelons qu'à partir de 1924, les lycées de jeunes filles ont les mêmes programmes que les lycées de garçons.

dans les écoles primaires supérieures ont subi, eux, très peu de changement, et les méthodes de l'enseignement secondaire se rapprochent de celles pratiquées dans ces autres établissements.

Le dogme de l'égalité scientifique sera abandonné en 1941. Et dès la fin de la guerre, la réforme de 1945 établit le nouveau visage de l'enseignement secondaire et de nouveaux programmes.

L'après-guerre

Une des nouveautés de 1945 sera la création de la classe de sciences expérimentales. En géométrie, dans cette classe, les vecteurs trouvent une place importante, ainsi que la trigonométrie et la cosmographie.

Pour le reste, le premier cycle est divisé entre enseignement moderne court [13], qui permet d'arrêter à la classe de troisième et enseignement classique. Le programme de géométrie est assez classique, basé sur les « cas d'égalité des triangles », et les « cas de similitudes ». On y trouve en particulier une initiation aux vecteurs, de la géométrie analytique, et une introduction aux divisions harmoniques.

Dans les classes scientifiques du second cycle, le programme de géométrie est très conséquent même si l'on peut lire, dans les instructions ministérielles :

> « Les professeurs ne sortiront pas des limites fixées par les programmes ; ce qui ne peut être enseigné en Mathématiques le sera en Mathématiques supérieures : il en est ainsi de la transformation par polaires réciproques, du produit de deux rotations dans l'espace, du déplacement hélicoïdal, de l'étude des figures égales ou symétriques de l'espace. »

Mais :

> « Le programme de géométrie de la classe de Mathématiques est un programme de complément, réduit à des lignes essentielles : l'enseignement comporte l'exposé magistral des théories nouvelles, de leurs principales applications, la révision et la mise au point des connaissances acquises dans les classes antérieures par l'exécution d'exercices nombreux et gradués. Il demeure comme par le passé l'enseignement fondamental de la classe de Mathématiques, celui qui requiert plus de soins et le plus de temps ».

Ajoutons qu'il y a toujours un enseignement conséquent de géométrie descriptive.

Troisième moment : la réforme des « maths modernes » 1960-1980

Les mathématiques partout, les mathématiques pour tous

Comme au début du siècle, le contexte international va intervenir de façon prégnante. En particulier, le colloque de Royaumont, en Belgique, en 1959, qui réunit

13. Les écoles primaires supérieures ont été supprimées, subsistent les Cours complémentaires.

de grands mathématiciens dont Jean Dieudonné, Howard Fehr ou Gustave Choquet, veut promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (12-19 ans). Il faut rendre plus efficace l'enseignement des sciences.

Un peu plus tard, en 1967, André Lichnérowicz écrira :

> « La mathématique joue là un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. Notre mathématique sécrète, par nature, l'économie de pensée et, par-là, permet seule de classer, de dominer, de synthétiser parfois en quelques brèves formules un savoir qui sans elle, finirait par ressembler à quelque fâcheux dictionnaire encyclopédique infiniment lourd. [...] Elle est devenue désormais, au même titre, discipline auxiliaire, aussi bien d'une grande partie des sciences biologiques et médicales que de l'économie et des sciences humaines. » (Lichnérowicz, 1967, p. 249)

En France, mais aussi sur le plan international, on retiendra bien sûr l'influence du Bourbakisme en mathématiques, celle du structuralisme de Claude Levi-Strauss en sciences humaines et celle de la psychologie génétique de Jean Piaget [14].

Dans un nouveau contexte institutionnel la scolarité obligatoire est allongée jusqu'à 16 ans et l'enseignement primaire se prolonge pour tous les élèves dans un « enseignement moyen », collège d'enseignement général (CEG), collège d'enseignement technique (CET), premiers cycles des collèges et lycées.

La commission ministérielle présidée par André Lichnerowicz, pour réformer profondément et vite l'enseignement des mathématiques, est mise en place en 1966. On y trouve André Revuz, Henri Cartan ou Laurent Schwartz. Comme au début du siècle, de « grands mathématiciens » [15] se préoccupent de la réforme de l'enseignement.

Les années 1960

Dès les années 1960 sont introduits des éléments de logique, une initiation à la théorie des ensembles, au moins dans les classes scientifiques A', C, M, M', a fortiori dans la classe de math élem., où l'on abordera la notion de groupe, et de structures...

14. Jean Piaget (1896-1980) a été formé par Edouard Claparède. On pourra en savoir plus avec (Piaget, 2004) et pour approcher l'œuvre de Claude Levi-Strauss (1908-2009), on peut consulter (Clément, 2010).

15. Des mathématiciennes de premier plan comme Lucienne Félix ou Jacqueline Ferrand joueront aussi un certain rôle. Mais comme souvent, elles restent dans l'ombre.

Voici par exemple un extrait d'un manuel de la classe terminale de mathématiques :

Théorème.** Le produit de **plusieurs transformations** est **associatif.

6. Groupes de transformations.

Un **ensemble de transformations** muni de l'opération produit **est un groupe** si :

1° **Le produit de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble** (opération interne).

2° **La transformation identique appartient à l'ensemble** (élément neutre).

3° **Toute transformation de l'ensemble admet une transformation réciproque qui appartient à l'ensemble** (existence de l'élément symétrique).

N. B. — Il est entendu que le produit de plusieurs transformations est associatif (n° 5).

En résumé : ***Toute transformation ponctuelle qui fait correspondre à une figure (F) une figure égale (F′) est un déplacement.*** En géométrie plane, (F) et (F′) doivent être *directement* égales.

4. Groupe des déplacements.

L'ensemble des déplacements est un groupe.

En effet :

1° **Le produit de deux déplacements est un déplacement** car si (F_1) est la transformée de (F) dans un déplacement (d_1) et (F_2) la transformée de (F_1) dans un déplacement (d_2), (F) et (F_2) égales à (F_1) sont elles-mêmes égales et se correspondent dans un déplacement.

2° **La transformation identique** qui laisse invariante point par point toute figure (F) est un déplacement.

3° **Tout déplacement admet un déplacement réciproque** dans lequel le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sera l'homologue du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en géométrie plane, et le triangle ABC l'homologue du triangle A′B′C′ en géométrie dans l'espace.

11. Groupe des translations.

Considérons l'ensemble des translations. Une translation quelconque sera notée t_i et son vecteur-directeur $\overrightarrow{V_i}$.

Cet ensemble est muni d'une opération : le produit de translations.

Propriétés du produit.

1° C'est une opération interne, car le produit $t_1 \times t_2$ est une translation de vecteur-directeur $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$.

2° La transformation identique I (translation de vecteur nul) est l'élément neutre pour cette opération, car :

$$I \times t_i = t_i \times I = t_i.$$

3° A toute translation t de vecteur directeur $\vec{V}$, correspond une translation réciproque (ou inverse) : la translation t^{-1} de vecteur-directeur $-\vec{V}$:

$$t \times t^{-1} = t^{-1} \times t = I.$$

L'ensemble des translations muni de l'opération produit a la structure de groupe.

C'est un **groupe commutatif** car le produit de deux translations est commutatif.

Figure 5 – Extrait de manuel (Géométrie, 1964, p. 229, 234, 237)

La géométrie occupe toujours la majeure partie des programmes, très conséquents, et comprend toujours un enseignement de géométrie descriptive. La notion de vecteurs occupe une place centrale, avec une lourde partie de « géométrie orientée », une part importante sur les transformations ponctuelles, du plan et de l'espace, une étude approfondie des coniques, tout en conservant ce que nous avons déjà signalé comme « géométrie supérieure ».

Le grand chambardement annoncé ne va cependant pas tarder

De nouveaux programmes paraissent, de juillet 1968 à juin 1971.

En voici les grandes lignes :

— Au collège : disparition des cas d'égalité des triangles et de l'initiation à la démonstration en 6e et 5e ; introduction d'un langage ensembliste et rationnel en 6e-5e ; construction des corps.

En 4^e la géométrie affine est tournée vers l'algèbre linéaire.

— Au lycée : lien entre le vocabulaire ensembliste et la logique.
La géométrie affine et euclidienne est fondée sur l'algèbre linéaire.
En analyse, continuité, limites, dérivation de fonctions numériques d'une variable réelle.
Calcul intégral en terminale.
Probabilités sur un ensemble fini.

Ce programme reste mesuré dans ses contenus écrits, mais « c'est compter sans l'air du temps et le zèle des néophytes qui vont, dans maints manuels, accentuer les nouveautés du programme, théoriser là où il n'est prévu que des exemples, se gargariser de cas concrets aux complications parasites » (Bareil, 1992). Notons aussi au passage que la géométrie a perdu la place qu'elle avait jusqu'ici occupée, et qu'elle est noyée dans l'algèbre linéaire.

Avec l'application des programmes de quatrième et troisième les désillusions vont commencer. On distingue le « plan physique » et le « plan mathématique ». Les objets de la géométrie sont définis au sein d'une rigoureuse théorie axiomatique tournée vers l'algèbre linéaire. La classe de quatrième ne connaît que la géométrie affine : pas de métrique du plan, donc pas de distance, pas de cercle, pas d'orthogonalité, ... très peu d'exercices et d'activités possibles pour les élèves. Et dans la pratique on ignore la recommandation du programme sur le caractère absolument indispensable de nombreuses manipulations.

Au lycée la géométrie affine et euclidienne est fondée sur l'algèbre linéaire. Le calcul matriciel et le calcul vectoriel occupent une grande place. Les difficultés y sont probablement moins grandes, pour les classes scientifiques, mais tout le monde ne va pas en C, loin de là.

Feuilletons quelques manuels :

Nous y trouvons bien sûr la désormais devenue célèbre définition [16], d'une droite, en classe de quatrième :

> « ***Définition d'une droite réelle***
> Un ensemble D d'éléments appelés points est une droite réelle, s'il existe une famille de bijections de D sur l'ensemble des nombres réels, appelés graduations de D, vérifiant l'axiome suivant : pour deux graduations quelconques g et g' de la même droite réelle D, il existe deux nombres réels a et b, tels que pour tout point M de D on a $g(M) = a.g'(M) + b$. Le nombre réel $g(M)$ est appelé abscisse dans la graduation g du point M. » (Biancamara, 1972, p. 243)

Il s'agit de définir la « droite réelle », qui est différente de la droite physique.

16. Cette définition symbolisera les excès de cette période dans les medias et pour tous les détracteurs des « maths modernes ».

Ceci est explicite dans cet extrait de l'édition de 1973 :

Le plan contient donc au moins quatre points A, B, C et D.

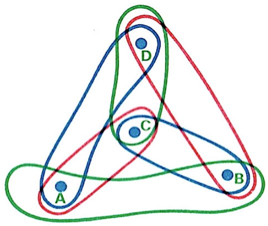
Ces quatre points déterminent les six droites (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD); ces droites sont distinctes deux à deux, si non, l'un des points C ou D appartiendrait à (AB).

Les trois droites (AB), (AC) et (AD) sont de directions différentes, sinon deux d'entre elles seraient confondues.

Rien toutefois ne nous permet d'affirmer que les trois autres ont des directions distinctes de ces trois directions.

Il existe donc dans le plan au moins trois directions différentes.

fig. 15



Considérons même (fig. 15) l'ensemble Π' dont les seuls éléments sont ces quatre points. $\Pi' = \{A, B, C, D\}$; on sait qu'il n'y a pas trois points alignés dans Π'.

Appelons droites les six parties : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$.

Cet ensemble Π' vérifie-t-il les trois axiomes d'incidence ?
Pour chacune de ces droites combien y a-t-il de droites disjointes de cette droite ?

Ce modèle peut donc être considéré comme un plan, puisqu'il vérifie les axiomes d'incidence définissant un plan; cependant il ne répond pas à notre intuition, car l'expérience montre que notre plan physique a plus de quatre points distincts.

Ceci nous fait comprendre que de nouveaux axiomes devront être ajoutés à nos axiomes d'incidence pour que notre plan mathématique soit un meilleur modèle du plan physique.

FIGURE 6 – Un « modèle » du plan (Biancamara 1973, p. 163)

Les auteurs avaient auparavant précisé : « Le jeu mathématique consistera à se placer dans la situation d'une personne intelligente, mais qui n'aurait aucune expérience physique, à qui on demanderait de tirer les conséquences de ces lois que nous appellerons “axiomes”. » (Biancamara 1973, p. 158)

Un autre exemple en seconde dans la non moins célèbre collection Aleph :

6.1.3 Plan pointé.

On appelle *plan pointé* tout couple (P, O), où P est un plan et O un point appartenant à P appelé *origine* du plan pointé (P, O).

$\vec{P}$ étant le plan vectoriel associé au plan P, désignons par **f** l'application de P dans $\vec{P}$ définie par :

$$\forall M \in P \qquad \mathbf{f}(M) = \overrightarrow{OM}.$$

On sait que, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{P}$, il existe un point M de P, et un seul, tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, donc tel que $\mathbf{f}(M) = \vec{u}$.

Il en résulte que l'application **f** est *bijective*.

Par suite :

P et $\vec{P}$ étant un plan et un plan vectoriel associés, et O un point du plan P, l'application :

$$M \longmapsto \overrightarrow{OM}$$

est une bijection de P sur $\vec{P}$.

Pour un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{P}$, l'unique point M de P tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ est appelé *image* de $\vec{u}$ dans le plan pointé (P, O).

Un point M du plan $\vec{P}$ est évidemment l'image du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le plan pointé (P, O).

Le point O est l'image du vecteur nul (car $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$).

FIGURE 7 – Extrait de manuel (Gautier, Girard, Lentin, 1969, p. 147)

Puis en terminale :

C. — *ENDOMORPHISMES. MATRICES CARRÉES*

254 ***Anneau des endomorphismes de E***

Définition.

On appelle endomorphisme de l'espace vectoriel E toute application linéaire de E dans lui-même.

L'ensemble des endomorphismes de E est donc l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$, d'après la notation déjà adoptée. On le désigne, plus simplement, par $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{L}(E)$ n'étant qu'un cas particulier d'un ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, il possède une structure d'espace vectoriel lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication par un réel que nous avons définies et étudiées.

De plus, la composition des applications est une loi interne pour $\mathcal{L}(E)$, puisque l'application composée de deux endormorphismes de E est encore un endomorphisme de E.

Des propriétés de cette loi de composition (associativité et double distributivité par rapport à l'addition), il découle la propriété suivante.

FIGURE 8 – Extrait de manuel (Pair, Baille, Boursin, 1971, p. 630)

Remise en cause globale

Dès les premières mises en œuvre de la réforme dans les classes du secondaire, les « pères » de cette réforme commencent à protester. À l'instar d'Henri Bareil, ils s'effraient eux-mêmes des dérives de nombreux manuels. Gustave Choquet écrit en 1973 dans l'École libératrice :

> « On a dit aux enseignants qu'ils étaient des minables s'ils étudiaient les triangles, que l'algèbre linéaire remplaçait l'ancienne géométrie [...] le résultat est tel que sans une saine réaction de la base, la génération actuelle ne sera préparée ni à la recherche mathématique, ni à l'utilisation des mathématiques dans la technique ou les sciences expérimentales... » (cité dans (Charlot, 1984))

Et Dieudonné en 1974 s'affole d'une « nouvelle scolastique, forme encore plus agressive et stupide, placée sous la bannière du modernisme ».

Les enseignantes et les enseignants ressentent rapidement la distorsion entre la réalité et les espoirs antérieurs à 1970. À la différence de la réforme du début du siècle, celle-ci s'adressait à tous les élèves et toutes les élèves d'une classe d'âge. Les enseignantes et enseignants attentifs aux modes d'appropriation d'un savoir minimum sont perturbés par les difficultés persistantes, les physiciens, les medias, les parents s'affolent. Les mathématiques sont devenues l'instrument de la sélection.

D'un autre côté, cette mise en place s'est aussi probablement heurtée au nombre insuffisant de professeurs formés, en dépit de l'immense effort fourni par les IREM qui voient le jour à partir de 1969.

André Lichnérowicz démissionne et la commission se dissout en 1975. L'on va s'acheminer, lentement, vers de nouveaux programmes.

Quatrième moment : la contre-réforme des mathématiques, 1981-1982, remaniée en 1985

Cette époque sera aussi celle du collège unique (suite à la loi Haby de 1975) puis de la seconde indifférenciée (1981).

Les grandes idées

> « Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous ; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures et par conséquent de ne pas l'alourdir d'une algébrisation prématurée. Il va de soi que le professeur doit avoir une vue approfondie de la matière qu'il enseigne, et qu'il doit s'exprimer clairement : mais son idéal ne saurait être de tenir aux élèves un discours si parfait soit-il ; sa tâche essentielle est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle. » (Instructions pour le programme de seconde, 1981)

Il s'agit de mettre en œuvre un enseignement voulu comme activité mathématique qui, dans le cadre d'une planification minimale, s'efforce de susciter les initiatives et de les laisser se développer et veut placer l'élève en situation de chercheur. Il faut s'intéresser prioritairement au développement des diverses capacités des élèves (manipuler, expérimenter, observer, conjecturer, faire surgir des questions, douter et s'auto-contrôler, fabriquer et utiliser une documentation, rédiger et s'exprimer, démontrer, chercher, imaginer, inventer…). C'est l'époque de la mise en place de la « pédagogie différenciée ».

Jérôme Bruner [17], fondateur de la psychologie cognitiviste en est un des inspirateurs.

Jusqu'à la fin du siècle, les réformes vont se succéder. Voici un exemple de ce que l'on y trouve en 1981 dans un manuel de seconde « indifférenciée ».

2. Propriétés

2.1. Image d'un bipoint par une rotation

Considérons une rotation $r_{(\Omega,\alpha)}$ et un bipoint (A, B).

$$r_{(\Omega,\alpha)} : \begin{array}{l} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{array}.$$

Montrons que $AB = A'B'$ et $m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$.

Pour cela, considérons les triangles (Ω, A, B) et (Ω, A', B').

On a $\begin{cases} \Omega A = \Omega A', \\ \Omega B = \Omega B'. \end{cases}$

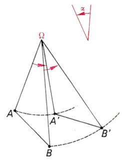


Fig. 4

D'autre part, $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$ (*fig.* 4).
En effet, en utilisant la relation de Chasles pour les déterminations des angles, on obtient $m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega A}}) + m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) + m(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}})[2\pi]$. Or $m(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et $m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega A}}) \equiv -\alpha\ [2\pi]$, donc

$$m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) \equiv m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})\ [2\pi].$$

Les angles $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}})$ sont égaux.
Par suite, les triangles (Ω, A, B) et (Ω, A', B') sont superposables par glissement ; ils sont donc isométriques et les éléments homologues sont égaux.

Donc $AB = A'B'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{A'B'}})$.

17. Jérôme Bruner (1915-2016). Pour en savoir plus on peut consulter l'article (Barth, 1985).

Évaluons l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$. Pour cela, utilisons encore la relation de Chasles pour les déterminations des angles :

$m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega A}}) + m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) + m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{A'B'}})\ [2\pi]$. d'où

$$m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv m(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}})\ [2\pi];$$
$$m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \alpha\ [2\pi].$$

Théorème :
Si (A', B') est l'image du bipoint (A, B) par la rotation $r_{(\Omega,\alpha)}$, alors :

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}.$$

Il résulte de ce théorème que la distance de deux points A et B est égale à la distance de leurs images par une rotation.
On dit que **la rotation plane « conserve les distances ».**
C'est une isométrie.

Remarque :
Si $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$, les points M et M' sont symétriques par rapport au point Ω milieu de (A, A').
$r_{(\Omega,\pi)}$ est aussi la symétrie de centre Ω (*fig.* 5).

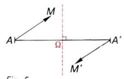


Fig. 5

FIGURE 9 – Extrait de manuel (Proteau, Spérando, et al., 1981, p.142)

Le formalisme des années précédentes et la précision du vocabulaire, à un niveau relativement élémentaire, a laissé des traces. Mais il y a des dessins à l'appui, qui permettent de voir les objets mathématiques. Une rotation « ça fait tourner ». Ce n'était pas évident dans les programmes qui venaient d'être abandonnés.

Un peu plus tard, les rotations dans un manuel de 1990 :

6.2.2 Rotations.

Définition : Soit O un point du plan et α un nombre réel.
On appellera *rotation* de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M′ défini par :
1. OM = OM′.
2. Si M≠O alors $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.

Exercice résolu : Construire l'image d'un point M distinct de O dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (fig. 11).

Solution :

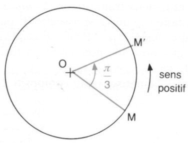


FIG. 11

On a OM = OM′, M′ appartient donc au cercle de centre O et de rayon OM. Le triangle OMM′, isocèle ayant un angle de $\frac{\pi}{3}$, est équilatéral. Le point M′ s'obtiendra donc en construisant une corde égale au rayon sur le cercle de centre O et de rayon OM et en respectant le sens de rotation.

Cas particuliers :

- Si $\alpha = 0$, la rotation est d'angle nul, c'est l'application identique du plan ($Id_{\mathscr{P}}$).
- Si $\alpha = \pi$ alors la rotation est appelée *demi-tour* ou *symétrie de centre* O. Si une configuration est invariante par un demi-tour de centre O, on dit que O est un *centre de symétrie* de cette configuration.

Exemple : Le cercle admet un centre de symétrie : son centre.

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ alors les rotations correspondantes sont appelées *quart de tour direct* ou *quart de tour indirect*.

Propriétés :
1) Une rotation de centre O et d'angle α est une transformation du plan ; sa transformation réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.
2) On peut toujours choisir α sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination principale de l'angle § 4.3.1).

FIGURE 10 – Extrait de manuel (Corrieu, Lion, et al., 1990, p. 184)

Cette fois la page est tournée. Peut-être le sera-t-elle trop aux yeux de certains. Le temps des réformes aura un bel avenir.

En 1999, est réunie une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane). Dans le rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, Jean-Pierre Kahane donne son jugement sur les années de cette fin du XX^{e} siècle.

> « • *Le collège* :
> Les programmes sont accompagnés de commentaires généraux [...] auxquels nous souscrivons volontiers : ... *identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler des résultats* [...]
> Il nous semble cependant que par rapport à ces excellents principes, l'accent n'est pas assez mis sur les activités qui peuvent mener à des situations de recherche authentiques : constructions, recherche de lieux.
> En conclusion, même si on peut avoir quelques réserves [...], on ne peut pas dire que l'on ne fasse plus de géométrie au collège, même si on en fait nettement moins qu'il y a quarante ans.
>
> • *Le lycée* :
> Les programmes nous ont paru assez pauvres. :
> — il y manque les points essentiels qui feront défaut, notamment en physique, dès le début de l'enseignement supérieur : transformations de l'espace, coniques ;
> — il n'y a plus nulle part de « géométrie riche » ;
> — si on parcourt les livres, on trouve beaucoup d'exercices très standardisés (en particulier ce qui tourne autour des barycentres et des lignes de niveau) ;
> — la géométrie est trop peu connectée aux autres domaines des mathématiques et des autres sciences.
>
> En dépit de ces critiques, il est clair qu'il est possible de faire de la géométrie une véritable activité mathématique avec ces programmes, à la fois dans la géométrie dans l'espace et en géométrie plane. De plus l'introduction de la géométrie analytique, des vecteurs, des produits scalaire et vectoriel est un premier pas important vers un apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire. » (Commission Kahane, 1999, p. 17)

Conclusion

Il s'agissait d'un parcours sur un siècle, trop bref et superficiel bien sûr. Cela mériterait un livre entier, voire plus. Et cela le mériterait à coup sûr, car l'histoire de l'enseignement des mathématiques, comme celle des mathématiques, éclaire le présent et devrait permettre de mieux construire l'avenir. Les débats d'hier sont finalement très proches de ceux d'aujourd'hui, en dépit des contextes différents, tant du côté des élèves, de la situation sociale et économique, que du contexte international : la question des méthodes, la question de « l'égalité scientifique », les relations avec les autres disciplines, les définitions de mots et de concepts, la formation des enseignants, et même l'utilisation de matériels divers, que nous avons peu abordée, ... Nous notons cependant un changement notoire. La réflexion sur l'enseignement, sur les contenus, sur les méthodes a été alimentée pendant une grande partie du siècle passé, par les mathématiciens de grand renom. Plusieurs d'entre eux étaient même les auteurs de manuels, comme Borel en 1905, Cartan en 1925. Ce n'est plus autant le cas, même si certains comme Cédric Villani participent à la réflexion actuelle. Doit-on le regretter ?

Nous espérons avoir ouvert la voie à quelques réflexions, et surtout donné envie de se plonger dans cette histoire.

Références bibliographiques

BAREIL Henri, 1992, « La réforme des mathématiques modernes vue par un enseignant du terrain », *La gazette des mathématiciens*, n° 54, publié dans le supplément au Bulletin Vert de l'APMEP, n° 485.

BELHOSTE Bruno, 1990, « Histoire de l'enseignement des mathématiques : la réforme de 1902 », *bulletin de la commission inter-irem épistémologie,* n° 7.

BELHOSTE Bruno, 1995, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français : textes officiels, tome 1 : 1789-1914*, Paris, INRP, édition économica.

BIANCAMARA Paul, 1972, *Mathématiques 4^e*, Collection Queysanne Revuz, Paris, Nathan.

BIANCAMARA Paul, 1973, *Mathématiques 4^e*, Collection Queysanne Revuz, Paris, Nathan.

BKOUCHE Rudolph, 1991, « Variations autour de la réforme de 1902-1905 », *Cahiers d'histoire et d'épistémologie des sciences, SMF,* n° 34, p. 181-213.

BKOUCHE Rudolph, 2003, « La géométrie dans les premières années de la revue *L'Enseignement Mathématique* » dans CORAY Daniel, FURINGHETTI Fulvia, GISPERT Hélène, HODGSON Bernard R., SCHUBRING Gert, *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique, Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century, Proceedings of the EM–ICMI Symposium Geneva, 20–22 October 2000*, GENEVE, L'enseignement mathématique, p. 95-112.

BOREL Émile, 1905, « Opinion de M. Émile Borel professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris », *L'enseignement mathématique*, vol. 7.

BOREL Émile, 1905, *Géométrie, premier et second cycle*, Paris, librairie Armand Colin.

BOURLET Carlo, 1907, *Cours abrégé de géométrie, tome 1, géométrie plane*, deuxième tirage, Paris, Hachette.

BOURLET Carlo, 1910, « Pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire », *L'enseignement mathématique*, vol. 12, p 372-387.

BARTH Britt-Mari, 1985, « Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique », Communication & Langage, n°66, p. 46-58.

BUHL Adolphe, « Bibliographie » de *Géométrie, premier et second cycle* de Borel, *L'enseignement mathématique,* t. 8, 1906, p. 166-167.

CHARLOT Bernard, 1984 « Histoire de la réforme des « maths modernes » ; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique », *Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques*, Le Mans, Université du Maine Reproduit dans Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 352, février 1986.

CHATELET Albert, 1929, « L'organisation de l'enseignement en France », *L'enseignement mathématique*, vol. 28.

CHENEVIER Pierre, 1923, *Cours de géométrie, tome I, Géométrie plane, à l'usage de l'Enseignement secondaire, Garçons : 5 e et 4e B, 4e et 3e A ; jeunes filles : 3e et 4e année*, Paris, Hachette.

CLAPARÈDE Édouard, 1905, *Psychologie de l'enfant et pédagogie expérimentale*, édition scientifique Andrea Capitanescu Benetti et Maulini, avec Danielle Bonneton, Dominique Ottavi et Françoise Ruchat), Paris, L'Harmattan, 2017.

CLÉMENT Catherine, 2010, *Claude Levi-Strauss*, PUF, collection Que sais-je ?

COMMISSION KAHANE, 1999, Rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, accessible sur https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_75043/fr/commission-kahane (dernier accès le 11/02/2021).

CORRIEU Louis, LION Georges, PENSIVY Michel, ROUMILHAC Jean-Paul, VILATTE Jean-François, 1990, *Math 2e,* Paris, Delagrave.

D'ENFERT Renaud, 2003, *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours : Textes officiels, tome 1 : 1791-1914*, Lyon, INRP.

DEWEY John, 1900, « L'école et la société » (« The school and Society, »), traduction partielle dans *L'éducation*, juin 1909 et décembre 1912.

DEWEY John, 1916, *Démocratie et éducation* (*Democracy and education,*), traduction Gérard Deledalle, Paris, Armand Colin.

GAUTIER Christian, GIRARD Georges, LENTIN André, 1969, *Algèbre et géométrie, 2e ACT*, Aleph 0, Paris, Hachette.

Géométrie, 1964, classe de mathématiques, Paris, Ligel.

GISPERT Hélène, HULIN Nicole, BELHOSTE Bruno, 1996, *Les sciences au lycée : un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris, Vuibert-INRP.

GISPERT Hélène, HULIN Nicole, ROBIC Marie-Claire, 2007, *Science et enseignement : l'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle*, Paris, Vuibert, Lyon, INRP.

HULIN Nicole, 2007, *L'enseignement secondaire scientifique en France d'un siècle à l'autre 1802-1980 : évolution, permanences et décalages*, Lyon, INRP.

ILIOVICI Guy, DESFORGE Julien, 1933, « Rapport sur la préparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques de l'enseignement secondaire », *L'enseignement mathématiques,* vol. 32, p. 208-236.

LICHNÉROWICZ André, 1967, « Rapport préliminaire de la commission ministérielle », *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, n° 258.

MASSON Renée, 1912, « France, enseignement des jeunes filles », *L'enseignement mathématique*, vol. 14, p. 65 - 68.

PAIR Claude, BAILLE Alain, BOURSIN Jean-Louis, 1971, *Mathématiques terminale C et E*, Collection Cossart et Théron, tome 3, Paris, Bordas.

PERRIN Élie, 1903, « La méthode de M. Méray pour l'enseignement de la géométrie », *L'enseignement mathématique*, vol. 5, p. 441-446.

PIAGET Jean, 2004, *La psychologie de l'enfant*, Paris, Quadrige, PUF, 1re édition : 1966, Que sais-je ?, PUF.

PROTEAU Roger, SPÉRANDO Danièle, WIGDOROWICZ Bernard, JEULIN Chantal, 1981, *Mathématiques 2e*, Paris, Bordas.