17

La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire dans les années 1860-1880 : une approche « expérimentale » basée sur une version revisitée des *Éléments* d'Euclide

François Plantade

Introduction

Le terme « houëllien » se réfère au mathématicien français méconnu Jules Houël (1823-1886). Ce dernier est en général associé à la diffusion des géométrie non euclidiennes dans les années 1860-1870. Or, l'intérêt de Houël pour les géométries non euclidiennes provint de la question des fondements de la géométrie élémentaire et notamment de celle de l'indépendance du postulat des parallèles vis-à-vis des autres axiomes [1]. Ses travaux sur les fondements de la géométrie eurent eux-mêmes pour source des questions pédagogiques lors d'enseignement en lycée. Comment enseigner la géométrie en lycée (le lycée du milieu du XIXe siècle) ? Quelle place doit-on apporter à la rigueur des raisonnements ? Quelle place doit-on donner à l'expérimentation ? Quelle place doit-on accorder à la géométrie élémentaire par rapport à l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse ?

Ces questionnements de Houël sont au cœur des réformes sur l'enseignement des mathématiques en lycée et il nous a semblé intéressant, suite au rapport Villani-Torossian [2], d'en présenter les conceptions, même si les conditions d'enseignement au milieu du XIXe siècle ne sont pas transposables telles quelles de nos jours.

1. Et non le contraire, comme on peut parfois le lire.
2. Le rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » est consultable à l'adresse https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242.

Il nous semble également cohérent de nous interroger sur le positionnement des conceptions houëlliennes relativement aux réformes de 1902 et des mathématiques modernes.

Afin de répondre à ces questions, nous commencerons par donner quelques éléments biographiques et contextuels sur Jules Houël et montrerons que la pédagogie de la géométrie élémentaire l'intéressait au plus haut point (au travers de l'« affaire Wilson » au carrefour de l'Italie et de l'Angleterre en 1868-1869). Ensuite, nous analyserons assez en détail son premier texte sur les fondements de la géométrie élémentaire, à savoir l'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire », (Houël 1863). Ce texte renferme des considérations à la fois théoriques et pédagogiques et donne un rôle central aux *Éléments* d'Euclide. Ainsi, Houël y prônait une utilisation éclairée des *Éléments* revisités tout en promouvant une vision expérimentale des axiomes et de l'enseignement pour les plus jeunes élèves.

Jules Houël (1823-1886), un mathématicien polyglotte et pédagogue, engagé sur la question de l'enseignement de la géométrie au lycée

Présentation de Jules Houël

Jules Houël (1823-1886) [3], issu d'une ancienne famille normande protestante, étudia les mathématiques à l'École Normale de 1843 à 1846 ; ayant échoué à l'agrégation en 1846 – qu'il obtint l'année suivante, Houël commença à enseigner en lycée. Il travailla notamment dans les lycées de Bourges (1847), de Pau (1848 et 49), de Bordeaux (1850) et d'Alençon (1851-55). Dès 1852, il envisagea de quitter l'enseignement secondaire et poursuivit des recherches mathématiques et astronomiques, qui aboutirent en 1855, à la soutenance en Sorbonne de deux thèses, l'une en mécanique (Houël 1855a) et l'autre en astronomie (Houël 1855b). Cauchy, qui fit partie du jury des thèses de Houël, montra un réel enthousiasme à leur sujet. Cependant, ce dernier, qui ambitionnait de travailler en astronomie, ne put entrer à l'Observatoire de Paris, et prit la succession de Victor Amédée Le Besgue à la chaire de mathématiques pures de la Faculté des Sciences de Bordeaux en 1859. Houël y enseigna jusqu'en 1884, année à laquelle il prit sa retraite en raison de problèmes de santé.

Il enseigna invariablement l'analyse réelle – à une et plusieurs variables – à Bordeaux. Le nombre d'étudiants en licence de mathématiques était faible, mais à peu près constant : probablement environ deux ou trois chaque année. Pour Houël, le nombre d'étudiants n'avait rien à voir avec la qualité de son cours : il se devait d'être le plus complet possible. De plus, au lieu de faire deux leçons par semaine comme c'était la règle, il en faisait cinq. Houël, avant de professer un cours, en étudiait toutes les facettes afin d'en choisir la manière la plus adaptée à ses étudiants et cependant rigoureuse [4].

3. Pour des précisions, consulter (Plantade 2018).
4. Les cours de Houël furent, à l'origine, publiés à Bordeaux sous forme autographiée puis sous

FIGURE 1 – Jules Houël vers 1880, détail d'une photographie des années 1880, Archives départementales de la Gironde.

Houël anima activement la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, dès 1863. Il en fit la promotion, de sorte qu'en 1867 [5], « presque tous les mathématiciens de Bordeaux y étaient inscrits ». Il publia de nombreux articles mathématiques, historiques ou traductions dans les *Mémoires* de ladite Société, notamment à propos de géométries non euclidiennes. De 1864 à 1872, Houël fut archiviste de la Société et en développa considérablement l'activité et les contacts. En 1872, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux comptait plus d'une centaine de contacts parmi des sociétés savantes du monde entier. Il fut aussi, de 1870 à 1883, co-éditeur avec Darboux du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, un journal fondé sous l'impulsion de la Commission des hautes études – présidée par Chasles – avec le soutien du Ministère de l'instruc-

forme modifiée et typographiée chez Gauthiers-Villars à Paris, en quatre volumes, sous le titre de *Cours de calcul infinitésimal*. Pour ce faire, Houël reprit, en plus du contenu de ses propres cours de l'époque, le contenu de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*, traité en quatre volumes assez complet, d'analyse complexe. Ces deux traités eurent un très bon écho en France et en Europe. Les qualités de ces traités sont, selon Darboux et Rubini : la rigueur, l'exhaustivité, la clarté et la concision. En effet, la *Théorie élémentaire des quantités complexes* traite des fondements des « quantités complexes », de toutes les propriétés nécessaires pour travailler sur les fonctions d'une variable complexe ; les fonctions d'une variable complexe sont également étudiées en définissant les propriétés les plus élémentaires – continuité, dérivabilité, points singuliers, intégrales curvilignes – pour en arriver aux résidus et aux « surfaces de Riemann » ; la partie sur les quaternions généralise la notion de « quantités complexes » dans l'espace, dont les applications sont multiples. Tous les résultats énoncés sont démontrés ; des exemples fondamentaux et pédagogiques sont régulièrement donnés.

5. Lettre du 12 janvier 1867 de Houël à son cousin Berger (Bibliothèque de Caen-la-mer).

tion publique dans le but de diffuser [6] les nouvelles idées mathématiques venues d'Allemagne notamment, en France.

Il était polyglotte : d'après le mathématicien Paul Barbarin, il connaissait à la fin de sa vie « toutes les langues de l'Europe », bien qu'il n'eût pas voyagé en dehors de la France [7]. Il traduisit, de l'allemand (Riemann, Lipschitz), du suédois (Mittag-Leffler), du russe (Lobatchevski) , ...

Houël fut en contact épistolaire avec de nombreux mathématiciens européens : Darboux, Hermite, Bellavitis, Beltrami, Cremona, Forti, Klein, ...

Pour conclure cette brève présentation, nous nous attardons sur l'intérêt de Houël pour la géométrie – qui sera complété dans la suite de cet article. Houël enseigna la géométrie uniquement durant sa carrière assez courte d'enseignant de lycée. Cette expérience l'amena à réfléchir sur les méthodes d'enseignement utilisées et sur les fondements de la géométrie élémentaire dès 1863, dans (Houël 1863). Cela l'incita à traduire les textes fondateurs des géométries non euclidiennes dès 1866 (Houël 1866), (Houël 1868), d'une part, et d'autre part, à clore les débats sur l'indépendance de l'axiome des parallèles dans (Houël 1870a). Il publia également un texte épistémologique sur la géométrie élémentaire, (Houël 1875). Son intérêt pour les questions géométriques fut ainsi constant tout au long de sa carrière à la Faculté de Bordeaux. [8]

L'engagement de Houël sur la question des méthodes d'enseignement de la géométrie élémentaire : exemple de l'« affaire Wilson »

L'enseignement de la géométrie en Italie et en Angleterre dans les années 1860-1870

En Italie [9] (hormis à Rome), l'enseignement secondaire de 1861 à 1867 était régi par la loi Casati, qui créa les gymnasiums classiques, afin de différencier l'enseignement technique de l'enseignement classique. Ce dernier était de type encyclopédique et les cours de mathématiques représentaient notamment un nombre d'heures important. Dans les cours de mathématiques de gymnasium classique, les manuels utilisés étaient essentiellement des traductions de traités français [10] et les cours portaient sur des sujets « actuels » tels la géométrie projective, les quantités complexes et non la géométrie élémentaire dans une version euclidienne.

En 1867, une nouvelle loi, conduite par Coppino, imposa des changements de programmes importants dans les gymnasiums ; le but de Coppino était d'« italianiser » cet enseignement, c'est-à-dire de revenir à une culture classique. En géométrie, cela signifia revenir aux *Éléments* d'Euclide, dont le Livre I servait désormais de manuel pour les élèves de quinze ans, les Livres II et III pour ceux de seize ans

6. Après la guerre franco-prussienne de 1870 et les succès de l'école analytique française du début du XIXe siècle, les mathématiciens français avaient tendance à dédaigner les sciences allemandes pourtant florissantes dans la seconde moitié du XIXe siècle.
7. Voir l'introduction de (Barbarin 1926).
8. Pour des précisions, consulter (Voelke 2005).
9. Voir (Barbin, Menghini, Moktefi 2013).
10. Les traités de Clairaut, Legendre par exemple.

et les suivants pour ceux de dix-sept ans. Le mathématicien Luigi Cremona fit partie de la commission qui décida d'introduire dans l'enseignement secondaire l'étude d'Euclide, qui lui semblait le système d'exposition le plus logique et le plus rigoureux. Suite à ces changements radicaux de programmes de mathématiques, nombreuses furent les protestations dans la communauté mathématique italienne, dont le *Giornale de Battaglini* se fit une tribune. En 1869, année de l'« affaire Wilson », seul Euclide en italien servait de manuel aux élèves de 15-17 ans de gymnasiums classiques.

En Angleterre [11], Euclide était utilisé « exclusivement », ce jusqu'en 1860 dans les études secondaires et supérieures, dont le but était de former l'esprit sur une théorie déjà aboutie. À la fin des années 1860, de nombreux maîtres d'école déplorèrent la difficulté des *Éléments* d'Euclide pour les débutants, qui pour beaucoup apprenaient sans comprendre. En avril 1868, James M. Wilson, enseignant à Rugby School, publia un manuel de géométrie (Wilson 1868a), qu'il proposa de substituer à Euclide dans les écoles. Dans sa préface, Wilson avançait quatre raisons pour abandonner Euclide : son côté artificiel, sa forme « syllogistique », la longueur des démonstrations qui incitait les élèves à les apprendre plutôt qu'à les comprendre et le manque de visibilité des propositions vis-à-vis des autres. Le mouvement anti-Euclide prit une certaine ampleur en Angleterre et une association, l'AIGT, fut créée en 1869, afin d'adapter l'enseignement de la géométrie aux élèves.

Enseigner avec Euclide ou non, en Italie : échange entre Houël et Cremona en lien avec l'« affaire Wilson »

Wilson publia à la fin de l'année 1868 au *Giornale de Battaglini* un article en italien, intitulé « Euclide come testo di geometria elementare » (Wilson, 1868b, p. 361-368) critiquant l'utilisation des *Éléments* d'Euclide dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Ce fut dans le contexte de changements importants de l'enseignement des mathématiques en Italie et en Angleterre, mais de manière contraire l'une par rapport à l'autre à propos d'Euclide, puisque l'utilisation d'Euclide était désormais obligatoire en Italie, et qu'en Angleterre, un mouvement de contestation anti-Euclide se faisait jour.

Nous ne transcrivons pas le discours de Wilson ni la réponse officielle qu'en firent Cremona et Brioschi au début 1869, mais nous transcrivons le début de l'extrait de la lettre de Houël à Battaglini, du 23 janvier 1869, publiée au *Giornale* en réponse à l'article de Wilson :

> « ... J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est antiquato, artifizioso, illogico (!!!) e inadatto come libro d'instituzione. Antiquato, soit : je l'ai dit moi-même à l'occasion. Artifizioso : pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais illogico, je le nie, et je prétends qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l'ont pas entièrement compris. [...] Quant à inadatto come libro d'instituzione, oui et non. Oui, s'il est mis entre les mains des élèves comme code de géométrie [...] mais pourvu qu'il soit accompagné de

11. Voir (Barbin Menghini Moktefi 2013).

)(50)(

ESTRATTO DI UNA LETTERA DEL PROF. *HOÜEL* AL REDATTORE.

(*Vedi Vol. VI. pag. 361*)

. . . J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est *antiquato, artifizioso, illogico (!!!) e inadatto come libro d'istituzione. Antiquato* , soit : je l'ai dit moi-même à l'occasion. *Artifizioso* , pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais *illogico*, je le nie, et je prétends qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l' ont pas compris entièrement. Je crois avoir établi suffisamment la raison de beaucoup de particularités , qui devaient sembler inexplicables à ceux qui ont pris pour guide le système bâtard de la Géométrie de Legendre , qui n' à ni le rigueur du passé ni la largeur de vue du présent. — Quant à être *inadatto come libro d' istituzione* , oui et non. Oui , s' il est mis entre les mains d' un élève comme code de géométrie , comme texte de renvoi, où l' on trouve les propositions fondamentales dont on a besoin à chaque instant, *mais pourvu qu' il soit accompagné de commentaires, d'éclaircissements, d'additions, quelquefois de rectifications, faites par un professeur bien pénétré de l'esprit du texte*, et que les explications du professeur soient la partie *principale* de l' enseignement. Non , si l' on suit le système anglais consistant à faire apprendre Euclide par coeur sans l'expliquer. On ne fait pas un cours de jurisprudence en se contentant de réciter le code par coeur.

Mais je m'attacherai à un seul point, sur lequel les deux auteurs ont des idées très-inexactes. C'est sur la prétendue notion de longueur antérieure à la notion de ligne droite. Guidé par les leçons et les ouvrages de M. Duhamel, j'ai établi d'une manière irréfutable , dans mon *Essai critique* , etc., que le mot *longueur d' une ligne courbe* est complètement *vide de sens* , au point de vue de la rigueur mathématique, tant qu' on n' a pas établi une suite de théorèmes , dont le dernier est une application élémentaire du calcul intégral. J'ai fait observer qu' il était puéril de fausser la rigueur géométrique et d'introduire des paroles insignifiantes en place d' idées solides , pour le seul plaisir d' économiser une démonstration de dix à douze lignes, comme celle de la 20^{e} proposition d'Euclide, et je répète avec l'auteur (M. Wilson), mais dans un tout autre sens: *Credo che sappiamo appena quanto siamo assurdi e violiamo l' ordinamento scientifico.* En effet, je n' apperçois pas ici la moindre absurdité ni la moindre violation de l'ordre scientifique. . . . .

Bordeaux, le 23 janvier 1869.

Figure 2 – Extrait de la lettre de Houël à Battaglini, de réaction à l'article de Wilson.

> commentaires, d'éclaircissements, d'additions, quelques fois de rectifications, faites par un professeur bien pénétré du texte, non. » (Houël 1863)

Cette citation synthétise les idées de Houël, sur les *Éléments* d'Euclide et leur utilisation dans l'enseignement secondaire.

Le contexte de l'« affaire Wilson » fut source d'échanges entre Houël et Luigi Cremona (1830-1903), professeur à l'Institut polytechnique de Milan et membre de l'Institut lombard. Ils écrivirent notamment à propos de *Gli Elementi*, première version italienne des *Éléments* d'Euclide connue sous le nom d'édition de Florence, conçue pour les besoins de l'enseignement secondaire. Cette affaire, qui eut d'importants retentissements en Europe, montre tout d'abord la proximité de Houël avec le milieu mathématique italien (ainsi que son polyglottisme), sa connaissance des programmes de l'enseignement anglais, en somme son ancrage européen. Enfin, l'action de Houël dans cette « affaire » montre bien que la question de l'enseignement avec Euclide le concerne profondément, comme nous allons le préciser ci-après.

La conception de l'enseignement de la géométrie élémentaire chez Houël

L'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire »

L'« Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire » (Houël 1863). est la première publication de Houël à propos de géométrie et la seule où il est explicitement exprimé sa vision pédagogique : c'est un texte de 41 pages publié en 1863 dans le journal allemand *Archiv der Mathematik und Physik*, appelé également *Archiv de Grunert.* Il est composé de trois parties distinctes : l'introduction d'un peu moins de sept pages, le développement, de 17 pages et demie et formé de 29 paragraphes, qui expose les grandes lignes de la géométrie élémentaire, et un appendice de 17 pages rassemblant six notes assez diverses. Nous remarquons que cet article a une forme atypique puisque l'introduction fait presque la moitié de la taille du développement et que l'appendice est aussi long que le développement ; c'est donc que l'exposé central nécessite des explications, des commentaires et une contextualisation importantes.

L'introduction

La première partie de l'introduction, d'une page et demie, traite de la notion d'axiome géométrique et du rôle de l'expérience dans l'élaboration des axiomes géométriques. L'auteur commence par faire remarquer que la question des fondements de la géométrie ne se cantonne pas à celle de l'indépendance du postulat des parallèles, comme le laisse penser la récurrence des tentatives de démonstrations : celle du mathématicien allemand Ferdinand Carl Schweikart en 1807 (Schweikart, 1807), de Joseph Diaz Gergonne en 1812-1813 (Gergonne, 1812-1813), de Legendre en 1833 (Legendre, 1833), du mathématicien italien Camillo Minarelli en 1849 (Minarelli, 1849), du mathématicien belge Ernest Lemarle en 1857 (Lemarle, 1857) et du mathématicien français César Lambert en 1859 (Lambert, 1859). Houël y affirme d'ailleurs son point de vue : que le postulat des parallèles est indépendant des autres axiomes.

Ensuite, l'auteur compare les *Éléments* d'Euclide avec les *Éléments de géométrie* de Legendre (Legendre, 1794), best-seller des manuels de géométrie de l'enseignement secondaire de la première moitié du XIXe siècle en France. Pour lui, la version d'Euclide est supérieure [12] à celle de Legendre, car celle d'Euclide est « purement » géométrique, alors que celle de Legendre utilise l'algèbre. Dans la dernière partie de l'introduction, il inscrit son « Essai » (Houël, 1863) dans un programme d'écriture d'un nouveau traité de géométrie élémentaire, ayant pour base les *Éléments* d'Euclide, et dont la forme serait plus légère et les axiomes modifiés.

Le développement

Dans le développement, Houël expose le contenu du Livre I des *Éléments* d'Euclide, sans les démonstrations, en énonçant de nouveaux axiomes qui lui semblent plus adéquats. Son but est de montrer où l'« expérience » permet d'appréhender les objets et aussi les axiomes, qui sont les fondements de la géométrie élémentaire. Il esquisse ainsi une manière de présenter les premières propriétés géométriques : sur les angles et les triangles notamment. Remarquons que le texte ne contient pas de figure. Houël explique tout d'abord que :

> « La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la solidité ou de l'invariabilité des figures. Elle emprunte, en outre, à l'expérience un certain nombre de données que l'on appelle axiômes – nous verrons que les axiômes de la géométrie peuvent se réduire à quatre. » (Houël, 1863, p. 174)

Cette notion d'invariabilité des figures, que Houël explicite dès le début de son texte, sans être neuve, n'apparaît que peu dans les textes du XIXe siècle [13]. Cela montre en outre l'importance pour lui d'une vision cinématique de la géométrie. De plus, il insiste bien sur l'approche expérimentale de cette invariabilité.

Dans la suite, nous reprenons succintement l'exposé afin d'y montrer l'ordre logique, les axiomes retenus, les définitions énoncées et comment l'expérience intervient.

Remarquons que Houël commence par définir la notion de surface. Il ne donne pas la définition de points, lignes, surfaces *a priori* mais montre comment on peut les introduire successivement :

> « On appelle surface la limite de deux portions de l'espace. Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enve-

12. Comme dans la tradition aristotélicienne de la poétique, le mélange des genres n'est pas envisageable.

13. Elle n'apparaît pas par exemple dans les *Éléments* de géométrie de Legendre (toutes éditions et rééditions confondues), ni dans les *Éléments* de géométrie de M.-E. Bède, publié en 1862, ni dans le *Traité de géométrie élémentaire* d'Eugène Rouché et de Charles de Comberousse de 1866.

> loppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur. » (Houël, 1863, p. 174)

Via les surfaces, il définit la ligne :

> « La limite de deux portions de surface s'appelle ligne. [...] On s'est élevé à l'idée abstraite de surface soit par la considération d'une tige très-mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface. » (Houël, 1863, p. 175)

En utilisant les lignes, il définit le point : « L'idée de point est venue de la considération d'un corps dont les dimensions étaient indéfiniment réduites. » (Houël,1863, p. 175) Cette manière (dans cet ordre et en faisant appel à l'expérience) de présenter les premiers objets de la géométrie élémentaire se rencontre dans *L'Essai sur l'origine des connaissances humaines*[14] de 1746 d'Étienne Bonnot de Condillac (Condillac (De), 1746, chapitre 3).

Après avoir défini les objets de la géométrie, l'auteur remarque qu'il est possible d'inverser l'exposition, en définissant les points, puis les lignes et les surfaces, grâce à la notion de mouvement (géométrique) :

> « On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement. On dira alors, en partant de l'idée de point, comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut. De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme. » (Houël, 1863, p. 176)

Cette idée de mouvement géométrique fut déjà utilisée par Clairaut, en faisant tourner une droite autour d'un point. Le fait de considérer un point qui se meut pour engendrer une ligne apparaît chez le médecin parisien Adolphe Kircher en 1803, qui s'est inspiré des travaux de Legendre dans *La nouvelle théorie des parallèles* (Kircher,1803, p. X). La même idée se trouve chez Hermann Günther Grassmann pour définir les vecteurs[15] dans l'*Ausdehnungslehre* de 1844.

Après avoir défini les points, lignes et plans, Houël propose son premier axiome :

« Axiôme I. Trois points suffisent, en général pour fixer dans l'espace la position d'une figure.» (Houël, 1863, p. 176). Là encore, l'auteur se réfère à une vision dynamique de la géométrie ; il justifie en outre cet axiome de manière expérimentale. Cet axiome va lui permettre de définir la notion de « ligne droite » c'est-à-dire de droite, à partir de l'image expérimentale des rayons lumineux. En effet :

> « L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut, en tournant autour de deux points, supposés fixes, il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

14. Il se positionne d'ailleurs contre Descartes, qui a pour méthode de décomposer les choses complexes en choses simples, tandis que Condillac s'attache aux idées.

15. Début du chapitre 1 de (Grassmann 1844).

> Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des trois points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène). La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la ligne droite. » (Houël, 1863, p. 177)

Houël en tire le deuxième axiome, sur l'existence de la droite et sa détermination par deux points quelconques :

> « Axiôme II ; Il existe une ligne, appelée ligne droite, dont la position dans l'espace est complètement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne peut s'appliquer exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs. » (Houël, 1863, p. 177)

Pour l'existence du plan, il procède de manière analogue, à partir de l'expérience des eaux tranquilles et en tire son troisième axiome :

> « L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur lesquelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue. Une telle surface s'appelle une surface plane. » (Houël, 1863, p. 177)

Il définit ensuite les angles, de manière dynamique :

> « On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par deux positions. » (Houël, 1863, p. 177)

La notion d'angle conduit à la notion de direction des droites et à celle de parallélisme de deux droites. Il définit ensuite la notion de cercle et donne les principales définitions et les premières propriétés sur les angles. Après cela, Houël remarque que :

> « La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre ; de sorte que la position de parallélisme est unique. C'est là un nouveau principe, qui n'est pas renfermé dans les axiômes précédents, et que nous énoncerons ainsi :
>
> Axiôme IV. Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée. » (Houël, 1863, p. 178)

Houël parvient à l'idée du quatrième et dernier axiome, qui est le postulat d'Euclide ou postulat des parallèles, de nouveau par une vision dynamique. Nous notons qu'il indique sans commentaire ici que cet axiome « n'est pas renfermé dans les axiômes précédents » (Houël, 1863, p. 178). Il affiche clairement sa position quant à l'indépendance du postulat d'Euclide et des autres axiomes. Nous rappelons qu'au début des années 1860, Houël n'a pas connaissance des travaux de Lobatchevski ni de Bolyai.

Ensuite, Houël étudie les triangles (quelconques et particuliers) sous le rapport des angles et des longueurs, tel Euclide dans son Livre I ; il y utilise les notations modernes d'addition, soustraction, égalité des angles et indique constamment les références du texte d'Euclide.

L'appendice

L'appendice contient sept notes très diverses dont les titres sont les suivants : Note 1. Sur l'invariabilité des figures (0,5 page) – Note 2. Sur le mouvement géométrique (0,5 page) – Note 3. Sur la ligne droite (3,5 pages) – Note 4. Sur l'unité angulaire (presque 4 pages) – Note 5. Sur la théorie des parallèles (une page environ) – Note 6. Sur la longueur des courbes (presque trois pages) – Note 7. Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire (4 pages).

Les notes 1 et 2 reprennent et précisent des notions importantes utilisées dans le développement. Ainsi, dans la note 1, l'auteur définit au moyen de l'expérience la notion de figure géométrique (en lien avec l'invariabilité des figures dont il est question au début du développement). Dans la note 2, il précise ce qu'est le mouvement géométrique et insiste sur son importance pédagogique :

> « L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire, l'idée du mouvement géométrique [...] Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. » (Houël, 1863, p. 179)

Dans la note 3, l'auteur explique dans un long paragraphe pourquoi prendre comme définition de la ligne droite le plus court chemin entre deux points est une mauvaise chose et pourquoi de nombreux traités depuis Archimède utilisent cette définition.

Dans la note 4, il établit le lien entre mesures d'angles et logarithmes et disserte sur les différentes unités habituelles, en faisant appel aux différentes tables numériques existantes.

Dans la note 5, il indique une autre manière de traiter la théorie des parallèles, sur la base de la direction, intéressante pédagogiquement. Ainsi, il propose :

> « Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles. Cette proposition pourrait être prise pour axiôme, en considérant l'idée de direction comme une donnée fondamentale de l'expérience. [...] Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un premier enseignement de la géométrie. » (Houël, 1863, p. 181)

Cette citation montre que Houël ne se limite pas à une seule exposition de la géométrie élémentaire mais qu'il montre toutes les possibilités d'exposition. Il indique notamment qu'il est possible de moduler l'ordre du discours, d'inverser des notions. En effet, la notion de droites paralléles est un cas particulier de la direction de deux droites ; il n'est donc pas nécessaire de définir deux droites parallèles avant cela, comme on le fait en général.

Dans la note 6, il montre comment définir de manière élémentaire, c'est-à-dire seulement sur la géométrie et le principe de Duhamel du calcul infinitésimal, la notion de longueur de courbe.

La note 7 contient la conception houëllienne de la géométrie dans l'enseignement secondaire ; nous la détaillons ci-après.

La conception houëllienne de l'enseignement de la géométrie élémentaire au lycée

Dans la note 7, il propose une manière d'enseigner la géométrie et également comment, à partir de cet enseignement, on peut introduire le reste des mathématiques. Pour cela, l'auteur commence par constater que :

> « Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'enseignement des mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle de logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se départe jamais de cette rigueur qui distingue les mathématiques de toutes les autres sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques. Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fausse ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler. » (Houël, 1863, p. 182)

Dans cette citation, Houël s'inscrit dans une vision globale de l'enseignement des mathématiques et insiste sur l'importance de recourir à une logique « implacable » mais qui autorise, pour des raisons pédagogiques, à admettre provisoirement des résultats.

Fort de cette remarque sur la rigueur de l'enseignement mathématique, Houël propose un enseignement gradué de la géométrie élémentaire, de la manière suivante :

> « Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiômes, employer au lieu des démonstrations, les vérifications expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la

> construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figures à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel, la part plus ou moins grande qu'il pourra faire au raisonnement dans cette première ébauche des études géométriques ; et la grande variété d'applications qu'offrent la géographie, l'astronomie, l'arpentage, la stéréotomie, etc., suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu. » (Houël, 1863, p. 183)

Il propose que les débutants se familiarisent avec les notions géométriques, uniquement par l'expérimentation, c'est-à-dire essentiellement les tracés de figure et les manipulations concrètes. Ensuite, il explique comment ce premier degré d'enseignement de la géométrie permet d'introduire la notion de nombres entiers puis rationnels :

> « On pourra mêler à la géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers, que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. [...] On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours gradués, dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part. Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. » (Houël, 1863, p. 190)

Dans ce paragraphe, Houël prolonge son programme de l'enseignement de la géométrie pour en faire un fondement du reste des mathématiques. Il propose un enseignement gradué dont « les cours élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions », afin de préserver la logique des démonstrations. Il insiste également sur l'importance des applications aux autres disciplines.

Dans un second temps, il détaille le second degré de l'enseignement de la géométrie et du reste :

> « Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les Éléments d'Euclide et les premières notions sur les sections coniques. On joindrait à cette étude celle des premières notions d'algèbre, en rattachant les règles de calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second livre d'Euclide. [...] L'étude rigoureuse de la géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés nombres incommensurables, et

à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables. On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la trigonométrie. » (Houël, 1863, p. 210)

Dans ce paragraphe, Houël argumente sur l'importance de la « méthode euclidienne » en géométrie et comment elle mène au calcul infinitésimal de manière naturelle. Il résume et il conclut cette note par :

> « En un mot, la géométrie d'Euclide peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal. » (Houël, 1863, p. 210)

Conclusion

Cette dernière note de l'« Essai » (Houël, 1863) constitue à la fois un manifeste d'enseignement de la géométrie et du reste des mathématiques, par l'entremise de l'étude adaptée des *Éléments* d'Euclide. Cette note nous éclaire sur le profond sens pédagogique de Houël et sur les motivations qui le poussent à écrire son texte, qui se trouve au centre de ses préoccupations pédagogiques et fondamentales. Le point de vue de Houël allait à contre-courant des *Éléments* de Legendre (Legendre, 1794) et donc de l'enseignement dispensé dans les lycées dans les années 1860 ; Houël prônait donc un retour à Euclide, mais à un Euclide reformulé (Barbin, Menghini, Moktefi, 2013, p. 58-63).

On peut voir également en Houël un précurseur de la réforme des mathématiques de l'enseignement secondaire de 1902. En effet, comme on peut le lire dans un texte officiel de ladite réforme :

> « L'enseignement de la géométrie (dans le premier cycle) doit être essentiellement concret... Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants... on peut, et cela est désirable, faire sentir dans certains cas, la nécessité d'une démonstration ; mais il ne faut donner cette dernière que si l'élève est convaincu qu'elle est indispensable. On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordres différents ; l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques ; l'autre logique qui est celle des vérités mathématiques ; mais il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves [16]. »

L'utilisation du mouvement géométrique, cher à Houël, y fit alors également son entrée officielle dans les programmes officiels.

16. Cité dans (Belhoste 1990).

Enfin, les conceptions de Houël sont opposées aux préconisations de la réforme des mathématiques modernes de 1969 et c'est à cette occasion que le texte (Houël 1863) fut exhumé par Rudolph Bkouche et aussi Évelyne Barbin, dans un IREM... En effet, la création des IREM apparut par opposition au point de vue des mathématiques modernes : le point de vue de l'abstraction, du structuralisme dans lequel les mathématiques sembleraient ne pas avoir d'histoire. Dès 1982, Rudolph Bkouche publia des articles notamment en lien avec l'histoire des géométries non euclidiennes, en utilisant les textes (notamment) de Houël. Il semblerait que la réforme actuelle reprenne (en partie) les idées de celle de 1902, dans le sens d'un retour à l'expérimentation et à l'histoire des mathématiques.

Références bibliographiques

Barbarin Paul, 1926, « La correspondance entre Hoüel et De Tilly », *Bulletin des sciences mathématiques*, t.I, p. 50-64.

Barbin Évelyne, Menghini Marta et Moktefi Amirouche, 2013, « Les dernières batailles d'Euclide : Sur l'usage des Éléments pour l'enseignement de la géométrie au xix^e^ siècle », in Barbin Évelyne Moyon Marc, (éd.), *Les Ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, p. 58-63.

Belhoste Bruno, 1990, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du xx^e^ siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, 43, n°4, p. 371-400.

Condillac (de), Étienne Bonnot, 1746, *L'Essai sur l'origine des connaissances humaines*, Paris, Libraires associés.

Gergonne Joseph Diaz, 1812-1813, « Essai sur la théorie des parallèles », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t.III, p. 353-356.

Grassmann Hermann Günther, 1844, *Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die ubrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert*, Leipzig, O. Wigand.

Hoüel Jules, 1855, *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*, Première thèse pour le doctorat, Paris, Mallet-Bachelier.

Hoüel Jules, 1855, *Application de la méthode d'Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter*, Seconde thèse pour le doctorat, Paris, Mallet-Bachelier.

Hoüel Jules, 1863, « Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie », *Archiv der Mathematik und Physik*, t.XL, p. 171-211.

Hoüel Jules, 1866, « Études géométriques sur la théorie des parallèles » par N.I. Lobatchewsky, suivie d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher, Traduction, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t.IV, 1^er^ cahier, p. 83-128.

Hoüel Jules, 1868, « La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*) ; suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiome XI. Par Jean Bolyai, capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne ; précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt, architecte à Temesvàr », Traduction, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t.V, p. 189-248.

HOÜEL Jules, 1869, « L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t.VIII, 1869, p. 278-283.

HOÜEL Jules, 1869, « Estratto di una lettera del Prof. Houël al reddatore », *Giornale di matematiche*, t.VII, p. 50.

HOÜEL Jules, 1870, « Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide », *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles*, t.VIII, Procès-verbaux, p. XI-XVIII.

HOÜEL Jules, 1875, « Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes », *Archiv mathematiky a fysiky,* Prague, p. 81-91.

KIRCHER Adolphe, 1803, *La nouvelle théorie des parallèles*, Paris, Courcier.

LAMBERT César, 1859, *Théorie des parallèles*, Tours.

LEGENDRE Adrien-Marie, 1794, *Éléments de géométrie*, Paris, Firmin Didot.

LEGENDRE Adrien-Marie, 1833, « Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle », *Mémoires de l'Académie royale de l'Institut de France*, t.XII, p. 367-410.

LEMARLE Ernest, 1857, *Démonstration du postulatum d'Euclide*, Bruxelles, Librairie polytechnique.

MINARELLI Camillo, 1849, « Théorie des parallèles », *Nouvelles annales de mathematiques*, t.VIII, p. 312-314.

PLANTADE François, 2018, Thèse de doctorat de 3e cycle de l'université de Nantes sous la direction d'Évelyne Barbin, *Jules Houël et la circulation des mathématiques dans la seconde moitié du XIXe siècle : les réseaux français et européens d'un universitaire de province.*

SCHWEIKART Ferdinand Carl, 1807, *Die Theorie des Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Goemetrie*, Iéna et Leipzig, Christian Ernst Gabler.

VOELKE Jean-Daniel, 2005, *La renaissance des géométries non euclidiennes entre 1860 et 1900*, Bern, Peter Lang.

WILSON James Maurice, 1868, *Elementary geometry,* part I, Cambridge, Macmillan.

WILSON James Maurice, 1868, « Euclide come testo di geometria elementare », *Giornale di matimatiche*, t.VI.