15

Apports de la perspective à la géométrie – Illustrations dans l'histoire et l'enseignement

Rosane Tossut [1]

Introduction

Nous tenterons d'illustrer au travers de deux exemples comment la perspective a permis de porter un regard neuf sur certains chapitres de la géométrie. Nous évoquerons la construction d'un discours unique pour des figures étudiées séparément dans les traités grecs et la mise en avant des propriétés d'incidence. Nous mentionnerons en particulier Girard Desargues et Brook Taylor.

Nous présenterons ensuite une séquence d'enseignement utilisée dans des classes pour l'étude de la géométrie d'incidence figurant au programme des élèves de 4e année dans l'enseignement secondaire supérieur en Belgique.

La « seule et même énonciation » de Desargues

Au début du XVIIe siècle, la perspective a déjà un passé de deux cents ans. Dans *De Pictura* datant de 1435, Alberti définit le tableau du peintre comme une intersection plane de la pyramide visuelle formée des rayons lumineux joignant les points de l'objet à l'œil. Il écrit :

> « Mais comme c'est sur la seule surface d'un panneau ou d'un mur que le peintre s'applique à feindre plusieurs surfaces comprises dans une seule pyramide, il faudra nécessairement qu'il coupe en un lieu quelconque cette pyramide visuelle afin de représenter par des lignes et de la peinture les contours et les couleurs tels que les donnera cette coupe.

1. avec la collaboration de Ginette Cuisinier et Danièle Legrand

> S'il en est bien ainsi, ceux qui regardent une surface peinte croient voir une certaine section de la pyramide. » (Alberti, 1435, p. 103).

Plusieurs traités voient le jour au fil des ans et l'on peut suivre à travers eux l'évolution des méthodes de représentation des objets de l'espace et l'élaboration théorique de la perspective [2]. Le développement de la perspective a permis une nouvelle approche de certains domaines de la géométrie, en particulier l'étude des coniques.

À l'époque de Desargues (1591-1661), la référence sur les coniques est le traité d'Apollonius, *Les Coniques*, du III^e^ siècle avant notre ère. Les coniques sont obtenues en coupant par un plan un cône à base circulaire. Apollonius établit pour chaque conique une relation caractéristique qui peut être relue aujourd'hui comme l'équation de la conique dans un repère particulier (Heath, 1981, vol. II, p. 133). Les coniques sont ensuite étudiées séparément le plus souvent, sans référence au cône.

Dans son traité de 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (Desargues, 1639), Desargues reprend la théorie des coniques en la mettant en relation avec la perspective [3]. Cela le conduit à considérer les coniques comme des projections de la base circulaire à partir du sommet du cône. Il construit un discours neuf unifiant des figures qui peuvent s'échanger par perspective. C'est ainsi que droites sécantes et droites parallèles sont des « droites de même ordonnance » dont le « but » est à distance finie ou infinie. Les cônes et cylindres sont des « rouleaux » et les différentes coniques sont des « coupes de rouleau ». Pour Desargues, les coniques sont des variétés d'une même courbe que l'on peut étudier « par une seule et mesme enonciation, construction et preparation ou pour dire mieux par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles » [4].

Pour réaliser son étude des coniques, Desargues introduit l'*involution*. Il s'agit d'une relation métrique entre couples de points alignés qui est conservée par projection.

Avant de définir l'involution, Desargues introduit des notions qui permettent de mettre un ordre sur une droite : un point est soit « engagé », soit « dégagé » par rapport à deux autres points de la droite, et deux couples de points alignés sont soit « mêlés », soit « démêlés ». Ces notions sont illustrées en figure 1 : dans la figure *Fig. 3* de Desargues, le point A est engagé entre les points B et H par exemple et les couples de points BH et DF sont mêlés ; dans la figure *Fig. 4*, le point A est dégagé d'entre les points B et H et les couples de points BH et DF sont démêlés.

Dans un langage actuel, trois couples de points alignés BH, CG et DF sont en involution s'il existe un point A qui est soit engagé entre les points de chaque

2. Jean-Pierre Le Goff a publié de nombreux articles consacrés à l'histoire de la perspective, entre autres une étude du traité de Piero della Francesca (Le Goff, 1991). Plusieurs de ses articles sont publiés dans *Les Cahiers de la Perspective, Points de vue*, IREM de Basse-Normandie.

3. Notons que Desargues publie quelques années auparavant, en 1636, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, traité dans lequel il décrit une manière de construire la représentation d'un objet (Desargues, 1636).

4. Extrait de la lettre de Desargues à Mersenne du 4 avril 1638 (Taton, 1981, p. 83).

couple, soit dégagé, et qui est tel que :

$$AB.AH = AC.AB = AD.AF\,.$$

Le point A est appelé « souche » de l'involution par Desargues. La figure 1 présente des exemples d'involution de six points.

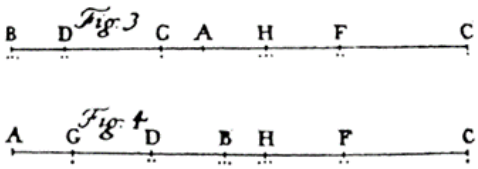


FIGURE 1 – Figures 3 et 4 du traité de Desargues de 1639 (Taton, 1981, p. 106-109) [5]

Une définition indépendante de la souche A est présentée ensuite : les trois couples de points BH, CG et FG sont en involution s'ils sont soit mêlés, soit démêlés, et si on a

$$\frac{GB.GH}{CB.CH} = \frac{GD.GF}{CD.CF}$$

ou une des deux relations obtenues par permutation des couples.

Notons bien que, dans cette relation, un des points peut être à distance infinie et aussi que les points peuvent coïncider pour un ou deux couples (figure 2). On retrouve le cas particulier de quatre points alignés formant une division harmonique lorsque les points coïncident pour deux couples et celui d'un segment divisé en son milieu lorsqu'en plus, un point du troisième couple est à distance infinie.

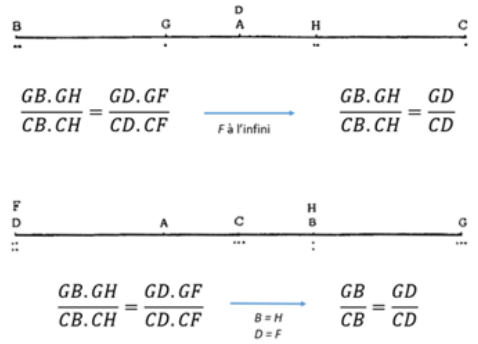


FIGURE 2 – Cas particuliers d'involution (Tossut, 1995, p. 25)

5. Les figures sont extraites de la copie manuscrite du traité de Desargues effectuée par Philippe de La Hire en 1679 (Taton, 1981, p. 88).

L'involution de Desargues permet de tenir un discours unique pour des propriétés traitées indépendamment les unes des autres dans les traités grecs. On peut s'en rendre compte en considérant le livre VII de *La Collection Mathématique* de Pappus. Le texte de Pappus, écrit au début du IV^e^ siècle de notre ère, était destiné à accompagner la lecture de différents traités (Heath, 1981, vol. II, p. 357). À propos des propositions de Pappus se rapportant à la *Section déterminée* d'Apollonius, Michel Chasles relève dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie* :

> « On n'aperçoit pas, au premier abord, la vraie signification de ces nombreuses propositions, ni les rapports qui peuvent les rattacher ensemble à une même question ; et la lecture dans cet état en est pénible. Mais avec quelque attention, on reconnaît qu'elles sont toutes relatives à la théorie de l'*involution* de six points, créée par Desargues, [...] ce sont des propriétés de plusieurs relations que l'on peut aujourd'hui considérer comme des cas particuliers de cette relation générale. » (Chasles, 1837, p. 39)

Par ailleurs, dans la note X de son livre, Chasles indique que « la plus ancienne propriété géométrique de l'involution de six points se trouve dans Pappus (proposition 130 du septième livre) » (Chasles, 1837, p. 315). Cette proposition se trouve dans la partie du livre VII consacrée aux *Porismes* d'Euclide. Elle est illustrée par la figure 3 et a pour énoncé :

> « Proposition 130 – Soit la figure ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛ, et que le rectangle compris sous les droites AZ, ΔE soit au rectangle compris sous les droites AΔ, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BΓ est au rectangle compris sous les droites AB, ΓZ ; je dis que la ligne qui passe par les points Θ, H, Z est droite. » (Pappus, p. 675)

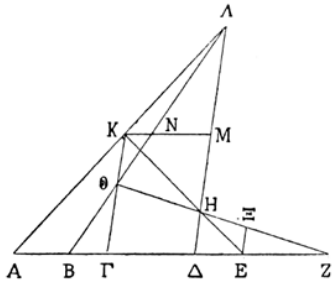
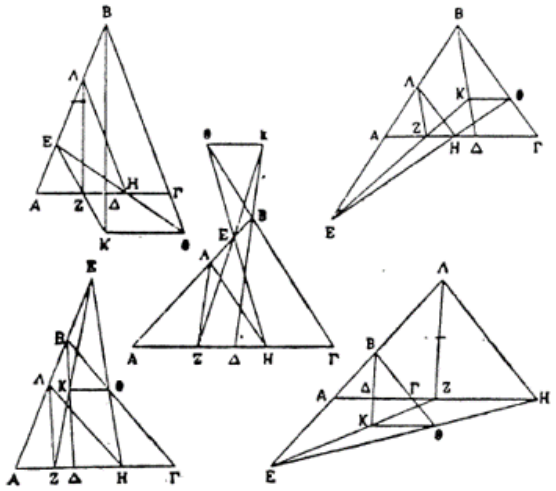


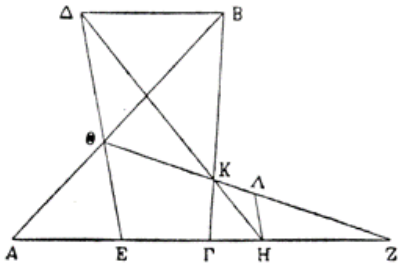
FIGURE 3 – Proposition 130 du livre VII de Pappus (Pappus, p. 675)

Chasles observe que cette proposition de Pappus peut être relue de la manière suivante : les couples de côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante des couples de points en involution [6] (Chasles, 1837, p. 315).

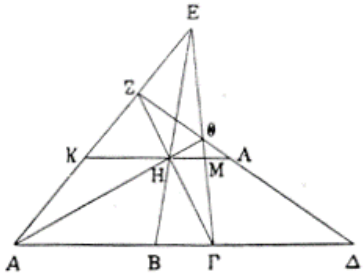
6. On considère le quadrilatère de sommets $\Lambda H \Theta K$ et la sécante $A\Gamma$.



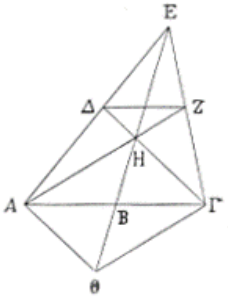
Proposition 127



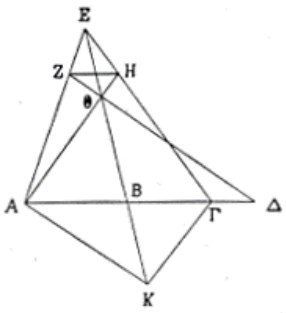
Proposition 128



Proposition 131



Proposition 132



Proposition 133

FIGURE 4 – Figures du livre VII de Pappus (Pappus, p. 669-679).

Lorsqu'on se penche sur le traité de Pappus, on s'aperçoit que plusieurs propositions peuvent être relues comme des cas particuliers de cette propriété du quadrilatère [7]. La proposition 130 présente le cas le plus général : les côtés et les diagonales du quadrilatère rencontrent la sécante $A\Gamma$ en six points distincts. Dans les autres propositions, une des droites est parallèle à la sécante ou des couples de droites se coupent sur la sécante. Les figures [8] de ces propositions sont reprises en figure 4.

Alors que chez Pappus, plusieurs propositions voisines traitent différents cas et sont démontrées indépendamment les unes des autres, il y a chez Desargues un seul et même énoncé illustré par la figure 5 : par B, C, D, E passent trois couples de droites BCN, EDN, EBF, DCF, BDR, ECR [9] qui déterminent sur la droite IK trois couples de points en involution IK, PQ, GH. Desargues donne une démonstration unique qui s'inscrit dans la tradition grecque (utilisation de la théorie des proportions, lourdes compositions de raisons) tout en la transgressant de manière significative puisqu'elle couvre tous les cas y compris par exemple celui où un point est à distance infinie.

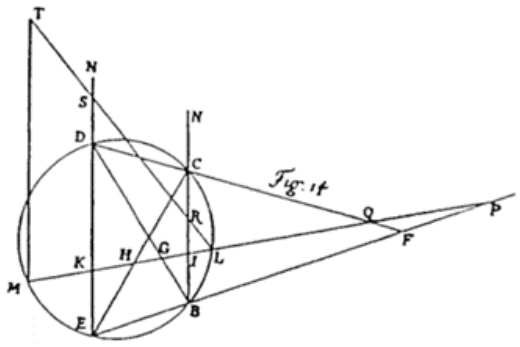


FIGURE 5 – Figure 14 du traité de Desargues de 1639.

Le rapprochement évoqué ci-dessus entre la théorie de Desargues et le livre VII de Pappus permet d'illustrer un des apports de la perspective à la géométrie : l'unification de figures étudiées séparément dans la géométrie grecque [10].

7. Ces propositions sont présentées dans l'article « Desargues et Pappus » (Tossut, 1995, p. 33-37), article qui reprend également les propositions relatives à la *Section déterminée* évoquées par Chasles.

8. Dans chaque figure, la sécante considérée est $A\Gamma$. Les sommets du quadrilatère sont ΘKBE à la proposition 127, $\Delta BK\Theta$ à la proposition 128, $E\Theta HZ$ à la proposition 131, $EZH\Delta$ à la proposition 132, $EH\Theta Z$ à la proposition 133.

9. La lettre R est mal placée dans la figure ; les droites BD et EC se coupent en R.

10. Un autre exemple d'unification est présenté dans l'article « Desargues et Pappus » (Tossut, 1995, p. 29-32) : les propositions 22, 30, 35, 36, 37 et 40 du livre VII de Pappus peuvent toutes être relues comme traitant des cas particuliers d'involution (elles concernent les différentes relations vérifiées par des points en involution, avec ou sans la souche).

Les axiomes de Taylor

Dans la géométrie grecque, les propriétés métriques occupent une place prépondérante par rapport aux propriétés d'incidence. Parlant de la géométrie grecque, Rudolf Bkouche note qu'elle « est d'abord une géométrie de la mesure des grandeurs et c'est en rapport avec des problèmes de mesure que les premières théorisations des constructions perspectivistes vont se mettre en place [...]. Il s'agit alors de justifier les constructions d'échelles et les tracés géométriques qui les accompagnent, et les critères de justification vont se traduire dans le mode de démonstration de la géométrie grecque, savoir, la théorie des proportions. » (Bkouche, 1991, p. 12)

Le développement de la perspective va contribuer à mettre en avant les propriétés d'incidence. Illustrons cela en évoquant les arguments utilisés par trois auteurs, Guidobaldo del Monte en 1600, Simon Stevin en 1605 et Brook Taylor en 1719, pour démontrer que la représentation en perspective d'une droite est une droite et que des droites parallèles rencontrant le tableau du peintre ont pour représentations des droites concourantes [11].

Guidobaldo del Monte (1545-1607)

Guidobaldo del Monte publie *Perspectivae Libri Sex* à Pesaro en 1600. Le livre I du traité contient la théorie des points de concours [12]. Dans l'introduction de ce livre, Guidobaldo démontre : « Si l'objet est une ligne droite, ce qui apparaîtra dans la section sera aussi une ligne droite. » [13] (Guipaud, 1991, p. 167)

La proposition 32 énonce la propriété concernant les apparences de droites parallèles rencontrant la section (figure 6) [14] : « Si l'œil observe des lignes parallèles, qui, prolongées, coupent la section, les lignes apparaissant dans la section se rencontreront en un seul et même point, situé à la même hauteur que l'œil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles. » (Guipaud, 1991, p. 206)

11. Il semble que ces propriétés n'aient pas été démontrées avant 1600. Citons Christian Guipaud qui note, dans son étude du traité de Guidobaldo del Monte, que « personne n'a encore eu, semble-t-il, le souci de démontrer que l'image (l'apparence) d'une droite est une droite » et, concernant la propriété générale d'existence des points de fuite, il écrit : « c'est la première fois dans l'histoire qu'une telle propriété est démontrée » (Guipaud, 1991, p. 167 et p. 198). Concernant l'état des connaissances en ce début de XVII^e siècle, nous renvoyons aux travaux de Christian Guipaud et de Jean-Pierre Le Goff.

12. Le texte est découpé en propositions, problèmes, théorèmes, corollaires, avec de très nombreuses références aux *Éléments* d'Euclide dans les démonstrations. Dans sa thèse, Christian Guipaud relève que la forme du texte situe d'emblée l'ouvrage sur le terrain mathématique, contrairement à la plupart des ouvrages précédents (Guipaud, 1991, p. 63).

13. La « section » désigne le tableau.

14. L'œil est en A ; BC DE FG NP QR sont les droites parallèles données et BXF est la section.

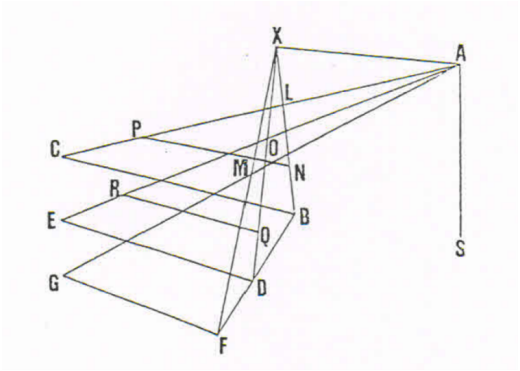


FIGURE 6 – Proposition 32 du traité de Guidobaldo (Guipaud, 1991, p. 206)

Guidobaldo démontre ces deux propriétés en s'appuyant uniquement sur des propriétés d'incidence et il fait référence aux propositions 2, 3 et 7 du livre XI des *Éléments* d'Euclide :

> « Proposition 2. Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan ; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.
>
> Proposition 3. Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.
>
> Proposition 7. Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite qui joindra ces points sera dans le même plan que les parallèles. » (Euclide, p. 398-403)

Guidobaldo renvoie aux propositions 2 et 3 pour démontrer la propriété concernant l'apparence d'une droite : l'œil et la droite déterminent un plan ; l'apparence étant dans ce plan et dans la section, elle est l'intersection de ces deux plans et est donc une droite. Il fait référence à la proposition 7 pour démontrer la proposition 32 (figure 6). Voici un extrait de cette démonstration :

> « Menons du point A la ligne AX, parallèle aux lignes BC DE FG, et soit X le point situé dans la section ; joignons BX DX FX, et AC AE AG. Puisque AX BC sont parallèles, les lignes XB AC qui les relient appartiennent au même plan qui contient AX BC [15] ; par conséquent, le rayon visuel CA coupe la ligne BX ; il la coupe en L. De la même façon, on montrera que EA coupe DX en O et que GA coupe FX en M. Mais alors, puisque les points BX appartiennent à la section, la ligne BX appartiendra à la section ; donc BC apparaîtra en BL dans la section, et pour la même raison, DE apparaîtra en DO et GF en FM ; et puisque BL DO FM font partie de BX DX FX, les lignes BL DO FM appartiendront à des lignes qui concourent en un point unique. » (Guipaud, 1991, p. 206)

15. Guidobaldo fait référence ici à la proposition 7 du livre XI des *Éléments* d'Euclide.

En ce début de XVII^e siècle, les démonstrations basées uniquement sur des arguments d'incidence ne semblent pas aller de soi. C'est ce qu'évoque la démarche de Guidobaldo : avant la proposition 32, il s'appuie sur la théorie des proportions pour démontrer quatre propositions traitant la propriété d'existence du point de fuite dans différents cas [16]. Dans sa traduction du traité, Christian Guipaud note que la version manuscrite donne l'impression que la démonstration « a été l'occasion d'une recherche intense et laborieuse » et que « les renvois aux Éléments d'Euclide enregistrent une densité record dans l'ouvrage, ce qui nous conduit à penser que l'auteur a souhaité une démonstration incontestable, s'appuyant le plus possible sur les sources autorisées » (Guipaud, 1991, p. 198). Après seulement, Guidobaldo annonce : « En utilisant un procédé différent, nous allons maintenant, dans le théorème qui suit, réduire tout ce qui a été démontré dans ces quatre derniers théorèmes à une seule démonstration. » (Guipaud, 1991, p. 205)

Et ce théorème est la proposition 32 démontrée à partir des propriétés d'incidence.

Simon Stevin (1548-1620)

En 1605, Stevin publie à Leiden *Van de Deursichtighe*, traduit la même année en latin sous le titre *De sciagraphia* [17]. Une traduction française est publiée par Albert Girard en 1634 sous le titre *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective.*

Le théorème I concerne la représentation en perspective d'une droite et est illustrée par la figure 7. Stevin explique qu'il s'agit d'une droite mais, contrairement à Guidobaldo, il ne démontre pas la propriété. Il indique que les points D et E ayant pour représentations les points F et G, les points entre D et E auront pour représentations des points entre F et G.

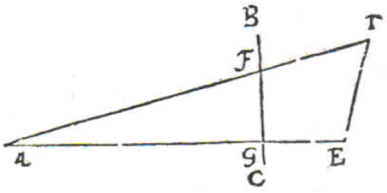


FIGURE 7 – Théorème I du traité de Stevin (Stevin, 1605, trad. Girard 1634, p. 526))

Au théorème III, Stevin démontre que des droites parallèles rencontrant le tableau ont pour représentations des droites concourantes (figure 8). L'œil est en E, AB et CD sont les deux droites parallèles à représenter, EG est la parallèle à

16. Section perpendiculaire au plan support dans lequel sont les droites parallèles, section quelconque par rapport au plan support, etc.

17. Tome 3 des œuvres complètes de Stevin traduites en latin par Snellius, *Hypomnemata mathematica* [...] *a Simone Stevino conscripta et e Belgico in Latinum a Wil. Sn. Conversa*, Lugduni Batavorum, ex officina Ioannis Patii, 1605-1608.

ces droites menée par l'œil et K est l'intersection de EG avec le tableau ACK [18]. Il s'agit de montrer que les prolongements des représentations AM et CN se coupent en K.

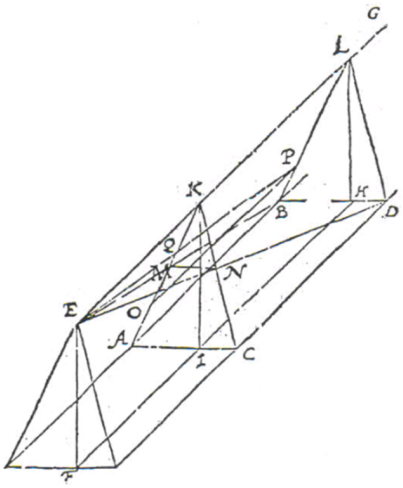


FIGURE 8 – Théorème III de Stevin (Stevin, 1605, loc. cit.) [19]

La démonstration est basée sur des arguments d'incidence mais l'exposé n'est pas aussi direct que celui de la proposition 32 de Guidobaldo. Par exemple, pour montrer que le prolongement de CN passe par K, Stevin montre que le point de rencontre entre ce prolongement et la droite EG ne peut être ni plus haut, ni plus bas, ni en deçà, ni au-delà du point K (Tossut, 1996, p. 22).

Brook Taylor (1685-1731)

L'importance des propriétés d'incidence pour la théorie de la perspective s'est précisée au fil du temps. Elle devient explicite avec Taylor.

Taylor publie un premier traité de perspective en 1715 (Taylor, 1715). Ce traité est l'objet de critiques : on lui reproche d'être trop concis, de ne pas être suffisamment accessible pour les praticiens. En réponse, Taylor publie en 1719 un nouveau traité (Taylor, 1719). Dans la préface, il motive ses choix pour l'exposé et écrit :

> « On m'objectera peut-être que j'ai traité ce sujet d'une maniere un peu trop géométrique [...]. On conviendra pourtant que j'ai tâché de rendre les choses assez intelligibles, pour que ceux qui ont quelques legers commencements dans cette Science, puissent aisément les comprendre sans le secours d'autrui. » (Taylor, 1719, trad. Rivoire, 1759, p. xliv-xlv)

18. Chez Stevin, le tableau est appelé « le vitre », les droites à représenter sont les « ombrageables » et les représentations les « ombres ».
19. La lettre C n'est pas imprimée dans l'édition de 1634 ; elle a été ajoutée.

Cette fois-ci, avant de développer la théorie, il énonce quatre axiomes :

> « Axiome I. L'intersection commune de deux plans est une ligne droite.
> Axiome II. Si deux lignes droites se rencontrent en un point, ou sont parallèles l'une à l'autre, un même plan peut passer par toutes les deux.
> Axiome III. Si trois lignes droites se coupent l'une l'autre, ou si deux de ces lignes sont parallèles et sont coupées par la troisième, elles seront toutes trois dans le même plan ; c'est-à-dire, qu'un plan passant par deux de ces lignes, passera aussi par la troisième.
> Axiome IV. Tout point d'une ligne droite est dans tout plan dans lequel cette droite est. » (Taylor, 1719, trad. Tossut, 1996, p. 44)

Taylor démontre ensuite que la représentation en perspective d'une droite est une droite en s'appuyant sur ces axiomes et en se référant à la figure [20] reprise en figure 9. Ayant défini le point de fuite d'une droite rencontrant le tableau comme l'intersection avec le tableau de la parallèle à cette droite menée par l'œil, Taylor démontre que la représentation d'une droite rencontrant le tableau est sur la droite passant par son intersection avec le tableau et son point de fuite (figure 10) [21]. Il en déduit que les représentations de droites parallèles rencontrant le tableau passent toutes par le même point de fuite.

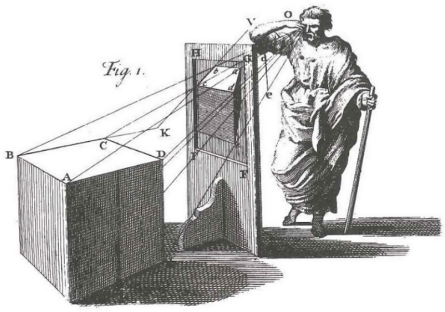


Figure 9 – Figure 1, planche 1 du traité de Taylor de 1719.

En énonçant les quatre axiomes, Taylor explicite le fait que ces propriétés d'incidence sont à la base des théorèmes généraux de la perspective.

Ces propriétés d'incidence sont démontrées par Euclide dans le livre XI des *Éléments*. Avec Taylor, elles passent du statut de propriétés démontrées à celui d'axiomes, des propriétés sur lesquelles se fondent des raisonnements.

Non seulement Taylor met à l'avant ces propriétés, mais il les réécrit et les réordonne. Il leur donne une symétrie qu'elles n'ont pas chez Euclide en traitant sur un même pied droites parallèles et droites concourantes.

20. La représentation de la droite DE est l'intersection du plan ODE avec le tableau et est donc une droite.

21. L'œil est en O et FG est la droite à représenter. La droite FG rencontre le tableau en B et son point de fuite V est l'intersection avec le tableau de la parallèle à FG menée par O. La représentation fg de FG est sur la droite BV.

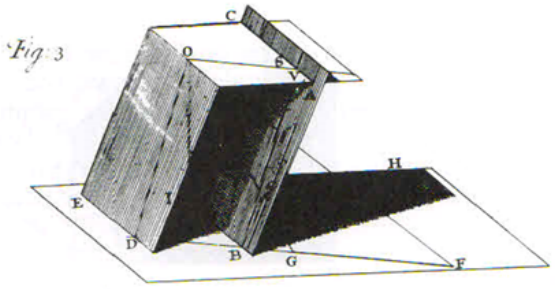


FIGURE 10 – Figure 3, planche 2 du traité de Taylor de 1719.

La géométrie d'incidence dans nos classes

De nos jours, la géométrie de l'incidence et du parallélisme constitue un « îlot déductif » qui figure au programme des élèves de 4e année dans l'enseignement secondaire supérieur en Belgique.

La perspective a contribué à mettre en avant cette partie de la géométrie. Elle constitue un bon contexte pour l'aborder dans les classes. Elle permet de travailler la vision dans l'espace et les représentations ; elle permet également de construire une ébauche d'axiomatique.

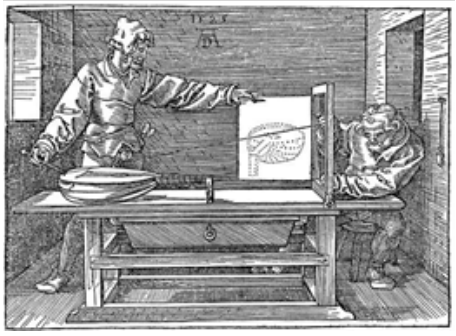


FIGURE 11 – Gravure de Dürer présentant un portillon (1525).

Des gravures de Dürer nous montrent la construction de tableaux respectant la perspective centrale (figure 11). Le dispositif ingénieux du portillon semble difficile à utiliser en classe. Cependant, on peut imaginer, en s'en inspirant, utiliser :

— une vitre verticale (une plaque de plexiglas transparent maintenue par des tés et des pinces convient),
— des transparents sur lesquels sont dessinés différents types de quadrilatères,
— une lampe ponctuelle (comme une lampe de smartphone).

Ce dispositif permet de faire travailler ensemble un groupe de 6 ou 7 élèves (figure 12).

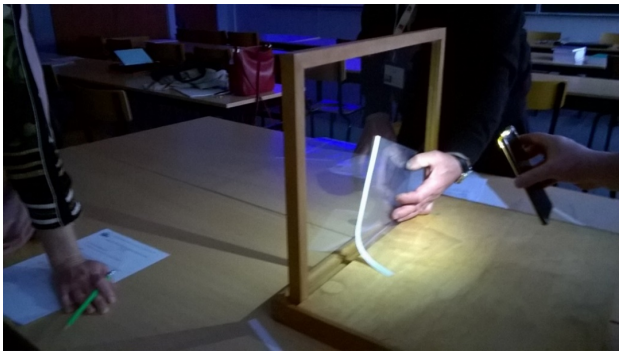


FIGURE 12 – Dispositif expérimental utilisé pour les ombres à la lampe.

Une question aussi simple que « Quels quadrilatères dessinés sur la vitre ont comme ombre sur la table un parallélogramme ? » demande un bon moment de manipulations, la découverte et une compréhension de certaines propriétés et un raisonnement structuré pour arriver à la solution.

La représentation du dispositif avec la solution sous différents angles amène quelques caractéristiques des projections parallèles.

Des considérations établies lors du travail donnent des énoncés mathématiques une fois « débarrassées » du langage concret. Par exemple :

— « la lampe et une droite forment un plan de lumière » devient « un point et une droite ne le contenant pas déterminent un plan » ;
— « l'ombre est l'intersection du plan de lumière et de la table » devient « l'intersection de deux plans non parallèles est une droite ».

On peut ainsi construire une ébauche d'axiomatique au départ des énoncés rencontrés.

Une séquence complète de cours sur ce sujet a été élaborée par un groupe du GEM. Ce travail a débouché sur une brochure qui peut être commandée via le site https://wp.gem-math.be/2021/02/23/geometrie-de-lespace-par-le-biais-de-lombre-a-la-lampe (Cuisinier, et alii, 1995). Un exemple d'activités en classe est proposé en annexe.

Références bibliographiques

ALBERTI Leon Battista, 1435, *De Pictura*, traduction par Jean Louis SCHEFER, 1993, *De la peinture*, Paris, Macula, Dédale.

APOLLONIUS de Perge, *Les Coniques*, traduit par Paul VER EECKE, 1923, Bruges, Desclée-De Brouwer.

Bkouche Rudolf, 1990, *La naissance du projectif. De la perspective à la géométrie projective*, IREM de Lille.

Chasles Michel, 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, Bruxelles, M. Hayez.

Cuisinier Ginette, Legrand Dany, Vanhamme Jacqueline, 1995, *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*, Louvain-la-Neuve, Academia-Erasme.

Desargues Girard, 1636, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, *in* Field Judith V. and Gray Jeremy, 1987, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New York, Springer-Verlag.

Desargues Girard, 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, *in* Taton René, 1981, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, Vrin.

Euclide, *Les Eléments*, in *Les œuvres d'Euclide* traduites par F. Peyrard, 1966, Paris, Blanchard.

Guipaud Christian, 1991, *La place de Guidobaldo del Monte dans l'histoire de la perspective, de la géométrie et de la géométrie projective, considérée à partir de la traduction et de l'analyse de son ouvrage « Perspectivae Libri Sex »*, Paris, thèse de doctorat sous la direction de Ernest Coumet.

Heath Thomas, 1981, *A History of Greek Mathematics*, deux volumes, New York, Dover Publications.

Le Goff Jean-Pierre, 1987, « Une œuvre aux confins de l'Art et de la Science : De prospectiva Pingendi de Piero della Francesca », *Les Cahiers de la Perspective, Points de vue*, n°4, p. 3-72, IREM de Basse-Normandie.

Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*, deux volumes, traduit par Paul Ver Eecke, 1982, Paris, Blanchard.

Stevin Simon, 1605, *De Sciagraphia* in *Hypomnemata mathematica*, traduction française de Albert Girard, 1634, *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective* in *Les Œuvres Mathématiques de Simon Stevin*, Leyde, Bonaventure et Abraham Elsevier.

Taton René, 1988, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, Vrin.

Taylor Brook, 1715, *Linear perspective : or, a New Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all situations*, London, R. Knaplock.

Taylor Brook, 1719, *New Principles of Linear Perspective : or the Art of Designing on a Plane the Representations of all sorts of Objects, in a more General and Simple Method than has been done before*, London, R. Knaplock. Traduction française du Père Rivoire, 1759, *Nouveaux Principes de la Perspective Linéaire*, Amsterdam, s.n.

Tossut Rosane, 1995, « Desargues et Pappus », *Mnémosyne*, n°9, p. 19-44, IREM de Paris.

Tossut Rosane, 1996, *La naissance de la démonstration projective (XVII^e^ et XVIII^e^ siècles)*, Lille, thèse de doctorat sous la direction de Rudolph Bkouche.

Annexe – Un exemple d'activités en classe

1. Ombre d'un parallélogramme.

Placez la vitre parallèlement au mur. Posez un parallélogramme sur la vitre et observez son ombre à la lampe sur le mur.

a) Quelle est la forme de l'ombre du parallélogramme ? Envisagez toutes les positions de la lampe.

b) Elaborez les propriétés des points, droites et plans de l'espace qui permettraient de confirmer votre réponse.

Les élèves sont invités à compléter un tableau avec leurs observations et les énoncés de géométrie formulés. On obtient par exemple :

Expérience	Géométrie
La lampe et un côté du parallélogramme déterminent un *plan de lumière*.	Un point et une droite déterminent un plan. (L'énoncé peut être laissé ainsi dans un premier temps si aucun élève ne pense à préciser que le point ne peut être sur la droite.)
Le plan de lumière coupe le plan de l'ombre suivant une droite.	Si deux plans se coupent, ils se coupent selon une droite.
Un côté du parallélogramme et son ombre sont parallèles.	Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les deux droites d'intersection sont parallèles.
Les ombres des côtés opposés sont parallèles.	Transitivité du parallélisme.

2. L'ombre est un parallélogramme

Placez un quadrilatère sur la vitre verticale et observez son ombre à la lampe sur la table horizontale.

Quels quadrilatères peuvent avoir comme ombre un parallélogramme ?

Suggestion pour aider – Résolvez d'abord la question suivante : quelles droites peuvent avoir comme ombres des droites parallèles ? Servez-vous des transparents représentant respectivement deux droites sécantes et deux droites parallèles.

Relevez les observations faites durant la recherche expérimentale et exprimez-les sous la forme d'énoncés de géométrie.

Matériel mis à disposition des élèves :
— des transparents sur lesquels sont dessinés différents quadrilatères : carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, quadrilatère quelconque ;
— des transparents sur lesquels sont dessinés deux droites parallèles ou deux droites sécantes ;
— des piques à brochette pour matérialiser les rayons lumineux ;
— des marqueurs effaçables.

Une présentation de l'activité « L'ombre est un parallélogramme » se trouve sur la chaine *YouTube* du GEM : https://www.youtube.com/playlist?list=PLpS1FnzsgJTZ0xMx244C0G3XkQZE_nRuQ.

En cours de travail, la liste des énoncés de géométrie est complétée. On ajoute par exemple :

Expérience	Géométrie
Une droite parallèle à la table a pour ombre une droite qui lui est parallèle.	Si un plan contient une droite parallèle à un plan qu'il coupe, alors l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite.

La résolution des deux problèmes a permis le passage d'observations dans le contexte expérimental à des énoncés de géométrie. On procède ensuite à une remise en ordre de ces énoncés, en construisant un « îlot déductif ». Le travail de théorisation consiste alors en différentes tâches :
— corriger les énoncés si nécessaire (par exemple compléter l'énoncé 1) ;
— ranger les énoncés dans un ordre cohérent et ajouter les énoncés manquants (par exemple, définir droites parallèles et plans parallèles avant l'énoncé 3) ;
— classer les énoncés en définitions, axiomes et théorèmes, et démontrer ces derniers (par exemple, les énoncés 1 et 2 sont des axiomes, l'énoncé 3 est un théorème).