

La géométrographie : vers un langage de programmation des algorithmes de tracés des figures géométriques

Sylviane R. SCHWER

Introduction

Un algorithme est une séquence *finie* d'instructions pour traiter sans aucune ambiguïté et en un temps *fini* une classe de problèmes. Ce concept d'algorithme – à défaut de sa dénomination¹ – existe depuis l'Antiquité. On pensera, dans le domaine de l'arithmétique, au crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers jusqu'à un nombre donné n quelconque ou à la méthode euclidienne du calcul du plus petit commun diviseur de deux entiers a et b quelconques, apprise sous le terme d'*algorithme* d'Euclide. En géométrie, le problème de la construction des figures géométriques est l'un² des grands domaines des mathématiques qui a

1. Le terme est issu de la latinisation du nom du mathématicien Perse du ix^e siècle Al-Khwārizmī. Il écrivit en arabe un ouvrage sur le système de numération de position à l'aide des chiffres indiens, traduit au xii^e siècle en latin sous le titre *Algoritmi de numero Indorum*. L'Encyclopédie méthodique (EMM, 1784) présente ce terme comme employé par quelques auteurs, surtout espagnols, signifiant principalement la pratique de l'Algèbre, ainsi que le calcul arithmétique à l'aide des chiffres arabes. Une analyse du terme conduit à la définition suivante : « l'art de supputer [calculer] avec justesse et facilité », qui s'élargit pour signifier « la méthode et la notation de toute espèce de calcul. En ce sens, on dit l'*algorithme du calcul intégral*, l'*algorithme du calcul exponentiel*, l'*algorithme du calcul des sinus*, etc ». Cette signification très actuelle de méthode effective ou calculabilité effective me semble être une innovation des encyclopédistes – et certainement celle de d'Alembert – guère utilisée jusqu'au xix^e siècle. Une entrée *Algorithme* apparaît dans la quatrième édition du dictionnaire de l'Académie française (1762), il est décrit comme « un terme didactique » signifiant l'art de calculer. Il disparaît ensuite pour ne réapparaître que dans la dernière édition (la 9^e édition, débutée en 1992).

2. Citons aussi le calcul des grandeurs géométriques (périmètre du cercle), des aires et des volumes, le calcul des racines et la résolution d'équations (Boucard & al, 2017, §4).

occupé les Anciens, en particulier, les constructions à la règle (non graduée) et au compas et qui constitue un champ algorithmique remarquable.

Dès la maternelle, l'élève commence à « Identifier le principe d'organisation d'un algorithme et poursuivre son application » et à « Reproduire, dessiner des formes planes. » (MEN, 2015a). Dès le cycle 2, la construction des figures géométriques est un atout majeur pour s'approprier les notions géométriques.

« Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de résolution de problèmes (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracés en suivant un programme de construction simple). La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie [...] sont présentés à partir de tels problèmes. » (MEN, 2015b).

L'élève doit pouvoir « utiliser la règle, le compas ou l'équerre comme instrument de tracé » (*ibidem*, p.85).

L'un des principaux sujets de recherche actuelle en logique – en relation avec l'informatique – est la complexité algorithmique, qui repose par exemple, sur le nombre d'étapes nécessaires pour prouver ou résoudre un problème. C'est un sujet théorique intéressant en soi, mais qui a aussi une grande importance pratique puisqu'il permet de savoir si la résolution d'un problème peut se faire en un temps raisonnable en fonction des moyens dont on dispose. Certains des algorithmes de cryptographie les plus utilisés, comme par exemple la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, reposent sur le fait que le temps de résolution actuel par les ordinateurs est plus long que le temps d'utilisation effective de la clé utilisée.

L'analyse quantitative des algorithmes, liée aux nombres d'opérations particulières à exécuter n'est pas une préoccupation usuelle des mathématiciens. C'est essentiellement dans un contexte d'enseignement supérieur que l'analyse quantitative des algorithmes a émergé, enseignement qui s'adresse principalement aux candidats et aux élèves des grandes écoles. C'est dans un contexte similaire d'enseignement pour des (futurs) ingénieurs de grandes écoles et des architectes qu'Émile Lemoine va s'intéresser à la fin des années 1880 à l'analyse quantitative d'une catégorie d'algorithmes : celle des constructions à la règle et au compas. Son ambition première était même l'analyse des raisonnements mathématiques en général.

La suite du texte est divisée en cinq parties. Après une présentation brève d'Émile Lemoine afin de comprendre ses motivations, nous montrons qu'il est le premier à proposer une analyse quantitative des algorithmes. Puis nous présentons les principes de la géométrographie. Nous traitons de son actualité dans les deux dernières sections. La section cinq présente les liens de la géométrographie avec le mouvement « Logo » des années 1980 et sa célèbre tortue, et sa mise en œuvre à travers le logiciel GeoTortue.

Émile Lemoine (1840-1912)

Émile Michel Hyacinthe Lemoine est né à Quimper d'un père capitaine à la retraite, l'un des fondateurs du Prytanée national militaire, où Émile prépare le concours de l'École polytechnique qu'il intègre en 1860. Dès cette époque il publie dans les *Nouvelles annales de mathématiques*³ sur les propriétés du triangle dont il initia l'étude et en fut l'un des plus importants chercheurs de la seconde partie du XIX^e siècle. À sa sortie du corps des Mines, en 1866, il suit sa propre voie comme chercheur et enseignant. Il enseigne les mathématiques à l'X. Il continue d'étudier les sciences, notamment l'astronomie, la chimie, la médecine, l'architecture ; il fait une préparation aux Beaux-Arts, entame des études de droit qu'il doit abandonner rapidement à cause des principes républicains qu'il défend (Smith, 1896).

Finalement, Émile Lemoine devient ingénieur civil des Travaux Publics à Paris, pour l'approvisionnement en gaz. Il devient, comme Charles-Ange Laisant (1841-1920), Charles-Adolphe Wurtz (1817-1884), militant de la reconstruction nationale par l'enseignement et la recherche scientifique, puisque, pour beaucoup de scientifiques, il apparaît que ce n'est pas le *militaire* mais l'*instituteur* prussien qui aurait gagné la guerre. Il participe à la création de plusieurs sociétés savantes, comme la SMF (Société mathématique de France), la Société de physique. Il est membre de l'AFAS (Association française pour l'avancement des sciences) dès sa première année. Cette société, créée en 1872 par l'action conjointe de savants – citons le médecin Claude Bernard (1813-1878), le chimiste Charles-Adolphe Wurtz (1817-1884), Paul Broca (1824-1880) –, banquiers, industriels, organise des congrès annuels dans des villes de province qui rassemblent sous sa bannière comme intervenants les chercheurs français et étrangers et les amateurs de sciences, comme public toutes les classes de la société, oisives ou laborieuses. C'est à l'AFAS qu'il présente pour la première fois les principes de la *géométrographie* (Lemoine, 1889).

De 1891 à 1894, il participe avec Laisant et Henri-Auguste Delannoy (1833-1915) aux publications posthumes des récréations mathématiques d'Édouard Lucas (Autebert & *al.*, 2003). Avec Laisant, il fonde en 1894 l'*Intermédiaire des Mathématiciens* dont il sera le premier éditeur et le restera longtemps. Ce journal sera publié sans interruption jusqu'en 1920, une seconde série paraîtra entre 1922 et 1925. Il publie aussi avec lui en 1896 un traité d'arithmétique. Ils avaient également publié ensemble une note concernant les sciences et les mathématiques (Laisant & Lemoine, 1893).

Ainsi Émile Lemoine, à la fois enseignant et ingénieur, ayant fréquenté différentes écoles *pratiques*, dont l'école d'Architecture, a pu travailler le « dessin industriel » et étudier la construction des figures géométriques à la règle et au compas dans un cadre applicatif, en particulier pour l'étude des différents tracés des *épure*s.

3. C'est le journal des candidats aux écoles polytechnique et normale. En 1860, il envoie à ce journal avec un camarade du Prytanée une solution à un problème posé qui sera publiée (Kessler & Lemoine, 1860).

Analyse quantitative des algorithmes

Jeffrey Shallit signale quelques traces d'analyse au XIII^e siècle chez Fibonacci qui observe que pour trouver le nombre de facteurs premiers d'un nombre n , il suffit de diviser par au plus $\sqrt{n}$ premiers entiers (Shallit, 1994)⁴. C'est au XIX^e siècle que l'analyse quantitative des algorithmes émerge, en particulier autour de l'algorithme d'Euclide. C'est Antoine-André-Louis Reynaud (1771-1844), polytechnicien, et enseignant et examinateur à l'École polytechnique qui s'intéresse à l'efficacité des algorithmes, certainement motivé par sa proximité avec Gaspard de Prony (1735-1839), responsable d'un grand projet de calcul de tables numériques. C'est dans son traité d'arithmétique destiné aux candidats à l'X (Reynaud, 1811) que figure la première analyse explicite de l'algorithme d'Euclide par évaluation du nombre de divisions à effectuer en fonction de la valeur du diviseur. C'est encore un autre polytechnicien, Pierre-Joseph-Étienne Finck (1797-1870), également dans un traité d'arithmétique à l'usage des candidats aux grandes écoles, qui prouvera en 1841 que l'algorithme d'Euclide est de l'ordre du logarithme du diviseur. Reynaud et Finck publieront également des arithmétiques pour des ingénieurs civils et militaires. Son résultat est légèrement moins bon que celui de Gabriel Lamé (1795-1870), publié en 1844, sans référence à son camarade d'École, et qui restera comme le premier à avoir étudié la complexité de l'algorithme d'Euclide. Seul Édouard Lucas (1842-1891), dans son traité de théorie des nombres, fera référence à ce travail.

Le 2 avril 1888, Lemoine présente au 17^e congrès de l'AFAS, un concept original pour les mathématiques, celui de la mesure de la simplicité d'une proposition, d'une procédure, ... fondée sur les considérations suivantes.

« Une vérité mathématique, une proposition prise en soi, n'est ni simple ni compliquée ; elle est. Ce qui nous la fait paraître simple ou compliquée, c'est le chemin que notre esprit a dû parcourir pour arriver à sa connaissance. Si le chemin est court, nous disons que la proposition est simple ; s'il est long, qu'elle est compliquée.

Celui qui cherche de nouvelles propositions, c'est-à-dire qui cherche à énoncer des vérités mathématiques non encore mises en lumière, ne s'occupe guère, pendant la recherche, de la nature ni de la longueur du chemin qu'il parcourt, pourvu qu'il arrive ; plus tard, lui ou d'autres sauront aplanir la route et trouveront les raccourcis.

Dans l'*exposition didactique de la science*, au contraire, la nature et la brièveté des routes suivies prennent une importance primordiale,

[...]

Toute science mathématique s'appuie sur un petit nombre de *vérités expérimentales* irréductibles entre elles, admises sans démonstration, et emploie, en outre, dès les premiers pas, des *notions élémentaires* qui s'imposent à l'esprit[...]. Soit A, B, C, etc., [ces] les vérités expérimentales et les notions élémentaires à la base d'une science déterminée.

Tous les théorèmes qui constituent cette science se déduiront de A, B,

4. Tout ce paragraphe est dû à cette publication.

C par voie syllogistique. [...] Les théorèmes qui ne dépendent que de A, B, C, etc., sont dits du premier ordre, ceux qui ne dépendent que de A, B, C, etc., et de ceux du premier ordre ; sont dits du deuxième ordre, etc. ; ceux qui ne dépendent que de A, B, C, etc., et de ceux des n premiers ordres, sont dits du $n+1^{\text{e}}$ ordre.

[...]

Dans l'exposition de l'ensemble d'une science, nous dirons que la simplicité *absolue* d'une proposition ne dépend que de son ordre, du nombre d'éléments syllogistiques qu'il a fallu pour l'établir, en comptant alors, comme on le ferait d'une notion élémentaire ou d'un fait expérimental, tout théorème précédemment démontré. Il est évident que l'on peut déduire de là un moyen d'apprécier la valeur didactique des méthodes employées pour l'exposition d'une science mathématique et, jusqu'à un certain point, une sorte d'échelle d'avancement de cette science.

La valeur didactique peut même se juger à un double point de vue, soit qu'il s'agisse de comparer deux ouvrages exposant une même partie de la science en employant la même méthode fondamentale, soit qu'il s'agisse de comparer les méthodes elles-mêmes. » (Lemoine, 1889).

C'est donc un calcul de complexité que propose Lemoine, pour lequel il définit un véritable langage de programmation dans lequel il exprime les algorithmes.

La géométrographie

Le 16 juillet 1888, Julien Haton de la Goupillière (1833-1927) présente un résumé de deux pages (Lemoine, 1888a) de « cette idée nouvelle quoique fort naturelle, sans aucune racine dans le passé ni aucune idée s'y rapportant même d'une façon lointaine » devant les membres de l'Académie des sciences. Deux jours plus tard, Lemoine présente devant la SMF une première suite d'une dizaine de pages (Lemoine, 1888b) de sa communication à Oran qui en comportait 21. Enfin, dans *Mathesis*⁵, il publie en deux parties une dizaine de pages (Lemoine, 1888c). Ainsi, tous les publics potentiellement intéressés sont atteints dès le début de l'aventure.

Le but de la géométrographie est de traduire les raisonnements et constructions scientifiques à l'aide d'un langage formel, proche d'un langage de programmation, afin d'en calculer leur complexité – qu'il nomme *simplicité* – en termes d'opérations élémentaires, de les comparer, d'en améliorer l'efficacité. Lemoine termine son texte par la phrase :

« L'exposé de la méthode pour mesurer la simplicité est si simple qu'il y aurait, à notre avis, avantage à y employer quelques instants

5. Ce journal, destiné aux premières années de l'enseignement supérieur, est un médium de vulgarisation « de la connaissance des parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne ». Sont publiés dans chaque numéro des articles originaux, des solutions de questions choisies et des comptes rendus d'ouvrages scientifiques. » (Mansion et Neuberg, 1881, p. 1-2.)

dans une des leçons du cours de géométrie élémentaire » (Lemoine, 1889).

Formalisation des constructions des figures géométriques

Le principe

Partant du fait que « toute construction graphique est la répétition un certain nombre de fois de quelques opérations élémentaires », il s'agit, à partir d'un ensemble restreint d'opérations élémentaires $\{Op_1, Op_2, \dots, Op_n\}$, d'attribuer, à toute construction exécutable uniquement à l'aide de cet ensemble d'opérations :

- un symbole $Op : k_1Op_1 + k_2Op_2 + \dots + k_nOp_n$, dans laquelle $k_i \in \mathbb{N}$, k_i est le nombre fois que l'opération Op_i a été utilisée.
Ce symbole résume le résultat d'une construction géométrique.
- une mesure de coût $k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_nc_n$, dans laquelle *a priori* $k_i \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$, k_i est le nombre fois que l'opération Op_i a été utilisée dans la réalisation, c_i est un coefficient de coût de réalisation de l'opération Op_i .
Le coût étant une valeur dépendant de l'appréciation qu'on en fait, et hautement variable, Lemoine attribue dans tous ses travaux la valeur 1 à toutes les opérations de base, les considérant comme équivalentes, cette mesure devient alors
- la simplicité : $k_1 + k_2 + \dots + k_n$, « qui est le nombre total d'opérations élémentaires nécessaires à son exécution. »

Un exemple élémentaire : description des déplacements dans un quadrillage

En cycle 2, une activité classique est de représenter les déplacements sur un quadrillage par une séquence de flèches, qui sont les déplacements élémentaires. En général, on a les quatre opérations élémentaires

Op_1	Op_2	Op_3	Op_4
$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Ce qui intéresserait Lemoine, ce serait l'étude comparative des déplacements valides proposés qui permettent de passer d'une case du quadrillage à une autre en fonction des quatre opérations fournies. Par exemple, les trois déplacements $D_1 : \rightarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow$, $D_2 : \downarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$, $D_3 : \downarrow \rightarrow \rightarrow$ et $D_4 : \rightarrow \downarrow \rightarrow$ conduisent à partir de la même case au même endroit. D_3 et D_4 ont même symbole : $2 \rightarrow +1 \downarrow$; D_1 a comme symbole $3 \rightarrow +1 \leftarrow +1 \uparrow +2 \downarrow$ et D_2 a comme symbole $2 \rightarrow +1 \uparrow +2 \downarrow$. Pour la mesure de complexité, il y a le choix. Par exemple, un coût identique pour chacune des opérations, permet de privilégier les chemins minimaux : il y en a trois parmi lesquels D_3 et D_4 de simplicité +3, D_1 et D_2 étant de simplicité 7 et 5 respectivement.

Constructions à la règle et au compas

Son passage à l'École d'architecture a rendu Lemoine familier avec les constructions des épures, qui « se construisent ordinairement au moyen de la règle et du

compas ». Il va s'intéresser essentiellement aux constructions à la règle et au compas, avec parfois l'équerre.

- Avec la règle on ne peut faire que deux opérations élémentaires :

R1 Placer le bord d'une règle par *un* point placé

R2 Tracer une ligne en suivant les bords de la règle (ou d'un côté de l'équerre) ;

- avec le compas, il y a trois opérations élémentaires :

C1 Mettre *une* pointe du compas sur un point placé

C2 Mettre une pointe du compas en un point *indéterminé* d'une ligne tracée

C3 Tracer le cercle.

- Si l'on ajoute l'équerre, il faut ajouter à R1 et R2 les deux opérations élémentaires :

E1 Placer un côté de l'équerre le long d'une règle ou une règle le long d'un côté de l'équerre.

E2 Faire glisser l'équerre sur la règle.

Faire passer le bord d'une règle par *deux* points nécessite deux opérations (R1). Le symbole du traçage d'une droite passant par deux points donnés est $2R1 + R2$, sa simplicité est 3, alors que le symbole du traçage d'une droite passant par un seul point donné est $R1 + R2$, de simplicité 2, et le symbole du traçage d'une droite quelconque est $R2$, de simplicité 1. Prendre une distance de deux points placés avec le compas nécessite deux opérations (C1), sa simplicité est 2.

Le tracé d'un cercle quelconque⁶ a pour symbole $C2 + C3$, de simplicité 2.

Lemoine (1888b) examine une trentaine de constructions⁷ à la règle et au compas du *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse, qui s'adresse aux candidats aux « écoles spéciales », c'est-à-dire les grandes écoles scientifiques. On trouve dans la liste, bien évidemment, plusieurs constructions de triangles (Rouché & Comberousse, 1883) :

- Construire un triangle connaissant un côté et ses deux angles adjacents, de symbole $4R1 + 3R2 + 12C1 + C2 + 7C3$ et de simplicité 27.
- Construire un triangle ABC connaissant deux côtés et l'angle qu'ils définissent, de symbole $5R1 + 2R2 + 8C1 + 4C3$ et de simplicité 19.
- Construire un triangle ABC connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, de symbole $4R1 + 3R2 + 10C1 + C2 + 5C3$ et de simplicité 23.
- Construire un triangle connaissant les trois côtés, de symbole $4R1 + 3R2 + 8C1 + C2 + 3C3$ et de simplicité 19.

La construction suivante illustre la démarche. Il s'agit de la construction IX détaillée dans (Lemoine, 1889) : *par un point A, pris hors d'une droite BC, mener une parallèle à cette droite.*

6. Le compas est supposé avoir toujours un certain écart entre ses deux pointes.

7. Lemoine suppose toujours les données posées à part, l'espace de construction est complètement vide au départ (Lemoine, 1889).

« Du point A comme centre, avec une ouverture arbitraire, je décris l'arc DC (op. C1+C3); de C comme centre, avec la même ouverture, je décris l'arc AB (op. C1+C3); je prends la longueur AB (op. 2C1) et de C comme centre, avec cette longueur AB comme rayon, je décris une circonférence (op. C1+C3), qui coupe en D l'arc DC, puis je trace AD (op. 2R1+R2).

Résultat [symbole] : $2R1+R2+5C1+3C3$

Simplicité : 11 »

Il introduit la notion de *construction géométrographique*, qui est la/les solution(s) connue(s) les plus simples. En fait, Lemoine est bien conscient que le symbole est ce qui caractérise le mieux la complexité de la construction, ce qui fait que la relation de complexité devient un simple ordre partiel.

À la fin de la contribution, il reprend le problème en ajoutant l'équerre :

« Je mets l'hypoténuse de l'équerre en contact avec BD (op. 2R1); je place la règle le long d'un côté de l'équerre (op. E1); je fais glisser l'équerre jusqu'à ce que l'hypothénuse passe en A (op. E2+R1); je trace une ligne le long de l'hypothénuse (op. R2)

Résultat [symbole] : $3R1+R2+E1+E2$

Simplicité : 6 »

Le résultat confirme donc l'utilité de l'équerre. L'utilisation de l'équerre permet à Lemoine de montrer l'« universalité » de sa méthode, en proposant ici une extension du système règle compas. Mais, comme géomètre, il écrira (Lemoine, 1902, p. 17) :

« Nous allons donner ici les symboles de l'équerre, car sauf lorsqu'on exige une haute précision, l'équerre est admise généralement pour les constructions des figures de Géométrie, surtout pour les tracés de la géométrie descriptive. »

Lemoine termine la série des constructions à la règle et au compas par la construction d'un point donné par ses coordonnées cartésiennes x , y , relatives à deux axes donnés, soit rectangulaires soit obliques. Dans le premier cas, la simplicité est 16 ($4R_1+2R_2+7C_1+3C_3$), dans le second 19 ($2R_1+R_2+11C_1+5C_3$). Cette comparaison des deux systèmes de coordonnées est l'objet d'un article (Lemoine, 1888b).

15 constructions sont reprises dans la première partie d'un troisième article sur les 23 exemples proposés (Lemoine, 1888c). La seconde partie traite, sans le nommer, du fameux problème des trois cercles d'Apollonius concernant la construction à la règle et au compas d'un cercle tangent à trois cercles donnés. Il y compare les solutions d'Étienne Bobillier (1798-1940) et Joseph Diez Gergonne (1771-1859) d'une part et de François Viète (1540-1603) d'autre part. Il conclut : « Les résultats des deux méthodes n'ont pas été sans me laisser une vive surprise et elle *a été partagée par tous ceux auxquels je les ai montrés*⁸ ». Lemoine reprendra ce problème dans un nouvel article (Lemoine, 1892b), dans lequel il compare selon les mesures de la géométrographie quatre solutions que nous résumons Table 12.1.

8. En gras dans le texte.

Exactitude et construction géométrographique (1892)

En 1892, Lemoine présente au congrès de Pau un mémoire de 65 pages contenant 65 constructions parmi lesquelles des « simplifications » de la plupart des constructions présentées précédemment et une nouvelle mesure : l'*exactitude* (Lemoine, 1892b).

En effet il y a deux catégories d'opérations élémentaires : les opérations de tracés (de dessin) proprement dites comme $R2$ et $C3$ et les opérations préparatoires (de positionnement des instruments), comme $R1$, $C1$, $C2$, $E1$ et $E2$ dont dépend l'exactitude du tracé. Ainsi, la mesure d'exactitude ne va retenir que les opérations préparatoires. Plus elle sera élevée, moins la construction risque d'être exacte. Lemoine a bien conscience que les termes logiques auraient été coefficient de complication et coefficient d'inexactitude, mais il justifie ses choix par la recherche visée (note de la page 37). Pour décrire une construction, Lemoine donne son symbole, la simplicité, l'exactitude, le nombre de cercles et de droites tracés. À chacun de choisir la construction qui lui convient le mieux d'après ces paramètres. Ainsi la construction IX, *tracer un angle droit ou tracer deux droites perpendiculaires entre elles*, possède-t-elle :

- trois constructions géométrographiques pour la règle et le compas, de simplicité 8, d'exactitude 4, dont deux produisant 3 droites et 1 cercle et une 2 droites et deux cercles,
- une construction géométrographique avec règle compas et équerre de simplicité 4, d'exactitude 2, produisant 2 droites.

Quant au problème des trois cercles d'Apollonius, le tableau 12.1 résume les quatre solutions étudiées dans (Lemoine, 1892a).

TABLE 12.1 – Le problème des 3 cercles d'Apollonius

solution	expression algébrique	simplicité	exactitude	droites	cercles
Viète	$52R1+26R2+98C1+C2+58C3$	235	151	26	58
Bobillier & Gergonne	$120R1+60R2+104C1+72C3$	356	224	60	72
Fouché	$112R1+56R2+53C1+26C3$	247	165	56	26
Mannheim	$108R1+54R2+20C1+10C3$	192	128	54	10

La conclusion de son étude sur le problème d'Apollonius, reste la même que précédemment :

« La moins bonne construction est donc la célèbre et didactiquement élégante solution de Bobillier et Gergonne ; son coefficient de simplicité, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires qu'elle exige est 356. Cela surprendra certainement au premier moment beaucoup de géomètres ; j'ai été bien surpris moi-même. »

Cette remarque qui oppose *élégance didactique* d'une part, et *efficacité* d'autre part est un des points importants concernant la réception immédiate de la géométrographie. Gaston Gohierre de Longchamps (1842-1906), dans son *Journal de*

Mathématiques élémentaires qui accueille plusieurs interventions de Lemoine sur le sujet, développe cette opposition (Longchamps, 1896, p.13) :

« La simplicité géométrographique, telle que l'a conçue M. Lemoine, ou telle qu'on pourra la concevoir en modifiant peut-être certains points, et la simplicité géométrique, sont deux choses très différentes – souvent opposées –. Il importe de signaler encore la distinction qu'il convient de faire entre ces deux ordres de simplicité. Pour éviter toute ambiguïté, on pourrait peut-être les distinguer en les dénommant *simplicité théorique* et *simplicité graphique*. »

La réception de la géométrographie

Lemoine publie ses travaux sur la géométrographie de 1888 à 1902 dans plus d'une trentaine de publications⁹, dont une dizaine aux congrès de l'AFAS, dans des journaux destinés à l'enseignement supérieur (*Mathésis*, les *Nouvelles annales*, les *Journaux de mathématiques élémentaires et spéciales*), dans le bulletin de la SMF (2), les comptes rendus de l'académie (2)) et dans plusieurs congrès et revues étrangers (*Chicago Congress Papers*, *Mémoires de la société physico-mathématique de Kasan*, les *comptes rendus de la société mathématique d'Edinbourg*, le *bulletin de la société mathématiques américaine*, le *Journal de Ciencias Mathematicas e Astronomicas*¹⁰, *El Progreso Matemático*¹¹, *Archiv der Mathematik und Physik*).

Dès ses premières conférences et publications en 1888, il est rejoint par un enseignant de mathématiques et un administrateur financier. Évariste Bernès (1831-1903), professeur de mathématiques à Louis le Grand, lit *Mathésis* et le *journal de mathématiques élémentaires*. Gaston Tarry (1843-1913) est contrôleur des contributions à Alger et possède aussi son point du triangle¹². Ce dernier est un habitué des congrès de l'AFAS et un grand amateur de problèmes combinatoires, de créations mathématiques et carrés magiques, (voir par exemple (Barbin & al., 2017)), rechercher les solutions géométrographiques des constructions est un jeu qui ne peut que le séduire. Émile Lemoine publie en 1902 une synthèse « pédagogique » (Lemoine, 1902) dans laquelle il donne les réalisations géométrographiques de quelques 70 constructions. Dans son avant-propos, il écrit :

« Toutes les solutions classiques ont alors été étudiées par nous trois, les constructions qu'on en déduisait mesurées par mon étalon ; je notais au fur et à mesure chaque perfectionnement trouvé, chaque solution nouvelle proposée et que je reconnaissais préférable aux précédentes ; chacun de nous simplifiait encore s'il le pouvait ce que l'autre avait fait, et je classais dans un dossier le dernier résultat qui restait, jusqu'à nouveau progrès, la *construction géométrographique* de la question. »

9. Nous nous sommes fondé sur les données fournies par l'Electronic Research Archive for Mathematics Jahrbuch Database.

10. Revue internationale portugaise fondée en 1877 par le mathématicien Francisco Gomes Teixeira (1851-1933).

11. Première revue de mathématiques pures et appliquées espagnole, publiée par l'université de Saragosse à partir de 1895.

12. Voir par exemple, <https://mathworld.wolfram.com/TarryPoint.html>.

La notion de simplicité est une notion subjective que la géométrographie essaie de quantifier selon un certain point de vue. Ce qu'écrit de Longchamps témoigne de la différence fondamentale entre théoriciens et praticiens. Les premiers préfèrent une solution simple et élégante, les seconds une solution efficace. Des enseignants comme Rouché l'ont introduite dans leurs cours.

L'efficacité est également dépendante du médium utilisé. Un dessinateur industriel ou un architecte n'est pas la tortue de Python ou de géoTortue. Un dessinateur cherchera un compromis entre efficacité en nombres d'opérations à exécuter et efficacité à mémoriser la suite des instructions, cela explique ce qu'en dit en 1949 André Sainte-Laguë (1882-1950) et Henri Masson, cités dans (Tournès, 2000).

« Pendant quelques années, la géométrographie a passionné les géomètres, avant de tomber rapidement dans l'oubli. Elle semblait de nature à faire économiser beaucoup de temps aux dessinateurs, mais les espoirs placés en elle s'évanouirent. En effet, les calculateurs graphiques ont préféré conserver les constructions classiques, relativement longues mais faciles à retenir, car se déroulant selon un ordre logique, plutôt que d'adopter les constructions optimisées artificielles de la géométrographie. » (Sainte-Laguë & Masson, 1949, p. 219)

L'oubli n'a cependant pas été total, la géométrographie a subsisté au niveau international. Howard Eves (1911-2004) en décrit la méthode (Eves, 1976), que Duane DeTemple utilise pour l'étude des cercles de Carlyle (DeTemple, 1991) cité dans un bulletin de l'APMEP concernant les constructions géométriques (Arnau-dies & Delezoide, 2003). La géométrographie est également étudiée dans un article didactique sur l'enseignement de la géométrie au collège par Yves Chevallard et Michel Jullien (Chevallard & Jullien, 1991). Quant à nous, nous utilisons depuis une dizaine d'années régulièrement la géométrographie (Lemoine, 1902) pour la formation des professeurs de la maternelle à l'université, tant la démarche, aussi bien dans ses aspects positifs que négatifs, est actuelle, étant donné l'aspect de plus en plus procédural, y compris dans les raisonnements, des mathématiques.

L'actualité de la géométrographie

L'informatique, l'automatisme permettent de repositionner Lemoine comme précurseur. Michel Chein mentionne la géométrographie comme exemple d'analyse de la complexité des algorithmes (Chein, 1982), ce qui n'est pas le cas de Donald Ervin Knuth. Les opérations élémentaires données par Lemoine sont sans arguments car ses mesures ne tiennent pas compte des longueurs des tracés ni de la situation des points. Chaque construction décrite à l'aide de ces opérations peut être réutilisée ensuite au sein d'une construction plus complexe, comme un module de programmation. On peut donc dans la géométrographie trouver les prémices d'un système de programmation débranchée.

Du point de vue algorithmique

Lemoine clairement présente le tracé géométrique comme l'exécution d'un algorithme avec deux types d'opérations, les manipulations d'instruments et les tracés successifs à la règle et au compas, associée à deux mesures de complexité : une mesure quantitative de coût ou simplicité du programme qui compte de façon pondérée ou non le nombre de traitements élémentaires, et une mesure qualitative d'exactitude, concernant la qualité du tracé, qui dépend du nombre de manipulations des instruments. Plus il y a de manipulations, plus des erreurs peuvent apparaître dans la précision du tracé. L'usage de robots ou d'ordinateurs permet de palier cette seconde mesure.

Lemoine donne une définition de la complexité des algorithmes par la mesure de coût

$$k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_nc_n$$

dans laquelle *a priori* $k_i \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$, k_i est le nombre fois que l'opération Op_i a été utilisée dans la réalisation, c_i son coût. Dans la terminologie actuelle, ce coût est très exactement la complexité en temps de l'algorithme. Mettre tous les coefficients de coût égaux à un est une pratique courante en complexité.

Du point de vue de la construction des algorithmes, le langage des instructions élémentaires est parfaitement défini, et propose une unique structure de contrôle : la séquence. Ce système permet déjà d'introduire les questions usuelles de la théorie de la calculabilité (Autebert, 1992) : déterminer ce qui est calculable dans ce système ; trouver les mesures de complexité appropriées et comparer les algorithmes selon ces mesures de complexité.

Du point de vue abstrait

L'ensemble des instructions élémentaires forment un alphabet. Pour les constructions à la règle et au compas, cet alphabet est l'ensemble $A = \{R1, R2, C1, C2, C3\}$. La construction s'exprime par un mot écrit avec cet alphabet. Par exemple, la construction qui résout le problème 2 est représentée par le mot $C1C3C1C3C1C1C1C3R1R1R2$. Le résultat associé, $2R1+R2+5C1+3C3$, est une façon de représenter le vecteur de Parikh¹³ du mot. La simplicité est la somme des coefficients.

Cette approche permet d'utiliser le calcul sur les vecteurs pour agencer les différentes parties d'une construction complexe qui utilisent des constructions plus simples.

Du point de vue pratique, les critiques concernant la pertinence d'utiliser le programme le plus performant selon une mesure est présent dans le développement des programmes que l'on souhaite durable, réutilisable, donc facilement modifiable. On préférera parfois quelque chose de moins performant mais bien structuré et comportant des redondances pour résister aux pannes. Les amis de la géométhrographie étaient pour certains assimilables à des geeks.

13. Vecteur de dimension cardinal de A, obtenu en attribuant au k^e rang le coefficient associé à Op_k . Pour les constructions à la règle et au compas, le vecteur de Parikh est de dimension 5. Il vaut (2,1,5,0,3) pour l'exemple.

Du point de vue de la formalisation du raisonnement

L'application de la méthodologie développée dans la géométhrographie au raisonnement scientifique se retrouve comme la base du raisonnement automatique et des assistants de preuves (Genevès, 2004). La lourdeur du processus de formalisation des raisonnements reste le point négatif que m'a confirmé Micaela Mayero, qui travaille dans ce domaine avec le logiciel d'assistant de preuve Coq¹⁴ (Mayero, 2001 ; Boldo & *al.*, 2017). Cependant, ajoute-t-elle, « le point positif, qui prend une importance croissante avec le développement de ces outils, reste toujours la rigueur des raisonnements permettant d'obtenir une très forte assurance de l'absence d'erreur, à la base de toute vérification de problèmes critiques ».

Des pistes d'activités dans l'esprit de la géométhrographie

Au-delà de l'application directe de la géométhrographie en utilisant la règle et le compas – papier-crayon ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra –, ou d'autres instruments comme la règle équerre – cf. les fiches de Doriane Lautier¹⁵ –, l'on peut dès les débuts de l'enseignement prendre appui sur la méthode pour développer l'esprit critique concernant la notion même de simplicité/complexité, de mesure et dériver vers d'autres enjeux fondamentaux comme la distinction entre *processus* et *produit*, *objets* et *représentations*.

On peut travailler sur deux axes : faire varier les coûts des mesures ou faire varier l'ensemble des actions élémentaires autorisées. En proposant et en donnant aux élèves l'initiative des propositions, puis en débattant de l'intérêt des résultats, on développe l'esprit critique envers le choix des mesures : quelles sont les données prises en compte ? Que veut-on mettre en évidence ?

Le fait de varier la liste des opérations autorisées met en évidence les deux sens du terme *construction* : le processus de production – l'algorithme – et le produit – son résultat, ce que la langue française ne fait pas. Cet état de fait contribue à la confusion ultérieure entre objets mathématiques, comme les nombres et leurs représentations. Le processus de construction s'appuie sur des objets de base ou précédemment construits et des actions permises sur ces objets, la difficulté de construction de l'objet dépend des moyens mis à disposition. La mesure de simplicité d'une construction décrit le processus bien plus que l'objet, comme le met en évidence la construction d'un cercle soit avec le compas soit uniquement par des segments. Changer de système, c'est aussi apprendre à travailler dans des langages et donc des systèmes de représentation différents. Nous esquissons pour terminer deux exemples de mise en œuvre. Le premier reprend l'exemple des déplacements dans un quadrillage, le second propose une activité de programmation pour faire « dessiner » à une tortue un cercle.

14. Coq est un assistant de preuve, il fournit un langage et un environnement pour écrire des définitions et des preuves mathématiques, fondés sur le Calcul des Constructions Inductives.

15. Accessible sur le site <https://www.aleph-maths.fr/content/19-fiches-d-usage>, consulté le 24 octobre 2019.

Déplacements sur un quadrillage

En reprenant l'exemple des déplacements sur un quadrillage, on peut choisir un coût +1 (pour un gain) pour $\uparrow$ et $\rightarrow$ et -1 (pour une perte) pour $\downarrow$ et $\leftarrow$ ¹⁶, ce qui donne la même simplicité de 3 pour tous les chemins possibles. Un élève de cycle 3 a fait remarquer que si l'on ne trouvait pas 3, soit on s'était trompé dans le calcul soit le chemin n'était pas le bon. Nous avons cette fois là embrayé sur la notion de condition nécessaire (il faut que)/suffisante (il suffit que) – tous les chemins de simplicité 3 étaient-ils des chemins valides ? – et comment faire valider des opérations d'addition et de soustraction de nombres et mettre en évidence les propriétés de ces opérations en ne considérant qu'une seule dimension. On peut ensuite généraliser en transformant le quadrillage pour permettre les déplacements en diagonale en ajoutant des flèches obliques $\swarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow$. Il y a alors 5 parcours possibles, dont deux parcours géométrographiques : $\rightarrow \searrow$ et $\swarrow \rightarrow$ de simplicité 2. En autorisant un pas de cavalier du jeu d'échec, la simplicité géométrographique devient 1. On peut également généraliser à un espace de dimension quelconque.

Nous avons proposé plusieurs modalités sur un quadrillage au sol avec un enfant – niveau grande section de maternelle – qui exécute les déplacements selon les indications d'un camarade (possibilité de faire un quart de tour ou de rester toujours dans la même direction, de reculer ou de faire demi-tour, ...). Pour la modalité : pas de changement d'orientation, le coût choisi après plusieurs parcours réalisés sous ma dictée a été : un pas avant ou un pas arrière +1, un pas à droite ou à gauche +3 après rude négociation pour traduire *beaucoup* et pouvoir faire les calculs – compte-tenu du problème de latéralisation de certains enfants.

De la géométrographie à GeoTortue

GeoTortue a été développé en 2008 par Salvatore Tummarello au sein du groupe collège de l'IREM Paris Nord, qui a développé de nombreuses activités de géométrie¹⁷. Ce langage est fondé sur le langage LOGO, conçu et développé au M.I.T. par l'équipe de Seymour Papert (1928-2016) dans un but pédagogique¹⁸ dans les années 1970 (Papert, 1981).

« Dans ma vision des choses, l'enfant programme l'ordinateur et, ce faisant, acquiert la maîtrise de l'un des éléments de la technologie la plus moderne et la plus puissante, tout en établissant un contact intime avec certaines notions les plus profondes de la science, des mathématiques, et de l'art de bâtir des modèles intellectuels. »

Papert situe résolument son projet dans une perspective piagétienne en arguant du fait – que nous partageons – que ce qu'un individu peut apprendre, et la façon de l'apprendre dépendent des différents modèles dont il dispose.

GeoTortue est un véritable langage de programmation, très proche de la Turtle de Python, qui offre une interface conçue pour éviter la dispersion et pour que la

16. Pour des élèves de cycle 4 et plus, on peut proposer +1 pour $\uparrow$, $+\pi$ pour $\rightarrow$, -1 pour $\downarrow$ et $-\pi$ pour $\leftarrow$ pour marquer les deux directions possibles.

17. Consultable sur le site : www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article32.

18. Contrairement à Scratch, développé aussi au M.I.T. mais dans un but ludique, pour les clubs. Voir par exemple <https://scratch.mit.edu>

programmation soit le seul moyen d'action de l'élève et dont la qualité de rendu du dessin est un facteur de motivation et de satisfaction du travail bien fait ¹⁹. Ce langage de programmation repose sur l'utilisation d'un langage de communication *performatif* spécial « tortue », qui possède au départ un langage très réduit – avance/recule de n pas : *av* n , *re* n ; tourne vers la droite/gauche de n degrés : *td* n , *tg* n – que l'élève peut enrichir. L'élève devient le maître qui dicte, en utilisant les termes justes pour se faire comprendre, la conduite de la tortue, de plus en plus sophistiquée.

La géométrie de la tortue – algorithmique – est une géométrie intuitive, liée aux déplacements dans le plan (ou dans l'espace), au côté de la géométrie axiomatique (logique) d'Euclide et Descartes. Elle développe, tout comme la géométrographie, une pensée algorithmique : une construction, sa complexité, recherche d'un minimum de complexité. Pour GeoTortue, une nouvelle mesure de complexité apparaît naturellement au côté du nombre d'opérations que doit faire la tortue pour réaliser le programme : le nombre d'instructions. Cette mesure est orientée programmeur et prend toute son importance dès l'introduction de structures de contrôle comme la répétition, puis plus tard les différentes boucles et surtout les procédures, qui correspondent aux nouveaux mots appris par la tortue. On pourra aussi vouloir mesurer le temps d'exécution du programme par la machine – la tortue – et constater que certaines instructions prennent plus de temps que d'autres ...

Pour faire un carré de 100 pas de tortue avec retour de la tortue en position initiale, on commencera par écrire : « *av* 100 ; *td* 90 ; *av* 100 ; *td* 90 ; *v* 100 ; *td* 90 ; *av* 100 ; *td* 90 » de simplicité en nombre d'instructions 8 ; puis on écrira « *Repeat* 4 [*av* 100 ; *td* 90] » de simplicité en nombre d'instructions 3 ; et si on lui a appris la notion de carré de longueur L , *carré* 100 est de simplicité en nombre d'instructions 1 alors que la tortue exécute à chaque fois exactement le même nombre de déplacements, en revanche elle doit mémoriser plus de choses dans les deux derniers programmes. Ces considérations rejoignent celles de Lemoine introduisant la mesure d'exactitude de la géométrographie.

La construction d'un carré ne figure pas dans les constructions examinées par Lemoine, contrairement à la construction d'un cercle quelconque, quatrième construction donnée dans (Lemoine, 1902, p. 19). Demander à la tortue de dessiner un cercle permet de travailler sur la différence entre *construction* et *perception* d'une figure, et donc de travailler sur la notion d'approximation. En effet, la tortue ne trace que des figures composées de segments. L'approche du cercle par des polygones réguliers est une démarche d'autant plus naturelle que l'axiome de base de la tortue, qui est aussi celui de tout individu « orienté », issue de l'expérience est que *Pour décrire une ligne simple fermée, et revenir à sa position initiale, la tortue doit faire un tour complet*. En travaillant sur des programmes de polygones comme « *rep* 4 (*av* 120 ; *td* 90) », « *rep* 8 (*av* 60 ; *td* 45) », « *rep* 12 (*av* 40 ; *td* 30) », « *rep* 24 (*av* 20 ; *td* 15) », « *rep* 48 (*av* 10 ; *td* 7.5) » la figure tracée ressemble de plus en plus à un cercle. On voit un cercle pour le dernier tracé, alors que le programme décrit un polygone de 48 côtés, que l'on peut faire apparaître en utilisant

19. Nos étudiants stagiaires professeurs des écoles et certifiés constatent régulièrement qu'après avoir travaillé avec GeoTortue, les élèves s'appliquent mieux dans leurs constructions avec les instruments sur papier.

la fonction zoom de l'interface²⁰. Le calcul de la simplicité de ces constructions du point de vue des déplacements de la tortue montre que celle-ci est proportionnelle au nombre de côtés du polygone tracé.

Conclusion

Nous espérons avoir convaincu le lecteur de l'intérêt de l'approche de Lemoine développée dans la géométhrographie non seulement comme modèle intéressant pour une première initiation à l'algorithmique et l'étude du concept de complexité des algorithmes, mais également comme champ d'investigation de notions fondamentales des mathématiques, notamment celles d'objets et de représentations.

Références bibliographiques

- ARNAUDIES Jean-Marie & DELEZOÏDE Pierre, 2003, « Constructions géométriques par intersections de coniques (II) », *Bulletin de l'APMEP*, n° 447, p. 505-516.
- AUTEBERT Jean-Michel, 1992, *Calculabilité et décidabilité. Une introduction*, Paris, Masson.
- AUTEBERT Jean-Michel, DÉCAILLOT Anne-Marie & SCHWER Sylviane, 2003, « Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes d'Édouard Lucas », *Gazette des Mathématiciens*, Société Mathématiques de France, 95, p. 51-62.
- BARBIN Évelyne, GOLDSTEIN Catherine, MOYON Marc, SCHWER Sylviane & VIGNATIER Stéphane (dir.), 2017, *Les travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité. Un hommage à Henri Delannoy*, Limoges, Presses universitaires de Limoges.
- BOLDO Sylvie, CLÉMENT François, FAISOLE Florian, MARTIN Vincent, MAYERO Micaela, 2017, « A coq formal proof of the laxmilgram theorem » in *Proceedings of the 6th ACM SIGPLAN Conference on Certified Programs and Proofs, colocated with POPL 2017, CPP 2017*, Paris, p.79–89.
- BOUCARD Romain, CHEVALARIAS Thierry, COILLOT Jérôme, DEBERTONNE-DASSULE Florence, DE LIGHT Frédéric, GAUD Matthieu, GUICHARD Jean-Paul, MERCIER Jean-Paul, REDONDO Cyril 2017, *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs*, brochure du Groupe Collège, IREM de Poitiers.
- CHEIN Michel, 1982, « Analyse de la complexité des programmes, des algorithmes et des problèmes », *Quelques thèmes de la théorie des algorithmes*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, fascicule 1B, p. 1-13.
- CHEVALLARD Yves & JULLIEN Michel, 1991, « Autour de l'enseignement de la géométrie au collège », *Petit x* n° 27, p. 41-76.

20. Les fiches d'activités Logo proposées par le groupe collège de l'IREM Paris Nord disponible sur http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article530#ancree_Des%20cercles%20et%20des%20variables permettent de construire une séquence à partir du cycle 3, en utilisant la tortue de Python dès la seconde.

- DETEMPLE Duane W., 1991, « Carlyle circles and the Lemoine simplicity of polygon constructions », *The American Mathematical Monthly*, 98, 2, p. 97-108.
- EVES Howard, 1976, *An Introduction to the History of Mathematics*, 4th edition, New York, Holt, Rinehart and Winston.
- GENEVÈS Bernard, 2004, *Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique*, thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- KESSLER Charles et LEMOINE Émile, 1860, « Solution de la question 492 », *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechniques et normale*, Série 1, Tome 19, p. 91-93.
- LAISANT Charles-Ange et LEMOINE Émile, 1893, « L'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématiques », extrait de *Revue générale des sciences pures et appliquées*, .22, Paris, G. Carré.
- LEMOINE Émile, 1888a, « De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 107, p. 69-71.
- LEMOINE Émile, 1888b, « Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 16, p. 162-172.
- LEMOINE Émile, 1888c, « De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques », *Mathesis*, 8, p. 217-222, 24-24.
- LEMOINE Émile, 1889, « De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques », AFAS, *Comptes rendus des congrès*, Oran, 17^e session, 2, p. 75-95.
- LEMOINE Émile, 1892a, « Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius », *Nouvelles annales de mathématiques*, Série 3, 11, p. 453-474.
- LEMOINE Émile, 1892b, « La géométrographie où l'art des constructions géométriques », AFAS, *Comptes rendus des congrès*, Pau, 21^e session, 2, p. 36-100.
- LEMOINE Émile, 1902, *Géométrographie, ou art des constructions géométriques*, Paris, C. Naud.
- LONGCHAMPS Gaston (de), 1896, « Correspondance », *Journal de mathématiques élémentaires*, Paris, Delagrave, p. 13-15.
- MANSION Paul & NEUBERG Joseph, 1881, *Mathesis*, Gand, Hoste, Paris, Gauthier-Villars.
- MAYERO Micaela, 2001, *Formalisation et automatisation de preuves en analyses réelle et numérique*. thèse de doctorat, Université Paris VI.
- MEN, 2015a, Bulletin Officiel Spécial 2, 2015-03-26, Programme d'enseignement de l'école maternelle, p. 18.
- MEN, 2015b, Bulletin Officiel Spécial 11, 2015-11-26, Cycle 2, Mathématiques, p. 83.
- PAPERT Seymour, 1981, *Jaillissement de l'esprit*, Paris, Flammarion.
- REYNAUD Antoine, 1811, *Traité d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique*, 6^e édition, Paris, Courcier.
- ROUCHÉ Eugène & COMBEROUSSE Charles (de), 1866 *Traité de géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 5^e éd. 1883, 7^e éd. 1900.

- SAINTE-LAGÛE André & MASSON Henri, 1949, *L'utilisation pratique des mathématiques. Calcul numériques et graphiques*, Paris, Eyrolles.
- SHALLIT Jeffrey, 1994, « Origins of the analysis of the Euclidean algorithm », *Historia Mathematica*, 21, p. 401-419
- SMITH David, 1896, « Émile-Michel-Hyacinthe Lemoine », *The Amer. Monthly*, 3, p. 29-33.
- TOURNÈS Dominique, 2000, « Pour une histoire du calcul graphique », *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, p. 127-161.

Remerciements

Je voudrais ici remercier l'ensemble des relecteurs en particulier Jean-Paul Guichard, pour le travail important qu'ils ont accompli et sur la forme et sur le fond – tant historique que pédagogique – de ce chapitre.