11

La géométrie pour justifier ou inventer des algorithmes : Autour des *Métriques* de Héron d'Alexandrie

Alain Bernard

Introduction

Les récents programmes de collège ont donné une place remarquée à l'algorithmique et la programmation, suivant le vœu déjà exprimé depuis plusieurs années dans le rapport Kahane sur l'enseignement des mathématiques (Kahane, 2002). D'autre part l'enseignement de la géométrie a retrouvé quelques couleurs, par l'introduction de thèmes très porteurs pour une activité de démonstration : les cas d'égalités de triangles ou les triangles semblables par exemple [1]. Cependant, les liens entre les activités de preuve, et plus particulièrement celle de démonstration, réputées pourtant centrales en mathématiques et souvent associées à l'apprentissage de la géométrie, et l'apprentissage de l'algorithmique, sont plutôt ténus et ils ne sont signalés au mieux qu'au sujet des constructions géométriques [2]. Ce problème est précisément souligné dans les recherches récentes sur la place de l'algorithme comme objet mathématique à part entière, susceptible de différents types

∗. Ce texte n'aurait pu voir le jour sans plusieurs discussions intensives au sein du groupe « histoire et épistémologie » de l'IREM de Paris Nord. Un grand merci à Catherine Darley, Stéphane Herrero, Katalin Gosztonyi, Emmanuelle Rocher, pour leurs nombreuses remarques.

1. Voir la récente réécriture des programmes de collège (BO, 2018), sur le thème de la géométrie. Plus généralement, ces nouveaux programmes mettent en exergue l'importance de la démonstration.

2. Ces constructions sont envisagées à juste titre, à la fois comme moyen d'explorer les propriétés fondamentales de figures géométriques, et de procédures à étudier et mettre en œuvre. La contribution de Sylviane Schwer dans ce volume, qui renvoie aux travaux de géométrographie de Lemoine, se rapporte à cet aspect, ainsi que l'ouvrage inter-IREM *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (Barbin & alii, 2014) et nous y renvoyons le lecteur ou la lectrice.

de preuve [3]. Toutefois, ces mêmes recherches tendent à se focaliser sur un niveau élevé d'études et à marginaliser les algorithmes réputés simples et répondant au genre des « formules », comme les formules de calcul d'aire par exemple. Au sujet de ces dernières, on insiste souvent, à juste titre, sur la nécessité de construire des images mentales, de nature figurative ou géométrique, pour les retenir et les assimiler, mais l'aspect démonstratif est alors laissé de côté.

Dans cette contribution, nous proposons un point de vue un peu différent, permettant d'interroger la place d'une argumentation géométrique dans des phénomènes de justification ou d'invention d'algorithmes de calcul d'aires usuelles. Ce point de vue s'inspire directement des travaux de l'érudit polymathe alexandrin Héron d'Alexandrie et plus particulièrement des *Métriques*, un des ses traités qui a été récemment ré-édité, traduit en français et analysé par B. Vitrac et F. Acerbi (2014). Ce texte comprend pour l'essentiel une série de problèmes de mesure allant des figures les plus simples, comme le rectangle ou le triangle, jusqu'aux solides les plus complexes (des racines ou des pierres, par exemple), complété par des problèmes de division de figures ou de solides. Sa particularité est de comporter, dans un grand nombre de cas, des preuves de validation des « solutions » des problèmes de mesure en question. Ces dernières sont elles-mêmes données sous une forme algorithmique, c'est-à-dire comme un enchaînement d'étapes de calcul valable quelles que soient les données numériques.

Notre argument est que l'étude minutieuse des particularités stylistiques et logiques des preuves héroniennes, est susceptible de développer des pistes pédagogiques nouvelles pour l'introduction et surtout l'étude des « formules d'aires » du collège. Nous pensons en outre que cette nouvelle approche devient possible si ces « formules » sont d'abord comprises comme des algorithmes de calcul décrits sous une forme qui en permette l'étude géométrique. Nous montrerons ainsi que la lecture de Héron est susceptible de nourrir une réflexion stratégique sur un enseignement conjoint de la géométrie et de l'algorithmique, où l'enjeu de preuve devient central.

Nous résumons tout d'abord, en nous fondant sur les recherches évoquées plus haut, ce qu'on sait de Héron et du texte des *Métriques*, et détaillons le choix du corpus de problèmes qui nous servira ici de référence. Nous détaillons ensuite, à partir de deux exemples révélateurs, ce que sont les particularités de l'approche héronienne des problèmes de mesure. Nous reviendrons alors en conclusion sur notre argument pédagogique et didactique.

3. Voir (Modeste, Gravier, & Ouvrier-Buffet, 2010). L'exemple paradigmatique pris dans cette étude, la démonstration de la validité de l'algorithme d'Euclide, a un pendant historique évident dans le livre VII des *Éléments* d'Euclide. Cet exemple bien étudié expose une justification géométrique de l'algorithme de recherche d'une plus grande mesure entre deux nombres par soustractions successives et alternées. Voir (Chabert, 2010, Chapitre 4).

Éléments de contexte sur Héron d'Alexandrie et le textes des *Métriques*

Héron d'Alexandrie, aux multiples facettes

On sait peu de choses de la biographie Héron d'Alexandrie, et c'est une infortune qu'il partage avec la plupart des auteurs de textes à contenu mathématique (géométrie, arithmétique, astronomie, mécanique, musique ...) venus de l'Antiquité grecque, en raison de l'état lacunaire de nos sources, des particularités stylistiques des textes mathématiques anciens et du fait que les maigres indications biographiques que nous ayons sont le fruit de légendes ou de portraits « philosophiquement très orientés » [4]. Les arguments de datation les plus solides conduisent à situer sa période d'activité vers le Ier ou le IIe siècle de notre ère, sans qu'on puisse préciser davantage (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 15-22). Il existe un nombre important d'œuvres qui lui sont attribuées, mais plusieurs de ces attributions sont fausses ou au mieux très douteuses. C'est le cas, en particulier, pour un certain nombre de textes métrologiques dont l'objet se rapproche beaucoup du sujet des *Métriques*, mais dont le format diffère de ces dernières sur un point essentiel. En effet, ils ne comportent pas d'arguments démonstratifs validant les calculs de mesure proposés (*ibid.* p. 22-26).

Les œuvres qui lui sont attribuables, même à titre fragmentaire et dérivé, dessinent néanmoins un portrait nuancé et intéressant de l'auteur. On trouve divers traités de mécanique, allant de descriptions de machines de types variés, comme des machines pneumatiques (actionnées par l'eau ou l'air, ou permettant au contraire de les aspirer), des automates démontrant les capacités de la mécanique à imiter des mouvements naturels ou à faire illusion, des machines de guerre, des dispositifs de réflexion optique (catoptrique) jusqu'à des traités plus théoriques comme ses *Mécaniques*. On trouve encore un commentaire d'un texte savant comme les dix premiers livres des *Éléments* d'Euclide : on ne connaît que des fragments repris par des auteurs ultérieurs, mais son étendue indique qu'il s'agissait d'un travail conséquent et approfondi. On y trouve encore des textes de métrologie comme les *Métriques*, dont le niveau théorique dépasse très nettement les problèmes métrologiques qu'on trouve habituellement en grec. Ils attestent d'une connaissance approfondie de la géométrie théorique : Euclide, Archimède principalement. Enfin, un de ses traités combine un peu tous ces aspects : dans la *Dioptre*, Héron explicite l'usage d'une sorte de théodolite ancien dont il décrit en introduction la construction, pour la résolution de problèmes de distance ou d'aires inaccessibles. Le traité, outre que son architecture révèle à elle seule une pensée originale et en partie déductive (Barbin, 2018), est ponctuée de développements savants, comme celui qui permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de la simple donnée des côtés ou de fines allusions érudites (Vitrac, 2003) [5]. Le contenu de ses œuvres évoque donc l'activité d'une sorte d'ingénieur savant et érudit, intéressé à

4. Voir à ce sujet (Vitrac, 2013).

5. Cet esprit polymathe et érudit est bien illustré par plusieurs passages des *Métriques* qui viennent conclure les développements étendus et assez complets sur les mesures de figures, surfaces ou solides se rangeant à une définition géométrique identifiée. Voir *Métriques* I.39 ou II.20.

repenser à neuf la hiérarchie et la dignité des savoirs théoriques et pratiques. Dans l'Antiquité, on peut comparer l'ambition érudite de Héron à celle de Vitruve dans le monde Romain (*De Architectura*). S'appuyant sur des figures déjà classiques à son époque, notamment Philon d'Alexandrie et bien sûr d'Archimède, Héron défend une hiérarchie originale des savoirs qui subordonne les mathématiques à la mécanique [6]. Cette ambition rappelle celle d'ingénieurs savants de la Renaissance comme Jean Errard de Bar le Duc ou Simon Stevin, dont l'œuvre protéiforme reflète des préoccupations techniques, savantes et encyclopédiques.

Le seul fait qu'on lui ait attribué à tort bien d'autres ouvrages que ceux qu'il a rédigés, indique assez le prestige dont Héron jouissait déjà dans l'Antiquité [7]. L'érudition moderne, notamment au XIX^e siècle, a plutôt contribué à déformer son œuvre qu'à la mettre en valeur, et c'est bien plus récemment que l'on s'est intéressé à l'originalité et la complexité de son œuvre [8]. L'effet bienvenu de cette réhabilitation est de rappeler que la géométrie ancienne ne se limitait certainement pas au seul corpus savant de mathématiciens hellénistiques comme Euclide, Archimède ou Apollonius.

Le texte des *Métriques* : ce que nous savons, ce que nous pouvons en lire

Le texte des *Metrica* de Héron nous est connu par un unique manuscrit datant du X^e siècle, conservé aujourd'hui à Istanbul et édité très tardivement. Il contient d'autres œuvres de nature métrologique (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 88-90). Bruins, un des érudits qui s'est intéressé de près à ce manuscrit en a publié un fac-similé accompagné d'une transcription et d'une traduction anglaise (1964). Ce qui l'intéressait principalement était de restituer le travail des scholiastes [9], très visible et intéressant dans ce manuscrit, et témoignant parfois d'un travail de relecture et de compréhension qui est le plus souvent masqué au lecteur moderne. L'édition commentée de Vitrac et Acerbi rend quant à elle accessible au lecteur français l'intégralité du texte (sans les scholies toutefois) et se concentre davantage à la fois sur les particularités stylistiques du texte, et sur la question de ce qui est « authentiquement héronien » dans ce traité.

Comme la plupart des textes mathématiques grecs anciens, le manuscrit est rédigé en écriture continue (*scripto continua*), sans distinction nette entre les mots ou les phrases ni indentation, et sans « formule écrite » pour les calculs comme celles que nous utilisons, comme on le verra plus bas sur un ou deux exemples.

6. Pour des points de comparaison plus détaillés dans l'Antiquité, voir l'article de B. Vitrac précité (2013), et surtout son article sur les statuts respectifs de la mécanique et des mathématiques dans l'Antiquité (2009).

7. Pour la question complexe de ce qui est attribuable ou non à Héron, voir (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 22-26). Ce prestige était très considérable à la Renaissance, les *Pneumatiques* étant sans doute un de ses ouvrages alors les plus lus et admirés (Boas, 1949). Pour une traduction française du texte datant de la fin du XIX^e siècle, voir le site de Philippe Remacle http://remacle.org/bloodwolf/erudits/heron/pneumatiques.htm (consulté 6.11.2019).

8. (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 26-39)

9. Les scholiastes sont les auteurs (le plus souvent anonymes) d'annotations érudites (ou scholies) dans les manuscrits anciens. Ces annotations sont une des formes du commentaire dans l'Antiquité.

Ce mode d'écriture convient bien à un mode d'intellection des textes qui passe par une activité de lecture à haute voix, généralement faite collectivement, et par un processus de mentalisation progressive non seulement des concepts, mais aussi des opérations, procédures ou théorèmes dans le cas des mathématiques. Le lecteur moderne s'irrite facilement de ne trouver dans les textes anciens que des phrases répétitives et « imbuvables », par contraste avec les formules symboliques et condensées qui résument aujourd'hui sa pensée mathématique par écrit. Le lecteur ancien ne verrait pourtant dans ces artifices d'écriture que des aides mémoires tout juste bonnes à figurer dans des brouillons transitoires, alors que ce sont les formules oralisées et mentalisées qui lui servent, par excellence de support de travail [10]. Les extraits donnés plus loin permettront de mesurer cette différence essentielle, sur laquelle nous reviendrons en conclusion.

Un texte géométrique comme les *Métriques* s'appuie également sur ces auxiliaires visuels essentiels que sont les figures, nombreuses dans les *Métriques.* Elles s'ordonnent autour d'objets de plus en plus complexes, auxquelles s'ajoutent des variantes dues aux scholiastes. L'illustration ci-dessous (figure 1), reproduite du fac-similé du manuscrit, indique le double lettrage : les majuscules A, B, Γ, Δ pour dénoter les points associés aux figures, et les lettres précédées d'un *mu* surmonté d'un *omikron* pour *monas*, l'unité, ont une valeur numérique. Car les nombres ont en grec ancien une représentation figurée sous la forme d'un des systèmes de numération utilisés dans les textes savants, le système alphanumérique décimal mais non positionnel, qui associe des valeurs numériques aux lettres de l'alphabet grec étendu [11]. Ainsi Γ correspond à la valeur 3 et Δ à 4 pour les côtés, ϛ (6) et E (5) pour l'aire et l'hypoténuse respectivement. Les figures ne sont généralement pas proportionnées aux mesures indiquées, leur fonction est plutôt de restituer schématiquement la disposition de la figure et les données sous-jacentes à la proposition que de donner une image proportionnée de la figure discutée.

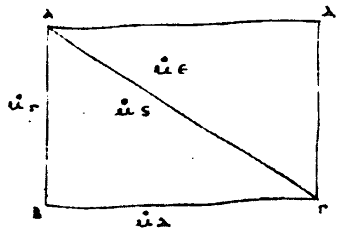

FIGURE 1 – Figure de *Métriques* I.2

Dans tous les cas, ce manuscrit ancien riche de figures diverses et d'annotations, donne une idée du temps long de la vie de ces manuscrits mathématiques anciens,

10. Pour comprendre ce rapport bien particulier au texte verbalisé, on ne peut rien recommander de mieux que la lecture des premières et dernières lignes des *Arithmétiques* de Diophante, un texte également écrit par problèmes, comme les *Métriques*, et dont l'ambition est explicitement de favoriser un apprentissage long et progressif, qui tient plus de la familiarisation progressive, que d'un simple apprentissage élémentaire. Pour un commentaire sur les connotations rhétoriques de cette ambition, voir (Bernard, 2015).

11. Pour les systèmes numéraux en Grèce ancienne voir (Verdan, 2015).

qui ne sont jamais des autographes mais des copies de copies, avec des déplacements et des ajouts, notamment explicatifs, qui en font le texte composite dont ont hérité les savants byzantins, latins puis Renaissants. Un manuscrit est toujours le porteur d'une histoire longue dont les étapes ne sont pas toujours faciles à reconstituer.

Remarques sur le style, le vocabulaire et la structure des *Métriques*

Un exemple pour découvrir : *Métriques* I.2

L'extrême majorité des propositions qui composent les trois livres des *Métriques* sont des problèmes, et la plupart de ces problèmes portent sur la mesure de figures ou de solides. C'est ce que propose le second problème du 1er livre, au sujet d'un exemple très simple, le triangle rectangle (voir figure 2) :

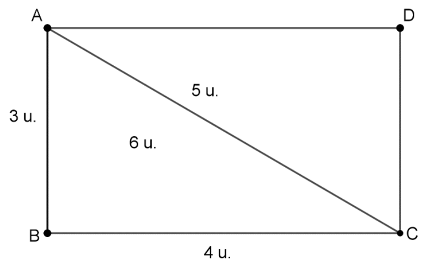

FIGURE 2 – *Métriques* I.2, en transcription moderne

« Soit un triangle rectangle ABC ayant l'angle en B droit et soit d'une part la <droite>[12] AB de 3 unités, d'autre part la <droite> BC de 4 unités. Trouver l'aire du triangle et l'hypoténuse[13]. »

La réponse complète à ce problème, que nous appelons ici sa « solution », revient pour nous à calculer la mesure de l'aire et de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés connus ($L = 4$, $l = 3$). Héron synthétise ce développement en énonçant finalement la « méthode » suivante :

> « Et la méthode est celle-ci. En faisant les 3 par les 4, prendre la moitié de ceux-ci ; il en résulte 6. D'autant [d'unités] est l'aire du triangle. Et l'hypoténuse : en faisant les 3 par eux-mêmes et, semblablement, en

12. La traduction proposée, comme toutes celles qui suivent, est une version un peu adaptée de celle de Vitrac et Acerbi (2014, p.153). Les crochets, dans cette traduction, indiquent des mots sous-entendus dans le texte grec, qui dit donc simplement « la AB », le lecteur ou l'auditeur ancien devant suppléer le mot « droite », sous-entendu.

13. La figure 2 n'est bien sûr pas celle du manuscrit, mais une reproduction assez fidèle de cette dernière. Comme dans les textes anciens, elle n'est pas à l'échelle. Par contre, les lettres dénotatives ont été romanisées (C pour Γ par exemple) et les nombres sont écrits à notre manière (3u. = 3 unités pour MoΓ par exemple).

> faisant les 4 par eux-mêmes, composer : et en résultent 25 ; et, en prenant un côté de ceux-ci, avoir l'hypoténuse du triangle. »

Autrement dit l'auteur expose ce que les historiens comme Vitrac ou Acerbi appellent d'un point de vue stylistique deux algorithmes successifs, c'est-à-dire deux enchaînements verbaux exprimés en opérations [14]. Ces derniers partent des données déterminées du problème (le nombre des unités de chaque côté ici) et aboutissent à des valeurs déterminées (ici 6 pour l'aire, 5 pour l'hypoténuse) qui sont identifiées dans les termes du problème initial. Ils sont décrits enfin dans les termes d'opérations explicitées (multiplier, prendre la moitié, multiplier par soi-même, additionner, prendre un côté) et des résultats partiels. Cet enchaînement d'opérations ne changerait pas, si les données variaient : de ce point de vue et bien que particulières, elles ont un sens générique comme l'indiquent la désignation des nombres [15]. Il ne s'agit donc pas d'une « formule » au sens d'une expression littérale (l'aire A vaut $\frac{1}{2}\,L \times l$, l'hypoténuse h vaut $\sqrt{L^2 + l^2}$) ni même d'un calcul déjà symbolisé à sa manière en formule, comme $\frac{3\times 4}{2}$, mais bien d'une séquence d'opérations toutes explicitées puis enchaînées entre elles [16]. Quant à la démonstration, elle forme dans les *Métriques* le cœur de la solution. Précédant la « méthode », on trouve en effet l'argument suivant :

> « Que le parallélogramme rectangle $ABCD$ soit complété. En effet, puisque l'aire du parallélogramme rectangle $ABCD$ - comme cela a été démontré ci-dessus - est 12, et que le triangle AC est la moitié du parallélogramme $ABCD$, l'aire du triangle ABC sera alors six. Et puisque l'angle ABC est droit, les carrés sur les <droites> AB, BC sont aussi égaux au carré sur la <droite> AC ; et les carrés sur les <droites> AB, BC sont de 25 unités : le carré sur la <droite> AC sera donc aussi de 25 unités ; la <droite> AC elle-même sera donc de 5 unités. »

La démonstration précédente renvoie d'une part au premier problème, le plus fondamental, qui introduit la manière de calculer l'aire d'un rectangle. Elle implique d'autre part un théorème classique de géométrie, comme l'indique, en toute généralité, la référence au *parallélogramme* $ABCD$, que la diagonale AC divise en deux triangles *égaux*, c'est-à-dire « égaux en aire » suivant la terminologie euclidienne. Quant à la démonstration correspondant à l'hypoténuse, elle renvoie elle aussi au théorème classique, dit « de Pythagore », qui correspond à la 47e proposition du 1er livre des *Éléments* d'Euclide.

Ce premier exemple nous révèle donc d'emblée tout un environnement conceptuel qui nous est à la fois familier et étrange : celui de la métrologie savante grecque, qui s'appuie lui-même sur deux branches classiques du savoir savant antique : la

14. Pour les détails de cette approche, voir (Acerbi et Vitrac 2014, p. 411-427).

15. Dans l'exemple, il s'agit bien *des* 3 (sous-entendu : les trois unités dont il était question dans l'énoncé) et non *de* 3 (du nombre 3). La référence aux données de l'énoncé, est explicite même si elle est discrète et « cachée » dans la syntaxe.

16. Ces distinctions entre notre façon « moderne » de penser et d'écrire les « formules d'aires », et ce qu'on trouve dans ce type de texte non seulement dans l'Antiquité, mais aussi au Moyen-Age, fait l'objet des études détaillées de Marc Moyon sur la « géométrie de la mesure » (Moyon 2015, 2017).

géométrie d'un côté, l'arithmétique de l'autre. Arrêtons-nous sur cette distinction fondamentale, avant de revenir sur les caractères stylistiques qui permettent à Héron de « mélanger » les deux.

La géométrie et l'arithmétique anciennes, et le mélange des genres [17]

Géométrie et style démonstratif

Une partie du registre convoqué dans le problème ci-dessus est celui de la géométrie classique. Cette dernière renvoie d'une part à un univers d'objets spécifiques, comme les droites, ou les différentes sortes de figures, et un ensemble de postulats, de notions communes et de propositions fondamentales (comme les cas d'égalité de triangles) qui permettent de fonder une notion d'égalité entre objets différemment placés ou de formes distinctes : égalité de droites, égalités de figures par exemple. C'est un tel « théorème d'égalité en aire » qu'on invoque en disant que la diagonale d'un parallélogramme, partage ce dernier en deux triangles égaux (proposition 34 du 1er livre des *Éléments*). C'est ce qui explique le fait pour nous étrange, que cette géométrie ne soit associée à aucune notion (moderne) de mesure, au sens où il n'y a aucun nombre associé qui soit la « longueur » ou « l'aire » des objets, ni de calcul qui prouverait leur équivalence. Mais la comparaison de ces derniers est fondée, dans cette géométrie abstraite, par un enchaînement démonstratif reposant notamment sur les notions communes. Elle n'est donc pas dissociable du style et de la structure démonstratifs caractéristiques de cette géométrie « classique ». C'est surtout dans la partie de l'énoncé dédiée à la désignation des objets, et dans la partie démonstrative des propositions des *Métriques*, qu'on reconnaît ce style.

Les résultats de la géométrie classique jouent aussi dans les *Métriques* le rôle d'un répertoire de résultats connus et qu'on peut convoquer à souhait. À titre d'exemple, le terme « parallélogramme », employé dans la démonstration au lieu du rectangle évoqué dans l'énoncé, est probablement une sorte d'aide-mémoire, de mot clé ou de « formule toute faite » pour renvoyer à un théorème connu [18].

Art du calcul et style algorithmique

Les séquences intitulées « méthodes » (ou parfois « synthèses ») convoquent quant à elle un répertoire d'objets et un registre stylistique tout différents. Les objets en question sont des nombres, le plus souvent entiers dans les exemples les plus élémentaires, mais assez souvent fractionnaires. Il s'agit en tout cas de quantités discrètes qui s'opposent donc fondamentalement aux grandeurs continues qui sont l'objet de la géométrie classique, comme un genre à un autre.

17. Voir (Acerbi & Vitrac, 2014, p. 57-59 et 411-427).

18. Ces références sont toujours implicites dans le texte ancien. Dans l'édition de Vitrac et Acerbi, elles sont systématiquement explicitées en note de la traduction.

Cela n'empêche pas que les opérations sur les nombres sont le plus souvent nommées par des termes qui suggèrent une analogie avec des opérations géométriques : additionner se dit « composer » (comme si on ajoutait géométriquement des droites), prendre une racine se dit « prendre le côté » par opposition à l'opération géométrique de construire un carré sur une droite donnée ; quant à multiplier deux nombres, c'est le plus souvent l'analogue soit de construire un rectangle sur deux droites, soit de prendre une quatrième proportionnelle. Mais cette homologie du vocabulaire ne doit pas masquer la différence, très marquée dans les textes classiques, entre traitement géométrique des grandeurs et traitement arithmétique des nombres. Qu'on ne puisse assimiler l'un à l'autre est justifiée en profondeur par la théorie des grandeurs incommensurables, exposée par Euclide dans le livre X de ses *Éléments*, l'un des plus difficiles de ce texte classique.

Stylistiquement, cette différence se voit aussi à l'emploi d'un « style algorithmique », qui enchaîne des opérations explicitement nommées, ainsi que leurs résultats partiels, sur la base de nombres donnés et arrivant à un ou plusieurs nombres déterminés. Ce style, également employé dans l'ensemble du corpus métrologique ancien, est propre à l'exposé général de procédures sans justification, donc à l'établissement de formulaires. La « logique » de cet enchaînement s'apparente de près à l'écriture d'algorithmes modernes, ce pourquoi il n'est guère difficile de convertir ces passages en petits programmes exécutables. L'originalité des *Métriques* est d'ajouter à ce type de problèmes, un intermédiaire démonstratif sur lequel nous allons maintenant insister.

Le mélange des genres

En raison de la différence soulignée ci-dessus, on comprend que le passage d'un registre démonstratif, portant sur les objets géométriques désignés dans l'énoncé, au registre calculatoire et algorithmique qui fournit la solution, soit une étape cruciale. Ce passage est assuré, dans l'exemple ci-dessous, par l'emploi d'une sorte de langage double, où un *calcul* est évoqué sans être totalement explicité, et où la « clé » démonstrative qui légitime géométriquement ce calcul, est rappelé aussi : « *puisque l'aire du parallélogramme rectangle ABCD [...] est 12, et que le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD, l'aire du triangle ABC sera alors six* ». Ici on conjugue les deux aspects, en sous-entendant une analogie fonctionnelle, entre la *division en deux* (figures égales) d'une figure parallélogramme, et la *division par deux* du nombre qui lui est associé : la première opération est mentionnée, la seconde est sous-entendue, à l'inverse de ce qui se passe dans la phase de « méthode » ou « synthèse ».

Plus loin dans les *Métriques*, à partir de la proposition 10, ce rôle de traducteur est assigné à un corpus spécifique de propositions, d'habitude réservée dans la géométrie classique aux raisonnements par *analyse*, à savoir le langage des données. Dans l'exemple ci-dessus, on pourrait dire qu'une grandeur étant *donnée*, sa moitié est aussi *donnée*. L'opération correspondante, est la division par deux.

La mesure du triangle, comme élément d'une série cohérente de problèmes

Un dernier élément de structure doit être apprécié, pour comprendre la nature du raisonnement héronien. Il est signalé, dans notre exemple, par le renvoi quasi déductif au problème précédent, qui traitait de la mesure des figures rectangles et qui est considéré ici comme acquis. De manière plus générale, notre exemple s'insère dans un dense réseau de problèmes analogues qui occupent toute la première partie du livre I et qu'on peut résumer par le schéma ci-dessous (figure 3). Sans entrer dans les détails, on y voit deux choses : (a) que le problème I.2 s'insère dans un réseau cohérent d'une douzaine de problèmes, caractérisé par l'homologie très nette des méthodes et une certaine dépendance soit logique, soit analogique ; (b) qu'un certain nombre de propositions ou de problèmes se sont ajoutés, probablement au cours de l'histoire du texte, comme par exemple la spectaculaire et célébrissime démonstration, exposée en I.9, permettant de calculer l'aire d'un triangle en ne connaissant que la mesure de ses côtés. Cette proposition est également présente dans la *Dioptre* et est connue aujourd'hui sous le nom de « formule de Héron ». Ce qui justifie clairement sa présence ici, est le fait qu'elle ne passe pas, comme le font tous les autres problèmes, par le calcul intermédiaire d'une hauteur. Mais c'est l'arbre qui cache la forêt et c'est cette dernière qui nous intéresse ici, d'autant qu'il existe déjà une littérature abondante sur l'arbre en question.

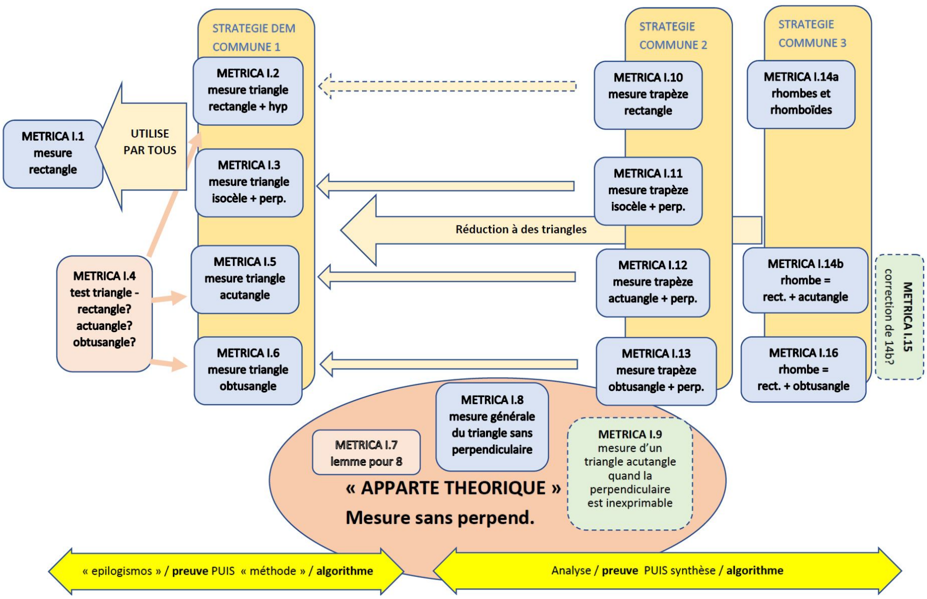

FIGURE 3 – Organisation des quinze premiers problèmes des *Métriques*

Ce qui nous importe ici en effet, est que la démonstration ci-dessus, justifiant un algorithme, n'en est qu'une parmi une série d'autres, qui comporte un fort lien d'analogie et même de rédaction avec celle-ci : on a affaire à un système de petites variations autour de deux ou trois grands modèles communs au plus. Cet aspect répétitif et varié, est bien sûr très important dans la définition d'une stratégie d'apprentissage : nous reviendrons sur ses fondements plus loin.

Pour découvrir et inventer d'autres procédures : variations autour de l'aire du trapèze droit

Un autre problème pour s'exercer et aller plus loin : mesurer l'aire d'un trapèze droit

L'algorithme proposé en *Métriques* I.10 répond à l'énoncé suivant (voir figure 4) : « Soit un trapèze rectangle $ABCD$ ayant les angles en A, B droits et soit d'une part la <droite> AD de 6 unités, d'autre part la <droite> BC de 11, et la <droite> AB de 12 unités. Trouver son aire ainsi que la <droite> CD. »

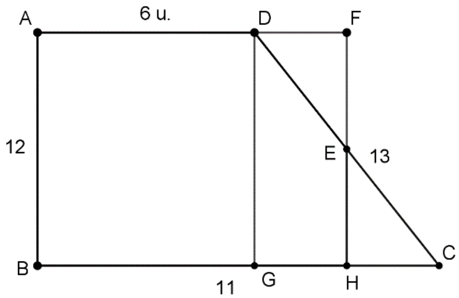

FIGURE 4 – Figure de *Métriques* I.10

La démonstration procède, en résumé, par la construction préliminaire de la droite FH parallèle à AB, passant par le point E milieu de DC, de sorte que H soit sur BC et qu'on puisse prolonger AD jusqu'en F. Un premier argument utilisant un cas d'égalité de triangles appliqué à DEF et EHC, permet de montrer que HC et DF sont égales. Il en résulte que les droites AD et BC sont, ensemble, égales à AF et BH, soit au double de AF. Si AD et BC sont données il est donc possible de déterminer AF puis l'aire du rectangle $ABHF$, la hauteur AB étant aussi donnée. Mais un second argument montre que ce rectangle est égal (en aire) au trapèze considéré, cela revient donc à déterminer l'aire du trapèze. Cette démonstration se conclut par une analyse en termes de « données », à laquelle nous avons fait allusion plus haut. La méthode est alors donnée à titre de synthèse, en ces termes : « Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi. Compose les 6 et les 11 : il en résulte 17 ; de ceux-ci, la moitié : il en résulte 8 $^1/_2$; ceux-ci, par les 12 : il en résulte 102. Autant que cela vaut donc l'aire. »

En correspondance avec l'analyse, on pourrait, dans un langage algorithmique moderne « gloser » la procédure de la façon suivante :

Additionne 6 et 11	Cela correspond à la longueur des droites AD et BC ensemble
Il vient 17	C'est encore la longueur du double de AF d'après le 1er argument
Diviser par deux	On calcule ici la moitié, soit la longueur de AF
Il vient 8 1/2	Qui est la longueur de AF, côté du rectangle $ABHF$
Ceux-ci, multiplié par 12	On calcule ici l'aire du rectangle de côté AF et AB (donné)
Il en résulte 12	C'est donc la valeur de l'aire, puisque trapèze et rectangle ont même aire

L'introduction de ce type de glose (sous cette forme ou sous une autre) est un aspect potentiellement important du travail pédagogique sur ce genre de textes, ou qui s'en inspire. L'enjeu est d'étudier de nouveaux registres de démonstration en lien à l'explicitation de procédures, qu'à l'IREM de Paris Nord nous avons intitulés des « algorimonstres ». L'enjeu est de permettre d'aborder la démonstration sous un nouveau jour, non dissocié d'un apprentissage de l'algorithmique comme nous l'avons suggéré en introduction. [19]

Variations inventives sur l'aire du trapèze

L'approche qu'on a résumée ci-dessus d'après le texte de Héron, peut être résumée par le schéma ci-dessous et sa légende (figure 5) [20].

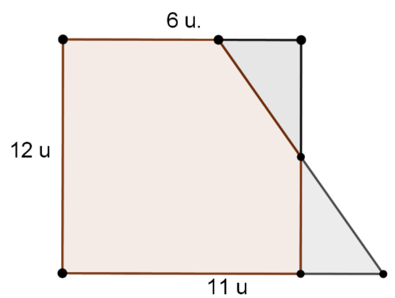

Figure 5 – Aj. 6,11 → 17 ; div /2 → 8 1/2 ; × 12 → 102

Elle appelle naturellement à d'autres manières d'obtenir la même mesure. Voici les différentes méthodes issues d'un remue-méninges au sein de l'IREM de Paris-Nord :

— En inventant le symétrique du trapèze par rapport au milieu du bord oblique, puis en prouvant que la figure et son symétrique forment ensemble un rectangle

19. Nous y reviendrons brièvement en conclusion et ce point sera développé prochainement dans des études dédiées, appuyées sur des expérimentations concrètes de cette idée.

20. La codification symbolique de l'algorithme est adaptée au phrasé grec et est la suivante : [nom abrégé de l'opération] + données numériques → résultat.

de dimensions connues (figure 6). L'algorithme obtenu est très proche de celui de Héron, et d'une simplicité comparable, mais la division par deux intervient en dernière étape et non en seconde.

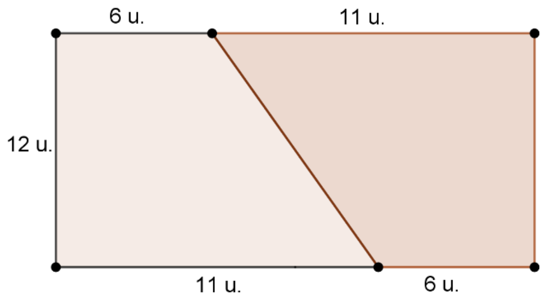

FIGURE 6 – Aj. 6,11 → 17 ; × 12 → 204 ; div /2 → 102

— En partant de la même construction que celle de Héron, mais en remarquant que le rectangle équivalent au trapèze, est construit sur un côté qui peut se décomposer selon les moitiés des deux bases du trapèze (figure 7).

On obtient alors deux différents algorithmes possibles (au moins) suivant la manière dont on décompose les droites en question, et l'ordre dans lequel on les ajoute.

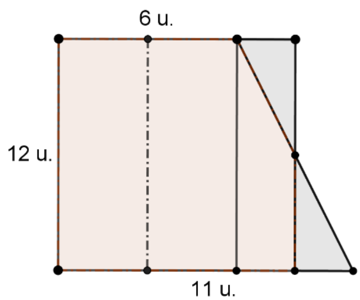

FIGURE 7 – 6 div /2 → 3 ; 11 div /2 → 5 1/2 ; aj. 3 → 8 1/2 ; × 12 → 102
11,6 retr. → 5 ; div /2 → 2 1/2 ; aj. 6 → 8 1/2 ; × 12 → 102

— Enfin on peut remarquer qu'un trapèze droit est simplement la différence de deux triangles, et raisonner sur la « figure de Thalès » obtenue, donc à l'aide de proportions (géométriques) et, pour ce qui est des calculs correspondants, à l'aide de la recherche de quatrièmes proportionnelles (figure 8). Si la décomposition géométrique est très simple, l'algorithme obtenu est nettement plus complexe :

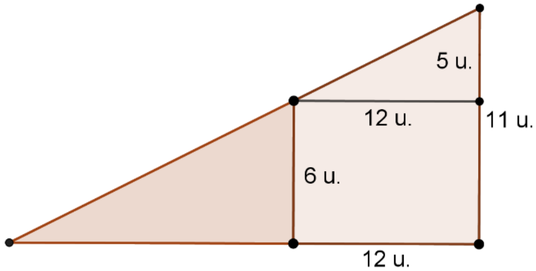

FIGURE 8 – 4[e] pr. 5,12,6 → 14 2/5 ; × 6 → 86 2/5 ; div /2 → 43 1/5 ;
4[e] pr. 5,12,11 → 26 2/5 ; × 11 → 290 2/5 ; div /2 → 143 1/5 ; ret. les 43 1/5 → 102

On peut remarquer, qu'aucun des algorithmes obtenus n'est écrit autrement que comme un algorithme qui, partant des données initiales, donne le même résultat. S'expliquer cette différence dans la forme et l'enchaînement des opérations, et la congruence des résultats constitue donc un nouveau problème. Une traduction littérale de chacun des cinq algorithmes obtenus, permet de l'aborder, donnant ainsi à l'algèbre non le rôle d'exprimer une « formule », mais surtout de rendre possible la comparaison, et d'établir la preuve qu'ils sont cohérents entre eux.

Conclusions : le moyen de justifier et d'inventer des procédures de calcul d'aire

À titre de synthèse, nous pouvons maintenant revenir sur les questions de départ, concernant le rapport entre algorithme et démonstration. Dans le sens défini par Vitrac et Acerbi, sur les travaux desquels nous nous sommes appuyés ici, l'adjectif *algorithmique* qualifie un style, un mode d'expression d'une série de calculs portant sur des nombres. Ce que ce registre permet de décrire, à savoir une série de « formules » pour des longueurs, des aires ou des volumes, est-il bien un *algorithme* au sens moderne ? Et si oui, à quelles conditions cette homologie est-elle valide et féconde ?

Les « formules d'aires » sont-elles des algorithmes au sens moderne du terme ? Et si oui, sont-ils intéressants mathématiquement ?

Selon la caractérisation moderne rappelée par S. Modeste, S. Gravier et C. Ouvrier Buffet (2010), un algorithme au sens plein, est *une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (...) en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données.* Chacune des « formules » dont nous avons donné des exemples plus haut, répond bien à ce critère. Pourtant, les trois collègues les rejettent du champ des algorithmes « intéressants » pour le raisonnement mathématique, parce qu'ils ne permettent pas de questionner l'objet « algorithme », autrement dit l'enchaînement des opérations lui-même, ainsi que son rapport au problème ou à la classe de problèmes qu'il est censé résoudre [21].

Ce que nous avons résumé de la démarche héronienne nous indique que cette position est discutable, et qu'à la lecture d'un traité métrologique ancien comme les *Métriques*, il faudrait selon nous plutôt retourner la proposition et poser la question : pourquoi les « formules d'aires » sont devenues dans l'enseignement des formules au sens trivial « qu'on peut appliquer systématiquement », et non des objets de réflexion intéressants pour les élèves ?

Car envisagées tout d'abord comme enchaînement d'opération et exprimée comme telle, ces formules posent bien, tout d'abord, des problèmes de *construction*. Or ces constructions ne sont pas uniques mais donnent lieu à de multiples variations. Le nœud de ces variations repose sur le constat fondamental, que les « formules » de mesure d'aire (par exemple) ne sont pas univoquement reliées aux *figures* auxquelles elles s'appliquent, mais seulement à *différentes façons d'examiner* ces figures. En outre, la détermination des algorithmes donne lieu à des discussions de cas ou à des variations en fonction de figures voisines, c'est-à-dire proches mais légèrement différentes. Enfin les cas les plus délicats, à savoir l'aire ou le volume de figures curvilignes, donnent lieu à des discussions d'existence aussi classiques qu'intéressantes.

On a vu en outre que ces formules posent des problèmes de *preuve*, et cela nous renvoie à la grande originalité des *Métriques* : le fait d'associer une preuve aux algorithmes finalement donnés comme « méthode ». Plus précisément, l'examen des textes montre que la possibilité de la preuve est ici liée à la possibilité de parler « en double » de grandeurs (droites ou aire) elles-même *données* en double : une fois comme grandeur géométrique, l'autre comme « mesure » au sens d'un nombre entier ou fractionnaire d'unités. Nous reviendrons plus bas sur cette condition de possibilité [22].

Enfin on peut remarquer, sur l'exemple que nous avons proposé, que ces formules donnent aussi lieu à d'intéressants arguments de complexité. Bien entendu, la complexité d'un algorithme renvoie à l'estimation d'un coût en opération *pour une machine* et s'applique donc à des classes de problèmes qui ont un nombre indéfini d'éléments. Ici la question se pose, au sens qu'on pourrait imaginer prendre pour les mesures données de très grands nombres, chaque opération ayant donc un coût important. Mais au-delà de ce problème, un élève de collège peut se poser les questions suivantes : entre tous les algorithmes qui lui permettent par exemple de calculer l'aire d'un trapèze, quel est le plus économique en termes de nombres d'opérations à mémoriser ou à codifier ? Et quels sont ceux qui possèdent des qualités de symétrie qui évitent de tester la taille comparée des côtés, de ceux qui

21. (art. cit., p. 58) Les collègues prennent pour exemple de telle formule « stérile mathématiquement » les algorithmes de détermination de solution des équations du second degré. Ces derniers, exposés classiquement dans les traités médiévaux comme le traité d'algèbre d'al-Khwarizmi ou ceux qui s'en inspirent, demanderaient une discussion plus approfondie, d'autant plus intéressante que les procédés de preuve utilisés se rapprochent beaucoup de raisonnements « héroniens ». Voir à ce sujet (Moyon, 2006).

22. On a noté en outre, que le fait de multiplier les formules, fait naturellement apparaître l'intéressant problème de leur cohérence, qui peut donner lieu à des preuves de type algébrique.

obligent à faire ce test ? Ce sont à leur manière des raisonnements de complexité, mais envisagés à un niveau élémentaire.

Quelles sont les conditions de possibilité d'un tel travail mathématique ?

Ce qui rend potentiellement intéressant de telles formules, est donc la possibilité de les diffracter, d'opérer des variations qui font naître à leur tour de nouvelles questions. Cela suppose donc, en premier lieu, d'instaurer une description de ces formules qui, à l'imitation du « style algorithmique » ancien, soit bien une description *algorithmique* (enchaînement d'opérations) et non un formulaire algébrique (imagé ou symbolisé) qui autorise tous les glissements d'écriture et « aplanissent » les différences entre algorithmes. Qu'on en fasse des phrases, comme chez Héron, ou une représentation tabulaire ou schématique, comme celui proposé ci-dessus pour notre « résumé » de *Métriques* I.10, un langage de description est nécessaire. Explorer de tels langages intermédiaires, revient à définir ce que nous avons appelés plus haut des « algorimonstres », et cette idée générale permet d'envisager des déclinaisons pédagogiques qui seront décrites ailleurs.

Pour qu'une classe de problèmes, auquel ces algorithmes répondent, soit en outre disponible, il est nécessaire d'avoir un catalogue de figures fondamentales, un outil de classification comme celui qui gouverne les « géométries pratiques » médiévales (Moyon 2015, 2017). Pour qu'elles soient intéressantes, les figures simples doivent redevenir un objet d'exploration pour les élèves. Un moyen de le faire, comme chez Héron, est de se servir de ces « dérivés » des triangles que sont les trapèzes, ou bien ultérieurement des rhombes ou des quadrilatères quelconques.

La condition suivante est de disposer d'un style démonstratif, qui soit en bonne partie indépendant de toute procédure de calcul. Autrement dit, quelque chose qui ressemble pour nous, ce qu'est la géométrie déductive classique, celle d'Euclide ou d'Archimède, et non à une géométrie réduite à un calcul qui vaut preuve. C'est là bien sûr un point délicat, qui revient à dire que la géométrie comme *langage de démonstration* garde une utilité entière dans l'optique proposée ici, et que l'algèbre lui est difficilement substituable.

Enfin il importe de disposer d'un langage ou d'une forme de schématisation, qui puisse permettre des lectures « en double » (du côté de la géométrie d'un côté, du calcul de l'autre) des procédures qu'il s'agit de justifier ou d'inventer. Le rôle de ces registres « frontières » ne doit pas être sous-estimé et c'est ce que nous appelons plus haut des algorimonstres. A cet égard, l'algèbre, qui se prête aux doubles lectures, peut être considéré comme un langage adapté et comme « bon intermédiaire », à condition d'en préserver l'ambiguïté.

Références bibliographiques

Acerbi, Fabio & Vitrac, Bernard (éd.), 2014, Héron d'Alexandire : *Metrica*, Rome, Fabrizio Serra.

BARBIN, Évelyne & alii, 2014, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.

BARBIN, Évelyne, 2018, « La dioptre d'Héron d'Alexandrie : Des investigations pratiques et théoriques » *in* BARBIN et al. (dir.) *Les mathématiques et le réel : Expérienxes, instruments, investigations*, Rennes, PUR.

BERNARD, Alain, 2015,« Interpréter la sériation des problèmes des Arithmétiques de Diophante : Une forme de modélisation ? », *SHS Web of Conferences*, 22, 00003. https://doi.org/10.1051/shsconf/20152200003

BO n° 30 du 26 juillet 2018, Paris, Ministère de l'Éducation Nationale.

BOAS, Marie, 1949, « Hero's Pneumatica : A Study of Its Transmission and Influence », *Isis*, 40(1), p. 38-48.

BRUINS, Evert Marie, 1964, *Hero of Alexandria. Codex Constantinopolitanus Palatii veteris no. 1* (3 vol.), Leiden, Brill.

CHABERT, Jean-Louis (éd.), 2010, *Histoire d'algorithmes : Du caillou à la puce*, Paris, Belin.

KAHANE, Jean-Pierre (éd.), 2002, *L'enseignement des sciences mathématiques,* Paris, O. Jacob.

MODESTE, Simon, GRAVIER, Sylvain, & OUVRIER-BUFFET, Cécile, 2010, « Algorithmique et apprentissage de la preuve », *Repères IREM*, (79), p. 51-72.

MOYON, Marc, 2007, « La tradition algébrique arabe d'al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie », in *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, édité par Barbin Évelyne et Bénard Dominique, 289-318, INRP, IREM de Clermont-Ferrand. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520812

MOYON, Marc, 2015, « Comprendre les géométries de la mesure par les 'séries de problèmes'. L'exemple des pays d'Islam et de l'Occident latin du IXe au XIVe s. » *SHS Web of Conferences*, 22, 00007. https://doi.org/10.1051/shsconf/20152200007

MOYON, Marc, 2017, *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales.* De Diversis Artibus (DDA), Turnhout, Brepols.

VERDAN, Samuel, 2015, « Systèmes numéraux en Grèce ancienne : Description et mise en perspective historique », en ligne sur *CultureMATH* (consulté le 6.11.2019). https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/Verdan_2007_revised.pdf

VITRAC, Bernard, 2009, « Mécanique et mathématiques à Alexandrie : Le cas de Héron », *Oriens-Occidens* 7, p. 155-199 (en ligne sur hal-SHS).

VITRAC, Bernard, 2013, « Figures du mathématicien et représentations des mathématiques en Grèce ancienne (VIe-IVe s. avant notre ère) » *In* Arnaud MACÉ (éd.), *Le savoir public : La vocation politique du savoir en Grèce ancienne*, Besançon, PUFC.