9

Géométrie pratique d'inaccessibles, avec G. de Longchamps

René Guitart

Introduction

Problématique en trois questions

1. Atteinte de l'inaccessible ? — La première question que soulève notre titre est la suivante : comment, avec des instruments matériels bien déterminés et limités, et sur un terrain bien fixé (d'arpentage ou de dessin) réel et borné, peut-on rendre compte des grandeurs et propriétés de figures inaccessibles, c'est-à-dire hors du terrain, visibles ou cachées ?
2. Comprendre le théorique en jeu dans la pratique — La deuxième question serait alors : comment les outils théoriques et les méthodes à mettre en œuvre dans les réponses concrètes à la première question peuvent-ils être enseignés par, justement, la pratique des exercices et solutions des problèmes concrets mis en jeu ?
3. Induire la formation du théorique depuis l'expérience pratique — Étant acquis que les déplacements utiles à la re-présentation des figures lointaines à proximité de l'observateur sont les mêmes que ceux qui constituent le groupe de la géométrie en jeu (Klein, 1872), la troisième et dernière question est celle-ci : ce que l'on éclaircit en répondant aux deux premières questions est-il que la « théorie géométrique » peut procéder du questionnement sur les pratiques, et spécifiquement sur les pratiques avec les inaccessibles ?

Le but de cet article est de commencer à répondre à ces questions en examinant l'*Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* de Gaston Albert Gohierre de Longchamps (Longchamps, 1890), notamment à la lumière du travail de François-Joseph Servois (Servois, 1804), et donc de la théorie des transversales de Lazare

Carnot (Carnot, 1803), et encore des travaux de constructions géométriques de Lorenzo Mascheroni (Mascheroni, 1793, 1798), du livre de Claude-Lucien Bergery (Bergery, 1835) ; et partant des études depuis l'Antiquité de « géométrie pratique »— quoique celle-ci ne se réduise pas à ces questions ; et enfin de la géométrie générale des transformations du XIX^{e} siècle.

Pour mieux introduire cette problématique, précisons tout de suite par des exemples ce qu'il faut entendre par « inaccessible » sur un terrain, points « en dehors de l'épure [du dessin] », par le terme « pratique », et l'enjeu vis-à-vis de l'enseignement.

Atteindre un inaccessible, viser un invisible ? Deux exemples historiques

La distance d'un bateau en mer — Les historiens des sciences rapportent que les Ioniens, vers le VI^{e} siècle avant J.-C., savaient mesurer la distance d'un bateau en mer ; ils ont émis l'hypothèse qu'ils utilisaient un cadran pour saisir et reporter des angles. Évelyne Barbin propose de comprendre le procédé (figure 1) par invention d'instruments matériels (cadran), de schémas réalistes de situations, de figures abstraites, de théorèmes (cas d'égalité de triangles) (Barbin, 2018_b). Nous voyons ainsi que la distance inaccessible en mer (partie droite de la figure centrale) peut être reportée sur la terre accessible (partie gauche de la figure centrale) et donc être alors mesurée.

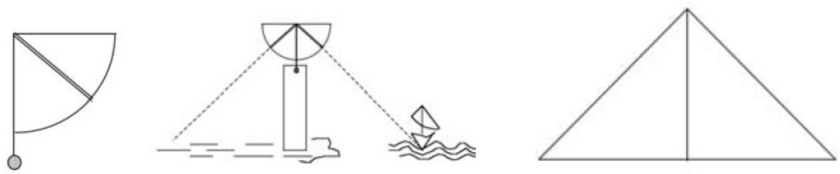


FIGURE 1 – Distance d'un bateau en mer : instrument, schéma et figure (Barbin, 2018_b, p. 61)

Le tunnel de Samos — Au I^{er} siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie (Héron, 1858) propose la dioptre comme instrument d'arpentage et de mesure de distance au loin. Il explique comment, avec cet instrument, procéder au percement d'un tunnel par les deux bouts à la fois, pour aller en ligne droite d'un point A vers un point B, chacun caché à l'autre. Évelyne Barbin donne les figures correspondantes au procédé qu'il propose (Barbin, 2018_a), où elle montre le passage du schéma à la figure géométrique (figure 2).

Un exercice de Longchamps : coins « en dehors des limites de l'épure »

Longchamps propose, pour finir son *Essai*, vingt-deux exercices, tel l'exercice n°11 (Longchamps, 1890, p. 363), qui est typique (figure 3) : « Déterminer le centre

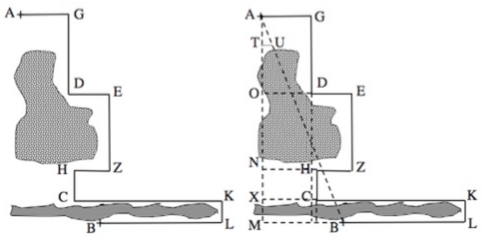


FIGURE 2 – Tunnel de A à B à travers un obstacle (Barbin, 2018_a, figure 5, p. 38.)

de gravité G, le centre du cercle circonscrit, etc., d'un triangle, dont les sommets L, M, N, sont situés au dehors des limites de l'épure. »

Sur la feuille de dessin $ABCD$ nous considérons la trace d'un triangle LMN qui dépasse de la feuille, de sorte que les sommets ne sont pas visibles ni a priori directement visables depuis un point quelconque de la feuille, hormis depuis les points sur les traces des côtés, puisque chacun de ces côtés vise un de ces sommets. La question est de savoir de façon interne à la feuille limitée, et compte tenu des instruments limités choisis (règle, équerre), à quelles propriétés du triangle nous avons accès : points remarquables, longueur des côtés, aire, etc.

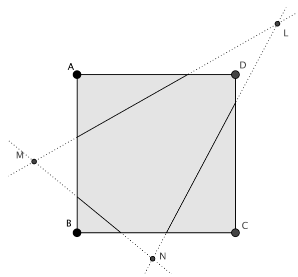


FIGURE 3 – Géométrie pour un triangle sans coins visibles

Longchamps résout tous ces problèmes d'un coup, en prenant sur la partie accessible du côté MN deux points P et Q, et, par ces deux points des parallèles aux côtés LM et LN, qui se coupent en un point R. Il sait mener par R une droite RL en direction du point inaccessible L, qui coupe MN en un point ω, centre d'homothétie des triangles RPQ et LMN. Les points remarquables de RPQ donnent par cette homothétie ceux de LMN.

Il résout aussi plus directement la seule question du centre de gravité G en construisant les traces des médianes telles que LL', avec L' milieu de MN. Pour cela il utilise le fait que LL' passe par le milieu de toute parallèle PQ à MN, avec P sur la trace de LM et Q sur la trace de LN. Il prend donc un point Y dans la feuille et par là trace une parallèle à la trace de MN, qui coupe les traces de LM et LN en P et Q, puis on construit le milieu X de PQ. Avec un deuxième point Y' il obtient P' et Q', et X', et alors XX' est un segment de la médiane LL'.

Reste donc à se reporter dans l'*Essai* aux explications pour prendre une parallèle à une droite visible et accessible, pour prendre le milieu d'un segment visible et accessible, etc., et cela avec la règle et l'équerre seules. Pour la parallèle c'est facile, en prenant deux perpendiculaires. Avec la règle et l'équerre on peut construire un parallélogramme $ACBD$, voire un parallélogramme ayant un segment AB donné pour diagonale, et alors l'autre diagonale coupe ce segment en son milieu (Longchamps, 1890, p. 27).

En fait, ayant ce parallélogramme $ACBD$ préalablement dessiné, on peut, à la règle seule, tracer par un point donné une parallèle à une droite donnée : sur cette question, Longchamps (Longchamps, 1890, p. 25-26) renvoie à Jean-Henri Lambert (Lambert, 1987, p. 266). La construction de Lambert est exposée et commentée par Rudolf Bkouche (Bkouche, 1998, p. 167). Une construction par Jean-Victor Poncelet est donnée dans l'*Essai* (Longchamps, 1890, p. 232).
Longchamps rapproche ce type de raffinement du résultat suggéré par Jean-Victor Poncelet et démontré par Jakob Steiner (Steiner, 1833, p. 67), affirmant, qu'« un seul cercle, décrit une fois pour toutes, pouvait servir à résoudre tous les problèmes du second degré », comme l'écrit Luigi Cremona, qui en redonne aussi une démonstration (Cremona, 1875, p. 182). Ainsi, un parallélogramme, ou un cercle, ou telle figure ou courbe déjà tracée, représentation donc d'une configuration à voir (un théorème, au sens propre du mot) ou graphe d'une fonction, à utiliser et qui peut « servir » peuvent être considérés comme de véritables instruments. Comme, réciproquement, les instruments pratiques sont des « théories matérialisés » (Bachelard, 1934, p. 16), (Barbin, 2019).

Pratique graphique ?

De l'Antiquité à nos jours, de nombreux ouvrages proposent l'étude de la géométrie praticable avec l'utilisation d'instruments (comme jalon, chaîne, règle simple, règle à deux bords parallèles, équerre, compas, et éventuellement de plus élaborés, comme la dioptre de Héron d'Alexandrie (Barbin, 2018_a), ou encore le pantographe et divers systèmes articulés, ou encore diverses figures déjà tracées, parallélogramme ou cercle, voire des abaques). Il s'agit de résoudre des problèmes pratiques, dans la vie courante, quotidienne ou scientifique : mesures et divisions de terrains (Moyon, 2010), descriptions des formes des corps et bâtiments, plans de constructions, analyse et reproductions des ombres, des courbes, constructions de tunnels, de ponts, etc., et aussi dans les arts de la guerre (construction de fortifications, calculs des données de tir au canon). Donc les perspectives et la géométrie descriptive participent pleinement de la géométrie pratique. La résolution se fait par traçage ou « calcul graphique », avec les outils, sur une feuille de papier ou sur un terrain d'arpentage, de figures géométriques qu'il s'agit de composer et décomposer.

On réalisera que dans ses aspects ici évoqués, qu'il soit ou non explicitement question de données inaccessibles, la géométrie pratique tient à la représentation de données non-encore accessibles ou visibles.

On touche aux pratiques « entre "le réel", qui semble toujours inaccessible, et une réalité, qui semble accessible, parce qu'elle a été construite avec les mathématiques »(Barbin et al., 2018, p.11), (Bénard, 2014).

Enseignement par problèmes ?

La géométrie pratique est un moyen commode (sic) pour enseigner la géométrie (Chevalarias, 2018). L'idée de « pratique » est liée aussi à l'approche de l'apprentissage par l'expérience des problèmes, issus ou non de questions pratiques. De l'approche par les problèmes, Alexis Clairaut écrivait : « en occupant continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes [...] par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention. » (Clairaut, 1741, p. viii-ix). L'étude des problèmes de géométrie pratique permet d'enseigner concrètement la géométrie, en « mettant la main à la pâte »(dans le monde) ; et enfin, par cette voie, l'apprenti saisira que les théorèmes émergent comme outils théoriques à partir de ces problèmes pratiques, après leurs examens et non avant. Ainsi les propriétés projectives émergent par la pratique de la règle seule (Bkouche, 1998).

Longchamps, après Mascheroni, Servois, Bergery

Gaston Albert Gohierre de Longchamps (que nous désignerons maintenant couramment comme il signait ses œuvres, soit par « G. de Longchamps », voire par « Longchamps ») a donc publié en 1890 son *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Longchamps, 1890), qui est d'un intérêt considérable pour les constructions avec règle et équerre seules, traitant principalement de constructions de courbes et de problèmes d'inaccessibles — et ce sont surtout ces derniers qui nous intéresseront ici —, et très-utile aussi pour l'ensemble des références sur la géométrie pratique : environ une centaine d'auteurs cités. Les quatorze les plus cités sont — dans l'ordre du nombre de citations : Servois, suivi de Chasles, Mascheroni, Bergery, Mac Laurin, Carnot, Menelaüs, Gergonne, Euclide, Ceva, Pappus, Schoute, van Schooten, Newton. Bien entendu toutes ces références sont riches, et d'autres, importantes mais moins fournies, sont : Lambert, Brianchon, Poncelet, Magnus, Tilly, Cremona, etc.

Mais la référence à Servois est toute particulière, puisqu'en introduction, Longchamps dit que le livre qui se rapproche le plus du sien est celui de Servois (Servois, 1804), dont Poncelet et Chasles (Chasles, 1837, p. 213) faisaient le plus grand cas, considérant qu'il montrait l'utilité de la théorie des transversales, en promouvant ce que Brianchon appelait la « géométrie de la règle ». En effet, le livre de Longchamps reprend l'ordre de celui de Servois qui était : théorèmes généraux sur les transversales, d'après Carnot, puis applications à l'art de la guerre avec les problèmes d'inaccessibles et la recherche de solutions praticables sur le terrain. Sur l'ouvrage de Servois, on pourra lire une étude récente sur sa vie et son œuvre (Aebischer & Languereau, 2010).

Longchamps ajoute à celui de Servois l'étude de la construction de courbes points par points, ce qui met en valeur la force des instruments admis, règle et équerre. Comme Servois, il cite beaucoup Mascheroni, en soulignant de belles constructions, et en écartant celles qui passent par la trigonométrie.

Sans revenir sur les destinataires du livre de Mascheroni, précisons bien que le livre de Servois est d'abord destiné aux artilleurs de terrain, ou aux élèves des écoles militaires, et ne vise pas à enseigner la géométrie théorique, quoiqu'il commence par des principes de celle-ci à utiliser en pratique ensuite. Celui de Bergery (Bergery, 1835), que Longchamps cite fréquemment, est un livre d'enseignement, mais plutôt un cours de « sciences industrielles », à vocation sociale, à l'usage des artisans et ouvriers, surtout un traité de dessin linéaire et de représentations par projections des formes des corps. Celui de Longchamps, même s'il concerne beaucoup de problèmes d'artillerie, est d'abord un livre d'exercices pour intéresser les élèves dans un cours de géométrie pure. Rouché souligne que parmi les mérites du livre de Longchamps, il y a le fait de faire à nouveau connaître celui de Servois, qui était depuis longtemps introuvable, et il confirme l'utilité du livre pour l'enseignement (Rouché, 1890). À notre sens, il surpasse le recours aux transversales et aux projections de Servois et Bergery, par l'emploi explicite de transformations, et particulièrement d'involutions de nature géométrique, qu'il emprunte à Magnus (Magnus, 1831), ou invente lui-même (Longchamps, 1866), sans aller jusqu'à une mise en scène « à la Klein », avec les groupes.

Carrière et travaux de Longchamps

Nous commençons, pour situer la place de l'*Essai* dans l'œuvre de Longchamps, par rappeler sa carrière d'enseignant et de chercheur. Longchamps était mathématicien et professeur de mathématiques. Nous donnons quelques indications sur sa carrière pour situer l'*Essai* dans son travail. Plus d'informations se trouvent sur son *Essai* dans une analyse d'Eugène Rouché (Rouché, 1890), ainsi que sur sa carrière et ses travaux dans une notice (Legoux, 1907), et des écrits récents (Aymé, 2010), (Brasseur, 2011).

Gaston Albert Gohierre de Lonchamps (Alençon 1842 -Paris 1906) est boursier au lycée de Douai à neuf ans, et il a été soutenu par le saint-simonien Prosper Enfantin. Il a étudié au lycée Charlemagne en 1859, en 1862 au lycée Bonaparte (actuel Condorcet), à l'École normale supérieure à partir de 1863. Il commence à enseigner en 1866, à Mont-de-Marsan. Il enseigne à Poitiers en 1869, à Niort en 1871, puis à nouveau à Poitiers en 1872. Il est nommé titulaire de la chaire de mathématiques spéciales en 1875. En 1878 il est nommé à Paris, au lycée Rollin, puis en 1879 au lycée Charlemagne, puis en 1890 au lycée Saint-Louis jusqu'en 1897. Il est nommé au lycée Condorcet en 1898. Il a pris sa retraite en 1900. Il a co-édité le *Journal de mathématiques élémentaires* et le *Journal de mathématiques spéciales*, à la suite de leur fondation en 1877 par Justin Bourget. Il en est le seul directeur entre 1891 et 1896.

La notice de Longchamps sur ses travaux (Longchamps, 1894) comporte 96 livres et articles, dont 35 dans le *Journal de mathématiques spéciales*, et d'autres en Notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (CRAS), dans les *Annales scientifiques de l'ENS*, dans *Les nouvelles annales mathématiques* (NAM), *Mathésis*, la *Nouvelle Correspondance Mathématique* de Catalan, *El Progresso Matematico* de Saragosse, les *Bulletin de l'AFAS*. Ses recherches et articles concernent l'arithmétique, les fonctions elliptiques, la géométrie des courbes et l'utilisation des transformations, la géométrie du triangle, la géométrie pratique.

Le nom de Longchamps est resté attaché à un point remarquable L d'un triangle ABC — dit donc « point de Longchamps » — qu'il a spécifié ainsi : en général les cercles (a), (b) et (c), de centres respectifs A, B et C et dont les rayons sont les mesures a, b et c des côtés opposés ont un centre radical L, qui est par définition le point tel que

$$LA^2 - a^2 = LB^2 - b^2 = LC^2 - c^2.$$

Longchamps montre que ce point L est symétrique de l'orthocentre H par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC (Longchamps, 1886_a). Il a aussi d'autres résultats sur la géométrie du triangle (Longchamps, 1886_b).

Mais Longchamps a réalisé aussi beaucoup d'études de courbes nouvelles et d'études nouvelles de courbes connues, et encore ce « théorème de Longchamps » que nous examinerons plus loin.

Il a publié aussi, prolongeant son enseignement, un *Cours de mathématiques spéciales* (4 volumes, en 1883-1885 et 1890) et un *Cours de géométrie analytique* (3 volumes, en 1898-1899). En 1890, il publie aussi cet *Essai* qui nous intéresse tout spécialement ici, où — nous allons le préciser surtout par quelques exemples choisis au mieux — il introduit la géométrie pratique par les problèmes de traçages ou de mesures pratiques, à la règle et à l'équerre, de courbes, et de figures inaccessibles.

La géométrie pratique de Longchamps : une vue d'ensemble

Nous continuons par une vue d'ensemble sommaire de l'*Essai*, que nous venons de situer, dans l'histoire, et dans l'œuvre de son auteur. Il contient 279 questions sur 366 pages, qu'il considère comme un chapitre d'un futur *Traité de géométrie pratique*. Outre de nombreux résutats nouveaux, l'originalité en est l'utilisation et la mise en valeur sur les problèmes pratiques de la géométrie développée au XIXᵉ siècle : transversales, transformations, perspectives, géométrie du triangle. De plus l'auteur y voit un recueil d'exercices pour enseigner cette géométrie « nouvelle ».

Chez lui, le terme « pratique » signifie qu'il s'agit de constructions faisables sur une épure ou sur le terrain, tout spécialement avec la règle et l'équerre seules, si possible sans le compas ou la donnée d'un cercle déjà tracé. Les problèmes seront de construire par points des courbes, le plus simplement possible (première partie) et puis de résoudre des questions de topographie où sont en jeu des points inaccessibles, avec encore simplicité et élégance (seconde partie).

La première partie du livre (131 questions) donne d'abord des résultats généraux concernant les constructions de base (parallèles, perpendiculaires, symétriques, conjugués harmoniques, droites transversales aux triangles et aux quadrilatères). Pour les théorèmes classiques, il renvoie à Chasles ou à Rouché et Comberousse, mais il donne aussi des résultats peu connus, voire nouveaux (obtenus par lui-même) tel celui que nous nommons plus loin le « théorème de Longchamps » qui généralise ceux de Menelaüs et Ceva. Il insiste sur les outils utilisés et sur

l'élégance des constructions.
Puis, sans s'occuper de la question d'accessibilité, mais en insistant encore sur les outils, notamment la possibilité de n'utiliser que la règle et l'équerre, sont données des applications à de très nombreuses courbes (constructions de coniques, cubiques comme la cissoïde, et quartiques unicursales comme le limaçon de Pascal ou la lemniscate).

La seconde partie du livre (148 questions) traite des applications aux problèmes d'arpentage et à l'art de la guerre (problèmes de tir), qui consistent essentiellement en la détermination de points et distances inaccessibles, où il s'agit de figures lointaines dont il faut en quelque sorte « téléporter » les propriétés jusqu'ici (près du topographe ou du canonnier), à portée d'instruments et mesures. Sur ce type de problèmes, de la détermination de la hauteur d'une tour ou de la largeur d'une rivière, etc., et sur la question de l'élaboration des instruments les plus robustes nécessaires (télémètres), Longchamps donne de très nombreuses solutions, souvent de son cru, et il rappelle aussi les travaux de prédecesseurs qu'il cite largement (van Schooten, 1657), (Servois, 1804), (Bergery, 1835).

Mais soulignons encore que nombre de ces prédécesseurs destinaient d'abord leurs ouvrages à la « pratique matérielle » des artisans ou des ingénieurs, des militaires, tandis que Longchamps, de surcroît, vise plus explicitement à l'enseignement même de la géométrie pure par les « recherches pratiques ». L'*Essai* est pour lui un ouvrage d'enseignement, où — écrit-il dans sa préface — les professeurs trouveront de nombreux exercices d'enseignement pour aiguiser l'esprit des meilleurs élèves et fixer l'attention de ceux qui n'entrevoient pas toujours l'intérêt de ces études mathématiques (Longchamps, 1890, p. vii). D'ailleurs des chapitres de l'*Essai* sont parus auparavant dans le *Journal de mathématiques élémentaires*, destiné aux élèves et professeurs de l'enseignement secondaire. Et le livre se termine par une liste de 22 exercices, dont le 11e dont nous avons traité plus haut (figure 3).

De la matière très riche et souvent neuve de ce livre, nous rapporterons maintenant quelques exemples élégants pris parmi ceux que Longchamps a inventés.

Constructions de courbes point par point

Longchamps a nettement la notion que la faisabilité des figures dépend d'une part de la limitation des outils, d'autre part de celle du terrain. Avec la question du cercle déjà tracé continûment (théorème de Poncelet-Steiner) que nous avons vu plus haut avec son exercice n° 11, qui permettrait de traiter tous les problèmes du second degré à la règle seule, il sait que règle et équerre constituent un moyen plus faible que règle et cercle tracé, ou règle et conique tracée. Il analyse la possibilité avec ces moyens moindres d'obtenir cependant point par point, autant de points que l'on voudra de nombreuses courbes déterminées (sans pour autant pouvoir créer un tracer continu desdites courbes, ni obtenir leurs intersections avec une droite). La force de ses moyens, règle et équerre, est bien montrée par un exemple de construction paramétrisant des coniques.
Longchamps signale lui-même dans l'introduction (Longchamps, 1890, § 48, p. 44-

45), pour faire entendre « sa pensée générale », une construction point par point d'une ellipse, connaissant trois sommets A, A', B, en employant seulement la règle et l'équerre, suivant la figure 4 (Longchamps, 1890, p. 45), où $\angle CAB$, $\angle CDA$ et $\angle mAM$ sont des angles droits.
Ainsi, à tout point m de CD est associé un point M de l'ellipse. En effet, si H est la projection orthogonale de M sur $A'A$, si a et b sont les longueurs des axes, on a le « symptôme » de l'ellipse, c'est-à-dire la relation géométrique caractéristique des points lui appartenant

$$\frac{MH^2}{AH.A'H} = \frac{b^2}{a^2},$$

et puis, avec les triangles semblables de la figure,

$$\frac{MH}{A'H} = \frac{mD}{A'D} \qquad \text{et} \qquad \frac{MH}{AH} = \frac{AD}{mD}$$

et donc

$$\frac{MH^2}{AH.A'H} = \frac{AD}{A'D} \qquad \text{et} \qquad \frac{AD}{A'D} = \frac{b^2}{a^2},$$

si bien que m se déplace sur CD quand M parcourt l'ellipse.

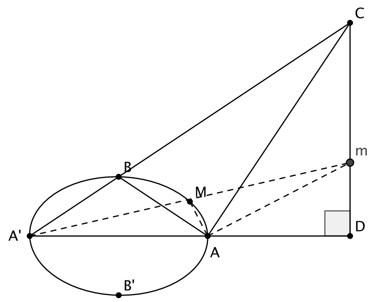


FIGURE 4 – Ellipse à la règle et l'équerre

Si on fait cette construction de Longchamps en fixant d'abord $A'A$, de longueur $2a$, son milieu que l'on note O, et en plaçant D sur $A'A$ à la distance $d > a$ de O, on obtient $M = (x, y)$, un point sur l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{d+a} + \frac{y^2}{d-a} = \frac{a^2}{d+a},$$

sauf le point A'.
On a $OB = b = a\sqrt{\frac{d-a}{d+a}} = \frac{A'A}{2}\sqrt{\frac{AD}{A'D}}$, et l'excentricité $e = \sqrt{\frac{2a}{d+a}} = \sqrt{\frac{A'A}{A'D}}$.
Si $d < a$, la construction donne une hyperbole, et si $d = a$, elle donne une parabole.

Transversales et propriétés de perspectives

La première partie de l'*Essai*, est assez semblable au début du livre de Servois. Après la présentation des outils ou instruments, elle donne des théorèmes de

Chasles, de Desargues, de Pappus, de Mac-Laurin et de Braikenridge, et, puis les théorèmes de Jean de Ceva (Ceva, 1678), Joseph Diaz Gergonne (Gergonne, 1818), Ménélaüs (Menelaüs, vers 80). Et elle donne le début de la « théorie générale des transversales », systématisée par Carnot (Carnot, 1801, 1803, 1806), qui étend le théorème de Menelaüs au cas de courbes algébriques (théorème de Carnot). Longchamps cite peu Carnot ou mal dans l'introduction, et corrige ensuite cette erreur (Longchamps, 1890, p. 198). La théorie des transversales est utilisée en « géométrie pratique » notamment par Servois (Servois, 1804) et Brianchon (Brianchon, 1818), pour mesurer des distances inaccessibles via des alignements, et, parmi les solutions, certaines sont rapportées par Longchamps, parmi diverses, de Bergery et autres.

Ceva et Menelaüs

On considère la figure 5.

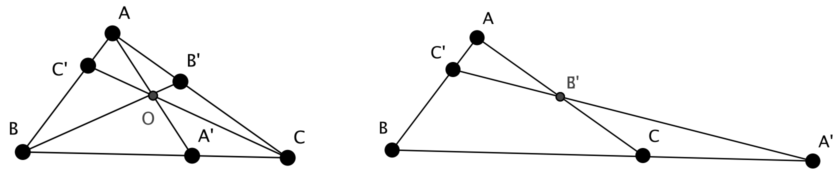


FIGURE 5 – Les figures de Ceva et Gergonne, et de Menelaüs

1. Lorsque trois droites partant des sommets d'un triangle ABC, concourent en un point O (figure 5 à gauche) et rencontrent les côtés de ce triangle aux points A', B', C', on a les relations :

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = -1, \qquad \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1,$$

chacune exprimant réciproquement la concourance de AA', BB' et CC', pour A',B', C' pris sur BC, CA, AB.
2. Lorsqu'une transversale Δ rencontre les côtés d'un triangle aux points A', B', C' (figure 5 à droite), on a la relation :

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

qui exprime réciproquement l'alignement de A', B', C' pris sur BC, CA, AB.

En fait, les théorèmes de Menelaüs et de Ceva sont duaux l'un de l'autre, par « transformation par polaire réciproque », et de même, le théorème de Carnot qui généralise Menelaüs, admet un dual qui généralise Ceva (Cazamian, 1895).

Longchamps démontre qu'en fait les théorèmes de Ceva et de Menelaüs sont des cas particuliers du « théorème de Longchamps » que nous présentons plus loin (figure 10), précisant les aires des triangles en jeu. Si $A'B'C'$ est plat, nous obtenons le cas particulier de Menelaüs, si $a'b'c'$ est un point, nous obtenons le cas particulier de Ceva. On comparera la figure 10 aux deux éléments de la figure 5.

Remarquons aussi qu'avec le cinquième postulat d'Euclide, le théorème dit en France « de Thalès » — dont la forme projective est le théorème de Desargues (Bkouche, 1998, p. 166) — permet de tester, localement, qu'au loin il n'y a jamais de rencontre (parallélisme). Enfin, notons que le théorème de Ménélaus, qui généralise celui de Thalès, permet donc de connaître, par mesure locale, à quelle distance a lieu telle rencontre lointaine, comme nous allons voir dans les prochain problèmes.

Art de la guerre, problèmes d'arpentages et mesures inaccessibles : quelques exemples

Les principaux problèmes d'inaccessibles envisagés dans l'*Essai* sont de déterminer :
— le prolongement d'une droite au-delà d'un obstacle (Longchamps, 1890, p. 141, p. 166-190) ;
— la bissectrice d'un angle donné dont le sommet est inaccessible (Longchamps, 1890, p. 148) ;
— la largeur de la rivière (Longchamps, 1890, p. 153-166) ;
— la distance au point inaccessible (Longchamps, 1890, p. 190-205) ;
— une parallèle à une droite inaccessible, par un point donné C (Longchamps, 1890, p. 224) ;
— une visée du milieu d'un segment inaccessible (Longchamps, 1890, p. 235) ;
— la distance à une droite inaccessible (Longchamps, 1890, p. 238) ;
— la perpendiculaire à la droite inaccessible (Longchamps, 1890, p. 240) ;
— la distance de deux points inaccessibles, invisibles (Longchamps, 1890, p. 242-256) ;
— l'alignement de points inaccessibles (Longchamps, 1890, p. 257) ;
— l'aire du triangle inaccessible (Longchamps, 1890, p. 264-272) ;
— une visée du point de concours de deux droites inaccessibles (Longchamps, 1890, p. 272) ;
— reconnaître si trois droites inaccessibles sont concourantes (Longchamps, 1890, p. 273).

On comparera avec la table des matières de Servois, qui est très voisine (Servois, 1806).

Nous donnerons trois exemples.

La distance à un point inaccessible

Un observateur sur la ligne $ACBD$ veut déterminer la distance CM au point inaccessible M.
La solution de van Schooten (Longchamps, 1890, p. 197-198) tient à ce que les diagonales d'un quadrilatère complet déterminent sur chacune d'elles une division

harmonique (figure 6). On a donc :

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{CK} - \frac{2}{CI}.$$

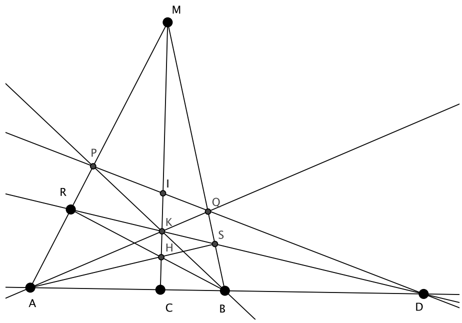


FIGURE 6 – Quadrilatère complet

Un observateur sur la ligne OAB veut déterminer la distance OM au point inaccessible M.
La solution de Mascheroni (Longchamps, 1890, p. 199) utilise le théorème Menelaüs, tandis que la solution de Longchamps (Longchamps, 1890, p. 199-200) se fait à l'équerre. Dans la figure 7 on a, à gauche (pour Mascheroni), et à droite (pour Longchamps, avec deux angles droits OAM puis ABM) :

$$OM = \frac{OA.OC.DB}{OA.DB - AB.DC}, \quad OM = \frac{OA^2}{OB}.$$

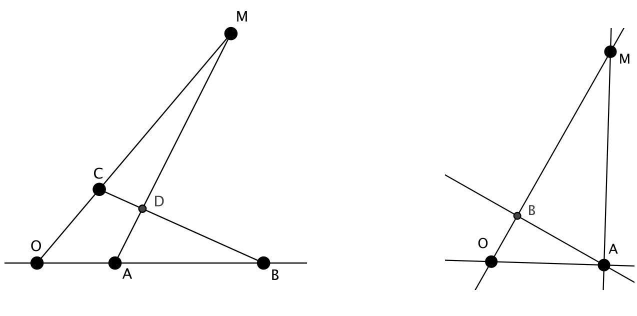


FIGURE 7 – Distance au point inaccessible M : Mascheroni, Longchamps

La distance de O au point M inaccessible et, de plus, invisible depuis O

Un observateur sur la ligne AOB veut déterminer la distance OM au point inaccessible M invisible depuis O .

Longchamps (§ 43, p. 200-202) examine la figure 8. Il prend O' le conjugué harmonique de O par rapport à A et B, puis la transversale $O'PQ$, avec AP et BQ deux visées de M depuis A et B, et l'intersection C de PB et AQ. La visée depuis O vers M est alors la direction OC.

Il mène alors les parallèles PP' et QQ' à OC. Le théorème de Gergonne donne

$$\frac{OC}{OM} + \frac{PC}{PB} + \frac{QC}{QA} = 1,$$

et puisque

$$\frac{PC}{PB} = 1 - \frac{CB}{PB} = 1 - \frac{CO}{PP'} \quad \text{et} \quad \frac{QC}{QA} = 1 - \frac{CA}{QA} = 1 - \frac{CO}{QQ'},$$

il vient

$$\frac{OC}{OM} + 1 - \frac{CO}{PP'} - \frac{CO}{QQ'} = 0,$$

et donc la distance OM vaut :

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} - \frac{1}{CO}.$$

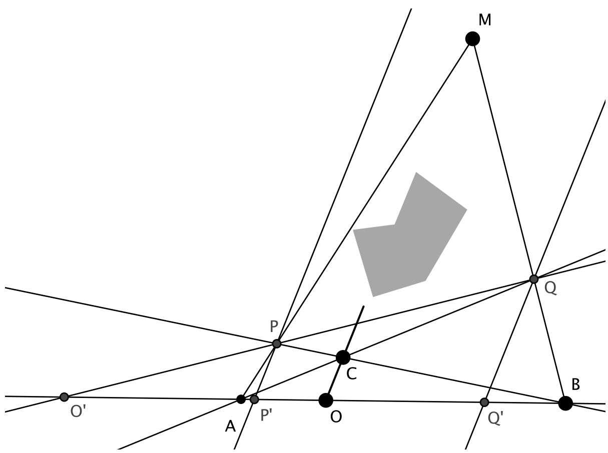


FIGURE 8 – Point inaccessible M invisible depuis O

Problème de la distance entre deux points visibles inaccessibles

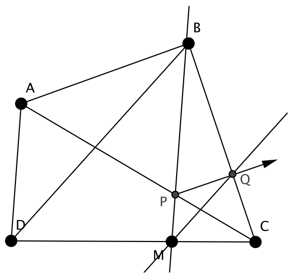
Un observateur placé sur la ligne DC veut déterminer la distance AB entre deux points inaccessibles visibles depuis D et C.
Dans la figure 9 à gauche (Longchamps, 1890, p. 224-225), nous voyons comment obtenir une parallèle PQ accessible près de C à une droite inaccessible AB, en

menant par un point M quelconque sur CD les parallèles à DA et DB, qui rencontrent les parallèles à CA et CB en P et Q : alors PQ est parallèle à AB. La distance inaccessible AB est donnée par :

$$AB = PQ\,\frac{CD}{CM}.$$

Ayant déterminé PQ, une perpendiculaire à PQ est donc perpendiculaire à AB. Alors avec la figure 9 à droite (Longchamps, 1890, p. 246), la distance entre deux points inaccessibles A et B via leurs réciproques « en retour d'équerre » A' et B' vis-à-vis d'une perpendiculaire OH à AB, en zone accessible, est

$$AB = OH^2\,\big(\frac{1}{HA'} - \frac{1}{HB'}\big).$$



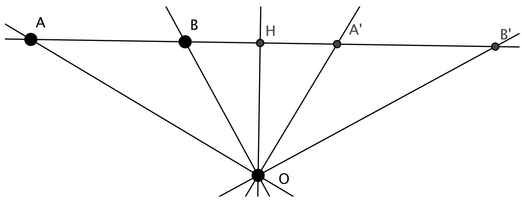


FIGURE 9 – Distance de deux points A et B inaccessibles, visibles depuis C et D

Associé et réciproque de Longchamps

Après avoir vu comment les théories de transversales et perspectives peuvent servir à traiter des inaccessibles, nous revenons au début de l'*Essai*, où Longchamps traite aussi d'une transformation « réciproque » de son cru, nouvelle, qui sera aussi un outil du côté des figures inaccessibles. On doit souligner qu'il s'agit d'un approfondissement véritable, innovateur, de la première partie du livre de Servois (Servois, 1804). En fait, il s'agit de l'introduction, en géométrie pratique, des transformations involutives dans le fil de Ludwig Magnus (Magnus, 1831).

Dans un article de 1866 (Longchamps, 1866), remarqué et apprécié par Michel Chasles, Longchamps introduisait, relativement à un triangle ABC la notion d'une « réciprocité », reprise dans l'*Essai* au chapitre II (p. 15 et s.), que nous présentons ci-après en quatre points (figure 10).

La transformation réciproque (à suivre sur la figure 10)

1. Étant donné un triangle $A'B'C'$ "inscrit" dans un triangle ABC, avec A' sur BC, B' sur CA, C' sur AB, alors les droites AA', BB' et CC' se rencontrent deux par deux en c', a' et b', déterminant ainsi un triangle $c'a'b'$ dit « associé » à

$A'B'C'$, sur lequel $A'B'C'$ et ABC sont inscrits.
2. Soient A'' le symétrique de A' par rapport au milieu α de BC, B'' le symétrique de B' par rapport au milieu β de CA et C'' le symétrique de C' par rapport au milieu γ de AB. Les triangles inscrits $A''B''C''$ et $A'B'C'$ sont dit « réciproques » et ils ont même aire. On note $c''a''b''$ l'associé de $A''B''C''$.
3. Si A', B' et C' sont obtenus comme intersections avec BC, CA et AB de droites concourantes $O'A$, $O'B$ et $O'C$, alors AA'', BB'' et CC'' sont concourantes en O'' qui est dit réciproque de O' (voir Ceva).
4. Si A', B' et C' sont obtenus comme intersections avec BC, CA et AB d'une transversale Δ', alors A'', B'' et C'' sont sur une droite Δ'' dite transversale réciproque de Δ' (voir Menelaüs).

Dans l'*Essai* le théorème 68 et la remarque 69, le théorème 72, nous apprennent encore :
1. Lorsqu'un point O' est mobile sur une droite Δ', le point réciproque O'' est mobile sur une conique Γ circonscrite au triangle ABC. La réciproque Δ'' de Δ' passe par les points A'', B'', C'' où les tangentes à Γ en A, B et C coupent BC, CA, AB.
2. Lorsqu'une droite Δ' tourne autour d'un point fixe K, la transversale réciproque Δ'' enveloppe une conique Γ inscrite au triangle de référence ABC.

Application aux coniques

Par exemple, il applique sa transformation réciproque (Longchamps, 1890, § 76, p. 70) — qui est constructible à la règle et à l'équerre — pour « construire une conique connaissant cinq points A, B, C, D, E ». Il procède comme suit, avec sa transformation réciproque, que nous venons d'introduire. Prenons les points D', E' réciproques des points D et E, par rapport au triangle ABC. À tout point M', pris sur $D'E'$, correspond un point réciproque M qui appartient à la conique cherchée. Celle-ci peut ainsi se construire point par point. Il ajoute qu'en prenant la transversale réciproque de $D'E'$ on obtient une droite qui coupe les côtés du triangle ABC en des points α, β, γ. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont les tangentes à la conique proposée aux points A, B, C. Le lecteur comparera avec les solutions utilisant le théorème de Pascal ou celui de Chasles.

Involutions et figures lointaines

On rapprochera cette « transformation réciproque » de Longchamps (Longchamps, 1866), aussi appelée « involution isotomique », de l'involution de Mathieu (Mathieu, 1865) nommée par Joseph Neuberg « involution isogonale ». Ce sont deux involutions quadratiques transformant les droites en des coniques passant par les sommets du triangle de référence. L'une s'obtient par trois symétries vis-à-vis des milieux des côtés, l'autre par trois symétries vis-à-vis des milieux des angles (bissectrices), elles sont donc en un sens duales. On pourra aussi comparer à l'inversion relative à un cercle qui se dégage des travaux plus généraux de Magnus (Magnus, 1831), que cite Longchamp dans son article (Longchamps, 1866). Mais ce qui compte ici, c'est que Longchamps promeut ainsi l'idée que les transformations, notamment celles qui s'obtiennent en composant des involutions, peuvent servir en géométrie pratique, pour « approcher » les figures lointaines, comme nous allons le voir dans le problème qui suit.

Théorème de Longchamps

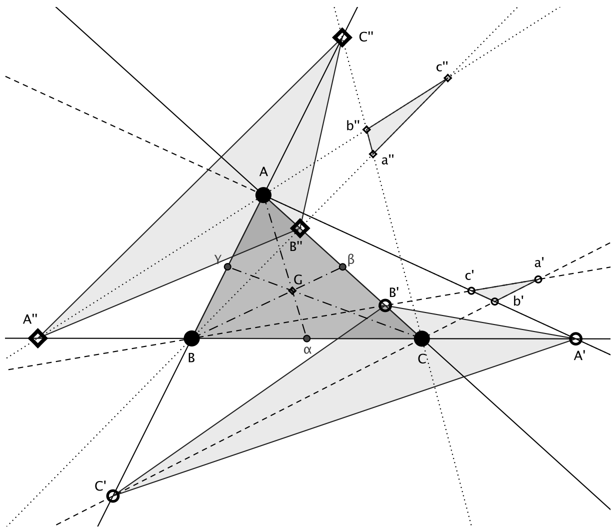


FIGURE 10 – Réciproques et associés : configuration de Longchamps

Dans l'*Essai* de 1890, Longchamps examine en fait la configuration générale qu'il ne dessine pas, et que nous proposons dans la figure 10, d'un triangle ABC avec un triangle inscrit $A'B'C'$, son réciproque $A''B''C''$, et les associés $a'b'c'$ et $a''b''c''$. Il démontre alors le théorème suivant, dont la preuve passe l'interprétation des coordonnées barycentriques u, v, w en termes d'aires, à la manière d'Euclide (Euclide, 1994, Livre VI, prop. 1) comme, par exemple, avec M quelconque :

$$u = \frac{A'B}{A'C} = \frac{\text{aire}(MA'B)}{\text{aire}(MA'C)}.$$

THÉORÈME DE LONGCHAMPS (FIGURE 10). Soit A', B', C' trois points quelconques pris sur les côtés du triangle ABC d'aire S. L'aire Σ du triangle associé $a'b'c'$ est donnée par la formule :

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{(1+uvw)^2}{(1-v+uv)(1-u+uw)(1-w+vw)}$$

avec

$$u = \frac{A'B}{A'C}, \quad v = \frac{B'C}{B'A}, \quad w = \frac{C'A}{C'B}.$$

L'aire σ du triangle $A'B'C'$, égale à celle du triangle réciproque $A''B''C''$, est donnée par la formule :

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{(1-uvw)}{(1-u)(1-v)(1-w)}.$$

Il serait intéressant, au plan théorique, d'unifier le théorème de Carnot et le théorème de Longchamps, qui tous deux généralisent celui de Menelaüs, dans des directions différentes. En tous cas, Longchamps, unifiant et approfondissant donc les théorèmes de Ceva et de Menelaüs, fournit bien ainsi un outil puissant pour « téléporter » les propriétés des figures lointaines inaccessibles de sorte à les toucher et mesurer. Notre dernier exemple dans cet article reposera sur les figure 11 et figure 12 pour la détermination de l'aire d'un triangle inaccessible.

L'aire d'un triangle inaccessible

Dans l'*Essai* (Longchamps, 1890, p. 268-270) Longchamps examine le problème suivant : « Un triangle inaccessible, de dimensions quelconques, dont les sommets supposés visibles peuvent être très éloignés, étant considéré ; trouver l'aire de ce triangle, si restreint que soit le terrain accessible ».

On peut traiter le problème par inversion (figure 11).
On a $OA.OA' = h^2$ et

$$\frac{\text{aire}(OAB)}{\text{aire}(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'} = \frac{h^4}{OA'^2.OB'^2}$$

et avec $\text{aire}(ABC) = \text{aire}(OAB) + \text{aire}(OBC) - \text{aire}(OAC)$, on a :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{h^4}{OA'^2.OB'^2.OC'^2}\left(OC^2.OA'B' + OA'^2.OB'C' - OB'^2.OA'C'\right).$$

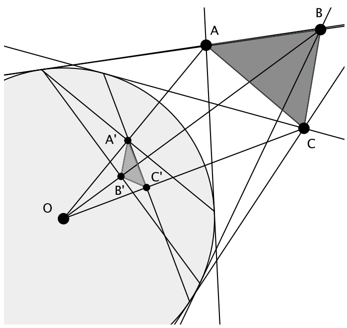


FIGURE 11 – Aire d'un triangle inaccessible, I

On peut aussi (figure 12) traiter le problème par le théorème de Longchamps vu plus haut, avec sa formule des aires Σ/S. La figure 12, partie droite, est la figure Fig. 260 de Longchamps, où A et A' sont conjugués harmoniques vis-à-vis de $\gamma\beta$, etc. ; à noter dans la partie gauche de cette figure 12, une manière de construire le conjugué harmonique A' d'un point lointain A, en visant A depuis O, prenant une parallèle mm'' à cette visée, le milieu m' de mm'', d'où A', aligné avec O et m''.

On a $u = \frac{A'\gamma}{A'\beta} = \frac{A\gamma}{A\beta}$, etc. d'où :

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(\alpha\beta\gamma)\frac{1-uvw}{(1-u)(1-v)(1-w)}.$$

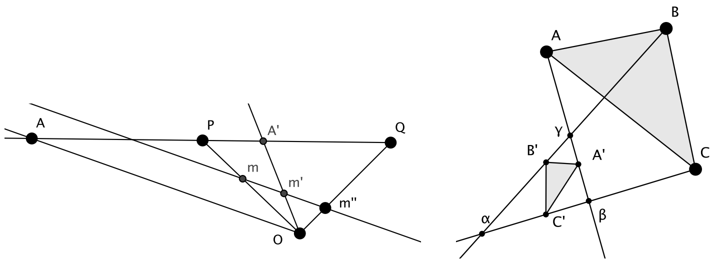


FIGURE 12 – Aire d'un triangle inaccessible, II

Conclusion

Ainsi l'*Essai* de Longchamps nous fournit la matière pour répondre aux trois questions de l'introduction : cette matière indique comment peuvent s'examiner et se résoudre de nombreux problèmes d'inaccessibles, dont nous n'avons pu donner qu'un faible échantillon ; ce qui, dans ces solutions, est mis en œuvre comme théorie géométrique, et surtout comme gestes de transformations, éventuellement nouveaux ; et donc comment, par là, on peut comprendre et enseigner la théorie géométrique qui rend accessible l'inaccessible, exhibant donc l'utilité de cette théorie. En empruntant au livre de Longchamps, on aura un matériau pédagogique neuf, avec lequel on pourra construire l'articulation entre théorie et pratique, la meilleure manière d'instruire.

Références bibliographiques

AEBISCHER Anne-Marie, LANGUEREAU, Hombeline, 2010, *Servois ou la géométrie à l'école de l'artillerie*, Besançon, P.U. de Franche-Comté.

AYMÉ Jean-Louis, 2010, Gohierre de Longchamps dans les journaux scientifiques, en ligne à jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Transversale reciproque.pdf, le 1/10/2010.

BACHELARD Gaston, 1968, *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, coll. Quadrige, 1re éd. 1934.

BARBIN Évelyne, 2018_a, « La dioptre d'Héron d'Alexandrie : des investigations pratiques et théoriques », in BARBIN, Évelyne et al., éd., 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR, p. 33-48.

BARBIN Évelyne, 2018_b, « L'instrument mathématique comme invention et comme connaissance-en-action », *Repères IREM*, 110, p. 59-77.

BARBIN Évelyne, 2019,« Using ancient instruments in the teaching of geometry with Bachelard's phenomeno-technology », in É.Barbin *et al.*, eds., *Proceedings of the Eighth Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Skriftserie 2019 nr 11, Oslo Metropolitan University, p. 69-80.

BARBIN Évelyne, BÉNARD, Dominique, MOUSSARD, Guillaume, éds, 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR.

BÉNARD Dominique, 2014, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible (Pantographe) », in BARBIN Évelyne, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.

BERGERY Claude-Lucien, 1835, *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, 3e éd., Metz, Mme Thiel, et Paris, Bachelier.

BKOUCHE Rudolf, 1998, « La règle, un instrument de géométrie projective », *Bulletin APMEP no 415*, p. 163-171.

BRASSEUR Roland, 2011, Quelques scientifiques ayant enseigné en classe préparatoire aux grandes écoles. Saison 7 : Gaston Gohierre de Longchamps, Boleslas Niewenglowski, *Bulletin de l'Union des professeurs de spéciales*, 84ème année, no 235, juillet, p. 15-22 et p. 22-28.

BRIANCHON Charles Julien, 1818, *Applications de la théorie des transversales*, Paris, Bachelier.

CARNOT Lazare, 1801, *Corrélation des Figures*, Paris, Duprats.

CARNOT Lazare, 1803, *Géométrie de position*, Paris, Duprats.

CARNOT Lazare Nicholas Marguerite, 1806, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris, Courcier.

CAZAMIAN André, 1895, « Sur le théorème de Carnot », *Nouvelles annales de mathématiques*, 3e série, tome 14, p. 30-40.

CHASLES Michel, 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, Hayez.

CHASLES Michel, 1860, *Les trois livres des porismes d'Euclide*, Paris, Mallet-Bachelier.

CHEVALARIAS Nathalie, 2018, « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XXe siècle », in BARBIN, Évelyne, *et al.*, (éd.), 2018, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR, p. 79-94.

CLAIRAUT Alexis, 1741, *Éléments de géométrie*, Paris, Lambert & Durand.

CEVA Jean de, 1678, *De Lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, Milan, Ludovicus Montia.

CREMONA Luigi, 1875, *Éléments de géométrie projective*, Paris, Gauthiers-Villars.

EUCLIDE, 1994, *Les éléments*, Volume 2. Livres V à IX, trad. B. Vitrac, Paris, PUF.

HÉRON D'ALEXANDRIE, 1858, *De la dioptre*, trad. Vincent, A. J. H., in « Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs », Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale, Paris, Imprimerie impériale, tome XIX, p. 157-337.

KLEIN Felix, 1872, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Andreas Deichert, Erlangen. Trad. Henri Padé, 1974, (Préface de Jean Dieudonné, postface de François Russo), *Le programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Paris, Gauthier-Villars.

LAMBERT Jean-Henri, 1987, Notes et additions à la perspective affranchie du plan géométral, in Roger LAURENT et Jean PEIFFER, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Paris, Cedic-Nathan, p. 266.

LEGOUX Alphonse, 1907, « Nécrologie de Gohierre de Longchamps », dans l'*Annuaire de l'Association amicale des anciens élèves de l'ENS*.

LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1866, Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en Géométrie, *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 1re série, tome 3, p. 321-341.

LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1886_a, Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle, *Journal de mathématiques spéciales*, p. 57, 85, 100,126.

LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1886_b, Généralités sur la géométrie du triangle, *Journal de mathématiques spéciales*, pp. 109, 127, 154, 177, 198, 229, 243, 270.

LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1890, *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre*, Paris, Delagrave.

LONGCHAMPS Gaston Albert Gohierre de, 1894, Notice sur les travaux scientifiques de M. G. de Longchamps, Paris, Chaix.

MAGNUS Ludwig Immanuel, 1831, Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie, *Journal für die reine und angewandt Mathematik*, VIII, p. 51-63.

MASCHERONI Lorenzo, 1793, *Géométrie de la règle (Problèmes pour les arpenteurs avec différentes solutions)*, Pavie, trad. française 1803, Paris, Courcier.

MASCHERONI Lorenzo, 1798, *Géométrie du compas par L. Mascheroni*, trad. A. M. Carrette, Paris, Duprat.

MATHIEU Jean Joseph Auguste, 1865, Étude de géométrie comparée avec applications aux sections coniques, *Nouvelles Annales de mathématiques*, p. 393-407.

MENELAÜS D'ALEXANDRIE, vers 80 après J.-C., *Sphaerica*, t. III, in BJÖRNBO, Axel Anton, 1902, *Studien über Menelaos Sphärik*.

MOYON Marc, 2012, Diviser un triangle au moyen-Âge : l'exemple des géométries pratiques latines, in BARBIN Évelyne, éd., *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert, p. 73-90.

ROUCHÉ Émile, 1890, compte-rendu de « Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre », par M. G. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, in *Nouvelles annales de mathématiques*, 3e série, tome 9, p. 228-233.

SERVOIS François-Joseph, 1804, *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, Metz, Devilly.

VAN SCHOOTEN Frans, 1657, Livre II des *Exercitationes geometricæ*.

STEINER Jakob, 1833, *Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*, Berlin, republié en 1895 par Arthur von Oettingen.