8

Quelques calculs d'aires pour un quadrilatère, entre XV^{e} et XX^{e} siècle

Anne Boyé, Xavier Lefort

Introduction

Le calcul des aires, à commencer par celui de l'aire d'un quadrilatère convexe quelconque, a toujours été un exercice de base chez les arpenteurs, même chez les géomètres d'aujourd'hui. La lecture de quelques méthodes proposées aux XV^{e} et XVII^{e} siècles donne lieu, non seulement à leur expérimentation, mais aussi à quelques réflexions plus théoriques. Ces méthodes n'utilisent que des mesures de longueurs, à l'exclusion de toute mesure angulaire, les arpenteurs concernés ne disposant pas à l'époque des instruments nécessaires. Enfin, la méthode contemporaine, par les coordonnées, est un exemple simple de calcul automatique, et automatisé… Nous proposons dans les lignes qui suivent de tester d'abord quelques-unes de ces méthodes anciennes sur un « champ témoin », quadrilatère convexe, dont les mesures, préalablement effectuées, seront données au fur et à mesure des besoins. Le quadrilatère ci-dessous représentera ce champ témoin, les unités étant absolument arbitraires !

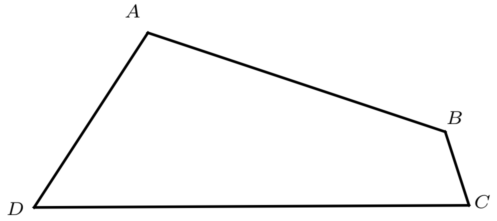


Figure 1 – Quadrilatère témoin

Trois calculs d'arpenteurs

Bertrand Boysset (1345-1415) donne dans *Siensa de Destrar* (1405) la méthode suivante :

> « Si tu avais à arpenter une terre ou une vigne en forme de coin régulier (un quadrilatère), arpente-la en croix par milieu et écris sa hauteur et combien elle aura de destres transversalement, puis double son résultat comme il se doit et tu ne te tromperas pas. » (Boysset, 1405, quatrième chapitre)

Le dessin ci-dessous représente le schéma d'origine, auquel nous avons ajouté les lettres. Si M, N, P sont les milieux respectifs des côtés DA, AB, BC du quadrilatère témoin et NH la perpendiculaire abaissée de N sur MP, les mesures ont donné : $MP = 80,45$ et $NH = 15,68$.

L'auteur propose de calculer $MP \times NH \times 2$, ce qui donne $2522,91$ unités d'aires.

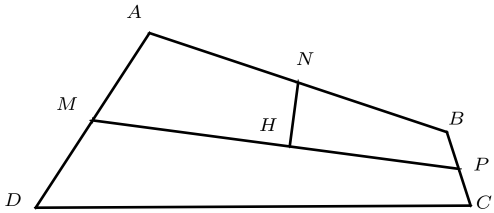


Figure 2 – Application de la méthode de Boysset au quadrilatère témoin

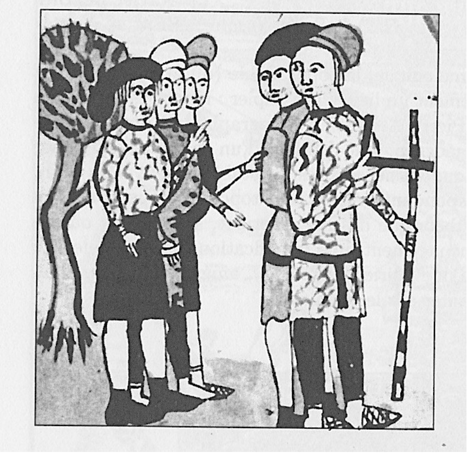


Figure 3 – Mesures sur le terrain, *Siensa de Destrar*

À la fin du même siècle, Frances Pellos propose une autre méthode dans *Compendion del abaco* (1492) :

> « Soit une autre terre quadrangulaire qui a de hauteur 15 et de base 13, et d'un côté 64 et de l'autre 66. Pour savoir quelle est la grandeur de cette terre, [...] prend la moyenne d'en haut et celle d'en bas, soit 14, celle des côtés latéraux, soit 65. Tu multiplies 14 par 65, soit 910 autant est la vraie surface, pertinemment recherchée. » (Pellos, 1492, f.73)

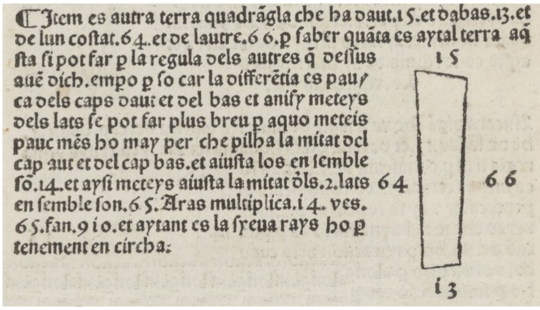

Item es autra terra quadrãgla che ha daut.15.et dabas.13.et de lun costat.64.et de lautre.66.p saber quãta es aytal terra aq̃sta si pot far p la regula dels autres q̃ dessus auẽ dich.empo p so car la differẽtia es pauca dels caps daut et del bas et aňsy meteys dels lats se pot far plus breu p aquo meteis pauc mẽs ho may per che pilha la mitat del cap aut et del cap bas.et aiusta los en semble sõ.14.et aysi meteys aiusta la mitat d̃ls.2.lats en semble son.65.Aras multiplica.14.ves.65.fan.910.et aytant es la sreua rays ho p tenement en circha:

FIGURE 4 – *Compendion del abaco* – Source : BnF

Autrement dit, il s'agit de multiplier les moyennes des côtés opposés. Les côtés de notre quadrilatère témoin ont été mesurés : $AB = 69,08$, $BC = 17,03$, $CD = 95,86$ et $DA = 45,95$ Le calcul donne donc (à l'unité près) :

$$\frac{69,08 + 95,86}{2} \times \frac{17,03 + 45,95}{2} = 2597$$

En 1605, Jean Abraham, dit Launay, publie *l'Arithmétique, arpentage universel*, où pour calculer l'aire du quadrilatère, il propose de faire la demie somme des côtés les plus longs et de la multiplier par le côté le plus court. Ce qui donnerait pour notre quadrilatère, où $AB = 69,08$, $BC = 17,03$, $CD = 95,86$ et $DA = 45,95$ une aire de

$$\frac{69,08 + 95,86}{2} \times 17,03 = 1404 \quad \text{(à l'unité près).}$$

Ce sont trois méthodes basées sur des mesures de longueur ; celles-ci pouvant générer imprécisions et erreur (au sens usuel), il est nécessaire d'en utiliser le moins possible. D'autre part, la notion de mesure d'angle est absente, elle demande des appareils et des connaissances en dehors des possibilités de l'arpenteur de l'époque. Les résultats (arrondis) obtenus pour notre quadrilatère témoin sont les suivants :

Boysset : 2522,91 – Pellos : 2597 – Abraham : 1404

Nous avons donc trois mesures. Laquelle retenir ?

Il existe une méthode sûre, explicitée assez tôt, qui consiste à découper le quadrilatère en deux triangles dont on sait calculer les aires (à savoir le demi produit de la base par la hauteur), mais elle nécessite quatre mesures de longueur, en plus d'établir deux perpendiculaires. Cette méthode se trouve, entre autres, dans *La pratique de la Géométrie* (Clerc, 1669) ou *La Géométrie de l'Ingénieur ou l'Art de mesurer* (Clermont, 1693).

La diagonale DB du quadrilatère témoin a été mesurée de 89,39 ; les hauteurs des triangles ADB et DBC sont respectivement de 40,16 et 15,16.

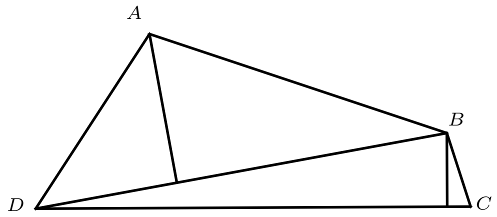


FIGURE 5 – Application de la méthode de Clermont au quadrilatère témoin

Les aires de chaque triangle sont donc lors respectivement de 1795,39 pour ADB et 726,62 pour BCD. Ce qui donne 2522 (arrondi) pour le quadrilatère. Les deux méthodes utilisant les mesures des côtés sont donc fausses. Il est d'ailleurs facile de se rendre compte qu'il faut rejeter tout calcul qui n'utiliserait que les mesures des quatre côtés. En effet, il existe une infinité de quadrilatères ayant les mêmes mesures et ils n'ont pas nécessairement la même aire. Par ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, toute mesure de longueur est inévitablement entachée d'imprécision, et il est préférable d'en utiliser le moins possible...

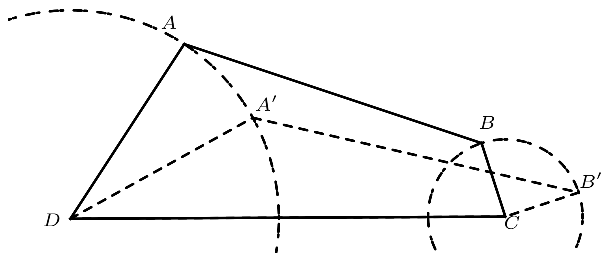


FIGURE 6 – Construction de deux quadrilatères de côtés égaux

Force est de constater que la méthode proposée par Boysset donne un résultat pratiquement égal à celui obtenu par la méthode proposée par Clermont et considérée comme sûre. Hasard ou proposition vraie ? Une démonstration s'impose ! Le schéma suivant peut servir de support à cette démonstration, en montrant l'égalité des aires des triangles de mêmes numéros.

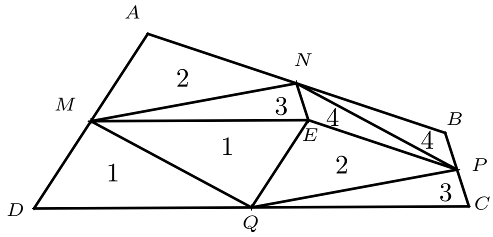


FIGURE 7 – Démonstration de la méthode Boysset

$MNPQ$ est un parallélogramme et, en construisant les parallèles ME, QE, NE et EP aux côtés du quadrilatère d'origine, on détermine un certain nombre de triangles égaux deux à deux ; la formule de Boysset revient alors à calculer l'aire de $MNPQ$ et de la doubler.

Une construction de mathématicien

La géométrie « théorique » a pu aussi proposer certaines méthodes se généralisant à tout polygone convexe. Dans les *Nouveaux Éléments de Géométrie* d'Antoine Arnauld (1667) se trouve ainsi la proposition suivante :

> « Faire une figure égale à une donnée qui ait moins d'un costé que la donnée. C'est-à-dire que si la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5 ; & si elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4, de sorte que par là on pourra venir jusqu'au triangle. Soit proposé de réduire l'exagone *bcdfgh* en un pentagone qui luy soit égal. Ayant prolongé fg, je tire la ligne *bg*. Puis de *h*, je tire sur fg prolongée *hl* parallele à *bg*. Et de *b* je tire *bl*. Je dis que le pentagone *bcdfl* est égal à l'exagone donné. Car les triangles *hlb* & *hlg* sont égaux, parcequ'ils sont sur la même base & entre mêmes paralleles. Donc ostant *hlo*, commun à l'un & l'autre, *hob* demeurera égal à *lgo*, tout le reste est commun à l'exagone & au pentagone ». (Arnauld, 1667, p. 459)

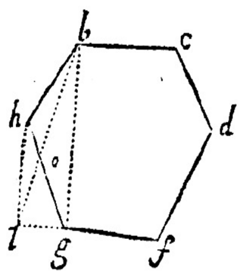


FIGURE 8 – Dessin original du texte d'Arnaud

Cette méthode permet donc de construire un polygone de même aire et d'un nombre de cotés inférieur d'une unité. Il est possible à partir d'un quadrilatère de construire un triangle de même aire, et d'utiliser alors la méthode habituelle du calcul de l'aire d'un triangle. Concernant notre quadrilatère témoin, il est possible de construire BE, parallèle à AC, E étant sur le prolongement de DA. Les triangles AEB et EBC de côté commun BE sont égaux. En leur « ôtant » EOB commun, AEO et BOC ont même aire, et le triangle DEC a donc même aire que le quadrilatère $ABCD$.

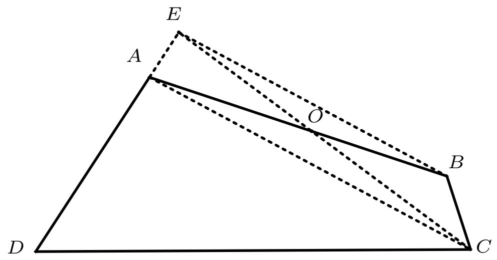


Figure 9 – Application de la méthode d'Arnaud au quadrilatère témoin

En pratique, le découpage de tout quadrilatère, voire de tout polygone, en triangles, ou en trapèzes, comme proposé dans l'ouvrage de Clermont, reste la méthode préconisée dans tous les manuels d'arpentage ou de topographie des siècles suivants, dans les cas, bien sûr, où les mesures d'angles ne sont pas utilisées.

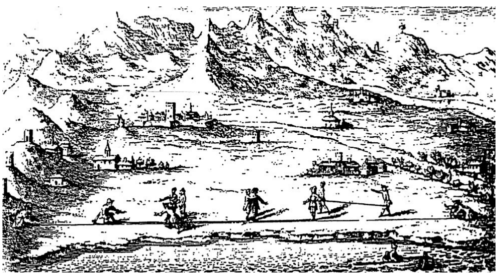


Figure 10 – Mesures sur le terrain au XVIII^e^ siècle, *La Méridienne de Paris*, de Cassini de Thury (1740)

Un calcul d'ingénieur

Mais dans le cas où il a été possible de mesurer les angles, ce qui a toujours été plus précis, plutôt que d'utiliser de multiples longueurs, et pour mettre en œuvre un calcul automatique, il s'est avéré rapidement préférable d'utiliser le système des coordonnées. La généralisation d'appareils à mesurer les angles, tels les théodolites a permis d'établir des formules générales. En rappelant ce que sont les sinus et cosinus d'un angle, et comment se définissent et se calculent les coordonnées d'un point dans un repère orthonormé, un algorithme automatique de calcul d'aire de tout polygone va pouvoir s'établir aisément.

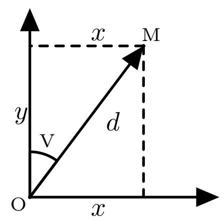


FIGURE 11 – Définition du sinus et du cosinus pour la topographie

Connaissant sa distance OM à l'origine et l'angle V (dit « gisement ») entre la direction de référence et la direction OM, compté dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$x = d.\sin V \text{ et } y = d.\cos V$$

Attention : les angles étant comptés dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la direction de référence (le Nord), le sinus est donc ici en abscisse et le cosinus en ordonnée !
L'utilisation des coordonnées permet alors d'obtenir les formules suivantes, pour un triangle ABC :

$$Aire = \frac{1}{2}(x_B y_A - x_A y_B + x_C y_B - x_B y_C + x_A y_C - x_C y_A)$$

formule qui se généralise à un polygone $P_0 P_1 ... P_{n-1}$, les sommets $P_i(x_i, y_i)$ étant ordonnés dans le sens trigonométrique :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

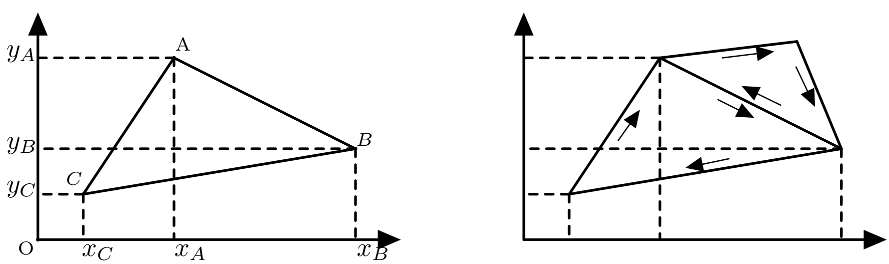
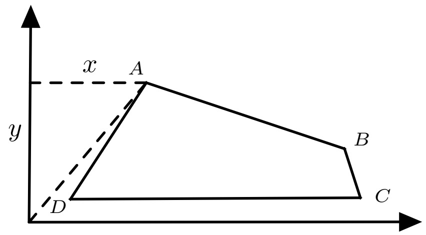


FIGURE 12 – Démonstration de la formule pour un triangle et un quadrilatère

La démonstration se fait en utilisant la formule du calcul d'aire d'un trapèze appliquée aux trois trapèzes construits avec les côtés du triangle, les perpendiculaires à l'axe des abscisses contenant A, B, C et les segments correspondants sur l'axe. Il faut remarquer que le calcul s'opère par côtés et dans un certain sens. Pour l'aire de notre quadrilatère témoin, il faut d'abord calculer les coordonnées des quatre sommets, puis appliquer la formule. Voici les résultats obtenus :



	x	y	$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$
A	44,92	55,02	
D	19,02	9,80	−606,2644
C	114,88	9,80	−939,428
B	107,12	24,96	1817,6288
A	44,92	55,02	4772,5392
		Somme :	5044,4756

FIGURE 13 – Application de la méthode au quadrilatère témoin

L'aire du quadrilatère est bien 2522 unités ! La démonstration s'étend aux quadrilatères, découpés en deux triangles : la somme des aires des deux triangles, en utilisant la formule précédente, fait apparaitre une simplification, puisque le côté adjacent aux deux triangles est « parcouru » dans les deux sens. La formule se généralise par récurrence. D'autres formules ont été utilisées, en regroupant différemment les coordonnées, et en considérant les sommets pris trois par trois. La comparaison des résultats de deux de ces formules permettait de s'assurer de l'exactitude des calculs. Si, au siècle dernier, le calcul était établi en tableau regroupant les coordonnées des points, il est aujourd'hui effectué par un ordinateur intégré à l'appareil, dit « station totale », mis en place à portée de vue des points et orienté vers un axe des ordonnées arbitraire.

Conclusion

La présentation du texte de Boysset, donnant une méthode élégante et originale pour calculer l'aire d'un polygone convexe quelconque nous a donné l'idée de proposer sa comparaison avec d'autres méthodes plus ou moins contemporaines. L'exercice donne l'occasion de mettre en défaut les analogies avec des cas particuliers, et de faire de la Géométrie ! Dans un second temps, l'exposé de la méthode actuelle répond à la curiosité légitime qu'il est possible d'avoir devant le travail d'un géomètre posant son théodolite ou sa station totale au bord d'une route ... Nous imaginons que ces quelques exemples peuvent fournir pour des élèves de collège ou lycée des idées d'activités, sources de réflexion sur la notion de calcul théorique versus mesures sur le terrain, et peut-être d'étonnement.

Références bibliographiques

ABRAHAM Jean, dit Launay, 1605, *Arithmétique, arpentage universel...* Rouen, Théodore Reinsart, https://books.google.fr/books?id=wsNZAAAAcAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false, dernier accès le 12/02/2021.

ARNAULD Antoine, 1667, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Charles Savreux. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565463h.texteImage, dernier accès le 11 février 2021.

BOYSSET Bertrand, 1405, *Siensa de Destrar*, Arles. ms autographe 327 f.33-64, Carpentras, Bibliothèque Inguimbertine.
Traduction française, notes et commentaires de Magdeleine Motte, 1988,Toulouse, École Nationale du Cadastre. https://www.espaci-occitan.com/botiga/oc/histoire-etudes/2413-la-siensa-de-destrar-bertrand-boysset-1345-1414-9999000000185.html, dernier accès le 12 février 2021.

CASSINI DE THURY César-François, 1740, « La Méridienne de l'observatoire Royal de Paris », Mémoires de l'Académie des Sciences.

CLERC (ou LECLERC) Sébastien, 1669, *Pratique de la géométrie*, Paris, Thomas Jolly.

CLERMONT, 1693, *Géométrie pratique ou l'art de mesurer*, livre cinquième p. 151-152-176, problème 71, Strasbourg, Friderich Schmuck. https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10053478?page=5, dernier accès le 12 février 2021.

PELLOS Frances, 1492, *Lo Compendion del Abaco*, Turin, Nicolo Benedetti et Suigo de Sancto Germano. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k321093k, dernier accès le 10 février 2021.