

Mesurer la terre et l'univers : de l'Histoire à la pratique en classe

Anne-Marie AEBISCHER

Introduction

Mesurer la terre et l'univers est la destinée première de la géométrie. Cette discipline s'est fortement développée dans l'Antiquité mais il existe peu de témoignages sur les instruments utilisés alors. En Europe, les connaissances mathématiques de l'Antiquité et du monde arabo-musulman transmises à partir du x^e siècle par des traductions de l'arabe ou du grec vont déclencher un nouvel essor scientifique et contribuer au développement d'instruments de mesures pour assister l'évolution de l'astronomie, de la navigation ou de l'arpentage. Parmi ceux-ci, le bâton de Gerbert, l'arbalestrille ou bâton de Jacob, la croix du bûcheron, le carré géométrique et l'équerre articulée.

Dans cet article, je vais présenter le contexte historique lié à l'apparition de ces instruments, ainsi que quelques textes attestant de leur utilisation et des modes de pensées de leur époque. Ces instruments sont d'une réalisation simple, leur fabrication est détaillée à la fin du texte.

Suivre le parcours d'anciens mathématiciens, réaliser des instruments de mesure, les utiliser en situation de façon raisonnée sont des activités porteuses de sens pour les élèves. La manipulation de ces instruments correspond aux entrées – Proportionnalité/ Théorème de Thalès/ Agrandissement réduction – des programmes de collège. Au fil du texte, des encadrés signalent des pistes d'exploitation en classe.

Cet exposé est issu du travail réalisé par par A.-M. Aebischer (IREM de Franche-Comté), J. Lorblanche (IREM de Bordeaux), G. Martin (IRES de Toulouse) au sein de la CII Popularisation des mathématiques (Commission Inter IREM) dans le thème *Mathématiques en plein air*.

Le bâton de Gerbert

Voici une présentation rapide de cet instrument, très intéressant pour la classe, mais dont l'aspect historique n'est pas documenté ici.

Le bâton de Gerbert sert à mesurer une hauteur. Deux bâtons, un grand et un petit, assemblés à angle droit, déterminent en haut un triangle rectangle isocèle ($AC = BC$). L'instrument étant maintenu vertical (fil à plomb) sur un terrain plat, l'observateur le positionne à une distance telle que la ligne de visée (AB) passe par le sommet de l'objet à mesurer.

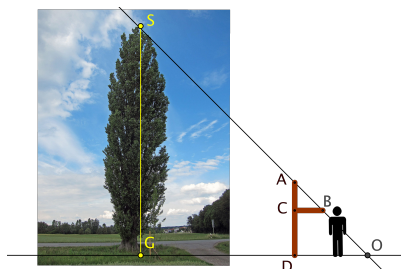


FIGURE 1 – Utilisation du bâton de Gerbert

La distance entre le pied de l'instrument et la base de l'objet à mesurer à laquelle on ajoute la hauteur totale de l'instrument est la hauteur cherchée.

Avec les notations de la figure 1, le triangle ABC est rectangle isocèle en C . Par égalités d'angles, les triangles OSG et OAD sont également rectangles isocèles, en G et en D respectivement :

$$\text{D'où } SG = GO = GD + DO = GD + DA.$$

Outils : relations angulaires, propriétés des triangles rectangles isocèles

Activité : Justifier l'utilisation du bâton de Gerbert - Réaliser des mesures de bâtiments autour du collège.

Le bâton de Gerbert tire son nom de Gerbert d'Aurillac (945-1003) qui deviendra pape en 999 sous le nom de Sylvestre II. Gerbert, ayant séjourné dans les abbayes catalanes de Vic et Ripoll a eu un accès précoce à des manuscrits d'astronomie, d'arithmétique ou de géométrie traduits de l'arabe en latin.

L'arbalestrille et l'astronomie

L'arbalestrille, appelée aussi ray astronomique ou bâton de Jacob, est au départ un instrument créé par et pour les astronomes qui sert à mesurer des angles (hauteur d'un astre sur l'horizon, écart angulaire entre deux astres).

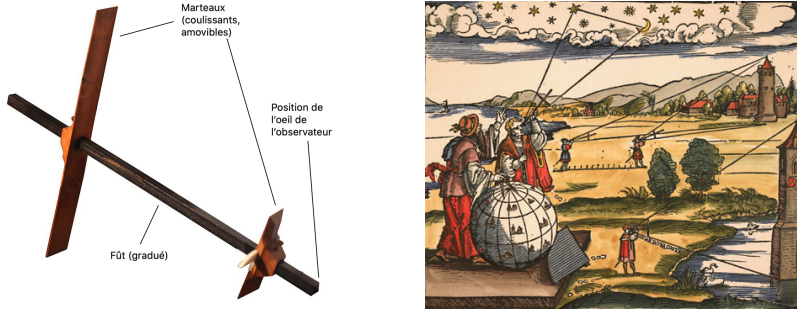


FIGURE 2 – Arbalestrille - Illustration de *Introductio Geographica* de Pierre Apian, 1533

L'arbalestrille est composée d'un long bâton gradué, le fût (ou la flèche), le long duquel coulisent des bâtons transversaux de tailles diverses appelés marteaux. On choisit un marteau de taille appropriée et plaçant son œil à une extrémité du grand bâton, on fait coulisser le marteau choisi jusqu'à ce que la ligne visuelle passant par les extrémités du marteau intercepte les extrémités de l'étendue visée.

Cet instrument sera beaucoup utilisé pour les mesures astronomiques¹ et pour la navigation. Nous allons étudier cet usage tout d'abord à travers l'œuvre de Levi Ben Gerson (détermination du centre de vision, graduation du fût, détermination de l'angle de visée), puis nous nous pencherons sur le problème de la graduation du fût dans l'œuvre de Gemma Frison.

Levi Ben Gerson, l'inventeur

Levi Ben Gerson, appelé parfois Gersonide est né à Bagnols-sur-Cèze en 1288 et mort à Perpignan vers 1344. Mathématicien, astronome, physicien et philosophe juif, il fut l'esprit le plus universel du Moyen Âge juif.

Il a vécu à Orange dans une communauté juive. Les Juifs de Provence devaient faire face à des difficultés « si intenses qu'elles rendaient la méditation impossible »². Né dans une famille de lettrés, il a été probablement autodidacte pour son éducation scientifique. Il parlait provençal mais n'a écrit qu'en hébreu. Ses textes et sa manière de citer des textes anciens laissent penser qu'il ne lisait pas l'arabe mais utilisait des traductions hébraïques d'ouvrages arabes. Certains de ses ouvrages ont été traduits en latin mais peu d'auteurs le citeront.³

Son ouvrage *Les guerres du Seigneur* comprend un *Traité d'astronomie* en 136 chapitres (constituant la première partie du livre V), dans lequel il critique

1. Son utilisation est indiquée dans (Apian, Frison, 1534) – pour d'autres exemples de sources on pourra consulter http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_144_06.pdf. Tycho Brahe, astronome danois du XVI^e siècle, l'utilisera et construira des instruments pour améliorer la précision des mesures.

2. Citation de Levi Ben Gerson lui-même dans la préface des *Guerres du Seigneur* (1329).

3. Pour plus de détail sur sa biographie, on pourra consulter le site MacTutor History of Mathematics à la page <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levi/>

les principes fondamentaux du système de Ptolémée. Il y présente un instrument dont il se déclare l'inventeur (connu ensuite sous le nom de bâton de Jacob ou d'arbalestrille, toutefois il ne le nomme pas) ainsi que des tables trigonométriques.

Dans son ouvrage *The astronomy of Levi Ben Gerson (1288-1344)*, Bernard Goldstein propose une traduction en anglais des 20 premiers chapitres du traité d'astronomie de Levi Ben Gerson, cette traduction est suivie de commentaires éclairant le texte. Les extraits qui suivent sont une transposition personnelle en français de la traduction de Bernard Goldstein.

L'arbalestrille dans l'œuvre de Levi Ben Gerson

Graduation et centre de vision

Dans le chapitre 6 de son traité d'astronomie, Gerson présente très clairement sa méthode de graduation du fût. Il commence par prouver que, lorsqu'on effectue une visée, le centre de vision n'est pas l'extrémité du fût à laquelle on applique l'œil, mais se trouve à l'intérieur de l'œil. Cela induit une correction⁴, la graduation du fût ne commencera pas à 0.

Dans l'extrait de texte qui suit, les annotations entre crochets se rapportent à la figure 3. L'arbalestrille y est matérialisée par son fût $[AB]$, et deux marteaux utilisés simultanément DG et ZE . Les marteaux (appelés ici tablettes) sont placés de façon à ce que lorsqu'on place un œil en A , la ligne visuelle effleure Z et D d'une part, G et E d'autre part. Les droites (DZ) et (GE) coupent la droite (AB) au même point L (symétrie), point qui représente le « centre de vision ».

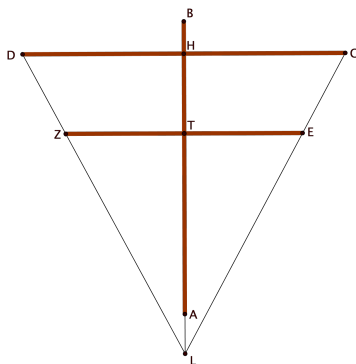


FIGURE 3 – Centre de vision

« 20- Nous prenons un bâton avec des surfaces planes et à une extrémité nous plaçons l'œil en son centre.

21- Nous avons également des tablettes [marteaux DG et ZE] dont la surface est plane trouées en leur milieu et nous passons le bâton $[AB]$

4. La correction introduite par Gerson sera retrouvée indépendamment plus tard – par Horrocks en 1637, et déjà signalée par Digges en 1573 – et appelée correction d'excentricité : voir dans (Goldstein, 1985)

à travers elles de façon à ce que leur hauteur par rapport au bâton soit légèrement plus basse que la hauteur de l'œil sur lui.

22- Nous construisons deux tablettes de façon à ce que l'une soit deux fois la taille de l'autre ou dans n'importe quel autre rapport.

23- Nous plaçons la petite tablette plus près de l'œil et nous la déplaçons jusqu'à ce qu'elle cache exactement la plus grande tablette.

24- Si nous procédons soigneusement, nous pouvons déterminer facilement le sommet de l'angle visuel.

25- Les deux tablettes sont parallèles et à angle droit avec le bâton, et des lignes parallèles qui coupent les côtés d'un triangle les divisent proportionnellement.

26- Puisque la longueur des tablettes est connue $[DG \text{ et } ZE]$ ainsi que la distance entre elles $[HT]$ l'emplacement du point de vision $[L]$ est connu.

27- Ceci puisque le rapport entre la ligne qui le joint à la petite tablette et la ligne qui le joint à la grande tablette est égal au rapport entre la petite tablette et la grande tablette. $\left[\frac{TL}{HL} = \frac{ZE}{DG} \right]$

28- Lorsque nous alternons, séparons et inversons les rapports, nous trouvons que le rapport entre la petite tablette et la distance qui la sépare du centre de vision est égal au rapport de la différence entre les deux tablettes et leur différences de distance au centre de vision. $\left[\frac{ZE}{TL} = \frac{DG}{HL} = \frac{DG - ZE}{HL - TL} = \frac{DG - ZE}{HT} \right]$

29- Puisque le deuxième rapport est connu par l'observation, le rapport entre la petite tablette et sa distance au centre de vision est déterminé.

30- Mais la taille de la petite tablette est connue, sa distance au centre de vision $[TL]$ est donc déterminée. »

Outils : Théorème de Thalès - Calcul algébrique - Calcul fractionnaire

Activité : En réalisant l'expérience de Gerson pour trouver le centre de visée, on trouve avec les notations de la figure 3 : $DG = 33,5 \text{ cm}$, $ZE = 15,5 \text{ cm}$, $HT = 37 \text{ cm}$ et $AT = 29,5 \text{ cm}$. Déterminer la position du centre de vision. Pourquoi ne pas faire l'expérience vous-même ?

Gerson décale donc de cette estimation le point de départ de la graduation du fût. Il gradue le fût en parties (P) contenant chacune 8 unités (1 partie fait environ 20 cm), les unités sont subdivisées en 60 minutes⁵. La graduation débute à $\frac{1}{20}^P$ c'est-à-dire à $0^P 0'' 24'$. Il utilise un guide-âne (lignes parallèles équidistantes) pour lire plus précisément la position du marteau sur le fût :

5. Le système de numération sexagésimal était encore couramment employé.

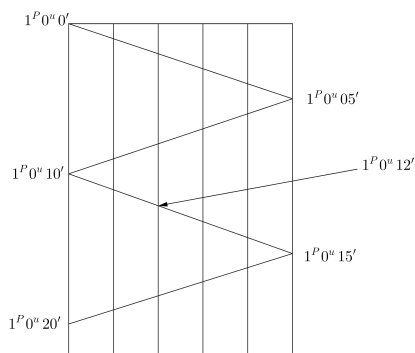


FIGURE 4 – Graduation et guide-âne

Outil : Calcul fractionnaire

Activité : Gerson évalue la position du centre de visée à environ $\frac{1}{20}$ de partie (P). La partie est une unité mesurant environ 20 cm. Chaque partie est divisée en 8 unités (u) et chaque unité est divisée en 60 minutes ($'$). Il prétend que $\frac{1}{20}P = 24'$. Justifier cette affirmation.

Entraînement à la lecture sur le guide-âne.

Détermination d'un angle

Au Chapitre 7 du traité d'astronomie, Gerson explique comment déterminer la distance angulaire entre deux étoiles à l'aide d'un marteau de longueur 10^u . Une fois la visée réalisée, il relève que le marteau est à la position 40^u de la graduation. C'est une table de cordes⁶ (reliant pour un cercle de rayon donné la mesure d'un angle et la longueur de la corde correspondante) qui va lui permettre de déterminer l'angle.

La table de corde⁷ qu'utilise Gerson est établie pour un cercle de rayon 60^u . Il détermine donc le « rayon corrigé » AC (par le théorème de Pythagore) puis détermine, par proportionnalité, la longueur de la corde correspondant à CD dans un cercle de rayon 60. Sa table de cordes lui fournit alors par lecture inverse un encadrement de l'angle cherché.

Ici $AI = 40$ et $CD = 10$, donc $CI = 5$. Il détermine $AC = \sqrt{5^2 + 40^2} \simeq 40^u 19'$ (notation sexagésimale). Il en déduit que la corde à chercher dans la table est $\frac{10^u \times 60}{40^u 19'}$, soit environ $14^u 53' 3''$ (notation sexagésimale). Il trouve un angle compris entre 14° et 15° .

6. Dans cet ouvrage Gerson propose aussi une table des sinus, mais il revient à la table de cordes pour cette résolution.

7. On peut consulter une telle table dans <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k64767c>, *La Composition Mathématique de Claude Ptolémée* traduite par M. Halma, p. 38.

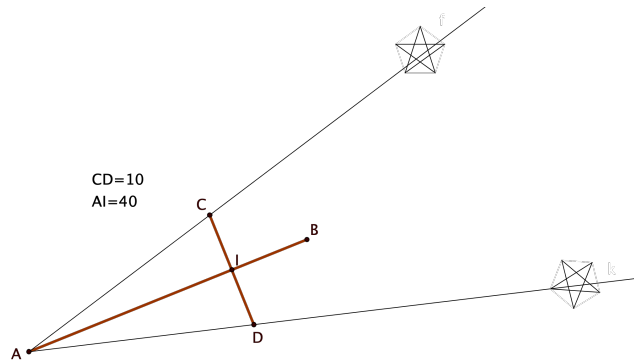


FIGURE 5 – Exemple de mesure d'un angle

Outils : Fonctions trigonométriques (sinus) - Tableau

Activité :

1. Réaliser une table de cordes pour un cercle de rayon 60 en déterminant les cordes correspondant aux angles de 10° à 20° (valeurs entières).
2. Avec les notations de la figure 5, $AI = 40$ et $CD = 10$. Déterminer l'angle à la façon de Levi Ben Gerson. (écriture décimale)
3. Pour les valeurs précédentes, proposez une autre méthode pour déterminer l'angle.

Le travail de Levi Ben Gerson sera peu diffusé, probablement isolé par sa particularité linguistique. Il sera néanmoins traduit en latin, mais par la suite peu cité. Toutefois l'arbalestrille ou bâton de Jacob deviendra un instrument extrêmement populaire du XV^e siècle jusqu'au $XVIII^e$ siècle dans la navigation⁸.

La graduation vue par Gemma Frison



FIGURE 6 – Gemma Frisius ou Frison, né Jemme Reinerszoon

8. Voir par exemple l'usage qu'en fait Jean-Baptiste Denoville dans (Hébert, 2008).

Gemma Frisius ou Frison (1508-1555) est un cartographe, mathématicien et médecin originaire de la Frise. Sa première œuvre est une révision du livre de cosmographie de Peter Apian. Il publie à Anvers en 1545 *De radio astronomico et geometrico* (*Le Ray astronomique et géométrique*).

Les extraits proposés dans la suite du texte sont tirés de l'ouvrage *Cosmographie ou Description du monde universel* par Pierre Apian et Gemma Frison, publié à Anvers en 1584 et disponible sur Gallica. Cet ouvrage réunit, dans une traduction en français, la *Cosmographie* de Pierre Apian, des textes de Gemma Frison dont *Le Ray astronomique et géométrique*, ainsi que quelques textes sur le sujet de différents auteurs, dont Sébastien Munster.

L'arbalestrille devient ici le Ray. Frison propose deux méthodes pour graduer directement le fût selon l'angle de visée.

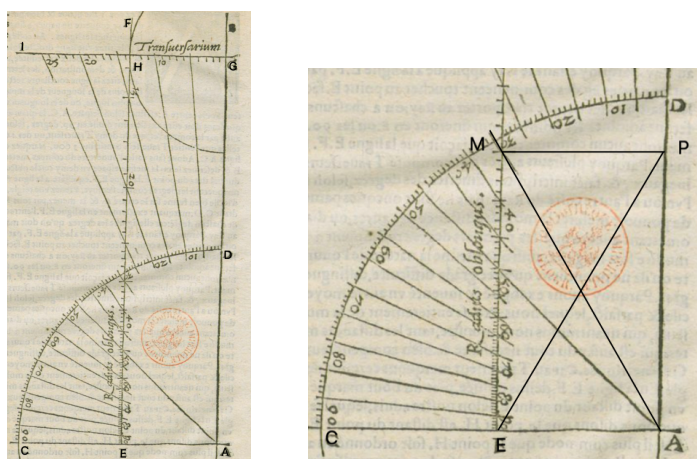


FIGURE 7 – Méthode de graduation du fût (Apian, Frison, 1584, p. 258) –
Source : BnF

Tout d'abord, à l'aide d'un quart de cercle gradué de degré en degré. Le quart de cercle utilisé a un rayon AC égal à la longueur GI du marteau (ou traverseur). $AGIC$ est un rectangle. On trace les droites (cf. figure 7) passant par chacune des graduations du quart de cercle et on reporte la mesure en degré correspondante à l'intersection entre la droite et le fût. Sur l'exemple de la figure 7, on peut voir par exemple le report de la graduation 30° en M . L'angle reporté n'est pas ici celui qui intercepte le marteau tout entier, mais sa moitié MP , d'après l'égalité $\widehat{PAM} = \widehat{PEM}$ dans le rectangle $MPAE$.

Dans le paragraphe suivant, Frison explique comment on peut graduer directement le fût avec la valeur de l'angle grâce à une table des sinus⁹, dans le cas

9. Les mathématiciens indiens ont été les premiers à utiliser le sinus, les mathématiciens arabomusulmans ont introduit progressivement d'autres lignes trigonométriques, mais cette connaissance ne sera vraiment diffusée en Europe qu'à partir de Regiomontanus qui publie *De triangulis omnimodis libri quinque* (*Sur les triangles*) en 1464. Voir (Hébert, Vasseur, 2004)

où le demi-marteau représente 1000 unités. Le sinus était la ligne trigonométrique la plus utilisée, les tables étant alors rapportées à un rayon de cercle particulier, ici 100 000 (cercle de centre A , voir figure 8). Pour reporter la graduation de l'angle $\alpha = \widehat{CAB}$ donné (de 1° à 90°), on relève $\sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha)$ (c-à-d. $\cos \alpha$) et par la propriété des triangles semblables on détermine la position du marteau F correspondant à $\widehat{FDE} = \alpha$. Il propose un calcul correspondant à l'expression

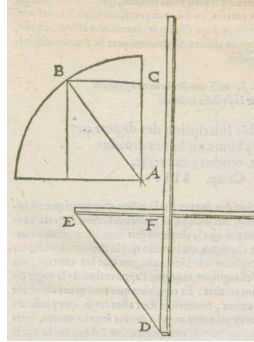
$$DF = \frac{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot 1000}{\sin \alpha}.$$


FIGURE 8 – Graduation avec une table des sinus (Apian, Frison, 1584, p. 260) – Source : BnF

Outils : Tableur - Exemple de fonction non affine

Activité : Proposer une méthode pour graduer un fût d'1 mètre avec la valeur de l'angle de visée lorsqu'on utilise un marteau de 34 cm. (Cette méthode peut s'inspirer d'une des deux méthodes précédentes ou faire intervenir la fonction tangente).

Le bâton de Jacob et l'arpentage

Dans le domaine de l'arpentage, l'arbalestrille prend plutôt le nom de bâton de Jacob. Sébastien Munster¹⁰ rapporte que l'origine de ce nom pourrait être « à cause des paroles du patriarche Jacob qui dict au 32 de Genèse : Je suis passé avec un baston ce Jordain [Jourdain] ».

La mesure de longueur ou de hauteur à l'aide de l'arbalestrille est évoquée dans de nombreux ouvrages du XVI^e siècle comme : *Margerita philosophica* de Gregor Reisch (1495), *Prothomathesis* d'Oronce Fine (1532), *Der furnembsten, notwendigsten der gantzen Architectur* de Walter Ryff (1547), *Arithmeticae Libri duo Geometriae septem et viginti* de Pierre La Ramée (1559). Nous allons étudier l'usage du bâton de Jacob pour l'arpentage à travers les textes de Gemma Frison

10. Sebastian Munster (1448-1552) - Extrait du *premier livre des principes de la géométrie*, ajouté à l'édition de 1584 de la *Cosmographie* d'Apian (Apian, Frison, 1584).

(*Le Ray astronomique et géométrique* déjà cité plus haut) et à travers l'ouvrage d'Alain Manesson Mallet¹¹ *La Géométrie Pratique* (1702), dont les textes sont d'un abord plus facile.

Mesure d'une grandeur accessible

Le fût (MN sur la figure 9) est en général gradué en prenant la longueur d'un marteau (DC sur la figure 9) comme unité. Lorsqu'on effectue une visée, on se retrouve dans une situation de proportionnalité. Le fait de placer le marteau (ici curseur) sur une graduation multiple de sa longueur induit un rapport simple (1, 2 ou 3, ...) entre les figures semblables. Sur la figure 9 : $\frac{MG}{DC} = \frac{ML}{AB}$.

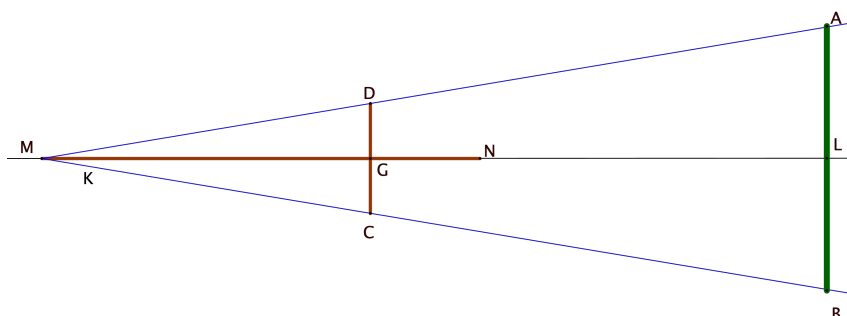


FIGURE 9 – Figures semblables

Ainsi, si on connaît la distance au segment visé on peut déterminer sa largeur, ou réciproquement, si on connaît sa largeur on peut déterminer la distance à laquelle on s'en trouve.

Voici une telle mesure évoquée par Frison (le marteau devient ici le Traverseur, les pinnules sont des repères placés aux extrémités du traverseur) :

« [...] étant le Ray tres diligemment estendu au niveau, mesurez la distance du lieu ou vous estes iusques au lieu du Traverseur au mesme Ray, iusques a l'interval des pinnules, la mesme tiendra la distance de ton pied de la hauteur veüe, [...] Multipliez doncques le nombre de la distance connue, par les parties qui tombent entre les pinnules, & divisez le produict par le nombre des parties au Ray dés l'œil iusques au Traverseur, & vous aurez le nombre & la mesure de la grandeur demandee. » (Apian, Frison, 1584, p. 271)

Il faut noter que lorsque le Traverseur est centré sur le Ray, on ne peut mesurer qu'en se plaçant sur la médiatrice de la distance à évaluer, ce qui est un handicap (en particulier pour les mesures de hauteurs). Nous verrons dans le dernier paragraphe, comment Frison propose de remédier à ce problème.

11. Allain Manesson Mallet, (1630-1706) est un ingénieur militaire, géographe et cartographe français.

Largeur d'une rivière

Les deux situations qui suivent, tirées du traité *La Géométrie Pratique* de Manesson Mallet, sont plus complexes. Il s'agit de déterminer des mesures de grandeurs inaccessibles, cette détermination nécessitera deux mesures.

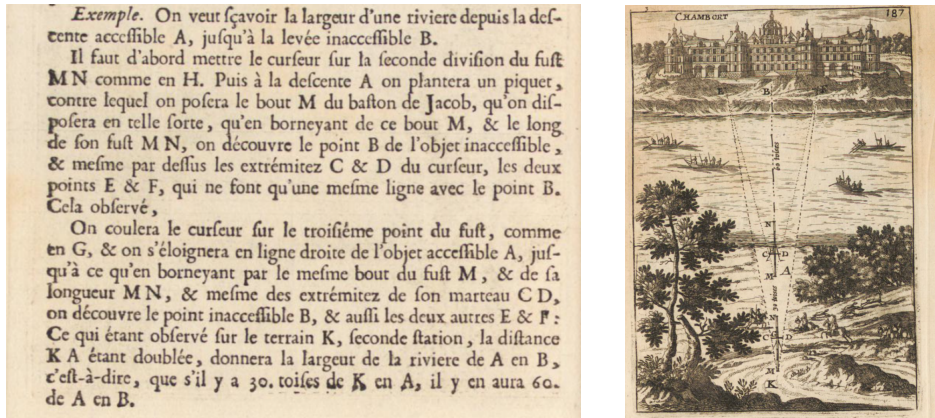


FIGURE 10 – Exemple 1 - Texte et représentation (Manesson-Mallet, 1702, p. 186-187) – Source : BnF

Le texte présenté dans la figure 10 explique qu'on réalise deux visées basées sur deux points de repère (E et F) situés sur l'autre rive. Entre chacune de ces visées le marteau sera déplacé d'une graduation (de la deuxième à la troisième). La simple mesure du déplacement au sol (KA) effectué entre les deux stations permet déterminer la largeur de la rivière (AB), voir figure 11.

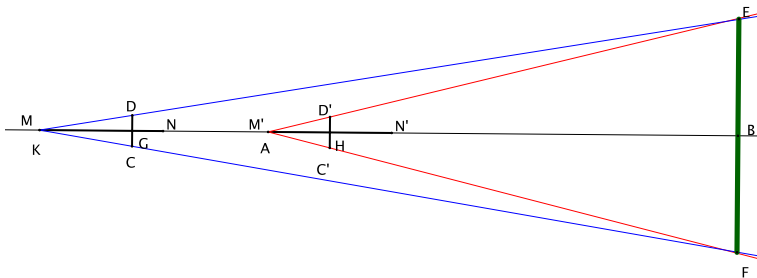


FIGURE 11 – Exemple 1 - Schéma

La solution (voir aussi figure 11) repose sur les propriétés des triangles semblables entre l'arbalétrille et la figure sur le terrain : lorsque le marteau est sur la deuxième graduation, la longueur délimitée sur le fût est le double de la taille du marteau. Ainsi en est-il du rapport entre les distances AB et EF : $AB = 2EF$. De même, lorsque le marteau est sur la troisième graduation, la longueur déli-

mitée sur l'arbalestrille est le triple de la longueur du marteau. On a donc par proportionnalité $KB = 3EF$.

$KA = KB - AB = 3EF - 2EF = EF$, soit $KA = \frac{1}{2}AB$, on en déduit que $AB = 2KA$.

Le raisonnement effectué ici est qualifié de « raisonnement arithmétique ». Un tel raisonnement progresse vers le résultat cherché à partir des relations connues, sans perte de sens à aucune étape (à l'inverse d'un raisonnement algébrique). Ce mode de pensée plus ancien est aussi beaucoup plus simple à maîtriser par des élèves.

Distance entre deux objets

Dans ce deuxième exemple (voir figure 12), on détermine une longueur AB située perpendiculairement au déplacement de l'arbalestrille.

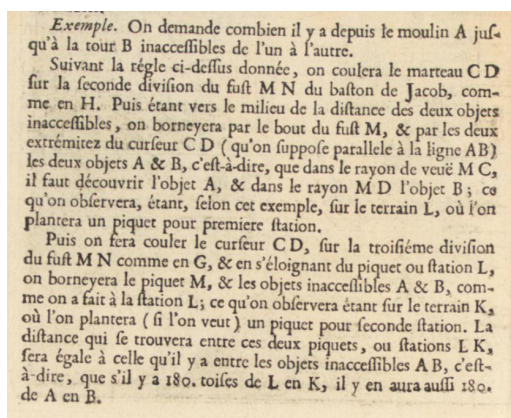


FIGURE 12 – Exemple 2 - Texte et représentation (Manesson-Mallet, 1702, p. 188 et 189) – Source : BnF

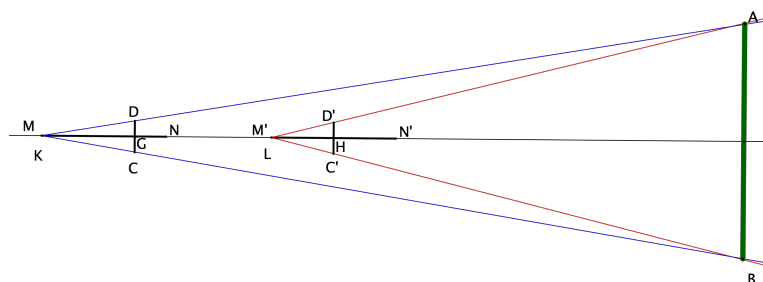


FIGURE 13 – Exemple 2 - Schéma

On évalue à nouveau les relations de proportionnalité qui découlent des différentes positions du marteau (notations de la figure 13 : $M'I = 2AB$, $MG = 3AB$, il en découle que $MM' = AB$.

Cette modélisation du problème est imparfaite car, sur la représentation, les figures géométriques correspondant aux deux positions ne sont pas exactement coplanaires.

Outils : Raisonnements de proportionnalité - Méthode arithmétique

Activité : Reprendre les situations précédentes pour déterminer des grandeurs inaccessibles. On peut faire varier le déplacement du marteau sur les graduations (de la première à la troisième, de la graduation 1,5 à la graduation 2, etc). Faire ses propres mesures.

Évolution de l'arbalestrille

Lorsqu'on désire mesurer une hauteur, la condition de se placer sur la médiatrice impose de mesurer des objets qui sont d'une hauteur double de celle à laquelle est tenue l'arbalestrille. Revenons à l'ouvrage *De Radio astronomico et geometrico* de Gemma Frison à travers la traduction en français de 1584. Il y propose une ingénieuse modification de l'arbalestrille afin que le marteau puisse coulisser perpendiculairement au fût, car « [il faut] accomoder le Traverseur [marteau] selon les grandeurs apparentes des choses » (Apian, Frison, 1584, p. 263-265).

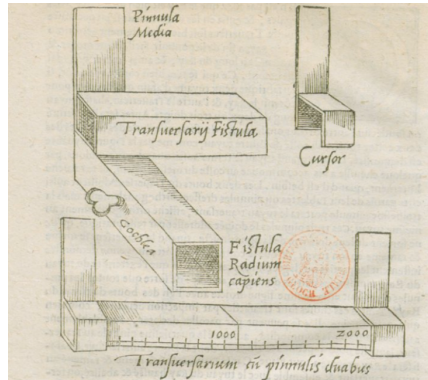


FIGURE 14 – Modification de l'arbalestrille - Gemma Frison (Apian, Frison, 1584, p. 264) – Source : BnF

Il propose alors plusieurs exemples de mesure :

— Mesure en une station (Apian, Frison, 1584, p. 271) :

« Soit la distance des pinnules de 24 parties et la distance du traverseur à l'œil 240 particules. Je dis que la distance du pied jusques à la même chose proposée est dix fois autant que la grandeur vue. Parquoy si la distance a elle de 3400 pieds, la grandeur de la chose demandée sera 340 pieds, comme les reigles des proportions démontrent. »

- Mesure en deux stations (Apian, Frison, 1584, p. 264-265) :
- « [...] Remuez le Traverseur autant d'espace de son premier lieu vers la fin du Ray comme est la quantité du même Traverseur en adjoutant aux parties de la première assiette autant de parties que la distance des pinnules contient au Traverseur ou il sera arrêté. [] Par cette voye, sera l'espace entre deux stations égale à la chose qui est à mesurer, laquelle étant à mesurer par pieds, ou par toute autre sorte de mesure[...] ».

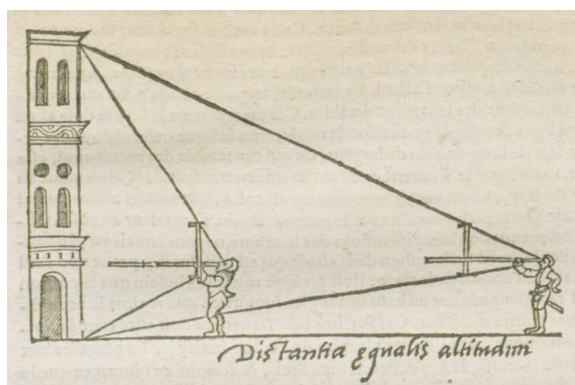


FIGURE 15 – Mesure de la hauteur en deux stations - Gemma Frison (Apian, Frison, 1584, p. 265) – Source : BnF

Dans cet extrait, Frison propose la mesure d'une hauteur par la distance entre les deux stations de visée. Il s'agit d'un raisonnement analogue à ceux que nous avons détaillé plus haut, mais plus complexe dans le sens où le Traverseur a été déplacé le long du Ray d'une distance égale à la longueur du Traverseur, mais sans l'avoir situé sur des graduations particulières : ainsi le coefficient de proportionnalité entre les triangles n'est pas précisé. Il souligne également l'indépendance entre l'unité choisie pour les graduations du Ray et les unités choisies pour mesurer les distances.

La croix du bûcheron

On peut probablement relier au Ray géométrique l'instrument nommé Croix du bûcheron et qui permet, en accolant perpendiculairement deux bâtons de même longueur, de déterminer la hauteur d'un arbre par simple visée. Par agrandissement, la hauteur de l'arbre est égale à la distance à laquelle on réalise la visée. La position relative des deux bâtons se détermine en proportion entre la hauteur à mesurer et la hauteur à laquelle s'effectue la mesure. Cette situation fait déjà l'objet d'exercices dans les manuels scolaires :

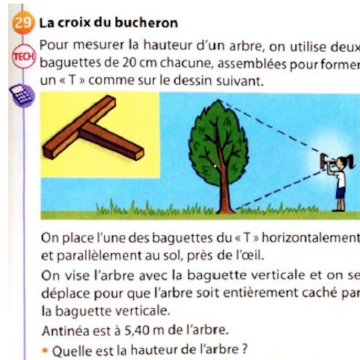


FIGURE 16 – Mission Indigo, Cycle 4, 2017, p. 491

Le Carré géométrique

Le carré géométrique est un instrument de mesure de longueurs basé sur la proportionnalité des triangles qui apparaît au XVI^e dans le *Quadraticum Geometricum* de Georg Peurbach (1516) ou chez Walter Ryff (déjà cité). Nous étudierons plus particulièrement ici l'ouvrage d'Oronce Fine, *Un bref et singulier Traicté touchant la composition et usage d'un instrument appelé le quarré géométrique* (1538).



FIGURE 17 – Oronce Fine – Source : BnF

Oronce Fine (1494-1555) fut un éditeur, mathématicien et cartographe français. Défenseur des mathématiques, il obtint de François I^{er} la création d'une chaire de mathématiques au sein du Collège de France. Sa *Protomathesis* (1532) est un ouvrage de mathématiques théoriques et pratiques où il présente des instruments (carré géométrique, équerre articulée, bâton de Jacob). Il publie ensuite des versions simplifiées et abrégées, pour leur assurer une meilleure diffusion dont ce traité de 1538 dans lequel il justifie ainsi la rédaction en français :

« Pour ce que plusieurs princes et autres gentils hommes ou capitaines de guerre De noble et subtil esprit ausquelz par l'inclemence du temps ou negligence de leurs parents ne a ete donne la congnoyssance de la

langue latine et des liberales consequement et parfaictes sciences que l'on appelle mathematiques principalement de lart et science de Geometrie, Lesquels neantmois se delectent et prennent aucunesfois plaisir savoir et congnoitre quelqz portion de lusaige et plus utile pratique Dicelle. » (Fine, 1538)

Voici quelques exemples d'utilisation du carré donnés par Fine¹². Tous ces exemples peuvent faire l'objet d'exercices.

Mode d'emploi du carré géométrique



FIGURE 18 – Carré géométrique - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p. 5-6) – Source : BnF

Le carré géométrique est un cadre carré de grande taille, comme le montre la figure 18. Sur ce cadre s'articule une règle mobile servant à viser. Cette règle peut être munie d'un viseur (ici pinule). Les côtés du carré sont en général divisés en 60 parties.

Voici le mode d'emploi donné par Oronce Fine (Fine, 1538, p. 5), retranscrit :

« Quand vous voudrez mesurer par le susdit instrument et carré géométrique la longueur de quelque distance proposée étant comprise et étendue fort au long ou sur le large ou au travers d'une plane campagne, faites ainsi comme s'en suit. Placez sur l'un des bouts de la longueur proposée l'un des côtés de votre carré qui sont divisés en 60 parties sur le commencement et dressez l'autre des côtés perpendiculairement vers la fin d'icelle longueur le plus droitement que vous pourrez. Puis approchez l'œil du point *a* et en élevant ou déprimant tout bellement la règle mobile dudit carré, dressez toujours votre vue droitement par les fentes des pinules d'icelle règle jusqu'à ce que vous puissiez voir précisément l'autre bout et fin d'icelle longueur ou distance proposée. Ce fait, considérez où la ligne droite *af* de ladite règle qui passe par le point *a* et par le milieu des pinules divise ou coupe le côté dudit carré qui est érigé debout et combien il y a de parties desdites 60¹³. Depuis le commencement dudit côté jusqu'à ladite section ou division.

12. Voir aussi (Bénard, 2014).

13. Oronce Fine utilise la notation romaine *lx*.

Car autant de fois que 60 contiendront icelles parties ainsi comprises comme dit est : autant de fois ladite longueur ou distance proposée contiendra l'un des côtés dudit carré. »

Outils : Figures semblables, proportionnalité

Activité : L'exemple suivant est tiré des pages 5 et 6 du *Traité* d'Oronce Fine, les notations sont celles de la figure 18) :

« Notez le cas par manière d'exemple que vous vouliez mesurer la longueur *de* de la suivante figure. Et qu'en mettant le coin *d* sur le commencement de la longueur et dressant le côté *bc* vers la fin *e*, la ligne visuelle passant par les pinules de la règle mobile *af* divise ledit côté *bc* sur le point *g* et que depuis *b* jusqu'au point *g* y ait dix parties de soixante dudit côté *bc*. Je dis que tout ainsi que soixante contienne dix six fois tout ainsi la longueur *de* contiendra l'un des côtés dudit carré six fois Suppose donc que chaque côté dudit carré soit de cinq pieds, ladite longueur *de* contiendra trente pieds. Car cinq fois six font trente ainsi comment entendre de toutes les autres longueurs apposées. »

Justifiez le raisonnement d'Oronce Fine.

L'utilisation repose donc sur la similitude des triangles *abg* et *ade*.

Il faut souligner l'indépendance des unités : le carré est gradué jusqu'à 60, on rapporte à 60 la graduation lue, mais il faut ensuite faire intervenir la mesure du côté du carré dans l'unité choisie pour mesurer la distance.

Oronce Fine énonce la règle suivante : « multipliez soixante par le nombre de pieds [...] que contient le côté dudit carré et ce qui en viendra divisez par le nombre de parties entre *b* et *g* et vous aurez en pieds [...] la longueur *de* ». L'intérêt de la manipulation est qu'il n'y a pas de mesures à prendre sur le terrain, il suffit de relever la graduation. Ceci explique la nécessité d'avoir un instrument de grande taille pour ne pas avoir à diviser par un nombre trop petit. Il peut être intéressant avec des élèves d'observer la sensibilité de la mesure calculée à la lecture de la graduation ou de déterminer la distance maximale que l'on peut mesurer.

Mesures d'un point élevé

À la page 7, Oronce Fine envisage 3 cas de visées, effectuées du haut d'une tour illustrant différents cas, selon que l'extrémité de la règle rencontre le côté inférieur, le sommet opposé ou le côté vertical du carré. Toutes les données du problème (en particulier la solution) peuvent se lire sur la figure, mais il peut être intéressant d'en tirer un exercice en effaçant la graduation de la droite *ek*. Le texte indique que la tour mesure vingt cinq pieds, que le côté du carré mesure cinq pieds et que les points *l* et *k* sont à la quarantième graduation. Il est alors facile de déterminer *eg* = 20 pieds (similitude des triangles *adh* et *aeg*) et *ek* = 45 pieds (similitude des triangles *abl* et *ae**k*).

Cette situation n'est pas aussi absurde qu'il peut paraître. Dans le cas de la détermination de *ek*, le calcul $ek = \frac{60 \times ae}{\text{grad}(l)}$ est à comparer avec le calcul $ek = \frac{60 \times ad}{\text{grad}(l')}$

qui correspondrait à la mesure effectuée en posant le cadran au sol et en relevant la nouvelle graduation correspondant au point l' . Le nombre de parties entre b et l est supérieur au nombre de parties entre b et l' , le résultat de la division sera donc moins sensible à l'incertitude due à la lecture.

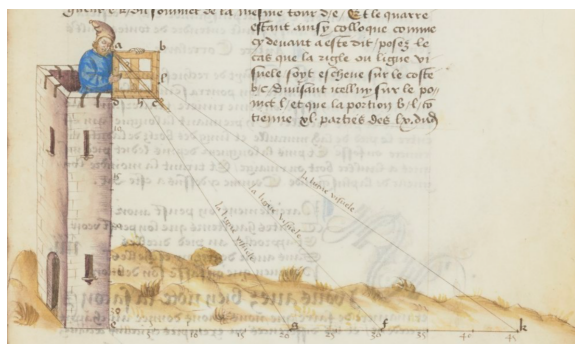


FIGURE 19 – Mesures d'un point élevé - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.7) – Source : BnF

Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est accessible



FIGURE 20 – Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est accessible - Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.9) – Source : BnF

Ici, également 3 cas d'incidence de la règle de visée. Les points h et l sont sur les graduations 40, le carré de 5 pieds de côté, le point a est situé à 30 pieds de la tour. Il est aisé de déterminer les hauteurs eg , ef et ek .

Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est inaccessible

La hauteur EF à mesurer étant inaccessible, il sera procédé par double visée. Voici la solution d'Oronce Fine :

« [...]notez en quel point la règle [...] divisera le côté qui est dressé vers ladite hauteur et quelle [...] proportion ont les 60 parties de tout

le côté aux parties qui sont comprises par ladite règle [...] et notez à part le nombre [...] de ladite proportion et marquez [...] le lieu où est lors le coin au point *a* de votre dit carré. Après, ce vous convient avancer ou reculer aucunement ladite hauteur proposée le plus droitement que vous pourrez selon la commodité du lieu et faire tout ainsi comme auparavant. En examinant la hauteur par la ligne visuelle et en notant derechef les parties comprises d'icelle et quelle [...] proportion obtienne 60 auxdites parties en retenant à part le nombre [...] d'icelles proportion après avoir marqué [...] le lieu où sera le point *a* dudit carré *abcd*. Aimablement, convient [...] soustraire le plus petit de ces deux nombres ainsi réservés du plus grand, par le nombre qui restera [il] faut diviser le nombre des pieds [...] qui se trouveront entre les deux marques susdites. Car ce qui en viendra finalement sera précisément égal à la dite hauteur inaccessible. Pour ce que icelui nombre démontre combien de fois la hauteur est comprise entre les deux marques dudit tracé. » (Fine, 1538, p.10)



FIGURE 21 – Mesure d'une hauteur inaccessible dont le pied est inaccessible -
Traité d'Oronce Fine (Fine, 1538, p.10) – Source : BnF

L'exemple suivant est tiré de la page 10, les notations sont celles de la figure 21 :

Outils : Figures semblables, méthode arithmétique

Activité : Lors de la première visée, le sommet du carré est posé en *g*, la ligne de visée passe par le point *h* du côté *cd* et *dh* contient 30 parties. Lors de la deuxième visée, le sommet du carré est posé en *k*, la ligne de visée passe par le point *l* du côté *cd* : *dl* contient 15 parties. On mesure l'écart *gk* : *gk* = 40 pieds.

Quelle est la hauteur *ef* ?

Il s'agit encore d'un raisonnement arithmétique. Mais, si on se réfère directement à la formule donnée par Fine, on évalue $\frac{60}{30} = 2$. Le premier rapport est 2. Puis, $\frac{60}{15} = 4$, le deuxième rapport est 4, on doit donc avoir $ef = \frac{kg}{4 - 2} = \frac{40}{2} = 20$ pieds.

Ce qui est évident puisque par similitude $ke = 4ef$ et $ge = 2ef$.

Il vient alors $kg = (ke - ge) = (4 - 2)ef$, soit $ef = \frac{kg}{(4 - 2)} = 20$.

Profondeur d'un puits

C'est un exemple célèbre qu'on retrouve dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement. Il s'agit à nouveau d'une mesure de grandeur inaccessible.



FIGURE 22 – Profondeur d'un puits - Oronce Fine (Fine, 1538, p.14) –

Source : BnF

Outils : Figures semblables, proportionnalité

Voici un extrait du *Traité* d'Oronce Fine (p. 14) :

« Suppose donc que la longueur *de* soit 12 pieds et que la ligne visuelle venant droit au point *f* divise le côté *cd* sur le point *h* tellement que entre *d* et *h* soient 20 parties des 60. »

Quelle est la profondeur du puits ?

Ici encore, toutes les mesures, y compris la réponse figurent sur la représentation.

L'équerre articulée

Dans sa *Protomathesis* (1532), Oronce Fine présente également une équerre articulée (rotation) fixée au sommet d'un bâton. Cette équerre permet de déterminer une distance par visée, en exploitant à nouveau la similitude des triangles. Il suffit de faire une mesure au voisinage du bâton pour en déduire la distance cherchée.

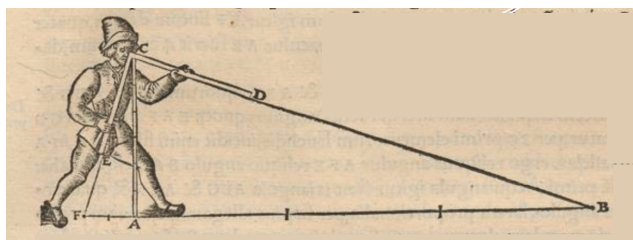


FIGURE 23 – Équerre articulée - Protomathesis (Fine, 1532, Livre II, p. 68)

En effet, dans le triangle rectangle BCF les triangles rectangles ACF et ABC sont semblables, on en déduit $AB = \frac{AC^2}{AF}$.

C'est toutefois un mode de mesure relativement imprécis, car la distance AF est en général assez petite et une imprécision sur sa mesure fait grandement varier le résultat de la division.

Réalisation des instruments

Réaliser ces instruments est simple et peu coûteux. Voici quelques indications issues de notre expérience.

Arbalestrille, bâton de Jacob

Le site <http://www.meridienne.org> de l'association Méridienne (Nantes) fournit dans la partie Atelier instrumental et documentaire (Navigation astronomique) des plans très précis pour réaliser un bâton de Jacob équipé de marteaux de différentes tailles. Le matériel nécessaire se limite à un grand tasseau de bois (2,4m x 17cm x 17cm), une petite plaque mince de contreplaqué dans laquelle on découpera de petites planches assurant la liaison des demi marteaux en laissant un espace dans lequel coulisse le fût et de la colle à bois.



FIGURE 24 – Arbalestrille réalisée par A. M. Aebischer

Les dimensions choisies ici respectent les suggestions du site. Le site propose de réaliser 4 marteaux de tailles différentes. Je n'en ai réalisé que deux. À chaque marteau correspond sa graduation propre si on veut reporter directement la valeur de l'angle de visée. Sur deux des quatre faces du fût, j'ai réalisé une graduation assortie à chaque marteau. Sur les deux autres faces, j'ai simplement reporté des graduations multiples de la longueur totale de chaque marteau pour un usage adapté à l'arpentage.

Le fût mesure 1m. Chaque marteau est constitué de deux demi-tasseaux. Ces demi-tasseaux mesurent 161mm x 17mm x 17mm pour le plus grand marteau et 71mm x 17mm x 17mm pour le plus petit. Pour chaque marteau, on découpe de plus deux cubes de 17mm de côté et deux plaques de 51mm x 34mm et on assemble comme indiqué sur la photo. Lors du collage, insérer une chute de tasseau pour préserver un espace central suffisant.

Carré géométrique

- Comme évoqué plus haut, il y a deux façons d'utiliser un carré géométrique :
- au sol, il faut un carré assez grand, l'idéal étant d'avoir le coin en haut à gauche au niveau des yeux en position debout soit un côté d'environ 140 cm. Un tel carré est difficilement transportable ;
 - placé sur une hauteur (haut d'une tour, pont,...), il suffit alors d'un carré d'environ 60cm de côté que l'on posera devant soi en contrôlant la verticalité (fil à plomb).

La construction débute avec un cadre rigide aux angles parfaitement droits, le plus simple est de partir d'un cadre du commerce (explorez le rayon bricolage de votre magasin préféré) d'un peu plus de 60 cm de côté.

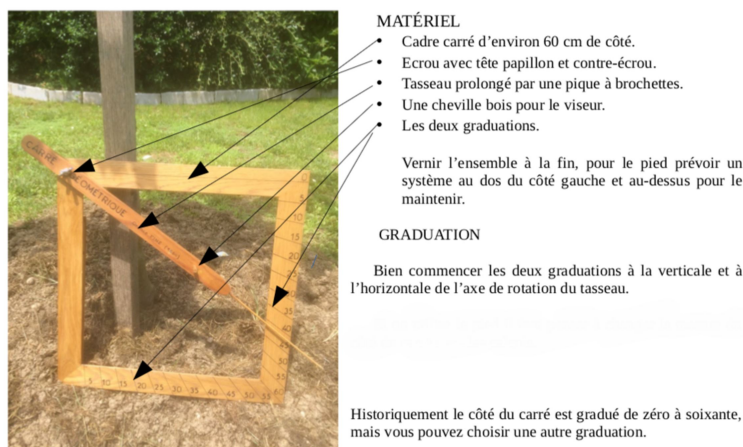
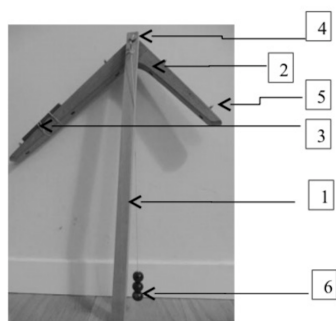


FIGURE 25 – Carré réalisé par G. Martin

Équerre articulée



Matériel nécessaire :

- un tasseau de 1m50 (1) pour le support ;
- une équerre d'étagère en bois (2)
- un fil à plomb (6) pour contrôler la verticalité, à fixer sur le support ;
- un boulon (vis et écrou) et un écrou papillon (avec rondelles) (4) pour articuler l'équerre sur le support ;
- des petits pitons à visser pour les visées (5), à placer relativement éloignés de l'angle droit ;
- accessoirement un stylo laser (3)
- une perceuse et une mèche à bois du diamètre du boulon.

FIGURE 26 – Équerre réalisée par G. Martin

Conclusion

Il me semble important de partager avec les élèves des textes qui témoignent du long cheminement des mathématiques à travers l'histoire. Le texte d'Oronce Fine, magnifiquement illustré est d'un abord relativement facile, celui d'Alain Manesson Mallet également. Ce bref aperçu des mesures de grandeurs entre le XIII^e siècle et le XVIII^e siècle met en lumière des modes de pensée qui, indépendamment de l'émergence de l'algèbre, ont longtemps privilégié une méthode de raisonnement arithmétique. Toutes les situations précédentes sont un formidable moyen de travailler la proportionnalité sous toutes ses formes : fractions, agrandissement/réduction. Il est intéressant aussi de noter la longue marche vers la notion de fonctions, à travers l'établissement des tables diverses, ou à travers les modes de graduation de l'arbalétrille.

Se confronter aux aléas de la mesure sur le terrain permet de dépasser un cadre déjà modélisé (qui est le quotidien des élèves) et met véritablement les mathématiques en action. Pour les élèves, manipuler de tels instruments pour faire de vraies mesures est un changement de paradigme, un ancrage des mathématiques dans le monde réel et leur histoire. J'espère que cet article donnera aux enseignants l'envie de confronter leurs élèves à la réalisation de ces instruments et à leur utilisation sur le terrain.

Références bibliographiques

- APIAN Pierre, FRISON Gemma, 1584, *La cosmographie ou description du monde universel*, Anvers, Arnoult Coninx.
- BARBIN Évelyne, 2018, « L'instrument mathématique comme invention et comme connaissance-en-action », *Repères-IREM*, n° 110, p. 59-77.
- BÉNARD Dominique, 2014, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible » in BARBIN Évelyne (dir.), *Les constuctions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.
- FINE Oronce, 1532, *Protomathesis*, Paris, Morrhius & Petrius.
- FINE Oronce, 1538 *Un bref et singulier Traicté touchant la composition et usaige d'un instrument appellé le quarré geometrique [...]*, manuscrit, Paris.
- GOLDSTEIN Bernard, 1985, *The Astronomy of Levi ben Gerson (1288-1344)*, 1^{re} éd., New-York, Springer.
- HÉBERT Élisabeth (dir.), 2008, *Le traité de navigation de Jean-Baptiste Denoville 1760*, Rouen, Point de vue.
- HÉBERT Élisabeth, VASSARD Christian, 2004, « Aspect instrumental de la trigonométrie dans l'Occident latin » in HÉBERT Élisabeth (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris, Ellipses.
- MANESSON-MALLET Allain, 1702, *La Géométrie Pratique : tome second*, Paris, Jean Anisson.
- REISCH Gregor, 1496, *Margarita philosophica*, Fribourg, Johann Schoot.
- RYFF Walther Hermann, 1547, *Der furnembsten notwendigen der gantzen Architectur angehörigen mathematischen und mechanischen Künst eygentlicher [...]*, Nürnberg, Johan Petreius.