

La géométrie comme science de courbes

Évelyne BARBIN

Introduction

Dans l'enseignement des mathématiques, les courbes apparaissent essentiellement en tant que graphes de fonctions, souvent associées à des formules analytiques. Ceci limite leur présence dans l'enseignement mathématique et les réduit à des exercices scolaires : « trouver le graphe de la fonction ». Ainsi, leurs intérêts propres en tant qu'objets mathématiques ou scientifiques ne sont pas mis en avant. Pourtant l'histoire montre leurs rôles majeurs dans la connaissance scientifique et qu'elles peuvent être abordées autrement que par l'analyse. En effet, de premières courbes sont inventées pour résoudre des problèmes géométriques dans l'Antiquité grecque. Puis un concept de courbe est introduit au XVII^e siècle, en lien avec la détermination de courbes qui répondent à des problèmes cinématiques, physiques ou encore techniques. Les solutions ne passent pas nécessairement par une équation de la courbe, pour la cycloïde ou l'ovale cartésienne par exemple, mais par une propriété géométrique spécifique des points de la courbe. L'histoire indique aussi que la notion de fonction, introduite à la fin du XVII^e siècle, est liée à des problèmes physico-mathématiques qui reviennent à déterminer une courbe tangente à une famille de droites ou de courbes.

Une approche historique dans l'enseignement, outre qu'elle permettrait de montrer l'intérêt de telle ou telle courbe, témoignerait du rôle des courbes et de la multiplicité de leurs conceptions dans la constitution des sciences. Nous proposons de défendre et d'illustrer ce point de vue épistémologique et pédagogique en parlant de problèmes historiques, dont la plupart ont été centraux dans l'histoire des mathématiques et des sciences.

Constructions et inventions de courbes dans la géométrie grecque

La géométrie grecque commence au VI^e siècle avant J.-C., mais les textes en notre possession datent du III^e siècle avant J.-C., comme ceux d'Euclide, d'Archimède ou d'Apollonius. Cependant, nous avons des témoignages indiquant le rôle instigateur des problèmes de construction de figures par intersection de droites et de cercles, ou encore pour nous à la règle et au compas. Par ailleurs, les *Éléments* d'Euclide présentent une intrication de propositions et de constructions, car toute proposition sur une figure suppose que la figure à laquelle elle se rapporte soit ainsi construite. Ils peuvent se lire aussi comme un ouvrage de constructions de figures.

Certains problèmes de construction ont résisté aux géomètres, comme la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Le premier problème demande de construire un carré de même aire qu'un cercle donné, le second de construire le côté d'un cube de volume double d'un cube donné, et le troisième de diviser en trois parties égales un angle donné. Depuis le XIX^e siècle, nous savons démontrer qu'aucun de ces problèmes ne peut être construit à la règle et au compas. Mais les Grecs ont inventé des instruments et des courbes pour les résoudre : la quadratrice d'Hippias (V^e siècle avant J.-C.) et la spirale d'Archimède (III^e siècle avant J.-C.) pour la quadrature du cercle ; les coniques de Ménechme (IV^e siècle avant J.-C.) et la cissoïde de Dioclès (II^e siècle avant J.-C.) pour la duplication du cube ; la conchoïde de Nicomède (II^e siècle avant J.-C.) pour la trisection de l'angle. Nous allons examiner, comment, au-delà de la géométrie d'Euclide, trois de ces courbes ont été inventées et définies par des mouvements ou des intersections de solides, mais traitées de manière purement géométrique.

La quadrature du cercle et les spirales par Archimède

La proposition I du traité de la *Mesure du cercle* d'Archimède énonce que l'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle et l'autre la circonférence du cercle. La démonstration procède par l'absurde en démontrant géométriquement que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande, ni plus petite que celle du triangle. Elle utilise des polygones inscrits dans le cercle dans le premier cas, et circonscrits dans le deuxième cas (Archimède, 1960, t. I, p. 127-128).

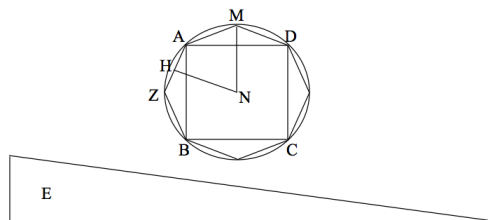


FIGURE 1 – La proposition 1 de la mesure du cercle

Dans le Livre II des *Éléments*, Euclide démontre qu'il est possible de quarrer un triangle rectangle. Donc, selon la proposition I, il serait possible de quarrer un cercle, à condition cependant de construire un segment égal à une circonférence de cercle. Ce dernier problème est nommé rectification (rendre droit) d'un cercle.

Or, dans le traité *Des spirales*, Archimède montre que ces courbes permettent d'obtenir une rectification du cercle, autrement qu'à la règle et au compas par conséquent. Au début de son traité, il donne la définition cinématique d'une spirale d'origine A , comme courbe décrite par un point M se déplaçant uniformément sur une demi-droite d'origine A , en même temps que celle-ci tourne uniformément autour de A . Mais il la fait suivre de la proposition XIV qui permet de traiter géométriquement la spirale : si D et E sont deux points de la spirale et si H et Z appartiennent au cercle de rayon AG avec G le point de la spirale obtenu en un tour alors le rapport de AE à AD est égal à celui des arcs GKZ et GKH (Archimède, 1960, t. I, p. 263-264).

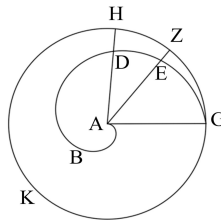


FIGURE 2 – Description géométrique de la spirale

Après bien d'autres, la proposition XVIII énonce que si le point G est obtenu en un tour et si on mène la tangente à la spirale en ce point, alors celle-ci rencontre la perpendiculaire à AG au point A en un point T tel que AT est égal à la circonférence (A, AG) . La démonstration procède par l'absurde, tandis que le texte n'indique ni comment cet énoncé a été trouvé, ni comment la démonstration a été obtenue (Archimède, 1960, t. I, p. 269-273).

La duplication du cube et les coniques

Au v^e siècle avant J.-C., Hippocrate de Chios a montré que le problème de la duplication du cube équivaut à construire deux segments x et y , moyennes proportionnelles entre un segment (a) donné et son double, ce que nous écrivons aujourd'hui :

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Puis, au siècle suivant, Ménechme résout ce problème par intersection d'une parabole et d'une hyperbole, et il donne une définition des coniques.

Les coniques font l'objet des *Coniques* d'Apollonius du III^e siècle avant J.-C., où elles sont définies comme les intersections d'un cône par des plans de différentes inclinaisons. Mais Apollonius caractérise aussitôt les points de chacune d'elles par

une relation géométrique, appelée « symptôme », qui en permet une étude géométrique. Pour la parabole, il écrit (Apollonius, 1959, p. 22) :

« Soit un cône dont le sommet est le point A et dont la base est le cercle BC . Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme intersection le triangle ABC . Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant DE perpendiculaire à BC , lequel détermine la ligne DZE comme intersection dans la surface du cône, tandis que le diamètre ZH de l'intersection est parallèle à l'un des côtés AC du triangle passant par l'axe. »

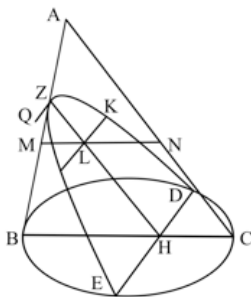


FIGURE 3 – La parabole chez Apollonius

Soit Z le sommet de la parabole sur AB , Apollonius appelle « côté droit » de la parabole un segment ZQ tel que :

$$ZQ : ZA = \text{Aire carré } BC : \text{aire rectangle } (BA, AC).$$

Si K est un point de la parabole et si KL est parallèle à HD , il obtient le « symptôme » en démontrant que :

$$\text{aire carré } KL = \text{aire rectangle } (ZQ, ZL)$$

Apollonius établit les symptômes des trois coniques, qui expriment une égalité, un dépassement ou une diminution par rapport à l'aire d'un carré. Ceci explique les noms des différentes coniques car « paraballein » (à côté) donne parabole, « hyperballein » (au-dessus) donne hyperbole, « elleipsis » (au-dessous) donne ellipse.

Les *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* au traité de la sphère et du cylindre d'Archimède, écrits au V^e siècle (Archimède, 1960, t. II, p. 605-606) contiennent la construction de deux moyennes proportionnelles à deux segments AB et BC par intersection de deux paraboles en procédant par analyse, c'est-à-dire en partant de ce que l'on cherche. Considérons quatre segments tels que

$$AB : BE = BE : BD = BD : BC.$$

Disposons-les perpendiculairement puis construisons le rectangle $EZDB$.

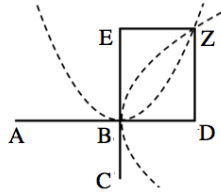


FIGURE 4 – La duplication du cube par intersection de deux paraboles

D'après une proposition du livre VI d'Euclide (« produit en croix ») on a :

$$\text{aire carré } ZD = \text{aire carré } BE = \text{aire rectangle } (AB, BD).$$

Donc Z est sur une parabole de diamètre BD et de côté droit AB (symptôme).
De même :

$$\text{aire carré } ZE = \text{aire carré } BD = \text{aire rectangle } (BE, BC).$$

Donc Z est sur une parabole de diamètre BE et de côté droit BC (symptôme).
La construction de Z s'obtient par intersection de deux paraboles, et donc aussi celles de E et D . Quand AB est double de BC , nous obtenons la duplication du cube.

La trisection de l'angle et la conchoïde de Nicomède

D'après Pappus, Nicomède, mathématicien grec des II^e-III^e siècles avant J.-C., a préconisé la conchoïde pour construire la duplication d'un cube (Pappus, t. I, p. 185-186). Cette courbe permet aussi d'obtenir de manière simple la trisection d'un angle. Elle est obtenue point par point à partir de la donnée de trois éléments : un point B , une droite Δ et un segment MN d'une longueur donnée. Un point E de la conchoïde est obtenu pour chaque point D de Δ , en prolongeant BD d'une longueur DE égale à MN . La courbe a une forme de coquillage, d'où son nom.

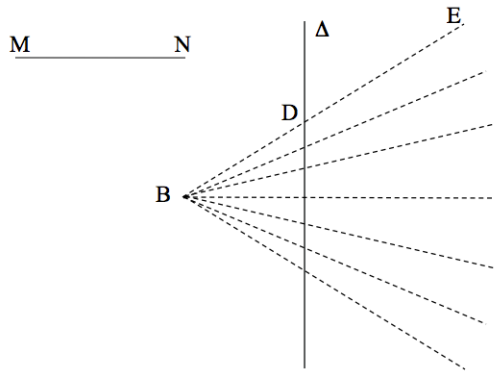


FIGURE 5 – La construction des points de la conchoïde

Pour obtenir la trisection d'un angle donné ABC , construisons la perpendiculaire Δ à BC passant par A puis la conchoïde pour le point B , la droite Δ et un segment de longueur $2AB$. La parallèle à BC menée du point A coupe la conchoïde en un point E , alors l'angle EBC est le tiers de l'angle ABC . La démonstration utilise l'inscription du triangle rectangle ADE dans un cercle de rayon AB .

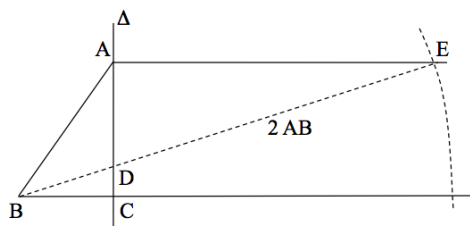


FIGURE 6 – La trisection d'un angle avec la conchoïde

Nicomède a fourni un instrument donnant un tracé continu de la conchoïde, qui est décrit dans les *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Archimède, 1960, t. II, p. 615-616). Il est composé de deux règles perpendiculaires solidaires AB et $\Gamma\Delta$ et d'une règle KZ qui peut coulisser de sorte que l'instrument, mis en mouvement, contraint KZ à passer par Δ tout en maintenant la même longueur KE avec AB . Le point K décrit une conchoïde pour le point Δ , la droite AB et le segment de longueur KE .

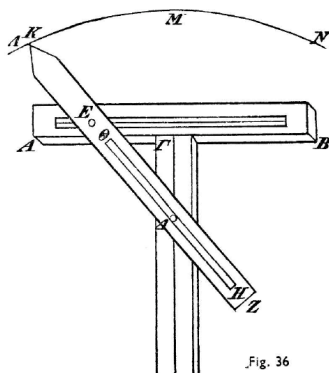


FIGURE 7 – L'instrument de Nicomède pour tracer la conchoïde

La classification des problèmes selon Pappus

Moins d'une douzaine de courbes sont introduites dans l'Antiquité grecque, et, quelle que soit leur description, leur traitement et celui de leurs tangentes passent par la géométrie. Autrement dit, il n'y a pas de spécificité pour ces courbes et il n'y a pas une conception générale du courbe. Ainsi, dans *La Collection mathématique*

du IV^e siècle, Pappus donne une classification des problèmes selon leurs modes de construction (Pappus, 1982, t. I, p. 206-207) :

« Lorsque les anciens géomètres ont voulu partager un angle rectiligne donné en trois angles égaux, ils ont été embarrassés à cause de ceci : nous avons dit qu'il y a trois genres de problèmes, et que nous les appelons plans, solides et grammiques. C'est donc à juste titre que ceux qui peuvent être résolus au moyen de droites et de la circonférence de cercles sont dits plans, et que les problèmes qu'on résout en assumant pour leur solution une des sections du cône, ou plusieurs de ces sections, sont appelés solides, parce qu'il faut faire usage de figures solides pour leur construction, notamment de surfaces coniques. Reste enfin le troisième genre de problèmes qu'on appelle grammiques [le gramme est ce qui est tracé], parce qu'on emploie pour leurs constructions d'autres lignes que celles dont nous venons de parler, lesquelles ont une génération plus variée et plus forcée, dérivant de surfaces moins régulières et de mouvements plus compliqués. »

La courbe comme inconnue d'un phénomène et la notion de courbe au XVII^e siècle

Les courbes introduites dans les années 1630-1670 ont une signification bien différente puisqu'elles sont les réponses à des problèmes, cinématiques ou physiques. Elles sont les inconnues dans un phénomène, comme la trajectoire d'un boulet de canon avec Galilée, la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule avec Marin Mersenne, la forme d'un dioptré réalisant un effet optique avec René Descartes, la forme d'une lame réalisant un pendule isochrone avec Christian Huygens (Barbin, 2006). Ainsi, de nouvelles significations sont apportées : la courbe est un effet à déterminer, tandis que la tangente est un instrument de compréhension du phénomène.

Les géomètres introduisent alors des « méthodes d'invention » des tangentes, qui s'appliquent à « toutes » les courbes. Elles demandent une conception générale des courbes et aussi de mettre en avant la propriété spécifique d'une courbe comme individu dans un monde de courbes. Elles conduisent à un renversement de l'investigation par rapport à la géométrie grecque. En effet, nous trouvons chez les Anciens des études de courbes particulières (coniques, spirales) dans un corpus géométrique général, tandis que les Modernes s'intéressent à un problème particulier (les tangentes) qui nécessite une conception générale du courbe (Barbin, 2006, p. 139-140). Nous allons examiner ceci avec les méthodes des tangentes chez Roberval et Descartes.

Quelle est cette courbe ? Le paradoxe d'Aristote et l'invention de la cycloïde

Dans les années 1630, Mersenne s'intéresse au paradoxe de la roue du Pseudo-Aristote, qui est le suivant : une petite roue qui roule parcourt en un tour sa

circonférence mais, si elle est solidaire d'un grand cercle, alors elle parcourt la circonférence de ce grand cercle. Pour y répondre, Mersenne transforme le problème en se demandant : quelle est la courbe que décrit un point d'une circonférence d'une roue qui roule ? Alors que Galilée, devant le même paradoxe, cherche à lui trouver une cause, il s'interroge sur un effet : la trajectoire. La question est difficile car elle suppose qu'il existe un moyen de caractériser une courbe.

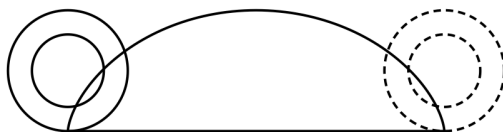


FIGURE 8 – Le paradoxe de la roue du Pseudo Aristote

La forme l'incitant, Mersenne écrit dans *Questions inouyes* de 1634 que la courbe est une semi-ellipse. Il n'a aucune certitude et il interroge le mathématicien Gilles de Roberval, qui finit par lui répondre en 1637 que : « Il paraît (et je vous le démontrerai aussi) que cette ligne n'est ni ellipse ; ni pas une des lignes courbes que nous trouvons dans les livres ; qu'au contraire, elle a ses propriétés à part, que je décrirais toutes, si j'avais assez de loisir » (Mersenne, 1960, t. VI, p. 175). La courbe n'est aucune des courbes étudiées par les Anciens car « elle a ses propriétés à part » : Roberval affirme ceci car il a obtenu la tangente à la courbe et l'aire sous une arche, qu'il peut comparer à celles des courbes des Anciens. Il a eu besoin, pour cela, d'introduire deux « méthodes d'invention », l'une pour les tangentes et l'autre pour les aires.

En 1638, René Descartes et Pierre de Fermat, reçoivent de Mersenne l'annonce des découvertes de Roberval. Mis au défi, ils obtiennent aussi l'aire sous une arche et la tangente en un point de la courbe, qui va être appelée « roulette » ou « cycloïde » (Cléro & Lerest, 1980, p. 69-83). Dès 1637, chacun d'eux est possesseur d'une « méthode d'invention » pour les tangentes.

Les courbes cinématiques de Roberval

La méthode d'invention des tangentes est présentée dans le traité des *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes*, publié en 1693 par l'Académie des Sciences (Roberval, 1693, p. 25) :

« Axiome ou principe d'invention. La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante [tangente] de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Règle générale. Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous

ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe ».

La méthode s'appuie sur la cinématique : la courbe est la trajectoire d'un point et la tangente est la direction du mouvement en un point. Roberval traite les courbes connues à son époque. Pour l'ellipse, la « propriété spécifique » est donnée par l'existence de deux foyers, à savoir qu'un point M d'une ellipse est tel que la somme de ses distances aux deux foyers F et G est constante. Il est donc soumis à deux « mouvements droits égaux », l'un qui le rapproche de l'un des foyers et l'autre qui l'éloigne de l'autre. Ils sont égaux car la somme des distances est constante. La tangente au point M s'obtient donc en construisant la bissectrice MC de l'angle HMG . La proposition sur les foyers d'une ellipse se trouve dans *Les coniques* d'Apollonius, mais maintenant elle donne lieu à une « propriété spécifique », un moyen de caractériser une courbe dans le cadre d'une méthode.

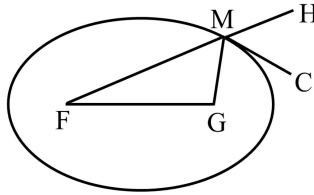


FIGURE 9 – La tangente à l'ellipse selon Roberval

La cycloïde est définie d'emblée par des mouvements, et nous comprenons que Roberval ait pu inventer sa méthode pour répondre à Mersenne. La trajectoire d'un point E est soumise à deux mouvements égaux, un mouvement selon EF parallèle à AC et un mouvement de rotation, associé à la tangente EP du cercle qui roule. Ils sont égaux parce que la base de la cycloïde est égale à la circonférence du cercle. La bissectrice de l'angle PEF est donc la tangente au point E . On en déduit que cette tangente est perpendiculaire à EM , où M est le point où le cercle touche la base.

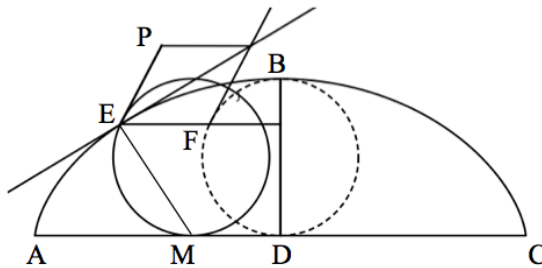


FIGURE 10 – La tangente à la cycloïde selon Roberval

Considérons le cercle de diamètre BD et le point F , intersection de ce cercle avec la parallèle à AC passant par E . Dans sa méthode des tangentes, que nous ne présenterons pas ici, Fermat exhibe la « propriété spécifique de la cycloïde », à savoir que EF est égal à l'arc de cercle FB . Elle sera employée plus tard par Christian Huygens pour résoudre le problème de l'isochronisme du pendule. Par définition de la cycloïde,

$$AM = \text{arc } EM \text{ et } AD = \text{arc } BD.$$

Donc

$$EF = MD = AD - AM = \text{arc } BD - \text{arc } EM = \text{arc } BD - \text{arc } FD = \text{arc } FB.$$

Quelle est cette courbe ? Les courbes anacastiques et les ovals cartésiennes

En 1627, Mersenne pose à Descartes un problème optique que Kepler n'a pas su résoudre, celui de déterminer une courbe, dite anacastique, qui réalise un effet optique : il faut trouver la forme d'un dioptré (verre) tel que des rayons incidents parallèles s'y réfractent en rayons concourants en un point. Une solution se trouve dans une lettre de Descartes au lunetier Ferrier de novembre 1629 (Barbin, 2006, p. 114-115). Descartes est alors en possession de la loi de réfraction de la lumière. Il considère un triangle de verre GHI sur lequel arrive un rayon incident ID perpendiculaire à GH qui doit sortir en passant par un point A . Il introduit le point C tel que l'angle CDI égale l'angle FDA et il montre que $DA - DC$ est une constante, donc le point D se trouve sur une hyperbole de foyers A et C .

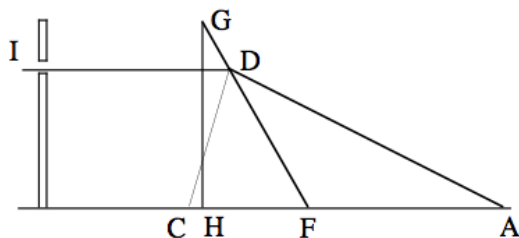


FIGURE 11 – La recherche de la courbe anacastique par Descartes

L'ellipse est également une courbe anacastique, comme le montre son ami Isaac Beeckman en 1630. Descartes démontre ces résultats dans *La dioptrique* de 1637 à l'aide de ce qu'il appelle les constructions des jardiniers de l'ellipse et de l'hyperbole (Descartes, 1637, p. 151 ; p. 161). Elles correspondent aux descriptions focales des deux courbes :

$$BI + BH = \text{constante} \quad \text{et} \quad BI - BH = \text{constante}$$

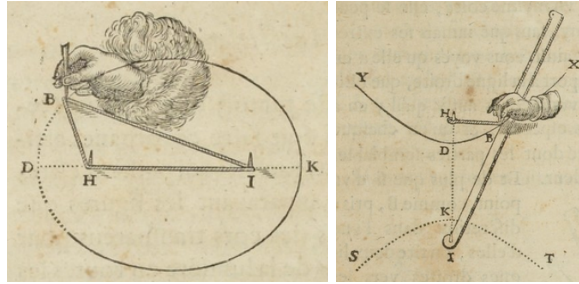


FIGURE 12 – Les constructions des jardiniers de l'ellipse et de l'hyperbole

Quelle courbe est une anacastique ? Les deux géomètres ont pu répondre parce que les courbes étaient connues des Anciens et sont reconnues par l'existence de foyers, montrée par Apollonius. Il n'en n'est plus de même pour le problème des ovals, que Descartes formule dès 1629. Il faut trouver la forme d'un dioptré tels que des rayons incidents venant d'un même point se réfractent en rayons convergeant en un même point. Comme le montre *La dioptrique*, deux dioptrés anacastiques accolés réalisent l'effet optique, par exemple un elliptique et un hyperbolique (Descartes, 1637, p. 168). Or Descartes obtient la solution grâce à une construction qui mélange celles de l'ellipse et de hyperbole (Barbin, 2006, p. 126-129). Ce sont des courbes à trois foyers F , K et G telles que

$$2CK + CG - CF = \text{constante}.$$

Descartes résout le problème des ovals dans *La géométrie* de 1637 en utilisant leurs définitions focales et non pas leurs équations, qui montent au quatrième degré.

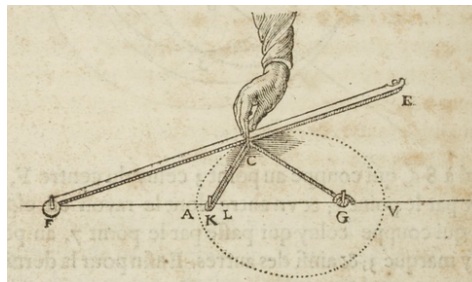
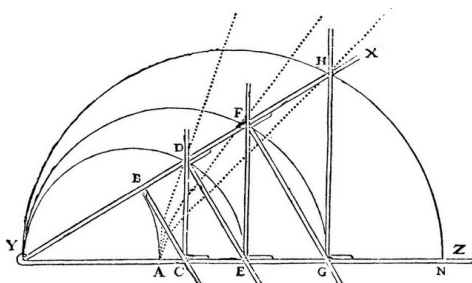


FIGURE 13 – La construction des ovals

Les courbes géométriques de Descartes

Dans le livre I de *La géométrie* de 1637, Descartes arithmétise la géométrie afin d'énoncer une méthode pour résoudre « tous les problèmes de la géométrie ». En introduisant un segment unité, il montre que l'on peut multiplier deux segments entre eux pour obtenir encore un segment, alors que dans la géométrie grecque, la



à Alfred Kempe en 1875 de démontrer que la double conception des courbes de Descartes peut être bien fondée.

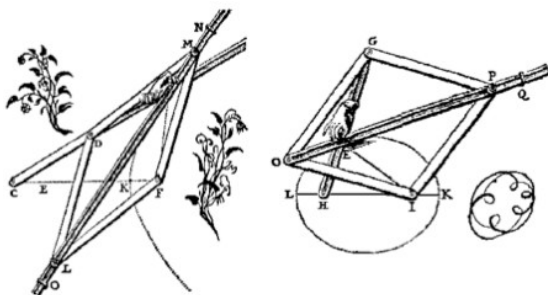


FIGURE 15 – Les instruments de van Schooten pour l’hyperbole et l’ellipse

Dans le livre II, Descartes applique sa méthode pour déterminer les cercles tangents à une courbe, et donc les normales (perpendiculaires aux tangentes) en un point. Pour lui la science doit apporter des fruits et il écrit que ceci est « le Problème le plus utile et le plus général non seulement que je sache, mais même que j’ai jamais désiré savoir en Géométrie » (Descartes, 1637, p. 370).

La méthode demande de nommer les lignes connues et inconnues. Descartes considère une courbe géométrique et une demi-droite GA à laquelle sont rapportés les points de la courbe, de sorte que la courbe soit associée à une équation, et un point C de cette courbe, où la normale est CP . Si CM est la perpendiculaire menée de C à AG , nommons $MA = y$ et $CM = x$, alors x et y sont connues et reliées par l’équation de la courbe. Nommons $PC = s$ et $PA = v$, alors s et v sont les inconnues à déterminer. Il faut ensuite traduire le problème en termes d’équations entre lignes connues et inconnues. D’après le théorème de Pythagore :

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$$

qui est l’équation d’un cercle de centre P et de rayon s . Puisque x et y sont aussi reliées par l’équation de la courbe, nous pouvons déduire des deux équations, une nouvelle équation (S) où ne subsistent que x ou y . Il reste ensuite à exprimer le fait que le cercle est tangent à la courbe pour déterminer s ou v .

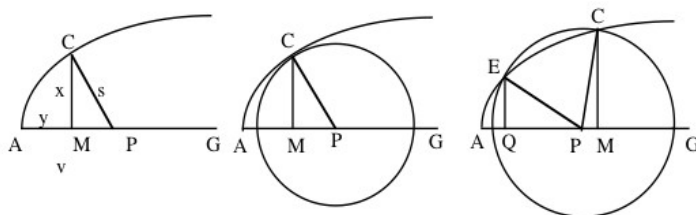


FIGURE 16 – La méthode des cercles tangents chez Descartes

La normale à un cercle est le rayon de ce cercle. Il suffit donc de trouver un cercle dont le centre appartient à GA et qui touche la courbe au seul point C , car CP sera alors le rayon de ce cercle. Descartes considère les deux cas possibles (Descartes, 1637, p. 373-374) :

« Il faut considérer que si ce point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C , y touchera la ligne courbe sans la couper : mais que si ce point P , est tant soit peu plus proche ou plus éloigné du point A , qu'il ne soit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C , mais aussi nécessairement en quelque autre. »

Dans les deux cas, les points C , ou C et E , appartiennent à la fois au cercle et à la courbe, donc leurs coordonnées vérifient l'équation (S). Mais, dans le premier cas, l'équation (S) doit avoir deux solutions égales. Ainsi, le problème se traduit par une condition algébrique sur une équation. Dans le cas où l'équation (S) est du second degré, Descartes l'identifie à une équation :

$$y^2 - 2ey + e^2 = 0$$

Il donne des applications de sa méthode, en particulier pour une ellipse.

Descartes a pu être embarrassé en 1638 quand il apprend par Mersenne que Roberval a trouvé la tangente à la cycloïde (sans donner sa méthode). En effet, cette courbe n'est pas une courbe géométrique, puisqu'elle est décrite par deux mouvements séparés et elle n'a pas d'équation polynomiale. Il obtient la tangente par une « démonstration fort courte et fort simple » : « si on fait rouler un polygone rectiligne, sur une ligne droite, la courbe décrite par l'un de ses points sera composée de plusieurs parties de cercles » (Descartes, 1996, p. 308). Dans ce cas, la normale en un point B de la courbe est BG où G est le point de contact du polygone avec la base puisque la normale en un point d'un cercle est le rayon passant ce point. Il considère ensuite : « la roulette circulaire comme un polygone qui a une infinité de côtés, on voit clairement qu'elle doit avoir la même propriété ». Donc la normale au point B de la cycloïde est BO , où O est le point de contact du cercle avec la base. Ainsi, si on mène BN parallèle à la base AD et si on trace ND , alors la parallèle BO à ND est la normale à la cycloïde au point B . Cette « démonstration » s'appuie sur une géométrie simple, mais elle demande de considérer un cercle comme un polygone ayant une infinité de côtés. Ceci dépasse la géométrie d'Euclide mais sera au départ du calcul de Gottfried Leibniz.

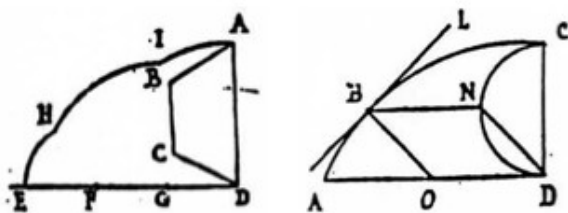


FIGURE 17 – La tangente à la cycloïde par Descartes

Quelle est cette courbe ? La théorie des développées et des développantes de Huygens

Dans les années 1650, Christian Huygens s'intéresse au problème de déterminer la longitude d'un bateau en mer. Deux méthodes sont alors utilisées, en observant des phénomènes célestes ou en comparant l'heure sur le bateau à l'heure du port d'où est parti le bateau. Cette dernière méthode est difficile à mettre en œuvre, faute de posséder des horloges qui conservent correctement l'heure. En 1583, Galilée a proposé de réguler des horloges en utilisant un pendule car il pense que le pendule est isochrone, c'est-à-dire que le temps de descente est le même quel que soit l'endroit du lâcher. En 1636, Mersenne a contredit Galilée et, en 1656, Huygens cherche à construire un pendule isochrone.

Sa correspondance nous apprend comment Huygens a obtenu son pendule. Son approche est à la fois technique, quand en 1656, il a l'idée de faire osciller le pendule entre des « joues » de métal pour obtenir l'isochronisme, et théorique, quand en 1659, il obtient que les joues doivent avoir exactement la forme de deux demi-cycloïdes. Mais comment a-t-il déterminé cette forme ? Sa découverte est concomitante au concours de Blaise Pascal sur les centres de gravité d'aires et de volumes liés à la cycloïde. À cette occasion, en août 1658, l'Anglais Christopher Wren rectifie la cycloïde : il énonce que la longueur d'une demi-cycloïde vaut deux diamètres du cercle générateur. En février 1659, Pascal envoie la démonstration du résultat de Wren à Huygens, qui la lui a demandée (Barbin, 1987).

Huygens commente sa découverte dans une lettre à Estienne de 1668 (Huygens, 1895, p. 292) :

« J'ai premièrement découvert et démontré cette propriété, que si dans un creux ou un canal qui ait cette forme de roulette [...] l'on laisse rouler une petite boule depuis le point G pris en quelque part que l'on voudra, elle arrivera toujours en même temps au point D , le plus bas et l'ayant passé, et retournant, continuera à faire des allées et venues toutes isochrones. [...]

L'autre propriété que j'ai trouvée est que, joignant deux platines HKA , HLB qui auraient chacune la figure des demi cycloïdes AD et BD , en sorte que toute la hauteur HD devenue double de la hauteur de la cycloïde DM , la boule attachée au fil HD , en se pliant contre les platines HKA , HLB , parcourra avec son centre de gravité la roulette ADB . [...]

D'où il est aisé de voir, que les vibrations d'un tel pendule doivent être isochrones, aussi bien que les rouleaux de la boule GG desquels cela est démontré. »

Selon la première propriété, la descente d'un mobile sur une pente cycloïdale est isochrone : le temps de descente jusqu'en bas est le même quelque soit l'endroit du lâcher. Selon la seconde propriété, un pendule oscillant entre deux lames de forme cycloïdale parcourt une cycloïde, il est donc isochrone d'après la première propriété.

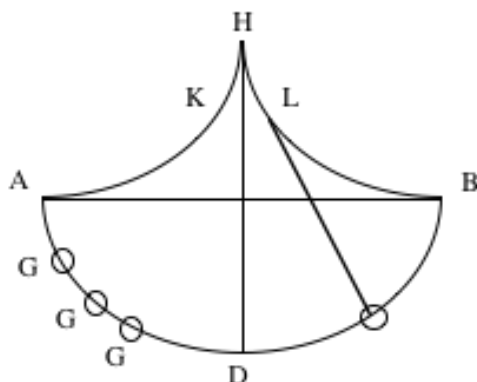
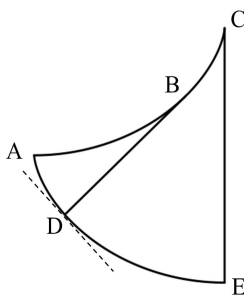


FIGURE 18 – Le pendule et ses joues dans la lettre à Estienne

Dans son *Horologium oscillatorium* de 1673, Huygens ne montre pas la seconde propriété dans sa singularité. Au contraire, la partie III de l'ouvrage est consacrée à une théorie des courbes, celle des développées et des développantes, qui permet d'engendrer des courbes à partir d'autres courbes. Étant donnée une courbe AC quelconque, si pour tout point B de AC , BD est une tangente de longueur égale à la portion de courbe AB , alors D parcourt une courbe dite la développante AE de AC , elle-même dite la développée de AE (Huygens, 1934, p. 188). La proposition I énonce que toute tangente DB à la développée est une normale à la développante AE .

FIGURE 19 – La développée AC et la développante AE

Dans la proposition V, Huygens démontre que la développante de la demi-cycloïde AC est une demi-cycloïde égale AF (Huygens, 1934, p. 198). Soit BK la tangente au point B . D'après la propriété de la tangente, si HB est parallèle à AK alors BK est parallèle à AH . Selon la propriété spécifique de la cycloïde, HB est égal à l'arc AH . Considérons un cercle égal au cercle générateur passant par K , et

prolongeons BK jusqu'en E . Les angles KAH et AKE sont égaux donc l'arc AH est égal à l'arc EK . Par conséquent, AK est égal à l'arc EK et donc E appartient à la cycloïde engendrée par le cercle passant par K (propriété spécifique) et EK est normale à cette cycloïde (propriété de la tangente), qui est donc la développante de la première cycloïde.

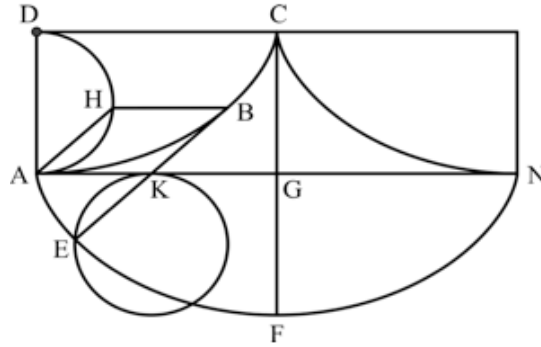


FIGURE 20 – La développante d'une demi-cycloïde d'après Huygens

Lors d'un séjour à Paris dans les années 1670, Leibniz est initié aux mathématiques de l'époque par Huygens. Il invente son calcul infinitésimal, présenté en 1684, en s'attaquant à des « problèmes inverses des tangentes », c'est-à-dire des problèmes où il faut déterminer une courbe connaissant une propriété de ses tangentes. Quelques années plus tard, il généralise la théorie inventée par son maître en introduisant le problème géométrique des enveloppes d'une courbe, qui consiste à déterminer une courbe tangente à une famille de courbes ou de droites. Il énonce ce problème en 1694 et le résout grâce à son calcul et en introduisant la notion de fonction.

Conclusion

Pendant les cinquante années qui séparent les méthodes d'invention – de Roberval, Descartes ou Fermat – du calcul infinitésimal, le point de départ des nouvelles investigations mathématiques est la résolution de problèmes de détermination de courbes. Les courbes sont alors caractérisées par des mouvements ou des propriétés spécifiques, et leur traitement est cinématique, algébrique ou géométrique. Cette façon d'envisager les courbes reste celle des inventeurs du nouveau calcul, Newton comme Leibniz, qui sont loin de les introduire à partir d'une formule analytique. Le calcul infinitésimal finit par être admis de tous en vertu de sa force pour résoudre de nouveaux problèmes.

Ce calcul devient indépendant de l'étude des courbes avec le traité *Introduction à l'analyse infinitésimale* de 1748 de Leonhard Euler, qui renverse l'ordre historique en plaçant au début de son traité une notion de fonction. L'analyse est enseignée dans les lycées à partir de la seconde moitié du XIX^e siècle. À cette époque, les

courbes tiennent une bonne place dans les programmes, avec les méthodes synthétiques du XIX^e siècle qui leur sont attachées. Une fois les courbes disparues dans les années 1960, en particulier les coniques, quelle signification accorder à une analyse coupée des problèmes scientifiques qu'elle peut résoudre ?

Références bibliographiques

- APOLLONIUS, 1959, *Les coniques*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, Paris, Blanchard.
- ARCHIMÈDE, 1960, *Œuvres complètes*, trad.. P. Ver Eecke, t. I., Paris, Vaillant-Carmanne.
- ARCHIMÈDE, 1960, *Œuvres complètes*, trad. P. Ver Eecke, t. II, Liège, Vaillant-Carmanne.
- BARBIN Évelyne, 1987, « Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens », *Les mathématiques dans la culture d'une époque*, IREM, Université de Strasbourg, p. 143-163.
- BARBIN Évelyne, 2006, *La révolution mathématique du XVII^e siècle*, Paris, Ellipses.
- CLÉRO Jean-Pierre, LE REST (BARBIN) Évelyne, 1980, « La naissance du calcul infinitésimal au XVII^e siècle », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 16.
- DESCARTES René, 1637, *Le discours de la méthode*, Leyde, Jan Maire.
- DESCARTES René, 1949, *Œuvres et lettres*, éd. A. Bridoux, Paris, La Pléiade.
- DESCARTES René, 1996, *Œuvres*, t. II, éd. C. Adam et P. Tannery, Paris, Vrin.
- HUYGENS Christian, 1895, *Œuvres complètes*, t. VI, La Haye, Martinus Nijhoff.
- HUYGENS Christian, 1934, *Œuvres complètes*, t. XVIII, La Haye, Martinus Nijhoff.
- MERSENNE Marin, 1960, *Correspondance*, t. VI, éd. Cornélis de Waard, Paris, Éditions du CNRS.
- PAPPUS, 1982, *La collection mathématique*, t. I, trad. P. Ver Eecke, Paris, Blanchard.
- ROBERVAL Gilles, 1693, « Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes », *Recueil de l'Académie des sciences*, t. VI., Paris, Imprimerie royale, p. 1-89.
- SCHOOTEN van Frans, 1646, *Organica conicarum sectionum in plano descriptione, tractatus*, Leyde, Batavor.