5

La duplication du cube vue par deux algébristes de la Renaissance

Odile Kouteynikoff

Introduction

Cet article, qui fait partie d'un ouvrage centré sur la géométrie, aborde les méthodes calculatoires [1] que deux mathématiciens du XVI^{e} siècle crurent pouvoir mettre en œuvre pour la résolution d'un problème géométrique ancien.

Il s'agit ici de suggérer que, quand les programmes d'enseignement séparent trop radicalement les domaines du numérique et du géométrique, ils risquent de dissimuler les liens profonds entre ces deux registres, constitutifs des mathématiques tout entières. Il s'agit aussi de rappeler que, de façon générale, les savoirs, mathématiques en particulier, se construisent par étapes, au fil d'expériences du type « essai-erreur » dont témoignent de nombreux textes. Enfin, les « cas d'école » présentés ici sont pédagogiquement exemplaires des risques encourus à « voir » sur une figure, sans procéder aux validations exigibles.

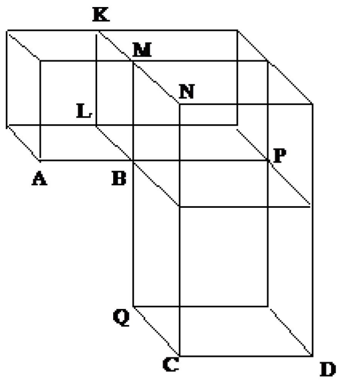
Les problèmes dits « impossibles » de l'Antiquité le plus souvent cités sont la trisection de l'angle, la duplication du cube [2] et la quadrature du cercle, auxquels on ajoute parfois la construction de l'heptagone régulier, premier des polygones

1. À l'intention des personnes qui, très normalement, n'auraient pas rencontré récemment les questions anciennes que sont la division des rapports (ou insertion de moyennes proportionnelles) ou les règles de fausses positions, nous espérons avoir donné dans cet article des fils directeurs qui suffisent à la compréhension des enjeux. Nous ne proposons pas une histoire de ces notions mais l'examen d'occurrences datées donnant lieu à des démarches intéressantes.

2. Les Déliens, ayant demandé à l'oracle de Delphes comment faire cesser l'épidémie de peste dont ils étaient victimes, se seraient vu demander de doubler l'autel cubique d'Apollon. Platon aurait interprété cette réponse de l'oracle comme un appel à cultiver les mathématiques. Le texte le plus ancien relatant la légende du problème délien est dû à Ératosthène (276-194). Nous donnons *infra* quelques indications historiques en lien avec les textes cités, mais l'objet de cet article n'est pas l'histoire de la duplication du cube.

réguliers non constructibles à la règle et au compas.

Le problème de la duplication du cube a retenu l'attention, en particulier, de deux algébristes de la Renaissance, Michael Stifel et Guillaume Gosselin. Ce sont leurs « solutions » que nous proposons d'examiner. Pour ouvrir la question, nous reproduisons précisément l'analyse que donne Bernard Vitrac de ce problème de géométrie des solides :

> « Quand on a quatre $<$ segments de $>$ droites continûment proportionnelles AB, CD, EF, GH ($AB : CD :: CD : EF :: EF : GH$), les Anciens disent que le rapport $AB : GH$ est le rapport triplé du rapport $AB : CD$.
>
> Ce que nous écririons, en termes modernes : $(AB/GH) = (AB/CD)^3$.
>
> Soit AK le cube décrit sur la droite AB (donc $AB = BL = LK$), et BD le cube décrit sur la droite CD (donc $DC = CQ = QB$).
>
> On complète les parallélépipèdes[3] rectangles KP et PN. Alors :
>
> 
>
>
> $AK : KP :: AB : BP :: AB : CD$ car $BP = CD$;
>
> $KP : PN :: KM : MN :: AB : CD$ car $KM = AB$ et $MN = CD$;
>
> $PN : BD :: MB : BQ :: AB : CD$ car $MB = AB$ et $BQ = CD$.
>
> Donc $AK : BD$ est le rapport triplé du rapport $AB : CD$.
>
> Ce que nous écririons, en termes modernes : $AB^3/CD^3 = (AB/CD)^3$.
>
> Étant donnés une droite AB et son double GH, si nous insérons entre elles deux moyennes proportionnelles CD, EF[4], le rapport du cube décrit sur AB à celui décrit sur CD sera celui de AB à GH. Autrement dit le cube sur CD sera le double du cube sur AB. » (Vitrac, 2007, https://cm2.ens.fr/node/2743)

3. Un parallélépipède est désigné par sa diagonale et le rapport de deux parallélépipèdes est celui de leurs grandeurs, c'est-à-dire, en termes modernes, de leurs volumes.

4. C'est-à-dire $AB : CD :: CD : EF :: EF : GH$. La question des moyennes proportionnelles est approfondie *infra* au paragraphe intitulé « La résolution de Michael Stifel »

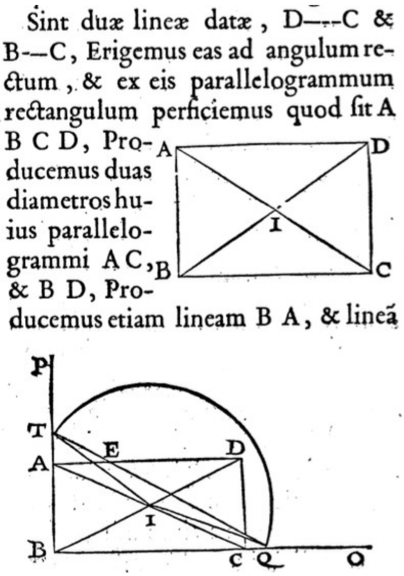
La duplication du cube se ramenant donc à l'insertion de deux lignes <segments> moyennes proportionnelles entre une ligne et la ligne de longueur double, la difficulté, ou plutôt l'obstacle, réside plus dans la construction exacte (à la règle et au compas) des lignes que dans les justifications du fait que, sur une figure supposée construite, les lignes montrées sont bien les lignes cherchées.

Au premier livre de son traité d'algèbre, le *De Arte Magna libri quatuor* (Paris, 1577), Guillaume Gosselin prolonge son étude des règles de fausses positions, en arithmétique et en algèbre, par une extension de la règle de fausse position double au champ géométrique, pour la résolution de la duplication du cube et de problèmes s'y rapportant.

Avant Gosselin, Michael Stifel a proposé une procédure de construction du côté du cube double d'un cube donné, au deuxième livre de son *Arithmetica Integra* (Nuremberg, 1544) intitulé « Sur les nombres irrationnels », dans lequel il développe sa lecture, arithmétique, du dixième livre des *Éléments* d'Euclide.

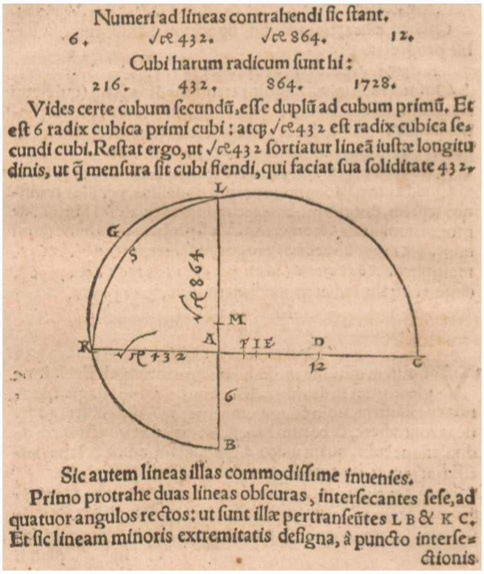
Ce sont des outils mathématiques élémentaires, mais riches des contraintes accompagnant leur utilisation, que ces deux algébristes mobilisent pour la résolution de la duplication du cube qui continuera de retenir l'attention de nombreux mathématiciens jusqu'à ce que Pierre-Laurent Wantzel démontre en 1837 que la racine cubique de 2 n'est pas constructible à la règle et au compas et que, par conséquent, le côté du cube double d'un cube donné ne l'est pas non plus.

Nous plaçons, en avant-propos, deux images emblématiques des travaux de leurs auteurs, extraites respectivement du *De Arte Magna* (figure 1, Gosselin, 1577, f° 35*v*) et de l'*Arithmetica Integra* (figure 2, Stifel, 1544, f° 119*v*). Elles sont au cœur de notre étude.



Sint duæ lineæ datæ, D—C & B—C, Erigemus eas ad angulum rectum, & ex eis parallelogrammum rectangulum perficiemus quod sit A B C D, Producemus duas diametros huius parallelogrammi A C, & B D, Producemus etiam lineam B A, & lineã

Figure 1 – Gosselin, 1577, f° 35*v*



Numeri ad lineas contrahendi sic stant.
6. √cꝛ 432. √cꝛ 864. 12.
Cubi harum radicum sunt hi:
216. 432. 864. 1728.
Vides certe cubum secundũ, esse duplũ ad cubum primũ. Et est 6 radix cubica primi cubi: atq; √cꝛ 432 est radix cubica secundi cubi. Restat ergo, ut √cꝛ 432 sortiatur lineã iustæ longitudinis, ut q̃ mensura sit cubi fiendi, qui faciat sua soliditate 432.

Sic autem lineas illas commodissime invenies.
Primo protrahe duas lineas obscuras, intersecantes sese, ad quatuor angulos rectos: ut sunt illæ pertranseũtes L B & K C. Et sic lineam minoris extremitatis designa, à puncto intersectionis

Figure 2 – Stifel, 1544, f° 119*v*

La résolution de Guillaume Gosselin

L'auteur et son œuvre

On sait peu de chose de Guillaume Gosselin, si ce n'est qu'il est « de Caen », mort de la peste vers 1590, qualifié de jeune à la fin des années 1570, comme en témoignent les textes d'hommage inclus dans ses traités. Proche du Collège royal et proche du pouvoir royal, Gosselin est associé à des cercles de poètes, lié à des savants et amis qui appartiennent au monde du Parlement.

En même temps qu'il travaille au *De Arte Magna* (figure 3), Gosselin fait éditer *L'Arithmetique de Nicolas Tartaglia Brescian* (Paris, 1578), qui est une traduction par ses soins d'italien en français, à la fois abrégée et augmentée de ses propres « additions », des deux premières parties du *General Trattato di Numeri et Misure* de Nicolò Tartaglia parues à Venise en 1556 (figure 4).

Ces deux traités, d'algèbre et d'arithmétique, que Gosselin écrit de façon délibérément coordonnée, sont à parts égales constitutifs de son œuvre. Les règles de fausse position, qu'il nomme règles d'hypothèse, auxquelles nous nous intéressons, sont étudiées parallèlement dans les deux traités [5].

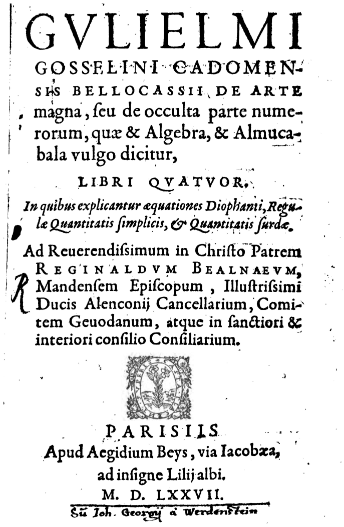

GVLIELMI
GOSSELINI CADOMENSIS BELLOCASSII, DE ARTE magna, seu de occulta parte numerorum, quæ & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur,
LIBRI QVATVOR.
In quibus explicantur æquationes Diophanti, Regulæ Quantitatis simplicis, & Quantitatis surdæ.
Ad Reuerendissimum in Christo Patrem REGINALDVM BEALNAEVM, Mandensem Episcopum, Illustrissimi Ducis Alenconij Cancellarium, Comitem Geuodanum, atque in sanctiori & interiori consilio Consiliarium.
PARISIIS
Apud Aegidium Beys, via Iacobæa, ad insigne Lilij albi.
M. D. LXXVII.

FIGURE 3 – Gosselin,1577

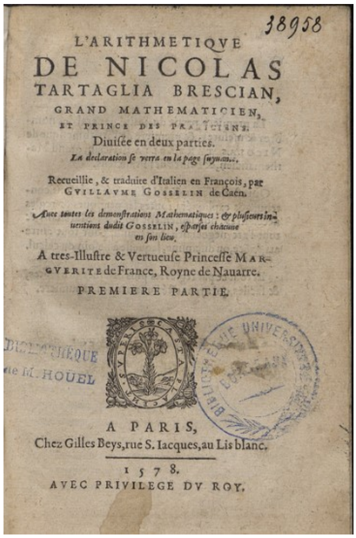

38958
L'ARITHMETIQVE DE NICOLAS TARTAGLIA BRESCIAN, GRAND MATHEMATICIEN, ET PRINCE DES PRATICIENS.
Diuisée en deux parties.
La declaration se verra en la page suyuante.
Recueillie, & traduite d'Italien en François, par GVILLAVME GOSSELIN de Caen.
Auec toutes les demonstrations Mathematiques: & plusieurs inuentions dudit GOSSELIN, esparses chacune en son lieu.
A tres-Illustre & Vertueuse Princesse MARGVERITE de France, Royne de Nauarre.
PREMIERE PARTIE.
BIBLIOTHEQUE de M. HOUEL
A PARIS,
Chez Gilles Beys, rue S. Iacques, au Lis blanc.
1578.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

FIGURE 4 – Gosselin, 1578, I

Les deux premiers livres du *De Arte Magna* établissent les liens étroits entre les règles arithmétiques que Gosselin rappelle soigneusement et les règles algébriques que les premières contribuent à fonder. Les dix-sept chapitres du premier livre posent d'entrée les questions fondamentales de la nature de l'algèbre, de sa

5. On retrouve la plupart des résultats établis dans l'un et l'autre traités dans le troisième ouvrage que l'on doit à Gosselin, la *Prælectio* de 1583, sa *Leçon sur la manière d'étudier et d'enseigner la mathématique*.

finalité, de la reconnaissance de ses termes primitifs, traitent des algorithmes d'extractions de racines de différentes multiplicités, carrées, cubiques, cinquièmes, etc., des opérations sur les rapports, des règles de fausse position simple [6] et double [7]. Les quatorze chapitres du deuxième livre traitent des règles opératoires qui gouvernent les termes primitifs de l'algèbre, nos actuels monômes, et les expressions polynomiales, fractionnaires et irrationnelles, la présentation choisie soulignant les imbrications entre les registres arithmétique et algébrique. Les treize chapitres du troisième livre sont consacrés aux règles du « grand art » pour la résolution des équations à une inconnue, du premier et du deuxième degré ou s'y ramenant, les équations cubiques n'étant qu'abordées. Les deux chapitres du quatrième livre, enfin, sont consacrés aux systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, pour la résolution desquels Gosselin fait preuve d'une réelle maîtrise.

C'est à la fin du premier livre que Gosselin adjoint à son travail soigné d'algébrisation des règles de fausses positions un dix-septième chapitre inattendu consacré à une extension de la règle de fausse position double au champ géométrique – envisageable dans la mesure où les sommes, les différences, et les proportionnalités de lignes sont constructibles – pour la résolution, précisément, de la duplication du cube et de problèmes s'y rapportant. On trouve là l'unique incursion de la géométrie dans les deux traités de Gosselin.

La règle de double hypothèse dans le champ numérique

Dans *L'Arithmetique* comme dans le *De Arte Magna,* Gosselin fait une étude théorique de la règle de fausse position double. Il en donne d'abord un énoncé général, relatif aux nombres dans le traité d'arithmétique, et formulé pour les quantités dans celui d'algèbre. Sa règle présente l'originalité de s'énoncer complètement en une seule fois puisqu'elle intègre les variantes possibles des signes des erreurs.

> « Le théorème de la règle
>
> Si, pour la quantité inconnue d'une question, on prend deux valeurs quelconques du même genre & que l'on traite l'énoncé de la question à partir de l'une et de l'autre séparément, si l'on inscrit ce qui finalement est de trop ou de moins avec la marque de l'excès ou celle du défaut, la différence des erreurs opératoires, tous calculs faits, sera à l'une ou l'autre de ces deux erreurs comme la différence des hypothèses à l'erreur d'hypothèse dont l'erreur opératoire a été prise comme second proportionnel ; erreur d'hypothèse qui, soit qu'on l'ajoute à l'hypothèse si l'hypothèse était plus petite qu'il ne fallait, soit qu'on l'en retranche si elle était plus grande, fournit la quantité cherchée. » (Gosselin, 1577, f° 24*v*-25*r*, Gosselin 1578, I, f° 111*v*-112*r*)

6. Fausse position simple : En termes anachroniques, pour la résolution de l'équation $f(x) = c$, on calcule $f(x_1) = c_1$ et de l'égalité supposée $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x}{c}$, on déduit la valeur de x.

7. Fausse position double : En termes anachroniques à nouveau, pour la résolution de l'équation $f(x) = c$, on calcule $f(x_1) = c_1$ et $f(x_2) = c_2$ et, de la proportionnalité supposée entre les accroissements de la variable et les accroissements de la fonction, $\frac{x_2 - x_1}{c_2 - c_1} = \frac{x - x_1}{c - c_1} = \frac{x - x_2}{c - c_2}$, on déduit l'accroissement de la variable correspondant à l'un ou l'autre des accroissements de la fonction $c - c_1$ ou $c - c_2$.

Bien que la question mathématique traitée ne nécessite pas en elle-même de larges développements, nous choisissons de transcrire l'énoncé de Gosselin en termes modernes (figure 5), de façon à montrer plus aisément sur quoi portent ses démonstrations et en quoi consistent les perfectionnements qu'il introduit.

La forme $ap+b=c$ s'impose puisque c'est celle des exemples numériques choisis par Gosselin au long de son étude, celle, bien sûr, pour laquelle la règle donne des résultats exacts. En restant au plus près des termes utilisés par Gosselin, nous notons p_0 la « quantité inconnue de la question », p_1 et p_2 , les positions ou « hypothèses » choisies arbitrairement, c'est-à-dire les « valeurs quelconques prises » ; $p_1 - p_0$ et $p_2 - p_0$ sont alors les « erreurs d'hypothèses » à déterminer pour trouver la valeur exacte p_0. Nous notons $\varepsilon_1 e_1$ et $\varepsilon_2 e_2$ les « erreurs opératoires » respectivement associées à chaque hypothèse, c'est-à-dire les écarts entre les résultats du calcul et la valeur attendue, affectés du signe ε, + ou −, qui leur revient, auquel Gosselin porte l'attention requise.

$$
\begin{aligned}
&ap_0 + b = c\\
&ap_1 + b = c_1 = c + \varepsilon_1 e_1\\
&ap_2 + b = c_2 = c + \varepsilon_2 e_2\\
&a(p_1 - p_0) = c_1 - c = \varepsilon_1 e_1\\
&a(p_2 - p_0) = c_2 - c = \varepsilon_2 e_2\\
&a(p_2 - p_1) = c_2 - c_1 = \varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\textbf{(i)}\quad & p_1 - p_0 = \frac{\varepsilon_1 e_1 (p_2 - p_1)}{\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1}\\
\textbf{(ii)}\quad & p_2 - p_0 = \frac{\varepsilon_2 e_2 (p_2 - p_1)}{\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1}\\
& p_0 = p_1 - (p_1 - p_0)\\
& p_0 = p_2 - (p_2 - p_0)
\end{aligned}
$$

Figure 5 – Une transcription moderne de l'énoncé général de Gosselin

L'énoncé du théorème est suivi d'une démonstration détaillée et argumentée [8], à l'issue de laquelle Gosselin revient en quelques lignes sur les questions de signes qui ont joué un rôle décisif dans sa démonstration et qu'il sait inhabituelles ; il souligne « deux points particulièrement dignes d'attention » :

> « Il ressort d'ailleurs de cette démonstration deux points particulièrement dignes d'attention, le premier est que si l'hypothèse est plus grande que le vrai nombre, l'erreur opératoire doit être marquée du signe du défaut et non de celui de l'excès, et qu'au contraire, si l'hypothèse est trop petite, on doit affecter à l'erreur opératoire le signe de l'excès, le second est que l'on doit toujours prendre la différence des erreurs opératoires. » (Gosselin, 1577, f° 30r)

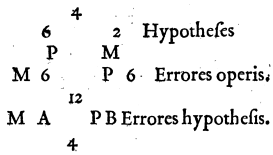


Figure 6 – Gosselin, 1577, f° 27v. L'inscription des signes des erreurs

8. Pour une étude plus complète, on pourra voir Gosselin, 2016, p.101-114.

Pour expliciter le premier point, nous reproduisons le tableau (figure 6) sur lequel Gosselin montre la manière d'inscrire les signes : les signes de la troisième ligne du tableau traduisent le constat qui est fait de l'excès (P) ou du défaut (M) de la valeur calculée par rapport à la valeur attendue. Les erreurs d'hypothèses seront alors affectées de signes indiquant la correction à prévoir – il faudra retrancher (M) l'excès si l'hypothèse est trop grande ou ajouter (P) le défaut si l'hypothèse est trop petite – et les erreurs opératoires sont, par anticipation, affectées de ces mêmes signes.

Le second point souligné par Gosselin stipule que, à partir du moment où les erreurs sont affectées de signes, la règle s'exprime par une consigne unique et générale qui recouvre tous les cas : on introduit toujours la différence des erreurs opératoires, quels que soient leurs signes. C'est la force de sa règle.

Les égalités (i) et (ii) de la figure 5 synthétisent les outils dont Gosselin dispose pour s'aventurer dans le champ géométrique et y aborder la question de la duplication du cube : ce sont la proportionnalité à l'œuvre dans la règle arithmétique ancienne de fausse position et la maîtrise du maniement des signes dans la forme algébrique nouvelle qu'il a donnée à cette règle.

La règle de double hypothèse dans le champ géométrique

Gosselin ouvre le chapitre qu'il consacre à cette question en insistant sur la filiation de la règle, « venue de l'algèbre [9] », mais dont l'efficacité tient, en dernier ressort, à la compétence du mathématicien. C'est la forme générale qu'il a su donner à la règle de double hypothèse qui, à ses yeux, rend possible l'extension de son champ d'application au-delà de celui de l'algèbre, et son emploi pour les quantités continues – c'est-à-dire en géométrie [10] – dans la mesure où les sommes, les différences, et les proportionnalités de lignes < segments > sont constructibles :

> « L'emploi de la règle double pour les quantités continues [11]. Ch. XVII
> Comme est admirable la règle qui ne se cantonne pas à une seule espèce de quantité mais dans toutes les directions se diffuse à travers toutes les quantités, puisque (pour tout dire d'un seul mot), quoique venue de l'algèbre, elle a des capacités dont sa mère l'Algèbre est dépourvue et qu'elle ne connaît pas ; ce n'est en effet pas par l'algèbre que l'on pourra obtenir ce genre d'emploi, mais on doit recourir à la règle en suivant la méthode par laquelle nous l'avons transmise car, à la façon dont les autres la traitent, elle ne vaut pas pour la quantité continue. Il convient donc d'établir par cette règle la méthode de doublement

9. Il est difficile d'éclaircir, dans le cadre restreint de cet article, les ambiguïtés que Gosselin entretient de façon fondatrice entre arithmétique, algèbre et arithmétique générale, au travers des liens qui assujettissent les unes aux autres la règle de trois, la règle d'hypothèse et la règle de la chose (ou règle de l'algèbre).

10. Gosselin, 1577, f° 1*r* : « Toute quantité est, selon Aristote, ou continue, ou disjointe & discrète. La quantité continue est appelée grandeur, la quantité disjointe reste par conséquent attachée au nombre. »

11. En extension, dans la table des chapitres : L'emploi de la règle double pour les quantités continues, où l'on démontre le procédé mathématique de duplication du cube, et trois autres problèmes s'y rapportant, et manquant jusqu'ici. Ch. XVII.

> du cube, ce que personne avant nous n'a atteint mathématiquement. » (Gosselin, 1577, f° 34*v*)

Gosselin reprend alors à son compte l'opposition ancienne entre mécanique et mathématique, qui entoure les problèmes « impossibles » de l'Antiquité, pour en faire, ici comme en quelques occasions, le symbole de l'écart entre la connaissance superficielle qui procède par tâtonnement ou accumulation, et la connaissance approfondie qui, par la cause, conduit à des solutions concises et générales. Il évoque des tentatives de construction qui ont vu le jour dans l'Antiquité, soit par l'emploi de dispositifs instrumentaux plus ou moins complexes, dont Platon lui-même aurait donné un modèle, soit par intersection de courbes, comme celles des auteurs que Platon aurait critiqués, alors que ces dernières constructions ont pu être considérées comme théoriques :

> « C'est à bon droit assurément que Platon a blâmé Eudoxe, Archytas & Ménechme, pour ce qu'ils entreprenaient de ranger la duplication du cube dans les outils & travaux mécaniques et tentaient de cette manière de trouver pour deux lignes données deux lignes proportionnelles insérées entre elles, car, dans ce projet, l'avantage de la géométrie est gâté & détruit, ramenée qu'elle est aux choses sensibles. Et de fait, Platon lui-même n'a pas résolu mathématiquement l'oracle proposé par Apollon aux Déliens, à ces Déliens peu avisés qui, pour doubler l'autel cubique du Dieu, en avaient, en doublant chacun des quatre côtés, obtenu l'octuple, à cause de l'erreur induite par l'analogie prescrivant le double en longueur. » (Gosselin, 1577, f° 34*v*-35*r*)

Archytas de Tarente (428-350), Eudoxe de Cnide (408-355) et Ménechme (380-320) sont en effet parmi les nombreux mathématiciens qui, dès l'Antiquité, se sont penchés sur le problème de la duplication du cube. On peut douter que les critiques évoquées par Gosselin aient été formulées à l'époque de Platon (427-347), au motif qu'elles ne figurent dans aucun de ses textes et ne sont mentionnées qu'à une époque tardive, par Plutarque (46-125) [12].

Sans nous attarder sur les différentes formes qu'ont pu prendre selon les auteurs, les figures et les justifications des proportionnalités que montrent ces figures, nous examinons la construction que propose Gosselin, « à la règle et au compas », par la méthode de double hypothèse, pour le premier des quatre problèmes géométriques qu'il résout :

> « Problème 1. Deux lignes étant données, rechercher mathématiquement deux moyennes proportionnelles.

12. Les assertions de Plutarque sont elles-mêmes contestables. En effet, à la différence d'Eutocius (480-540) au VIe siècle, Plutarque ne prend pas en compte la nécessité de distinguer les solutions qui restent théoriques parce qu'elles se fondent sur des intersections de courbes, telles celles d'Archytas, de Ménechme, sans doute d'Eudoxe, et plus tardivement de Dioclès (240-180), de celles qui, employant des dispositifs instrumentaux plus ou moins complexes, sont authentiquement mécaniques et doivent, à ce titre, être écartées de la mathématique. Eutocius attribue les premières solutions mécaniques à des mathématiciens du IIIe siècle, dont le plus ancien est Philon (280-220), bien postérieur à Platon. On pourra voir à nouveau B. Vitrac https://cm2.ens.fr/node/2743. On lira avec intérêt É. Barbin http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours_UEC1.pdf

> Soient les deux lignes données D—C & B—C (figure 7). Nous les construirons à angle droit et compléterons sur elles un parallélogramme rectangle, soit $ABCD$. Nous tracerons les deux diamètres de ce parallélogramme, AC & BD, nous tracerons aussi la ligne BA & la ligne BC, soient BAP, BCO. Il faut rechercher la ligne telle que, quand on la porte du centre du parallélogramme $ABCD$ qui est I jusqu'à la ligne AP & la ligne CO, la ligne tracée à partir des deux points passe par le point D [...] » (Gosselin, 1577, f° 35v-36v)

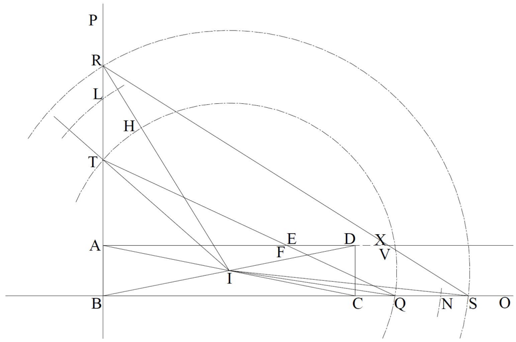


FIGURE 7 – D'après Gosselin, 1577, f° 35v-36v. La construction des données et la formulation de la question

Testant un premier rayon ($IT = IQ$, hypothèse p_1), Gosselin constate l'erreur opératoire par défaut ED ($\varepsilon_1 e_1$). Prenant alors un second rayon ($IR = IS$, hypothèse p_2), il constate l'erreur opératoire par excès DX ($\varepsilon_2 e_2$). La différence des hypothèses de IT à IR ($p_2 - p_1$) apparaît en RH, et la différence des erreurs opératoires de ED à DX ($\varepsilon_2 e_2 - \varepsilon_1 e_1$) apparaît en FV, dans une vision géométrique tout à fait remarquable de la différence de lignes « comme affectées de signes » (figure 8).

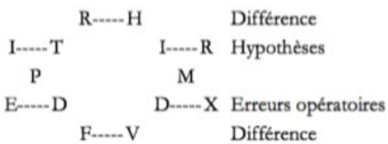
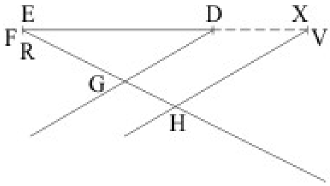


FIGURE 8 – D'après Gosselin, 1577, f° 36v. L'identification des erreurs sur la figure

Conformément à l'égalité (i) *supra* (figure 5), on obtient l'erreur de l'hypothèse IT en construisant RG tel que le rapport soit le même de FV à ED que de RH à RG. (figure 9). Gosselin s'appuie, pour cette construction, sur les propositions VI-9 et VI-12 d'Euclide[13].

13. Euclide 1990-2001, II, p.179 : « VI-9. D'une droite donnée, retrancher une partie prescrite. » ; p.183 : « VI-12. De trois droites données, en trouver une quatrième proportionnelle. »



$$RG : RH :: ED : FV$$

FIGURE 9 – D'après Gosselin, 1577, f° 37*r*. La construction des rapports égaux

Le rayon cherché est alors $IL = IT + RG$, somme de l'hypothèse IT et de son erreur RG.

Et Gosselin de conclure : « [...] et ainsi la ligne IL est le rayon de cercle cherché, tel que si tu traces la ligne IL du point I jusqu'à la ligne AP & jusqu'à la ligne CO, et que tu obtiens les points L, N, & que tu traces la ligne droite du point L au point N, celle-là passera par le point D, comme on peut le voir [14]. » (Gosselin, 1577, f° 37*v*)

Gosselin complète alors le tracé du cercle de centre I et de rayon IL et propose une figure dont les propriétés de symétrie sous-tendent les affirmations qui suivent (figure 10) :

> « Ces choses étant établies, je complète le cercle LNM, je trace la ligne BM, la ligne CR, les lignes DQ, DR, QR, LQ, MK, puis je raisonne ainsi : les lignes LA, BM, QD, CK sont parallèles & sont également distantes du même centre, elles sont donc égales ; pour la même raison la ligne DR est égale à la ligne CN, QM est diamètre du cercle LNM, c'est pourquoi QRM est un demi-cercle & le triangle QRM est rectangle d'après la proposition 31 du troisième livre < d'Euclide> [15], et donc le triangle QRC est droit également, et pour la raison que la ligne DR est perpendiculaire à la base QC & qu'elle divise l'angle droit R, la ligne DR sera moyenne proportionnelle entre QD & DC, mais la ligne CN est égale à la ligne DR, comme nous l'avons démontré [...] » (Gosselin, 1577, f° 37*v*-38*r*)

Sur la figure achevée, Gosselin établit les proportionnalités attendues, en faisant référence successivement à plusieurs propositions euclidiennes dont le détail nous emmènerait loin du sujet traité [16].

14. Nous commentons plus bas la solidité de l'argument « comme on peut le voir ».
15. Euclide, 1990-2001, I, p.449 : « III-31. Dans un cercle, d'une part l'angle dans le demi-cercle est droit, d'autre part celui dans un segment plus grand [qu'un demi-cercle] est plus petit qu'un droit, celui dans un segment plus petit, plus grand qu'un droit. De plus l'angle du segment plus grand est plus grand qu'un droit et l'angle du segment plus petit, plus petit qu'un droit. »
16. Pour les personnes dont la curiosité serait éveillée, il s'agit, dans l'ordre, des propositions II-14, III-36, VI-8, VI-13, V-7, I-29, I-32, VI-4, des *Éléments* d'Euclide.

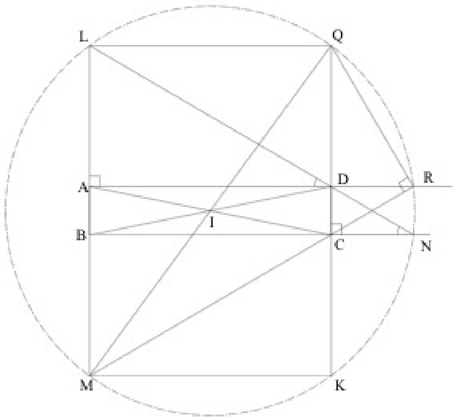


FIGURE 10 – D'après Gosselin, 1577, f° 37*v*. Sur la figure complétée, les proportionnalités attendues

En résumé, et en termes modernes, dans le triangle rectangle QRC :

$$\frac{DC}{DR} = \frac{DR}{DQ} \text{ soit } \frac{DC}{CN} = \frac{CN}{LA}$$

et dans les triangles LAD et DCN qui sont semblables :

$$\frac{DC}{CN} = \frac{LA}{AD} \text{ soit } \frac{DC}{CN} = \frac{LA}{BC}$$

d'où la relation cherchée : $\dfrac{DC}{CN} = \dfrac{CN}{LA} = \dfrac{LA}{BC}$

qui signifie que CN et LA sont les deux lignes moyennes proportionnelles cherchées, que si DC est le côté du cube à doubler, et BC le double de ce côté, alors CN est le côté du cube double.

Il se fait que les figures de Gosselin dans le *De Arte Magna* ont l'apparence exacte des figures de Tartaglia dans le *General trattato*, exceptionnellement reproduites par Gosselin dans *L'Arithmetique*, au paragraphe « Comment on peut trouuer par voye Geometrique le costé Cubique d'vn nombre, tant Cube, que non Cube » du chapitre consacré aux extractions de racines cubiques.

Ci-dessous la première figure (figure 11) et la traduction que donne Gosselin du passage du texte de Tartaglia associé :

> « Cecy estant ainsi fait nous prendrons nostre compas, & mettrons le pié immobile sur le centre i, puis auec l'autre pié nous chercherons vn poinct sur la ligne g, k, & vn autre sans varier le pié immobile de nostre compas du poinct i, sur la ligne f, e, lesquels deux poincts soient tels, que si nous tirons vne ligne droite de l'vn en l'autre, icelle passe precisément par le poinct h, ce que nous ferons en ceste sorte :

apres auoir mis le pié de nostre compas immobile sur le centre i, nous marquerons deux poincts l'vn sur la ligne g, k, l'autre sur la ligne f, e, or pozons que tels poincts soient n & o, puis nous tirerons vne ligne d'vn poinct à l'autre, mais pour autant qu'icelle passera dessous le poinct h, nous eslargirons vn peu nostre compas, & remarquerons deux autres poincts, lesquels pozons estre p & q : apres nous tirerons vne ligne d'vn poinst à l'autre, laquelle nous verrons passer precisément par le poinct h, donc nous conclurons que la ligne f, q, sera le costé Cubique de 10 [...] » (Tartaglia, 1556, II, f°32*v*-33*v* ; Gosselin, 1578, II, f° 28*r*-*v*)

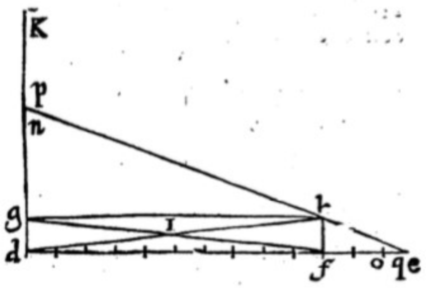


FIGURE 11 – Tartaglia, 1556,II, f° 33*r*. Gosselin, 1578, II, f° 28*r*

Les premières étapes de la construction sont donc les mêmes. Mais les méthodes diffèrent dans le principe et cela apparaît après le tracé du premier cercle et le constat de l'erreur par défaut. Tartaglia termine la construction par tâtonnement en augmentant le rayon jusqu'à ce que la corde associée passe par le sommet h du rectangle [17].

C'est ce tâtonnement que Gosselin exclut par principe. Il prend, pour sa part, un second rayon, $IR = IS$, puis construit sur les segments, à la règle et au compas, en s'appuyant sur les propositions VI-9 et VI-12 d'Euclide [18], les opérations prescrites par la règle de double hypothèse. Sur la figure ainsi élaborée « mathématiquement », il fait la démonstration attendue des égalités de rapports et de la validité de la configuration, en se référant aux propositions incontournables de la géométrie euclidienne. Il ne lui manque que, mais il lui manque réellement, en 1577 en tout cas, la faculté de reconnaître que la figure qu'il construit ne peut donner la solution exacte. La méthode de fausse position, même revue par ses soins, repose sur la proportionnalité et ne peut, hors de ce registre, faire mieux qu'approcher les solutions. Il convient de noter que, dans la *Prælectio* de 1583, Gosselin compte le problème « Deux lignes droites étant données, découvrir deux moyennes proportionnelles » parmi « Les propositions manquantes à ce jour en géométrie ». Aura-t-il porté sur sa solution de 1577 le regard critique qui s'imposait ?

17. C'est en fait la construction dite, par Eutocius, de Héron-Philon-Apollonius. Tartaglia peut l'avoir lue dans la traduction gréco-latine, par Guillaume de Moerbeke (1215-1286), du commentaire d'Eutocius au *Traité De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède.

18. Voir *supra* note 13.

Quoi qu'il en soit, Gosselin exploite au mieux le résultat auquel il est parvenu. La solution serait généralisable et il détaille en son deuxième problème (Gosselin 1577, f° 39r-40r) que l'on peut pareillement construire le cube triple ou le cube quadruple d'un cube donné, « et ainsi indéfiniment ». Le troisième problème (Gosselin 1577, f° 40r) qu'il se contente d'énoncer, est également géométrique : « Dessiner un cube égal à un parallélépipède quelconque [19]. » Quant au quatrième problème, « Rechercher géométriquement le côté cubique d'un nombre quelconque », que Gosselin énonce pour clore le chapitre, c'est celui que Tartaglia traite par tâtonnement avec le support de la figure reproduite plus haut.

Bilan

L'excursion de Gosselin dans le champ de la géométrie, où il prête à la règle d'hypothèse le pouvoir supérieur de construire les moyennes proportionnelles, l'a emmené fort loin, semble-t-il, du terrain des nombres où il se tient habituellement, et ne manque pas d'interroger. Pourtant, tout bien considéré, ce détour s'inscrit de façon pertinente dans le projet de Gosselin de façonner toutes les démonstrations absentes du traité de Tartaglia, et qui ne se trouvent non plus chez aucun autre auteur. Ayant l'audace de penser des lignes « comme affectées de signes », il croit trouver en la règle de double hypothèse, qu'il a démontrée par l'algèbre, et dont le champ d'application dépasserait celui de l'algèbre, le moyen d'établir la construction exacte de la figure montrant le « costé Cubique d'vn nombre, tant Cube, que non Cube » et, ce faisant, une démonstration de la règle d'extraction des racines cubiques, manquante jusque-là, et appartenant bien au champ du numérique à la perfection duquel il œuvre.

La résolution de Michael Stifel

Michael Stifel s'est, avant Gosselin, penché sur le problème de la duplication du cube, en l'abordant comme une des conséquences bienvenues, en géométrie en particulier, de son interprétation numérique de la classification des lignes irrationnelles, présentée par Euclide au livre X des *Éléments*.

L'auteur et son œuvre

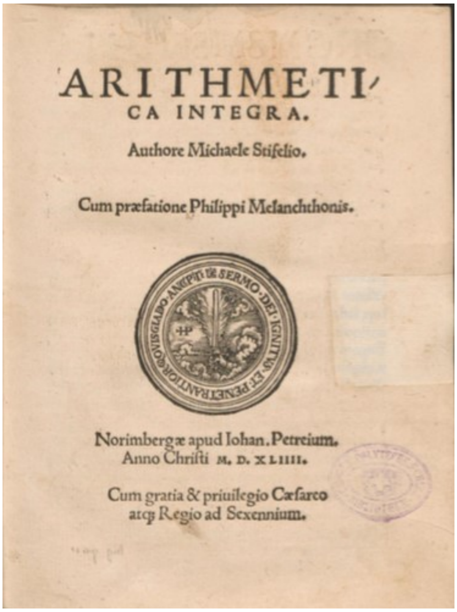
Homme d'église au parcours un peu mouvementé, Michael Stifel fait paraître son premier texte mathématique, *l'Arithmetica Integra*, à Nuremberg, en 1544, alors qu'il est âgé de 57 ans (figure 12). L'ouvrage, qui se présente comme une synthèse des connaissances de l'époque, augmentée de contributions originales et pertinentes de l'auteur, connaît de nombreuses rééditions et est abondamment lu et exploité. Les publications suivantes de Stifel sont rédigées en langue vernaculaire. On lui doit en particulier une réédition en 1553 de l'*Algèbre* de Christoff Rudolff.

19. La solution se donne en deux étapes, la construction d'un parallélépipède égal au parallélépipède donné, de même hauteur et de base carrée égale à sa base rectangulaire, puis la construction des deux moyennes proportionnelles entre le côté du carré et la hauteur des parallélépipèdes. La plus petite des deux moyennes est le côté du cube cherché.

Que Stifel entend-il par « arithmétique entière » ou sans doute « arithmétique générale » ? Le traité est composé de trois livres consacrés respectivement à un large rappel des règles de l'arithmétique, aux nombres irrationnels à travers une relecture arithmétique du livre X des *Éléments* d'Euclide et à « L'Art parfait du calcul » ou algèbre.

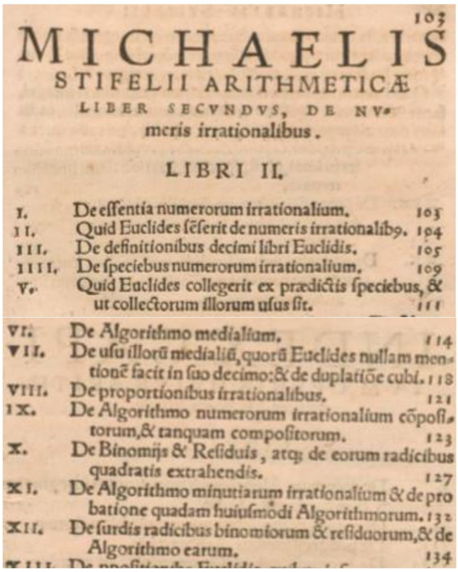
Arithmétique entière, sans doute parce que l'arithmétique du premier livre est pensée comme un support pertinent pour l'algèbre dont traite le troisième livre et que les règles des signes qui régissent les opérations sur les expressions irrationnelles, reconnues au deuxième livre, sont au fondement des règles opératoires relatives aux expressions algébriques établies au troisième livre.

En ouverture du livre II de *l'Arithmetica Integra* (figure 13), Stifel pose d'entrée la question de « L'essence des nombres irrationnels », rappelant qu'on se demande avec raison s'ils sont réels ou fictifs. Soulignant l'intérêt qu'il y a, quoi qu'il en soit, à les considérer, et proposant au chapitre III de donner à voir ces nombres « abstraits » en les « contractant » sur des figures géométriques, lignes ou surfaces, Stifel passe en revue, au chapitre IIII, « Les espèces de nombres irrationnels » et met en évidence cinq espèces principales de nombres irrationnels abstraits [20].



ARITHMETICA INTEGRA.
Authore Michaele Stifelio.
Cum præfatione Philippi Melanchthonis.
Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.
Cum gratia & priuilegio Cæsareo atq; Regio ad Sexennium.

Figure 12 – Stifel, 1544



103
MICHAELIS STIFELII ARITHMETICÆ LIBER SECVNDVS, DE NVmeris irrationalibus.

LIBRI II.

I.	De essentia numerorum irrationalium.	103
II.	Quid Euclides sēserit de numeris irrationalib9.	104
III.	De definitionibus decimi libri Euclidis.	105
IIII.	De speciebus numerorum irrationalium.	109
V.	Quid Euclides collegerit ex prædictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit.	111
VI.	De Algorithmo medialium.	114
VII.	De usu illorū medialiū, quorū Euclides nullam mentionē facit in suo decimo: & de duplatiōe cubi.	118
VIII.	De proportionibus irrationalibus.	121
IX.	De Algorithmo numerorum irrationalium cōpositorum, & tanquam compositorum.	123
X.	De Binomijs & Residuis, atq; de eorum radicibus quadratis extrahendis.	127
XI.	De Algorithmo minutiarum irrationalium & de probatione quadam huiusmodi Algorithmorum.	132
XII.	De surdis radicibus binomiorum & residuorum, & de Algorithmo earum.	134

[...]

Figure 13 – Stifel, 1544, f° 103

La première seule retiendra ici notre attention. Il s'agit des nombres irrationnels médiaux ou irrationnels simples, c'est-à-dire des racines sourdes des nombres rationnels, de la forme $\sqrt[p]{a}$. Voici ce qu'écrit Sabine Rommevaux à ce sujet :

20. Stifel se réfère à la recension des *Éléments* d'Euclide de Campanus, dont Erhard Ratdolt donne la première version imprimée en 1482.

> « Pour Euclide, une ligne médiale est le côté d'un carré égal à un rectangle contenu par deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement. Ainsi, soit le rectangle $ABCD$ formé par AB et BC exprimables et commensurables en puissance seulement, et soit E une droite exprimable de référence, on a par exemple : $AB = p.E$ et $BC = p\sqrt[2]{q}.E$, où p et q sont des entiers ou des fractions. Alors, le carré égal au rectangle $ABCD$ a pour côté $p\sqrt[4]{q}.E$. Ainsi, les nombres médiaux de Stifel généralisent les lignes médiales d'Euclide à d'autres racines que la racine quatrième. » (Rommevaux-Tani, 2014, p.182-183)

Les moyennes proportionnelles

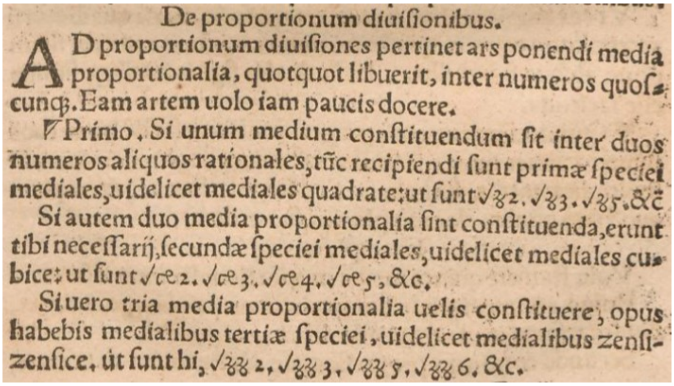
Au chapitre VII qu'il intitule alors « L'emploi des médiales, dont Euclide ne fait aucune mention en son dixième livre & la duplication du cube », Stifel apporte, à la question de la duplication du cube, une solution évidemment inédite qu'il fait ressortir de sa présentation des médiales des différentes espèces, lesquelles sont incontournables pour qui veut faire des insertions de moyennes proportionnelles, c'est-à-dire diviser des proportions.

> « Et si Euclide, en son dixième livre, utilise seulement deux espèces de nombres médiaux, il ne faut pas pour autant penser que les nombres médiaux des autres espèces sont à ce point stériles qu'ils soient sans utilité, & ne soient d'aucun apport aux réflexions arithmétiques et géométriques. Et ce qu'est leur apport, nous en faisons l'expérience, tout particulièrement, quand nous prenons l'initiative d'appliquer aux nombres irrationnels aussi ce que nous avons appris à propos des nombres rationnels, comme les progressions arithmétiques, géométriques, harmoniques et contra-harmoniques [21]. Nous verrons de même les divisions des proportions, à propos desquelles ici la cause ressort en quelque sorte des exemples, et d'abord les divisions des proportions.
>
> Les divisions des proportions
>
> Ce qui sert à la division des proportions, c'est l'art de poser des moyennes proportionnelles, autant que l'on veut, entre n'importe quels nombres. Et, cet art, je veux maintenant l'enseigner en peu de mots. » (Stifel, 1544, f° 118r) [22]

La nature des médiales requises dépend du nombre de moyennes proportionnelles attendues. On remarquera, sur l'extrait du texte original (figure 14), l'emploi, pour désigner les nombres irrationnels, des signes « cossiques » dont Stifel consacrera l'usage comme signes du calcul algébrique, au troisième livre de l'*Arithmetica Integra.*

21. Stifel étudie les différentes proportionnalités au premier livre de *l'Arithmetica Integra*. Trois nombres a, b, c sont en proportionnalité harmonique si le rapport de la première différence à la deuxième différence est le même que le rapport du plus petit extrême au plus grand, c'est-à-dire si $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$. Ils sont en proportionnalité contra-harmonique si le rapport de la première différence à la deuxième différence est le même que le rapport du troisième nombre au premier, c'est-à-dire si $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$. Ces relations sont au fondement de l'harmonie musicale.

22. Traduction des extraits de l'*Arithmetica Integra* par l'auteure de l'article.


De proportionum diuiſionibus.

AD proportionum diuiſiones pertinet ars ponendi media proportionalia, quotquot libuerit, inter numeros quoſcunq;. Eam artem uolo iam paucis docere.

Primo. Si unum medium conſtituendum ſit inter duos numeros aliquos rationales, tūc recipiendi ſunt primæ ſpeciei mediales, uidelicet mediales quadrate: ut ſunt √ʒ2. √ʒ3. √ʒ5. &c.

Si autem duo media proportionalia ſint conſtituenda, erunt tibi neceſſarij, ſecundæ ſpeciei mediales, uidelicet mediales cubice: ut ſunt √ce2. √ce3. √ce4. √ce5, &c.

Si uero tria media proportionalia uelis conſtituere, opus habebis medialibus tertiæ ſpeciei, uidelicet medialibus zenſizenſice, ut ſunt hi, √ʒʒ 2, √ʒʒ 3, √ʒʒ 5, √ʒʒ 6. &c.

FIGURE 14 – Stifel, 1544, f° 118*r*. Où l'on voit les notations cossiques

« * Premièrement. S'il s'agit de placer une moyenne entre deux nombres rationnels quelconques, il faut alors prendre les médiales de la première espèce, à savoir les médiales quarrées, comme $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[2]{5}$, etc. Mais, s'il s'agit de placer deux moyennes proportionnelles, les médiales de la deuxième espèce te seront nécessaires, à savoir les médiales cubiques, comme $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, etc. Et si tu veux placer trois moyennes proportionnelles, tu auras besoin des médiales de la troisième espèce, à savoir des médiales quarrées-quarrées, comme celles-ci, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{6}$, etc. Et s'il s'agit de placer quatre moyennes proportionnelles, il faudra utiliser la quatrième espèce des médiales, c'est-à-dire qu'il faudra prendre les médiales sursolides, comme celles-ci $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$, etc. Et ainsi de suite. » (Stifel, 1544, f° 118*r*-*v*)

Stifel développe alors la façon dont l'opération de division des proportions repose sur la considération des suites géométriques, avant de reprendre les étapes en les détaillant sur un exemple :

« Je veux établir cinq moyennes proportionnelles entre 6 & 18.

* Premièrement, je prends le signe des médiales de la cinquième espèce, $\sqrt[6]{\ }$, et je le garde pour l'emploi que tu verras.

* Deuxièmement, je mets en place la progression commençant à l'unité, dont la racine de la progression est le quotient de la division de 18 par 6, c'est-à-dire 3.

Et parce que je cherche cinq moyennes, il faut donc poser sept termes de la progression, à savoir,

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

* Troisièmement, je pose devant chaque terme, un à un, le signe radical, que j'avais dans un premier temps mis de côté ; la progression s'écrira alors ainsi :

$\sqrt[6]{1}$. $\sqrt[6]{3}$. $\sqrt[6]{9}$. $\sqrt[6]{27}$. $\sqrt[6]{81}$. $\sqrt[6]{243}$. $\sqrt[6]{729}$.

* Quatrièmement, une fois extraites les racines selon les signes à enlever, la progression s'écrira ainsi :

1. $\sqrt[6]{3}$. $\sqrt[3]{3}$. $\sqrt[2]{3}$. $\sqrt[3]{9}$. $\sqrt[6]{243}$. 3.

* Cinquièmement, multiplie chacun des termes par 6 (qui est le plus petit des nombres entre lesquels on doit placer les moyennes proportionnelles) ; tu auras alors tes termes extrêmes, et, intercalées entre eux, les moyennes proportionnelles cherchées $<$ et trouvées $>$, soit :

6. $\sqrt[6]{139968}$. $\sqrt[3]{648}$. $\sqrt[2]{108}$ $\sqrt[3]{1944}$. $\sqrt[6]{11337408}$. 18.

Et qu'il y ait proportionnalité continue entre les sept termes, tu pourras le prouver conformément à ce que j'ai dit au livre 1, sur la proportionnalité géométrique. Et de même, si tu veux prouver que le terme $\sqrt[6]{139968}$ fait un partage proportionnel entre 6 & $\sqrt[3]{648}$, multiplie $\sqrt[3]{648}$ par 6 (c'est-à-dire par $\sqrt[3]{216}$), cela fait $\sqrt[3]{139968}$, dont tu extrais la racine quarrée, ce qui fait $\sqrt[6]{139968}$.

Et ainsi des autres. » (Stifel, 1544, f° 118v-119r)

La duplication du cube

Et pour que l'emploi des nombres médiaux soit parfaitement mis en lumière, Stifel offre de « démêler » la question de la duplication du cube, souvent « traitée avec inquiétude et difficulté », en contractant les nombres médiaux cubiques sur des lignes :

> « Supposons donc que le cube à doubler ait six pieds de haut. Premièrement, je me donne une ligne ayant pour mesure la hauteur du cube à doubler. Deuxièmement, je me donne une ligne qui soit double de la hauteur du cube à doubler (& si le cube devait être triplé, il faudrait se donner une ligne triple de la hauteur du cube à tripler, & ainsi de suite). Je cherche alors, entre les deux lignes données, deux autres lignes, qui s'interposent entre elles proportionnellement. Et la première des lignes (s'interposant ainsi proportionnellement) sera la mesure du cube à construire, double du cube donné à doubler.
>
> Les nombres à contracter sur les lignes se présentent ainsi.
>
> 6. $\sqrt[3]{432}$. $\sqrt[3]{864}$. 12.
>
> Et les cubes de ces racines sont ici :
>
> 216. 432. 864. 1728.
>
> Tu vois assurément que le deuxième cube est le double du premier cube. Et 6 est la racine cubique du premier cube : et $\sqrt[3]{432}$ est la racine cubique du deuxième cube. Il reste donc à assortir $\sqrt[3]{432}$ à la ligne de la bonne longueur pour que sa mesure soit celle du cube à construire, qui fasse 432 en volume. » (Stifel, 1544, f° 119r-v)

Il n'y aurait donc plus qu'à construire la ligne de longueur $\sqrt[3]{432}$!

Voici comment procède Stifel (figure 15) :

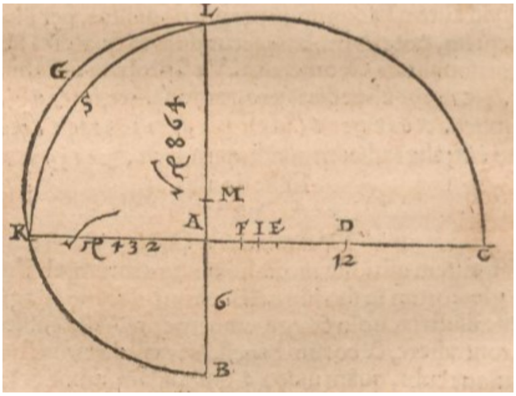


Figure 15 – Stifel, 1544, f° 119v

> « Premièrement, trace deux lignes non précisées, se coupant entre elles, en formant quatre angles droits. Soient les lignes qui se traversent LB & KC. Et marque la ligne de l'extrême le plus petit, à partir du point d'intersection, vers le bas, sur la ligne non précisée, comme tu la vois marquée petite ligne AB. Et la ligne de l'extrême le plus grand, marque-la, sur l'autre ligne non précisée, à partir du même point d'intersection, vers la droite, comme tu la vois marquée ligne AC. Ensuite, à la mesure de AB, découpe AD sur AC, de façon évidemment que AD et AB soient égales. Divise ensuite AD en deux parties égales, au point E. Deuxièmement, divise AE en deux parties égales, au point F. Troisièmement, divise FE en deux parties égales, au point I. Pose alors au point I le pied fixe du compas, & tire l'autre pied du compas jusqu'au point C, c'est-à-dire jusqu'à l'extrémité de la ligne de l'extrême le plus grand. Trace alors le demi-cercle, comme tu vois que $K\ H\ L\ C$ est tracé sur le diamètre KC. Et tu as ainsi deux moyennes proportionnelles, évidemment KA et LA, posées entre les deux extrêmes BA & AC. » (Stifel, 1544, f° 119v-120r)

La justification de cette affirmation est évidemment malheureuse. S'il est vrai que l'égalité $\frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AC}$ résulte du marquage des points L et K lors du tracé du cercle de centre I et de rayon IC, il est bien osé d'affirmer, comme le fait Stifel, que KA est moyenne proportionnelle entre AB et AL, soit $\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AL}$, pour la raison que le tracé du demi-cercle de diamètre LB, « évidemment $B\ K\ G\ L$ », constituerait la « preuve du fait » ! Il est en effet inexact que le demi-cercle de diamètre LB passe par K (un petit calcul peut aussi mettre l'erreur en évidence).

Ce n'est pourtant pas la raison pour laquelle Stifel exprime des doutes sur l'accueil qui pourrait être réservé à ses innovations. Concluant le paragraphe sur la duplication du cube par ces mots : « Je prévois ici une querelle sur les nombres irrationnels contractés sur les lignes. Mais je choisis de la laisser aux chicaneurs » (Stifel 1544, f° 120r), il s'affranchit avec hauteur des critiques à venir.

Remarques finales

Engagé avec enthousiasme dans un travail original sur les nombres irrationnels, auxquels il donne vie et usage en les contractant sur des lignes, Stifel commet, sur le point précis de la duplication du cube, une erreur que l'on peut qualifier de grossière. Et sans le support d'une démonstration, ce que la figure donnerait à voir ne peut avoir valeur de preuve. Cette défaillance ponctuelle est d'autant plus surprenante de la part de Stifel que l'ensemble de son travail est au contraire ordonné et rigoureux.

Gosselin, quant à lui, porté par le sérieux de ses travaux, surestime la règle de double hypothèse qu'il a remaniée, démontrée précisément, et dont la mise en œuvre en géométrie est réalisable à la règle et au compas. Dans ces conditions, le « comme on peut le voir » (Gosselin, 1577, f° 37*v*) par lequel il termine la construction des moyennes proportionnelles, ne signifie pas que « c'est vrai parce que ça se voit » mais plutôt que « je l'ai démontré et cela apparaît ». La faute est plus subtile parce qu'elle est plus profonde et concerne le champ d'application de la règle de double hypothèse, dont les résultats ne sont exacts que si les fonctions sous-jacentes sont affines [23].

Références bibliographiques

Barbin Évelyne, « Les grands problèmes de la géométrie grecque et l'invention des courbes », http://www.foad-mooc.auf.org/IMG/pdf/AUF-cours_UEC1.pdf

Busard H. L. L., 2005, *Campanus of Novara and Euclid's* Elements, 2 vol., Stuttgart, Franz Steiner Verlag.

Euclide d'Alexandrie, 1990-2001, *Les Éléments*, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, I-IV, Paris, PUF.

Gosselin Guillaume, 1577, *De Arte Magna libri quatuor,* Paris, Gilles Beys.

Gosselin Guillaume, 1578, *L'Arithmetique de Nicolas Tartaglia*, I & II, Paris, Gilles Beys.

Gosselin Guillaume, 1583, *De ratione discendæ docendæque Mathematices repetita prælectio,* SL.

Gosselin Guillaume, 2016, *De Arte magna Libri Quatuor* / Traité d'algèbre suivi de *Prælectio* / Leçon sur la mathématique, Étude introductive, traduction française, annotations par O. Le Guillou – Kouteynikoff, Paris, Les Belles Lettres.

Rommevaux-Tani Sabine, 2014, « Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin », *Revue d'histoire des mathématiques*, 20/1, p. 171-209.

23. Pierre Ageron a composé une exploitation pédagogique du texte de Gosselin pour l'épreuve d'Histoire et Épistémologie des mathématiques du Master Enseignement, Éducation, Formation de mathématiques, deuxième année, en avril 2017 à l'Université de Caen. Il y suggère, entre autres choses, de porter une attention critique à des expressions telles que « comme on peut le voir ».

Rudolff Christoff, 1553, *Die Coss Christoffs Rudolffs.* Die schönen Exempeln der Coss. Durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsberg, Alexandre Lutomyslens.

Stifel Michael, 1544, *Arithmetica Integra*, Nuremberg, Johann Petreius.

Tartaglia Nicolò, 1556, *General trattato di numeri et misure,* I & II, Venise, Curtio Troiano.

Vitrac Bernard, le 20/09/2007, « La duplication du cube », Article principal *Le cas Hippocrate : un premier scandale en géométrie*, https://cm2.ens.fr/node/2743