4

Décomposer un solide : de la Chine des Han à une exploration en classe avec les outils d'aujourd'hui

Philippe Martinet

Introduction

Aussi loin que je me souvienne, j'ai toujours pris beaucoup de plaisir aux jeux de constructions. Aussi, lorsqu'en 2017 la Principale du collège me demande de créer un Enseignement Pratique Interdisciplinaire (EPI) [1] en classe de 3e, j'imagine faire concevoir par mes élèves des puzzles en 3D. La discipline avec laquelle s'associer est évidente : ce sera la technologie car j'ai été initié lors d'un stage à un logiciel de modélisation 3D (*Google SketchUp*) qui permet de décomposer assez facilement un solide et de le reconstituer. Je sais que mon collègue de technologie le connait bien et l'initiation à un « modeleur 3D » – c'est le terme employé par mon collègue – est au programme de technologie en Collège. Par ailleurs, quelques années auparavant, j'ai été marqué par un article de Michèle Grégoire retraçant quelques moments clés de l'histoire du volume de la pyramide, en particulier par la partie évoquant la période chinoise (Grégoire, 1993). J'en ai alors tiré des énoncés de devoirs à la maison pour le niveau 4e. Est alors née en moi l'envie de reprendre, en les étoffant, certains de ces éléments afin de fournir en quelque sorte un supplément d'âme à l'EPI. Un ouvrage de référence sur cette période et cette civilisation est paru quelques années plus tôt : *Les neuf chapitres* (Chemla, Shuchun, 2005). J'ai déjà été amené à le consulter et je sais que je trouverai là le matériau qui permettra d'enrichir à coup sûr et de façon précise mon projet d'EPI. Je sais aussi que sa lecture n'est pas aisée. Qu'à cela ne tienne, je ne suis pas seul, mes camarades du groupe IREM de Dijon m'aideront si besoin est. Je me lance donc.

1. Les EPI ont été introduits lors de la réforme du Collège en 2016, avec pour objectif de développer la démarche de projet et l'interdisciplinarité.

Le but de cet article est de présenter cet ouvrage, les éléments d'histoire des mathématiques que j'en ai extraits pour notre projet, et la façon dont ces éléments ont été insérés et exploités en classe. Enfin, je terminerai en dégageant quelques aspects de l'intérêt d'une telle démarche pour les élèves.

L'ouvrage que nous avons utilisé

L'ouvrage en question est la traduction commentée et annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun d'une œuvre majeure de la Chine ancienne, *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*. Par souci de clarté, convenons de nommer dans la suite par le *Classique* l'ouvrage originel sans les commentaires ni les compléments établis par Karine Chemla et Guo Shuchun et par l'*ouvrage* l'œuvre originelle traduite et augmentée des commentaires et annotations de nos deux auteurs.

Le contenu et quelques caractéristiques du Classique

Cet ouvrage se présente comme un recueil de 246 problèmes qui, comme son titre l'indique, comporte neuf parties dont les titres soulignent le caractère résolument pratique de leurs contenus. Citons en guise d'illustration les trois premiers : *Champs rectangulaires*, *Petit mil et grains décortiqués* et *Parts pondérées en fonction des degrés*. Le premier a pour objet le calcul d'aires de diverses formes, et contrairement à ce que laisse penser le titre, il ne se limite pas aux rectangles puisqu'il va jusqu'à considérer des sections circulaires. Le deuxième traite des échanges, de tarifs, tandis que le troisième évoque la répartition de biens ou d'argent en utilisant la proportionnalité. Mais on trouve aussi des énoncés qui échappent à ce caractère pratique. Donnons-en deux exemples :

> « (6.14) Supposons qu'un lapin coure d'abord 100 bu et qu'un chien, le poursuivant sur 250 bu, manque de le rattraper de 30 bu et s'arrête. On demande, si le chien ne s'était pas arrêté, combien de bu il aurait encore parcouru avant de le rattraper.
> [...]
> (9.1) Supposons que la base (gou) soit de 3 chi et la hauteur (gu) de 4 chi. On demande combien fait l'hypoténuse. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 9)

La variété des problèmes qui se trouvent rassemblés dans le *Classique* est résumée par Karine Chemla de la façon suivante : « Les neuf chapitres mêlent donc des énoncés qui nous apparaissent tour à tour concrets, récréatifs ou abstraits. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 9)

Les mathématiques du *Classique* diffèrent des mathématiques occidentales. Le mathématicien et historien des mathématiques du début du XX^{e} siècle, Ogura Kinnosuke, le commentera ainsi :

> « *Les Neuf chapitres sur l'art mathématique* sont l'ouvrage fondamental des mathématiques chinoises [...]. Si on le compare aux mathématiques

> grecques, il leur est inférieur pour ce qui est de la géométrie et de la théorie des nombres ; pour ce qui est de l'arithmétique et de l'algèbre (avant Diophante – vers 275 de notre ère), je suis persuadé qu'il les surpasse. » (Kinnosuke, 1935) [2]

La structure de l'ouvrage

L'ambition de l'ouvrage, nous disent les deux chercheurs, est de « permettre un accès au *Classique* qui a fondé les traditions mathématiques de la Chine ancienne, dans sa subtilité, dans la singularité des concepts et de la pratique des mathématiques dont il témoigne » (Chemla, Shuchun, 2005, préface p. XIV). La structure de cette traduction et de ses compléments présente plusieurs particularités qui en font à la fois un outil de diffusion de connaissances tout à fait remarquable mais aussi un ouvrage difficile d'accès. Il me paraît donc utile de nous y attarder quelque peu, en particulier pour le lecteur qui souhaiterait prolonger et approfondir cet article par la consultation de cet ouvrage. Remarquable par l'ampleur du savoir mathématique d'une époque et d'une civilisation fort éloignée de la nôtre qu'il permet de mettre à disposition d'un large public, remarquable aussi par l'environnement qui accompagne ce corpus et qui permet de mieux y entrer.

Ainsi, le *Classique* est précédé de quatre présentations dont deux éclaireront grandement le non-spécialiste. La première est écrite par Karine Chemla qui décrit le contenu même du texte, sa forme générale. Ainsi, on y apprend par exemple que le texte originel n'a rien d'un traité mathématique au sens euclidien du terme. On ne trouve pas de construction axiomatique ici, mais une succession de problèmes en général suivis de leur solution. La procédure, qui peut être porteuse d'un caractère algorithmique, est parfois détaillée. En voici un exemple :

> « (9.9) Supposons qu'on ait un rondin de bois de section circulaire enfoncé dans un mur et dont on ne connait pas les dimensions. Si, à l'aide d'une scie, on le scie à une profondeur de 1 cun, le trajet de la scie a 1 chi de longueur. On demande combien vaut le diamètre.
>
> Réponse : Le diamètre du rondin vaut 2 chi 6 cun.
>
> Procédure : La moitié du trajet de la scie étant multipliée par elle-même,
>
> [...]
>
> on divise par la profondeur de 1 cun, et on augmente ceci de la profondeur de 1 cun, ce qui donne le diamètre du rondin. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 8-9)

La numérotation « (9.9) » désigne le problème 9 du chapitre 9 dont le titre est *Base et hauteur* et traite essentiellement de calculs de longueur dans le triangle rectangle (théorème de « Pythagore »). Précisons pour la compréhension de l'énoncé du problème que le « chi » et le « cun » désignent des unités de mesure de

2. Cette citation est présente en page 29 de l'ouvrage (Yabuuti, 2000) dans lequel le lecteur intéressé trouvera davantage d'informations sur les mathématiques chinoises.

longueur qui peuvent être traduites [3] respectivement par « pieds » et « pouces », avec 1 chi = 10 cun. Enfin, rajoutons pour le lecteur qui souhaiterait résoudre le problème que le rondin de bois est enfoncé dans le sens de la longueur dans le mur [4]. Mais je souhaite surtout à travers cet exemple vous donner un aperçu de la forme générale des énoncés que l'on trouve dans le *Classique*. La partie que j'ai omise consiste en deux commentaires, l'un de Liu Hui, l'autre de Li Chunfeng [5]. Ces commentaires ont été rajoutés au fil du temps dans le but d'éclairer, préciser, voire corriger certains éléments du *Classique*.

Dans cette première présentation, on prend aussi connaissance de certaines hypothèses quant à la façon dont le *Classique* a pu être utilisé et de certaines absences qui peuvent surprendre. Ainsi, pas de détails sur la façon dont étaient faits les calculs de base : additions, soustractions, multiplications, divisions. Citons Karine Chemla à ce propos :

> « *Les Neuf chapitres* tiennent pour acquise la connaissance d'algorithmes qui permettent d'effectuer les opérations arithmétiques de base.
> [...]
> Nous n'avons donc de certitude ni pour ce qui est de la manière dont les auteurs des *Neuf chapitres* représentaient les nombres, ni au sujet des algorithmes qu'ils utilisaient pour les opérations arithmétiques. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 5)

Néanmoins, la thèse la plus couramment admise est que les calculs avaient lieu sur une surface à l'aide de baguettes :

> « Un aperçu des textes mathématiques chinois sous ce rapport nous sera utile pour argumenter la thèse, usuelle, que les ouvrages datant des Han renvoient tous deux à l'usage, mieux attesté quelques siècles plus tard, de baguettes à calculer qu'on disposait sur une surface quelconque et à l'aide desquelles on représentait les nombres. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 15)

De même, il est fait allusion à plusieurs reprises pour des explications concernant les solides à des auxiliaires nommés « blocs » de différentes couleurs et dont on peut supposer qu'il s'agissait de solides qui étaient réellement manipulés :

> « Il est remarquable qu'à aucun endroit, *Les neuf chapitres* ne renvoient à une figure ou à une autre forme de visualisation. En fait, les premières mentions d'auxiliaires visuels dans les mathématiques de la Chine ancienne se rencontrent dans les commentaires aux Classiques, comme si figures et autres étaient attachés à l'activité d'exégèse.
> [...]

3. Une explication des unités utilisées est donnée en deuxième de couverture de (Chemla, Shuchun, 2005)

4. Pour le détail de la résolution de ce problème on peut aussi se reporter à une version vulgarisée du neuvième chapitre parue aux éditions du Kangourou sous le titre *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne, extraits du neuvième chapitre* (Deledicq, 2013)

5. Li Chunfeng (602-670) est un mathématicien, astronome et historien chinois, connu notamment pour le grand nombre de commentaires qu'il a insérés dans le *Classique*.

> Les questions de géométrie dans le plan et dans l'espace recourent à deux modes distincts de visualisation : les figures (tu) pour le plan, les blocs (qi) dans l'espace. Dans les deux cas, il semble qu'il se soit agi du temps des commentateurs, d'objets matériels. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 34)

Une deuxième présentation, par Guo Shuchun, retrace l'histoire du texte, des origines, aux alentours du IIIe siècle avant notre ère, jusqu'à nos jours, en passant par l'époque charnière que représente le moment où Liu Hui rédige ses commentaires, donc au IIIe siècle de notre ère. Notons que la plus ancienne version du *Classique* qui nous soit parvenue date du XIIIe siècle.

Par ailleurs, dans les compléments rédigés par les deux traducteurs, figurent en tête de chacun des neuf chapitres une introduction, parfois très étoffée, qui éclaire, précise ou circonscrit certains aspects du texte qui suit. Autant de minitraités qui enrichissent et facilitent grandement la lecture du texte, et qui constituent donc un outil précieux pour le professeur qui souhaite créer des documents à l'intention des élèves.

Éléments des *Neuf chapitres* explicitement utilisés en classe

Deux problèmes, très inégaux dans leur ampleur et leur profondeur ont été exploités en classe : d'une part le problème 15 du chapitre 5 et son commentaire par Liu Hui, qui concerne le calcul du volume d'une pyramide. D'autre part la première partie du problème 6 du même chapitre qui se résume du point de vue mathématique au calcul du volume d'un prisme particulier, donc qui ne présente pas de difficultés. Avant d'évoquer la façon dont j'ai utilisé les éléments mathématiques en question, je vais donc vous présenter en détails la méthode très originale [6] de Liu Hui pour justifier ce que nous appellerions aujourd'hui la « formule du volume de la pyramide ».

Le problème 15 et le commentaire de Liu Hui

Le problème 15 consiste à calculer le volume d'un *yangma*, c'est-à-dire d'une pyramide à base rectangulaire dont une arête est aussi hauteur. Voici l'énoncé de ce problème avec la réponse et la procédure qui le suivent :

> « (5.15) Supposons que l'on ait un *yangma* de 5 *chi* de largeur et, de 7 *chi* de longueur et de 8 *chi* de hauteur. On demande combien vaut le volume.
>
> Réponse : 93 *chi* un tiers de *chi*.
>
> Procédure : Longueur et largeur étant multipliées l'une par l'autre, on multiplie ceci par la hauteur et on divise par 3. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 429-431)

6. À ce propos, le lecteur intéressé trouvera la description d'autres méthodes et d'autres traditions relatives au calcul du volume d'une pyramide dans l'article de Jean-Paul Mercier intitulé *Le volume de la pyramide chez Euclide, Liu Hui, Cavalieri et Legendre* (Mercier, 2012).

Puis suit le commentaire de Liu Hui (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431-433) dont je vais vous donner les grandes lignes. La procédure ci-dessus prend pour acquise le fait que le volume d'une pyramide du type yangma est égal au tiers du pavé ayant même hauteur et même base que le *yangma*. Pour justifier cette procédure, Liu Hui utilise trois types de solides : le pavé droit, le demi-pavé droit (appelé *qiandu*) obtenu en coupant le pavé en diagonale, le *yangma* que nous venons de voir et le *bienao*. Le *bienao* est un tétraèdre particulier qui peut se définir comme le complément du *yangma* dans un *qiandu* ayant même base et même hauteur que ce *yangma*. Ainsi, figure 1 ci-dessous, $ABDECF$ est le *qiandu*, $ADEBC$ est le *yangma* et $DEFC$ est le *bienao*.

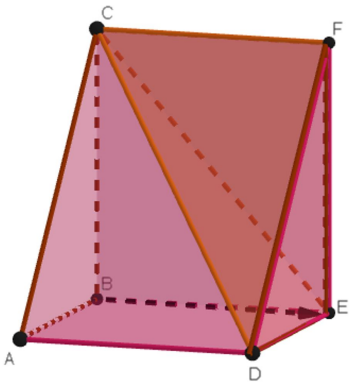

FIGURE 1 – Décomposition d'un *qiandu* en *yangma* et *bienao*

Ce dernier occupe pour Liu Hui une place tout à fait singulière dans le bestiaire des solides dont il traite : il ne correspond à aucun objet concret et son rôle est central dans la méthode pour établir la formule du volume. Voici ce qu'en dit Liu Hui lui-même la fin de son commentaire :

> « L'objet *bienao* n'est pas identique à un ustensile ; la forme du *yangma* peut varier dans sa longueur et dans sa largeur. Mais si l'on n'avait pas le *bienao*, on n'aurait pas de moyen d'examiner les valeurs attachées aux *yangma*. Si l'on n'avait pas le *yangma* on n'aurait pas les moyens de connaître les catégories des cônes et des pyramides tronquées. Il joue le rôle de fondement des travaux et des volumes. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)

Précisons que le mot « cônes » désigne chez Liu Hui tout solide ayant une forme en pointe. Il englobe donc à la fois les cônes au sens où on l'entend chez nous mais aussi les pyramides [7]. C'est le terme « zhui » qui renvoie à l'idée de pointe ; ainsi « fang zhui » désignera une pyramide à base carrée tandis que « yuan zhui » renvoie à notre cône à base circulaire (« fang » renvoie à l'idée de « carré » tandis

7. Signalons que la présence d'un glossaire des termes mathématiques chinois anciens en fin d'ouvrage est tout à fait passionnante et utile, même pour le lecteur qui n'a aucune notion de chinois. Par exemple la notion de cône est développée (Chemla, Shuchun, 2005, p. 1034).

que « yuan » désigne le mot « cercle »). Le cœur de la méthode de Liu Hui se trouve dans l'affirmation suivante : « En coupant en oblique le *qiandu*, un des morceaux fait un *yangma*, l'autre fait un *bienao*. Que le *yangma* en occupe 2 quand le *bienao* occupe 1, ce sont des lü invariables » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431). Ici le mot « lü » renvoie à l'idée de « relation » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 956). Autrement dit, Liu Hui conjecture ici que le *bienao* occupe un tiers du *qiandu* et le *yangma* deux tiers. Comme un *qiandu* a pour volume la moitié du pavé ayant même base et même hauteur que le *yangma*, il s'ensuit que le volume du *yangma* sera donc un tiers de celui du pavé. Et la procédure sera alors justifiée. Reste à prouver la conjecture. Pour cela, Liu Hui procède par dissection (voir figure 2) : il considère un *qiandu* comme à la figure 1. Ce *qiandu* peut être considéré comme la moitié d'un pavé droit qu'on appellera dans la suite « pavé de base ». (Chemla, Shuchun, 2005, p. 431)

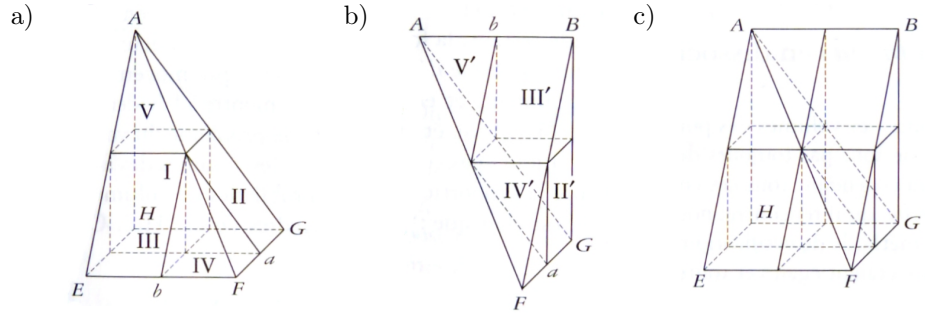

Figure 2 – Reconstitution de décompositions de solides en blocs (Chemla, Shuchun, 2005, p. 397)

Liu Hui coupe le *qiandu* par un plan parallèle à la base du *yangma* passant par le milieu de la hauteur (voir figure 2 (c)). Puis, cette section étant faite, il fait apparaître en dessous du plan de section des solides qui sont tous d'un des quatre types évoqués précédemment. Notons que le raisonnement de Liu Hui est présenté sans figure. Pour rendre le discours plus compréhensible, il distingue par des couleurs le *yangma* et le *bienao* du départ : le *yangma* est noir tandis que le bienao est rouge. Si on rassemble les qiandu II et III du *yangma* (a) (voir figure 2), on obtient un pavé, ce qui fait que le *yangma* de départ se décompose en un pavé qui est la réduction à l'échelle $1/2$ du pavé de base et deux exemplaires d'un *yangma* qui est la réduction à l'échelle $1/2$ du *yangma* de départ. Pour le *bienao*, les deux *qiandus* II' et III' ne s'appliquent pas l'un sur l'autre pour reformer un pavé mais on peut vérifier néanmoins qu'ils ont le même volume : un huitième du pavé de départ. Donc le *bienao* de départ se décompose en volume en un huitième de pavé de base et il reste deux exemplaires d'un *bienao* qui est la réduction à l'échelle $1/2$ du *bienao* de départ.

Notons v le volume correspondant à un huitième du pavé de base et récapitulons en revenant au *qiandu* (c) : dans ce *qiandu*, il y a donc en volume l'équivalent de

deux v provenant du *yangma* et d'un v provenant du *bienao* et il reste deux exemplaires du *yangma* et du *bienao*, tous deux à l'échelle $1/2$ par rapport à ceux de départ. Le volume du *qiandu* de départ est de quatre v. Donc Liu Hui vient de montrer que dans trois quarts du *qiandu*, *yangma* et *bienao* occupent l'espace dans un rapport de 2 à 1. Il poursuit de la façon suivante :

> « Si on veut aller jusqu'au bout avec les quantités, on place les valeurs de la longueur, de la largeur et de la hauteur de reste, on prend la moitié de chacune, et on peut alors à nouveau savoir (ce qu'il en est) dans ses $3/4$. Plus la division par 2 les diminue, plus ce qui reste est fin, on le dit infime ; infime, il n'a donc pas de forme. Considéré de ce point de vue, comment obtiendrait-on un reste ? ». (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)

Autrement dit, il considère dans ce paragraphe les deux *yangma* et les deux *bienao* constituant le quart restant. En les rassemblant par paires, on obtient deux nouveau *qiandus* pour lesquels on peut réitérer tout le raisonnement qui vient d'être fait. À chaque étape, on peut montrer que le rapport « 2 : 1 » d'occupation de l'espace dans le *qiandu* entre *yangma* et *bienao* est valable dans les trois quarts du nouveau solide envisagé. Autrement dit, il ne reste à la fin de chaque étape qu'à examiner le quart restant. Citons Guo Shuchun dans la présentation qu'il fait du raisonnement de Liu Hui :

> « La découpe peut être réitérée indéfiniment : la partie où l'on ignore encore la proportion des deux corps sera de plus en plus petite, successivement $1/4^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Or il est clair que :
>
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$$
>
> Par conséquent, la démonstration est achevée dans tout le *quiandu*. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 398)

Insertion des éléments d'histoire des mathématiques

Il était prévu que cette insertion se fasse selon deux modalités : tout d'abord pour la classe entière à l'occasion de la présentation de l'EPI, puis seulement pour certains groupes (ceux en avance ou ceux ayant le plus d'appétence) afin d'enrichir éventuellement leur prestation orale en présentant la schématisation d'un problème extrait du Classique ainsi que les calculs permettant de retrouver la réponse annoncée. Dans les faits, seul un groupe a eu le temps et l'envie de mener jusqu'au bout le travail selon cette seconde modalité. Nous vous présenterons dans la suite le problème sur lequel il a travaillé. Mais pour commencer, donnons les détails de la première modalité.

Lors de la présentation de l'EPI

La présentation en question est un moment crucial de l'EPI. Il s'agit d'emporter l'adhésion sinon l'enthousiasme de la classe au projet global et aux différentes

déclinaisons qui en sont proposées par groupes de 4 ou 5 élèves. Tout ce qui peut contribuer à le rendre plus attrayant est le bienvenu. À destination en particulier des moins motivés des élèves, nous commençons par montrer des casse-têtes, des puzzles géométriques, autant d'éléments ludiques permettant de retrouver (peut-être !) l'envie de s'investir. Puis avec de nouvelles diapositives nous glissons vers des notions de plus en plus géométriques en montrant notamment des exemples d'intervention de l'étude des solides dans d'autres domaines : cristallographie, architecture, histoire de l'art et histoire des mathématiques.

En ce qui concerne les éléments d'histoire des mathématiques, après une introduction rapide où j'indique que la figure qui va leur être présentée est une reconstitution moderne d'un raisonnement qui a été tenu il y a près de 2000 ans en Chine par un certain Liu Hui, j'ai fait le choix de montrer d'emblée aux élèves la figure 2 que j'ai longuement évoquée ci-dessus. Je pose alors la question : « À votre avis, quel était le but recherché par les mathématiciens chinois de cette époque ? ». La recherche du volume étant évoquée nous avons alors brossé un rapide historique du calcul du volume d'une pyramide, en nous basant essentiellement sur l'article (Grégoire, 1993) déjà mentionné. Nous avons par ailleurs développé l'épisode de la conférence de Hilbert de 1900 intitulée « Sur les problèmes futurs des mathématiques ». À l'occasion de cette conférence restée célèbre pour bien des raisons [8], Hilbert dressait une liste de 23 problèmes ouverts qui allaient selon lui marquer le siècle qui s'ouvrait. Citons les propos du mathématicien tels que rapportés par Étienne Ghys à travers la traduction de Léonce Laugel [9] :

> « Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs ? Dans ce champ si fécond et si vaste de la science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures ? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence ? » [10]

Il nous a semblé que ce discours empreint de lyrisme était de nature à donner à nos élèves une autre image des mathématiques, une image peut-être moins sèche que celle qu'ils ont. Mais revenons au volume de la pyramide. Parmi ces 23 problèmes, le troisième étudie la possibilité, étant donnés deux polyèdres d'égal volume, de découper le premier en un nombre fini de polyèdres et les rassembler pour former le second polyèdre. Cet énoncé est un des seuls de la liste compréhensible par un élève de collège (et même de lycée !), il serait dommage de ne pas en profiter pour l'évoquer. C'est en outre l'occasion de demander à la classe ce que serait l'analogue de cet énoncé dans le plan [11], et de l'étudier dans le cas de triangles

8. Pour en savoir plus, vous pouvez consulter le site « Images des mathématiques » à la page http://images.math.cnrs.fr/Les-problemes-de-Hilbert.html

9. LAUGEL Léonce, traducteur scientifique francophone (1855-1925), traducteur entre autres d'une grande partie des œuvres de Riemann.

10. cité dans (Ghys, 2010).

11. Quelques mois après cette conférence mémorable, Max Dehn, un élève de Hilbert, démontrera que la réponse à ce problème est négative. En revanche, elle est positive dans le plan.

par exemple. Bref une opportunité pour donner une image vivante et dynamique des mathématiques. Et rappelons qu'un des objectifs majeurs de cette première séance est d'emporter l'adhésion même des plus récalcitrants de nos élèves. Pour cet objectif, dans le cadre d'une simple présentation, je ne pense pas que la difficulté qu'on peut « voir » sur la figure 2 soit un obstacle à l'intérêt mais au contraire un levier, en ce que l'image, dans sa complexité, fascine et pique la curiosité : que signifie cette image ? Qu'y a-t-il derrière ? Évidemment, si on veut la faire parler jusqu'au bout, il y a fort à faire et c'est à chaque professeur, en fonction de sa classe qu'il revient de définir jusqu'où aller dans l'interprétation et le lien avec le problème général du calcul du volume d'une pyramide. Voici en substance ce que pour notre part nous avons été amenés à dire ou faire et qui peut être un exemple de version *a minima* du discours qui pourrait accompagner la présentation orale de cette figure. Nous avons d'abord guidé le regard, en suggérant d'observer telles ou telles choses : un des trois solides est la réunion des deux autres ; pouvez-vous préciser lequel ? Combien de solides différents interviennent dans ces différentes décompositions ? Faites-en la liste. Quel est le solide qu'on ne retrouve pas dans les trois décompositions ? Un solide est commun aux trois décompositions, lequel ? On peut aussi s'intéresser à chaque décomposition, indépendamment des autres. Ainsi, pour le *yangma*, certains blocs ont exactement la même forme que le *yangma* lui-même ; lesquels ? Retrouve-t-on un phénomène du même type pour le *bienao* ? Pour le *qiandu* ? Etc. Les élèves ainsi familiarisés avec cette figure, on peut alors indiquer l'objectif de Liu Hui : montrer que le *yangma* occupe deux fois plus de place dans le *qiandu* que le *bienao*. Avant de donner les grandes lignes du raisonnement, on peut demander d'expliquer le lien entre ce rapport « 2 : 1 » et la formule du volume d'une pyramide. Pour cela il me paraît préférable de se centrer sur le *yangma* en montrant que le rapport « 2 : 1 » se traduit en fraction par le fait que le *yangma* occupe deux tiers du *qiandu* qui lui-même occupe la moitié d'un pavé ayant même base et même hauteur que le *yangma*.

Pour le cœur du raisonnement de Liu Hui, j'ai en substance tenu le discours suivant : dans le grand *yangma* et le grand *bienao*, si on oublie momentanément les blocs semblables à l'échelle 1/2, le volume dans le *yangma* est le double de celui du *bienao*, pourquoi ? Liu Hui imagine alors qu'on pourrait alors rassembler deux à deux les deux petits *yangma* et *bienao* restants et recommencer la décomposition pour chacun des *qiandu* obtenus. On montre ainsi que le rapport « 2 : 1 » entre *yangma* et *bienao* est vérifié dans une partie de plus en plus grande du *qiandu* de départ. Et la partie dans laquelle on n'a pas encore vérifié est de plus en plus petite. Il m'a semblé que c'était le moment de communiquer aux élèves l'une des deux traductions que j'ai trouvées de la conclusion de Liu Hui :

> « Plus la division par 2 les diminue, plus ce qui reste est fin. L'extrême du fin on le dit infime ; infime, il n'a donc pas de forme. Considéré de ce point de vue, comment obtiendrait-on un reste ? [...] Cela n'implique pas de calculs avec les baguettes. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 433)
>
> « Les dimensions des morceaux restants sont de plus en plus petites. Ce qui a des dimensions extrêmement petites n'a plus de forme, pourquoi s'en inquiéter ? » (Grégoire, 1993, p. 69)

J'ai alors évoqué la notion de limite, en rapport avec la notion d'infini, en indiquant notamment aux élèves que c'était une notion essentielle en mathématiques et qu'ils la rencontreraient au lycée pour l'approfondir éventuellement dans l'enseignement supérieur.

Exploitation d'un problème du chapitre 5

De nombreux problèmes de ce chapitre « Discuter des travaux » peuvent se prêter à une utilisation en classe. Nous avons fait le choix de développer ici l'utilisation du problème 6, qui se présente en deux temps. En voici l'énoncé avec les réponses qui le suivent immédiatement, dans la traduction de Karine Chemla :

> « (5.6)
> Supposons qu'on ait une douve de 1 zhang 6 chi 3 cun de largeur supérieure, de 1 zhang de largeur inférieure, de 6 chi 3 cun de profondeur, et de 13 zhang 2 chi 1 cun de longueur. On demande combien vaut le volume.
> Réponse : 10 943 chi 8 cun.
> [...]
> En été, il est de règle qu'une personne travaille 871 chi. (Ici) cela comprend le travail de sortir la terre, qui en représente le 1/5, et le travail dû au gravier, à l'eau et aux pierres, qui fait les deux tiers de ceci. Le travail déterminé est donc de 232 chi 4/15 de chi. On demande combien cela requiert de forçats.
> Réponse : 47 personnes 409/3484 de personne. » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 417-418)

Nous avons en outre joint (voir figure 3) l'énoncé dans la graphie chinoise [12] puisque, rappelons-le, l'ouvrage de Karine Chemla et Guo Shuchun se présente sous la forme d'une édition bilingue avec à gauche le texte en chinois et à droite la traduction française. La présentation aux élèves des deux documents me paraît souhaitable pour des raisons qui débordent largement les mathématiques, et que nous ne développerons pas ici. Alors, pourquoi ce problème plutôt qu'un autre ? D'abord ce problème présente deux parties bien séparées mais complémentaires. Dans la première est évalué le volume d'une douve de dimensions données et dans la seconde est demandé le nombre de « forçats » nécessaire pour creuser cette douve. Ce problème illustre parfaitement, dans un autre contexte, l'aspect pratique des mathématiques de l'époque, en lien étroit avec la vie des hommes, en réponse à des besoins concrets. Ce problème présente aussi l'avantage pour le professeur non spécialiste d'être commenté dans la présentation que fait Guo Shuchun du chapitre 5, dans la dernière des trois parties de cette présentation intitulée « Les problèmes de répartition des travaux » (Chemla, Shuchun, 2005, p. 406). Enfin la forme « douve » étudiée dans ce problème avait été choisie par un des groupes d'élèves et la première partie du problème était parfaitement adaptée pour être exploitée par ce groupe. Nous en dirons un mot.

12. Merci à Danielle Bergeron pour le repérage du problème 6 dans le corps du texte et ses précieuses explications de base sur l'écriture chinoise.

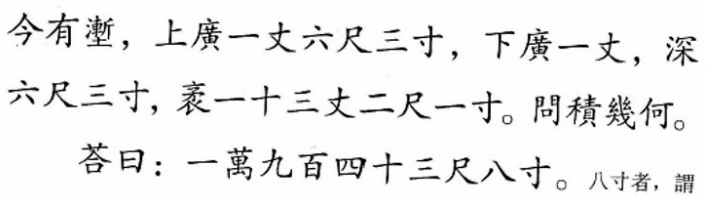
今有墮，上廣一丈六尺三寸，下廣一丈，深
六尺三寸，袤一十三丈二尺一寸。問積幾何。
荅曰：一萬九百四十三尺八寸。八寸者，謂

Figure 3 – L'énoncé du problème 6, en version originale (Chemla, Shuchun, 2005, p. 416)

En ce qui concerne l'exploitation pédagogique qui a été dévolue aux élèves, seule la première partie du problème a été effectivement travaillée et présentée lors du passage à l'oral par un groupe. Il avait été simplement demandé aux élèves de faire un schéma de la situation et de présenter les calculs permettant de vérifier la réponse donnée. La forme « douve » correspond en langage d'aujourd'hui à un prisme ayant pour base un trapèze isocèle. Pour le calcul de son volume, les élèves, au niveau du Collège, ne disposant pas de la formule de l'aire d'un trapèze, ont décomposé le trapèze en un rectangle et deux triangles rectangles. Nous leur avions en outre fourni le document suivant (voir figure 4) permettant de travailler avec les unités de l'époque et d'avoir une idée du résultat dans des unités d'aujourd'hui.

Pour décrypter les unités du texte
Lien entre les unités : 1 zhang = 10 chi = 100 cun.
Correspondance avec nos unités : un consensus entre historiens établit la valeur du chi aux alentours de 24 cm.

Figure 4 – Les unités utilisées dans le problème 6 (Chemla, Shuchun, 2005, page intérieure de couverture)

Le déroulement en classe et les productions des élèves

Présentation du dispositif EPI

Les objectifs officiels de ce dispositif mis en place lors de la réforme 2016 du collège sont donnés dans le décret n° 2015-544 du 19 mai 2015 relatif à l'organisation des enseignements au collège :

> « Les EPI s'adressent à tous les élèves du collège. Mobilisant au moins deux disciplines, ils permettent de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences inscrites dans les programmes d'enseignement. Ils s'appuient sur une démarche de projet et conduisent à une réalisation concrète, individuelle ou collective ».

Dans le cas qui nous occupe, mon collègue de technologie et moi-même avions décidé d'étaler le projet pour les élèves sur douze semaines, à raison de deux heures

par semaine, une en cours de technologie avec co-intervention avec le professeur de mathématiques et une en cours de mathématiques, cette heure étant assurée par le seul professeur de mathématiques. Ce choix fut essentiellement dicté par notre souhait d'initier de façon suffisamment solide les élèves au logiciel *SketchUp*, afin qu'ils puissent accéder à une autonomie qui leur permette d'en faire un assistant de création et d'exploration de puzzle 3D. La philosophie de ce logiciel est très différente d'un logiciel de géométrie type *Geogebra*, la classe a ainsi pu bénéficier de deux professeurs pour se familiariser avec les commandes de base. Les deux dernières semaines furent consacrées à des évaluations orales à raison d'environ quinze minutes par groupe, pour six groupes.

Le projet tel que présenté aux élèves

À l'issue d'une séance d'environ quarante minutes de présentation, des groupes ont été formés dans la classe puis la proposition décrite à travers les diapositives suivantes a été soumise aux élèves (voir figures 5, 6 et 7). Charge aux membres de chaque groupe de négocier pour choisir un des projets proposés.

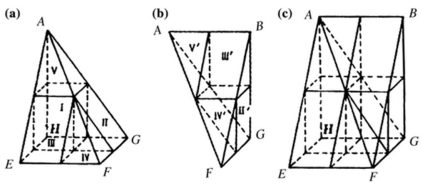

FIGURE 5 – Diapositive de dévolution 1

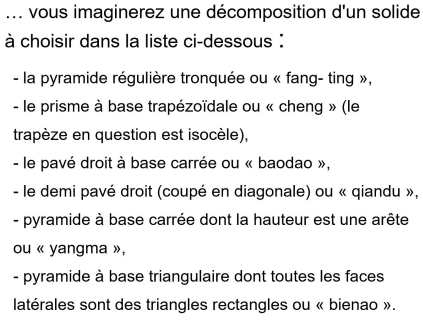

FIGURE 6 – Diapositive de dévolution 2

Précisons que l'expression « À la façon de Liu Hui » signifiait d'imaginer une décomposition non simpliste. Mon collègue de technologie et moi-même avions fait le choix d'un énoncé volontairement vague afin d'éviter les projets trop simples (uniquement des prismes par exemple). Le *fang-ting* et le *bienao* (voir figure 6) ont été choisis deux fois, les deux autres choix se sont portés sur le *yangma* et le *cheng*. Les différents groupes ont imaginé des maquettes numériques au format « .skp » du logiciel *SketchUp*. En particulier les outils « Déplacer » et « Orbite » permettent de visualiser l'assemblage et le démontage du puzzle de façon dynamique. Pour en donner une idée, la figure 8 ci-dessous présente 3 captures d'écran de l'animation de la production d'un des groupes ayant choisi le *bienao*.

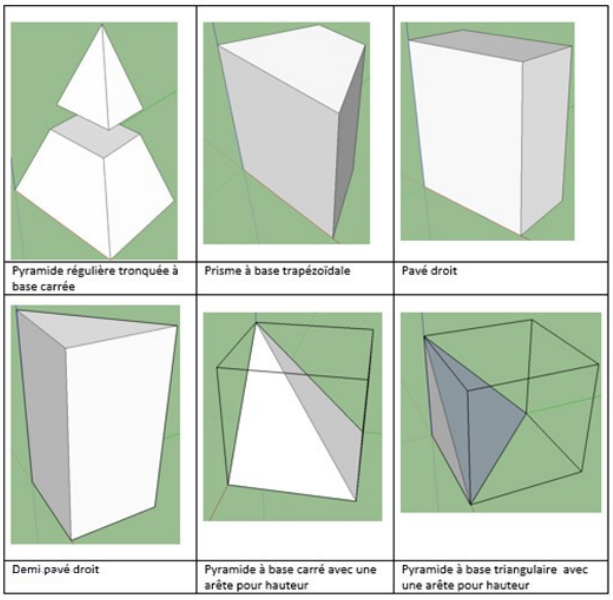

FIGURE 7 – Diapositive de dévolution 3

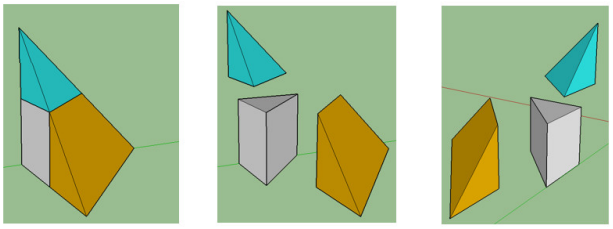

FIGURE 8 – Un exemple de puzzle imaginé

Outre des maquettes numériques, qui étaient ensuite exploitées pour fabriquer des prototypes à l'aide d'une imprimante 3D (partie spécifiquement technologique), il était demandé aux élèves de construire en papier bristol au-moins un puzzle complet par groupe. Dans certains groupes tous les élèves ont réussi à faire leur propre puzzle.

Intérêt d'une telle démarche

D'abord remarquons que pour lancer l'EPI, la figure 2 déjà évoquée occupe une place centrale. Centrale en ce qu'elle donne à voir d'un seul coup d'œil ce qui sera attendu des élèves pour réaliser leur projet. Centrale aussi du point de vue historico-didactique dans la reconstitution de la démarche de Liu Hui pour établir le volume d'une pyramide. Pour que l'élève puisse aussi goûter cet aspect, il est bien entendu indispensable que le professeur s'en fasse le médiateur, nous avons

donné plus haut un exemple de ce que pourrait être une telle médiation. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Jean-Paul Mercier déjà mentionné pour une alternative (Mercier, 2012, p. 95-97). Mais dans tous les cas, il nous semble que donner les grandes lignes du raisonnement, en mettant bien en avant l'irruption de l'infini pour conclure, est l'occasion d'évoquer la notion de limite qui sera étudiée au lycée par de nombreux élèves. C'est donc une occasion de mettre du sens et des perspectives dans ce que l'élève est en train d'apprendre. Enfin, la conjugaison des deux facteurs, c'est-à-dire le fait de « voir » un puzzle déjà fait sur la figure 2 avec le fait de savoir que ce puzzle a une utilité pratique profonde du point de vue mathématique donne peut-être dans l'esprit de certains un surcroît de noblesse au travail qui va devoir être accompli par la suite pour réaliser leurs projets.

Les éléments historiques évoqués précédemment, et de nombreux autres problèmes du chapitre 5 de l'ouvrage présentent aussi un double intérêt didactique : ils permettent de travailler la notion de généralisation et celle de modélisation. Par exemple, un *yangma* dont la hauteur et le côté de la base sont de même longueur permet avec deux autres exemplaires de reconstituer un cube. Il est tentant de penser qu'on doit pouvoir reconstituer un pavé droit avec trois exemplaires d'un *yangma* dont la hauteur et le côté de la base ne seraient plus de la même longueur. La manipulation montre que ça ne marche pas. Sur la notion de modélisation, les énoncés des problèmes étant donnés sans figures, il est nécessaire pour leur donner du sens (voir problème 5.6 ci-dessus) de leur associer une figure sur laquelle on pourra porter les dimensions indiquées.

Enfin évoquer des éléments historiques de la Chine ancienne en mathématiques permet à la fois une ouverture culturelle et assure la transversalité des enseignements. L'ouverture culturelle peut être déclinée de bien des façons. Dans notre cas nous avons choisi d'évoquer (étant engagé depuis deux ans dans un travail auprès d'allophones) l'aspect linguistique, c'est la raison pour laquelle nous avons tenu à faire apparaître un extrait original en chinois. La transversalité avec l'histoire coïncide par ailleurs de façon heureuse avec l'introduction récente dans les programmes officiels du collège d'éléments sur la Chine des Han dans un paragraphe intitulé « Regards sur les mondes lointains : Chine et Inde ».

Conclusion

L'insertion d'éléments d'histoire des mathématiques dans cet EPI a pour première vertu, selon moi, de donner aux élèves une autre image des mathématiques, à la fois plus profonde que celle qui leur est présentée habituellement, et plus proche aussi des préoccupations des hommes. Une modification qui peut se faire de plusieurs façons : d'abord, le côté concret des énoncés (évaluer un volume de terre ou le nombre de personnes pour creuser par exemple) peut contribuer à rendre plus aimable la discipline parce que répondant à des problèmes eux-mêmes facilement compréhensibles et concrets pour les élèves. On peut aussi évoquer la profondeur du raisonnement mis en scène par Liu Hui (voir figure 2) qui peut chez certains provoquer ce petit déclic qui fait naître les vocations. Enfin, les mathématiques qui sont présentées ici, par exemple ce qui a trait à l'Histoire du calcul du volume de

la pyramide, permettent de donner une image qui est tout sauf figée, une image où les vérités s'établissent petit à petit, où les énoncés se précisent petit à petit, bref une image qui les rendent plus humaines. Enfin, au-delà des mathématiques proprement dites, c'est le sens même des apprentissages qui peut être renforcé grâce à un tel projet. Je peux témoigner ici que tous les élèves, quel que soit leur niveau, se sont investis dans cet EPI, et ont même montré pour certains une motivation et une opiniâtreté que j'avais rarement vue. La complexité, loin d'être un handicap, s'est révélée pour certains groupes un levier de motivation.

Pour terminer, éloignons-nous un peu des élèves. Je ne le cache pas, le professeur intéressé par l'épistémologie qui sommeillait en moi a été définitivement séduit par cette phrase : « Les dimensions des morceaux restants sont de plus en plus petites. Ce qui a des dimensions extrêmement petites n'a plus de forme, pourquoi s'en inquiéter ? » (Grégoire, 1993, p. 69) Le côté elliptique de la fin, s'il s'éloigne peut-être un peu de la traduction au plus près du texte original, a enveloppé ces mathématiques d'un tel halo de mystère et d'exotisme que j'ai voulu en savoir davantage, que j'ai voulu me forger ma propre opinion sur la question que je me posai alors : le raisonnement tenu par Liu Hui est-il rigoureux ou suis-je simplement charmé par la formulation au parfum un peu taoïste ? Après avoir travaillé et retravaillé le sujet, ma conviction est que le raisonnement de Liu Hui est parfaitement rigoureux.

Références bibliographiques

Chemla Karine et Shuchun Guo, 2005, *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris, Dunod.

Deledicq André, 2013, *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne, extraits du neuvième chapitre*, Paris, ACL-les Editions du Kangourou.

Ghys Étienne, 2010, *Les problèmes de Hilbert*, sur le site « Images des mathématiques », à la page http://images.math.cnrs.fr/Les-problemes-de-Hilbert.html, consultée le 22/10/2019.

Grégoire Michèle, 1993, « Comment mesurer la pyramide ? », *in* Commission Inter IREM, *Histoire de problèmes, Histoire des mathématiques*, p. 59-86, Paris, Ellipses.

Kinnosuke Ogura,1935, « L'aspect social des mathématiques chinoises : la société des Qin et des Han vue à travers les Neuf chapitres sur l'art mathématique » (en japonais), *Sugakushi kenkyu*, Iwananmi shoten, Tokyo, vol. 1, p. 189-207

Mercier Jean-Paul, 2012, « Le volume de la pyramide chez Euclide, Liu Hui, Cavalieri et Legendre » *in* Barbin Evelyne (dir.) *Les mathématiques éclairées par l'histoire, des arpenteurs aux ingénieurs*, Vuibert-ADAPT-SNES, p. 91-112

Yabuuti Kiyosi, 2000, *Une histoire des mathématiques chinoises*, Paris, Belin-Pour la science.