3

Rectangulation & quadrature des figures

Jean-Paul Guichard

Introduction

Construire un rectangle ou un carré d'aire égale à celle d'une ou plusieurs figures données est un champ de problèmes qui parcourt l'histoire des mathématiques et des civilisations : Inde, Chine, Grèce antique, Monde arabe, Europe de la Renaissance, et jusqu'au XX^{e} siècle. On y retrouve des problèmes ou théorèmes célèbres comme la quadrature du cercle ou le théorème de « Pythagore », et des méthodes aussi différentes que la construction à la règle et au compas (ou avec une corde) ou le découpage. Ce champ de problèmes permet de comprendre comment les hommes ont pu trouver diverses formules exactes ou approchées pour calculer l'aire de figures simples, comment avec plusieurs carrés égaux ils ont réalisé un seul carré de même aire, comment ils ont trouvé le théorème de « Pythagore ».

La plupart des problèmes que nous étudierons permettent de montrer qu'une partie de la géométrie et du calcul, des cycles 3 et 4, peut s'apprendre à partir de ces problèmes de construction et d'aire. Certains de ces problèmes peuvent également fournir de bonnes situations d'étude pour les programmes de lycée. C'est un champ de problèmes qui donne du sens aux mathématiques enseignées et aux apprentissages scolaires : calcul des aires, calcul algébrique, programmes de construction, raisonnement et souci de justification.

L'Inde védique (1500-500 av. J.-C.) : Les *Sulbasutras* de Baudhayana

Les *Sulbasutras* de Baudhayana sont les plus anciens textes mathématiques de l'Inde. Ils sont écrits en sanskrit, sans aucune figure, et constituent la partie des *Sutras* consacrée aux règles de construction des autels sacrificiels. C'est donc

le rituel védique qui justifie l'existence de ces mathématiques ainsi que le type de problèmes à résoudre et la façon de les résoudre. Pour construire ces autels de forme simple (cercle, carré, rectangle, losange) ou composée de formes simples (faucon), le sacrificateur utilisait une corde (sulba) et des piquets ; il était un tendeur de corde (sulbaka). Si tracer un cercle, un triangle isocèle, un losange avec une corde et des piquets est simple en pliant la corde en parties égales, par contre tracer un carré n'est pas évident. D'autre part le passage du mythe au rite imposait au sulbaka de savoir transformer un autel de forme donnée, par exemple circulaire, en un autel de même aire ayant une autre forme, par exemple carrée. Il se trouvait donc confronté au problème de la quadrature du cercle, et plus généralement à des problèmes de quadrature, dont il se servait aussi pour réaliser des agrandissements d'autels selon des règles prescrites, comme celui en forme de faucon. De plus, tous les autels devaient être engendrés à partir du carré de un purusa de côté (hauteur du sacrificateur les bras levés). On voit donc que la construction du carré, et les problèmes de quadrature sont au cœur des mathématiques indiennes. Il n'est alors pas étonnant que le premier problème de construction abordé soit celui de la construction du carré. Tous les textes des *Sulbasutras* cités proviennent de l'article d'Olivier Keller (Keller, 2000). On trouvera des approfondissements dans l'ouvrage *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (Barbin, 2014).

La construction du carré

> « Si l'on veut un carré, une méthode est de prendre une corde de longueur égale au carré donné [c'est-à-dire à son côté], faire des nœuds aux deux extrémités et une marque en son milieu. On trace la ligne [Ouest-Est] et on plante un piquet en son milieu. On fixe les deux nœuds au piquet et on trace un cercle avec la marque. Deux piquets sont plantés aux deux extrémités du diamètre.

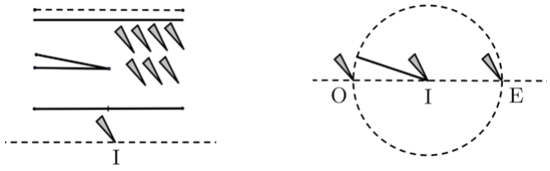


FIGURE 1 – Instruments & mise en place de la construction du carré

> Un nœud étant fixé à l'Est, on trace un cercle avec l'autre ; la même chose à l'Ouest. Le second diamètre est obtenu des points d'intersection de ces deux ; on plante deux piquets aux deux extrémités du diamètre.
>
> Avec deux nœuds fixés à l'Est, on trace un cercle avec la marque ; on fait la même chose au Sud, à l'Ouest et au Nord. Les points d'intersection donnent le carré. »

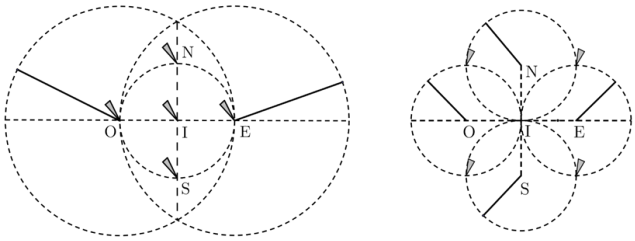


Figure 2 – Construction du carré avec une corde

Comme nous l'avons déjà dit, il n'y a pas de figures dans le texte. Ces figurations ont été ajoutées pour en faciliter la compréhension. Tracer les cercles et les diamètres peut se faire à la règle et au compas, mais il faut remarquer que le côté du carré étant donné au départ, en obtenir la moitié, ou le milieu, est plus facile à faire en pliant la ficelle en deux qu'en utilisant règle et compas. Une bonne occasion de se poser le problème et de le résoudre.

La construction qui suit immédiatement celle que nous venons de voir donne un autre moyen de construire le carré, en montrant comment tracer un angle droit. Elle est basée sur ce que nous appelons la réciproque du théorème de Pythagore. Le sulbaka doit prendre une corde double du côté du carré, faire deux nœuds à chaque extrémité et faire trois marques, par trois pliages en deux : en son milieu, au milieu M de la deuxième moitié, et enfin au milieu N du deuxième quart, marque nommée nyancana.

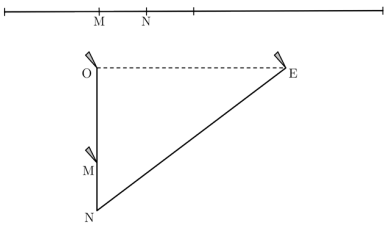


Figure 3 – Construction de l'angle droit avec une corde

La quadrature du cercle

Plusieurs méthodes sont données. En voici une.

« Pour transformer un cercle en carré, diviser le diamètre en quinze parties et le réduire de deux d'entre elles ; cela donne le côté approché du carré. »

Pour diviser la corde en 15 parties égales, on peut la diviser en 5, puis diviser un cinquième de la corde en 3 parties égales. On aborde ainsi le problème du partage des longueurs et de sa réalisation pratique, qui dépend des instruments utilisés :

pour partager le diamètre en 15 parties égales sur la feuille de papier, on peut, dès le primaire, utiliser un guide âne, outil simple et évident, mais justifier son usage relève de connaissances vues en cycle 4. Ensuite en ne tenant pas compte de 2 de ces parties, la longueur de la corde (ou le compas) permet de tracer le côté du carré, en utilisant la méthode de son choix.

On sait, depuis le XIX^{e} siècle, que la construction d'un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné est impossible à la règle et au compas, donc aussi à la corde. D'où le sens de l'expression : c'est la quadrature du cercle. Mais l'énoncé du sutra précise bien que la construction proposée ne donne qu'une valeur approchée du côté. On peut comparer, par diverses manipulations, l'aire de la partie de cercle qui dépasse du carré et celle du carré qui dépasse du cercle, et se rendre compte que l'aire du carré construit est un peu plus petite que celle du cercle donné. La formule usuelle qui donne l'aire du cercle permet d'évaluer la différence des aires des deux figures : elle est de moins de 5%. Se poser la question de la nécessité ou non de constructions exactes, de la précision de constructions approchées, voilà aussi des enjeux intéressants de l'étude de ce type de situations.

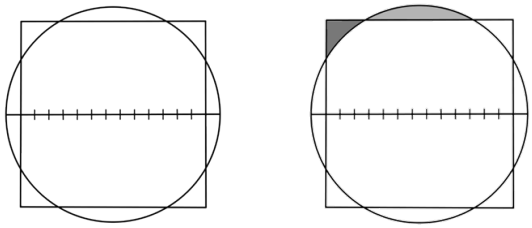


FIGURE 4 – Quadrature du cercle avec une corde

Agrandir l'autel en forme de faucon

L'autel en forme de faucon est formé de sept carrés unités (carrés de 1 purusa de côté), et de trois rectangles dont la somme des aires est la moitié de celle du carré unité. Le sulbaka doit agrandir l'autel d'un carré unité à chaque étape, jusqu'à réaliser un autel en forme de faucon d'aire demandée : on trouve des exemples avec 21,5 unités, et même 101,5 unités. La première étape est de passer de 7,5 unités à 8,5 unités.

Voici la démarche.

1. Construire un carré de même aire que l'autel : pour cela il faut savoir construire un carré de même aire que celle d'un rectangle.
2. Construire un carré d'une unité.
3. Construire un carré d'aire la somme des aires des deux carrés.
4. On partage le carré en 15 parts rectangulaires égales.
5. On construit un carré de même aire que celle d'un rectangle formé de 2 de ces rectangles.
6. Le côté de ce carré sert de nouvelle unité pour construire le nouvel autel.

7. On recommence jusqu'à ajouter le nombre d'unités prescrites.

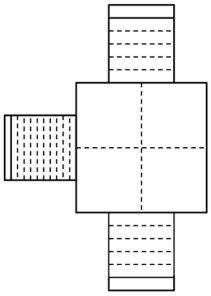


FIGURE 5 – L'autel en forme de faucon

Donc pour pouvoir agrandir l'autel d'une unité, il faut, pour la première étape, savoir faire la quadrature d'un rectangle (2 fois), et faire la quadrature d'une « somme » de deux carrés. Puis il suffit d'enchainer la quadrature d'une « somme » de deux carrés, le partage du carré obtenu en 15 rectangles égaux, et la quadrature d'un rectangle formé de 2 rectangles.

Comment réaliser ces deux quadratures ?

La quadrature d'une « somme » de carrés

Plusieurs cas sont traités dans les *Sulbasutras*. En effet on pouvait vouloir faire la quadrature de plusieurs carrés égaux, comme les carrés de un purusa dans l'autel en forme de faucon, puis de deux carrés d'aires différentes, et ainsi de proche en proche réaliser la quadrature d'un ensemble de carrés.

Pour deux carrés égaux : « La diagonale du carré produit le double de l'aire »

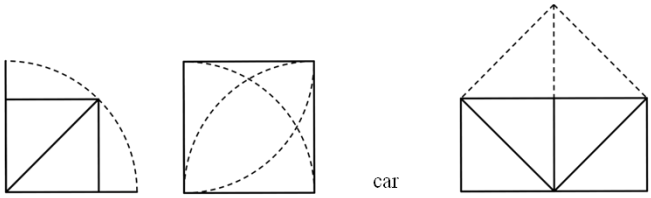


FIGURE 6 – Construction du carré d'aire double avec une corde

Pour trois carrés égaux : « La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré double, la diagonale est le côté du carré triple »

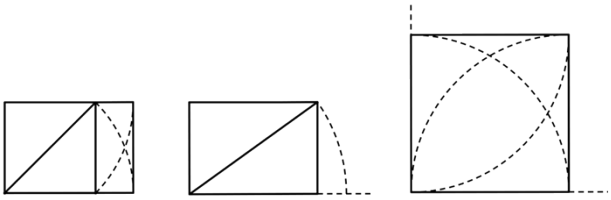


FIGURE 7 – Construction du carré d'aire triple avec une corde

Ces deux constructions sont faciles à réaliser avec une corde à partir d'un carré déjà construit, comme le suggèrent les représentations proposées.

Pour n carrés égaux : on pourrait poursuivre la voie précédente, mais on multiplie alors les manipulations. On trouve dans les *Sulbasutras* de Katyayana une construction bien plus facile.

« Le côté transversal [c'est-à-dire la base du triangle] doit mesurer un de moins que le nombre de carrés à combiner en un carré ; les deux [autres] côtés doivent mesurer un de plus que cela. On forme un triangle [isocèle] ; l'altitude le produit [le côté du carré] ».

En voici une illustration pour 7 carrés.

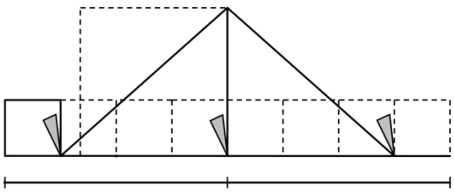


FIGURE 8 – Quadrature de 7 carrés égaux avec une corde

Théorème de Pythagore et calcul algébrique permettent de justifier cette construction : une bonne situation à proposer aux élèves pour faire utiliser les identités remarquables, mais aussi pour réaliser la construction ou une animation avec des outils informatiques.

Pour deux carrés inégaux : « Si l'on souhaite combiner deux carrés de mesures différentes : couper une partie du plus grand avec le côté du plus petit. La diagonale de la partie coupée est le côté du carré combiné ».

Ce sutra est souvent désigné comme le sutra de la diagonale. Il correspond à ce que nous appelons le théorème de Pythagore. Mais nous voyons bien ici que c'est un problème de quadrature d'aires et non de calcul de longueurs qui le motive. Voilà le sulbaka en possession d'une technique très simple à mettre en œuvre avec une corde pour réaliser la quadrature de la « somme » de deux carrés.

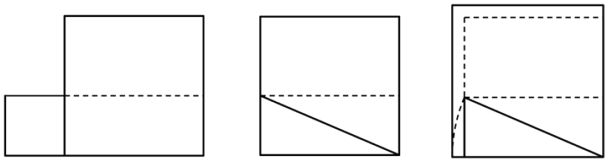


FIGURE 9 – « Théorème de Pythagore » avec une corde

La quadrature du rectangle

« Si l'on souhaite transformer un rectangle en carré, prendre sa largeur comme côté d'un carré ; le reste est divisé en deux parties égales et placé sur deux côtés. La place vide est remplie avec un morceau ; l'enlèvement de ce morceau a déjà été établi. » La première étape consiste à transformer le rectangle en une figure

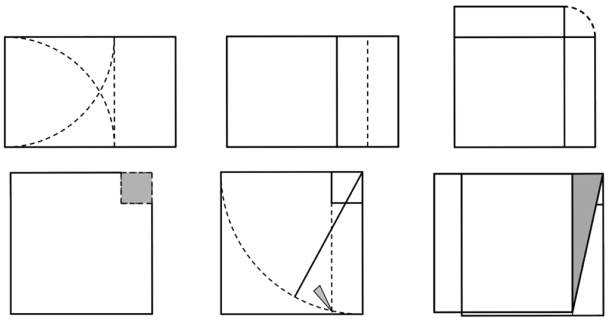


FIGURE 10 – Quadrature du rectangle avec une corde

d'aire égale ayant la forme d'une équerre, le gnomon des Grecs : un carré auquel il manque un carré. Il s'agit alors de construire un carré dont l'aire est la différence de celles de deux carrés. C'est le sutra de la diagonale qui fournit la solution, mais énoncé sous la forme suivante dans le sutra qui le suit : « Si l'on souhaite enlever un carré d'un autre : couper une partie du grand avec le côté du petit que l'on veut enlever. Le côté de la partie coupée est placé en travers de façon à toucher le côté opposé ; par ce contact, c'est coupé. Avec ce qui est coupé la différence est obtenue. »

On peut remarquer que toutes les constructions données sont exactes, mais ne sont pas justifiées. D'une part, la forme même des *Sulbasutras* y incite : c'est un recueil de prescriptions à suivre par le sulbaka qui doit connaitre toutes les constructions, choisir celles dont il a besoin, voire en enchaîner plusieurs, avec une certaine marge de liberté au niveau des stratégies à mettre en œuvre. D'autre part, ces traités sont la mise par écrit tardive de traditions orales, sous une forme versifiée facilitant ainsi leur mémorisation. On trouve dans ces écrits des références aux anciens maîtres. Il est fort probable que les maîtres connaissaient et enseignaient

des preuves de la validité de toutes ces constructions qui ne sont certainement pas le fruit du hasard (Keller, 2006, p. 153-168). Nous retrouverons les preuves de ces constructions dans un tout autre contexte et dans une autre civilisation. Mais toutes ces constructions, parfois surprenantes, sont une incitation à la recherche de preuves par les élèves, et donc à un travail sur la démonstration dans un contexte qui la motive.

La Chine ancienne (II^{e} siècle av. J.-C.) : Les *Neuf Chapitres* de Liu Hui

Les *Neuf Chapitres sur l'art mathématique* est le plus vieux texte des mathématiques chinoises. Nous nous intéresserons au chapitre 1 qui traite du calcul des aires, et dont le titre, *Champs rectangulaires*, nous donne la clé du calcul des aires : transformer la figure dont on cherche à calculer l'aire en un rectangle de même aire. C'est ce que nous appelons la rectangulation des figures, par analogie avec la quadrature des figures dont nous venons de voir des exemples en Inde ancienne.

Le chapitre est constitué d'une suite de problèmes, accompagné chacun de la réponse à la question posée. Ce n'est qu'après quelques exemples du même type qu'est donnée la méthode conduisant à la solution sous forme d'une procédure. Cette présentation du calcul d'aire se prête bien à un travail sur l'algorithmique et la programmation, tant au collège qu'au lycée, avec les nouveaux programmes. Travailler sur la rectangulation des figures nous semble être une des premières compétences à acquérir au cycle 3 à propos des aires, et à pratiquer ensuite pour établir et donner sens aux formules de calcul sur les aires. On en trouvera une mise en œuvre en 6^{e} dans la brochure *Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs en sixième : les Aires* (IREM Poitiers, 2009), et en CM dans la brochure *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter* (IREM Poitiers, 2019). Voici le plan du chapitre et quelques problèmes qui en sont extraits dans la traduction de Karine Chemla (Chemla, 2005).

Chapitre 1 : Champs rectangulaires
— 1 à 24 : champ rectangulaire
— 25-26 : champ triangulaire
— 27-28 : champ oblique
— 29-30 : champ trapézoïdal
— 31-32 : champ circulaire

1. 25 « Supposons qu'on ait un champ triangulaire de 12 bu de largeur et de 21 bu de hauteur (longueur droite). On demande combien fait le champ.
Réponse : 126 bu. »

1. 26 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ triangulaire de 5 bu 1/2 bu de largeur et de 8 bu 2/3 de bu de hauteur (longueur). On demande combien fait le champ.
Réponse : 23 bu 5/6 de bu.
Procédure : on prend la moitié de la largeur et on en multiplie la hauteur.

Si l'on prend la moitié de la largeur, c'est qu'avec ce qui est en excédent, on comble ce qui est vide, pour faire un champ rectangulaire. On peut aussi prendre la moitié de la hauteur et en multiplier la largeur.

Commentaire : si la moitié de la largeur multiplie la hauteur, c'est pour prendre la moyenne, et, par conséquent, la largeur et la hauteur étant multipliées l'une par l'autre, cela fait les bu du produit. Le diviseur des mu divise ceci, ce qui donne le résultat.

Remarque : 1 mu = 240 bu, donc quand l'aire dépasse 240 bu, on divise le nombre de bu par 240. »

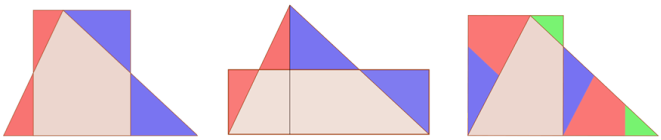


FIGURE 11 – Rectangulation du triangle par découpage

Les explications de la procédure suggèrent les découpages mis en illustration : les deux premiers sont classiques. Le troisième, comme le deuxième, utilisent directement le milieu de la base ou de la hauteur, et l'une des deux moitiés obtenues pour obtenir le rectangle de même aire que le triangle. Perpendiculaire, milieux et symétrie centrale en sont les outils clés, mais aussi droite des milieux, triangles superposables (égaux ou isométriques), translation, alignements pour élaborer des justifications (voir, en annexe, l'étude d'une situation en cycle 4, à paraitre dans la brochure *Enseigner les mathématiques en cycle 4 à partir des grandeurs : les Aires*).

Dans le cas où la hauteur est extérieure au triangle, on peut être amené à adapter les découpages. Voici deux solutions. Construire ces découpages à la règle

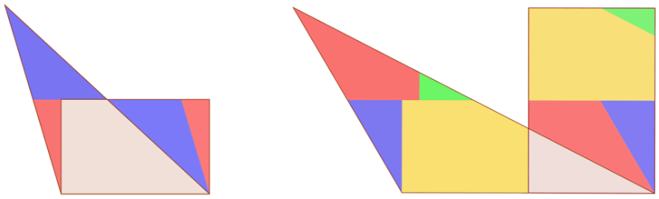


FIGURE 12 – Découpages pour d'autres configurations

et au compas ou avec un logiciel de géométrie, les justifier, vérifier leur domaine de validité, écrire des programmes de construction, autant de compétences que les programmes demandent de développer chez nos élèves du cycle 3 au lycée.

Les problèmes suivants concernent l'aire du trapèze. Les deux premiers portent sur un cas particulier : le champ oblique qui est un rectangle tronqué (un trapèze rectangle), facile à découper pour obtenir un rectangle en utilisant la technique

mise en œuvre pour le triangle. La procédure donnée dans le deuxième problème suggère deux découpages. Pour le trapèze, la procédure donne un découpage en deux trapèzes rectangles pour justifier l'identité des procédures dans les deux cas.

1. 27 « Supposons qu'on ait un champ oblique de 30 bu de largeur à une extrémité, de 42 bu de largeur à l'autre extrémité, et de 64 bu de hauteur (longueur droite). On demande combien fait le champ.

Réponse : 9 mu 144 bu. »

1. 28 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ oblique de 65 bu de hauteur (largeur droite), de 100 bu de longueur d'un côté, et de 72 bu de longueur de l'autre côté. On demande combien fait le champ.

Réponse : 23 mu 70 bu.

Procédure : on somme les deux inégaux, on prend la moitié de ceci, et on en multiplie la longueur ou la largeur droite. Autrement, on peut prendre la moitié de la longueur ou de la largeur droite, et en multiplier la somme. On divise par le diviseur des mu. »

1. 29 « Supposons qu'on ait un champ trapézoïdal dont la langue vaut 20 bu de largeur, le talon 5 bu de largeur, et la hauteur (longueur droite) 30 bu. On demande combien fait le champ.

Réponse : 1 mu 135 bu. »

1. 30 « Supposons à nouveau qu'on ait un champ trapézoïdal dont la langue vaut 117 bu de largeur, le talon 50 bu de largeur, et la hauteur (longueur droite) 135 bu. On demande combien fait le champ.

Réponse : 46 mu 232 bu et demi.

Procédure : on somme talon et langue, on prend la moitié de ceci, et on en multiplie la longueur droite. On divise par le diviseur des mu. Si l'on coupe en son milieu le champ trapézoïdal, alors cela fait deux champs obliques, c'est pourquoi leurs procédures sont semblables l'une à l'autre. Autrement, on peut sommer talon et langue, prendre la moitié de la longueur droite et en multiplier ceci. »

On voit ainsi comment des problèmes de calcul d'aire peuvent mettre en interaction algorithmique, géométrie et calcul, et en suivant cette voie donner sens aux algorithmes de calcul d'aires trop souvent réduits à des formules à appliquer, fournies sans démonstration.

Alexandrie (III^{e} siècle av. J.-C.) : Les *Éléments* d'Euclide

Cette idée de trouver pour une figure donnée un rectangle de même aire, clé essentielle pour le calcul des aires, nous la retrouvons chez Euclide : dans un contexte plus théorique que pratique, et sous forme plus générale. C'est la proposition 45 du livre I des *Éléments* « Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1990, p. 277).

La figure de référence est le parallélogramme, et la « rectangulation » donnée

est valable pour toute figure polygonale. Voici les figures supports de la démonstration :

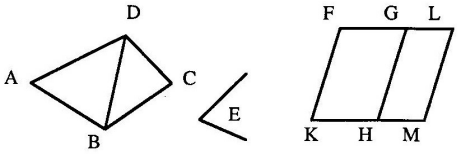


FIGURE 13 – Proposition I. 45

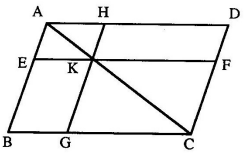


FIGURE 14 – Proposition I. 43

La « rectangulation » d'un polygone

Euclide commence par trianguler le polygone. Puis pour le premier triangle, il construit un parallélogramme d'angle donné et de même aire, problème traité dans la proposition 42. Pour le triangle suivant, il fait de même, puis transforme le parallélogramme obtenu en un parallélogramme de même aire, de même angle et de côté égal à celui du premier parallélogramme, problème traité dans la proposition 44. Euclide obtient ainsi un seul parallélogramme, d'angle donné, et d'aire égale à celle de la figure formée par les deux premiers triangles, comme le montre la figure de la proposition 45. La construction de la proposition 44 repose sur la propriété établie dans la proposition 43 (aire de $BGKE$ = aire de $DFKH$, voir figure 14), propriété que l'on retrouve souvent en exercice dans les manuels des classes de 4e, mais sans savoir à quoi peut bien servir cette propriété. On voit par là que l'étude du problème de la « rectangulation » donne du sens à des savoirs souvent rencontrés hors de tout contexte.

La « rectangulation » d'un triangle

Examinons dans le détail la proposition 42 pour mesurer les analogies et les différences entre la méthode d'Euclide et celle des Chinois (Euclide, 1990, p. 270).

> « *Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné.*
>
> Soit, d'une part ABC, le triangle donné, d'autre part D l'angle rectiligne donné. Il faut alors construire un parallélogramme égal au triangle ABC dans l'angle rectiligne D.
>
> Que BC soit coupée en deux parties égales au point E (Proposition 10), et que AE soit jointe (Demande 1) ; et que, sur la droite EC et au point E qui est sur elle, soit construit l'angle sous CEF égal à l'angle D (Proposition 23). Et que, par le point A d'une part AH soit menée parallèle à EC, par le point C d'autre part CH soit menée parallèle à EF (Proposition 31). $FECH$ est donc un parallélogramme. Et puisque BE est égale à EC, le triangle ABE est aussi égal au triangle AEC, car ils sont sur des bases égales : BE, EC et dans les mêmes parallèles : BC, AH (Proposition 38).

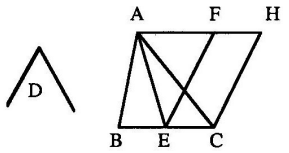


FIGURE 15 – Proposition I. 42

> Donc le triangle ABC est double du triangle AEC. Et le parallélogramme $FECH$ est aussi double du triangle AEC car il a la même base que lui et il est dans les mêmes parallèles (Proposition 41). Donc le parallélogramme $FECH$ est égal au triangle ABC (Notion commune 1). Et il a l'angle sous CEF égal à l'angle donné D.
>
> Donc le parallélogramme $FECH$ a été construit égal au triangle donné ABC dans l'angle CEF, qui est égal à D. Ce qu'il fallait faire. »

L'étude de cette proposition montre l'essence de la démarche d'Euclide : toute construction est justifiée par référence aux axiomes de départ (demandes et notions communes) et aux autres propositions précédemment démontrées.

En prenant l'angle droit pour angle du parallélogramme, on peut alors facilement trouver les formules classiques donnant l'aire des figures usuelles : triangle, parallélogramme, trapèze... Pour le triangle on retrouve alors la première procédure chinoise.

La quadrature d'un polygone

Si la « rectangulation » d'un polygone termine quasiment le livre I des *Éléments*, sa quadrature termine le livre II. Euclide reprend la proposition 45, suppose construit le rectangle de même aire que le polygone, et cherche à construire le carré de même aire. Le problème est donc ramené à la quadrature d'un rectangle, problème que nous avons vu résolu chez les Indiens. Voici comment Euclide le résout. C'est la proposition 14 du livre II (Euclide, 1990, p. 361).

> « *Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.*

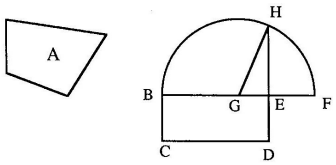


FIGURE 16 – Proposition II. 14

> Soit A la figure rectiligne donnée. Il faut alors construire un carré égal à la figure rectiligne A.

En effet, que soit construit BD[1] parallélogramme rectangle égal à la figure rectiligne A (Proposition I. 45).

Si effectivement BE est égale à ED, ce qui était prescrit aura été fait : car le carré BD a été construit égal à la figure rectiligne A.

Sinon, l'une des droites BE, ED est plus grande. Que ce soit BE la plus grande et qu'elle soit prolongée vers F, et que soit placée EF, égale à ED.

Que BF soit coupée en deux parties égales en G, et que du centre G avec l'un des GB, GF comme intervalle, soit décrit le demi-cercle BHF ; et que DE soit prolongée jusqu'en H ; et que GH soit jointe.

Or puisque la droite BF a été coupée d'une part en segments égaux en G, d'autre part en segments inégaux en E, le rectangle contenu par BE, EF, pris avec le carré sur EG, est donc égal au carré sur GF (Proposition II. 5). Or GF est égale à GH (Définition I. 15). Donc le rectangle contenu par BE, EF, pris avec le carré sur GE, est égal au carré sur GH. Or les carrés sur HE, EG sont égaux à celui sur GH (Proposition I. 47). Donc le rectangle contenu par BE, EF pris avec le carré sur GE est égal à ceux sur HE, EG (Notion commune 1).

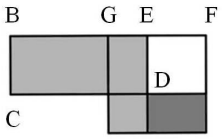


Figure 17 – Proposition II. 5

Que le carré sur GE soit retranché de part et d'autre : ce qui reste, le rectangle contenu par BE, EF est donc égal au carré sur EH (Notion commune 3). Mais le rectangle contenu par BE, EF est BD, car EF est égale à ED. Donc le parallélogramme BD est égal au carré sur HE. Or BD est égal à la figure rectiligne A. Et donc la figure rectiligne A est égale au carré qui sera décrit sur EH.

Donc un carré, égal à la figure rectiligne donnée A, a été construit : celui qui sera décrit sur EH. Ce qu'il fallait faire. »

Si la démonstration est loin d'être facile, la construction elle-même est très simple à exécuter et aura un grand avenir que ce soit pour réaliser la quadrature d'un rectangle comme nous le verrons avec Dürer, que pour construire géométriquement une racine carrée comme on le trouve dans la *Géométrie* de Descartes (1637).

1. Le parallélogramme est nommé par sa diagonale.

La quadrature d'une « somme » de carrés

Si dans sa démonstration de la quadrature du rectangle, Euclide utilise notre fameux théorème de Pythagore, ce théorème n'intervient pas dans la construction du carré, contrairement à ce que nous avons vu pour la construction des Indiens. Mais il s'énonce, comme chez les Indiens, sous forme d'un problème d'aires. C'est la proposition 47 du livre I : « Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté soustendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. », et sa célèbre figure où on peut lire les grandes lignes de la démonstration d'Euclide. Démonstration qui utilise les égalités d'aires entre triangles et parallélogrammes établies dans le livre I, et les égalités de deux triangles. L'aire du rectangle de

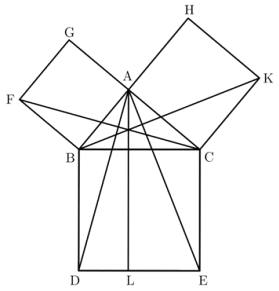


FIGURE 18 – Proposition I. 47

diagonale BL est égale au double de celle du triangle ABD, égal à BFC, qui a une aire moitié de celle du carré $ABFG$. De même pour le rectangle de diagonale CL, d'où l'égalité entre l'aire du carré $BCED$ et la somme de celles des carrés $ABFG$ et $ACKH$. Pour rendre cette construction effective, il faut être capable de construire un carré de côté donné. C'est l'objet de la proposition 46.

Donc Euclide attend le moment où il va avoir besoin de construire un carré, pour l'introduire. Il y aurait là aussi des leçons à tirer pour notre enseignement où bien des notions et constructions sont introduites sans motivation. On peut remarquer, que comme pour les Indiens, c'est le problème de la quadrature des figures qui amène à exposer une construction du carré.

Nous avons vu celles des Indiens, voyons maintenant celle que propose Euclide (Euclide, 1990, p. 279).

La construction du carré

Proposition 46, livre I :

> « *Décrire un carré sur une droite donnée.*
>
> Soit AB la droite donnée il faut alors décrire un carré sur la droite AB.
>
> Que soit menée AC à angles droits avec la droite AB, à partir du point A situé sur celle-ci (Proposition 11). Et que soit placée AD égale à AB (Proposition 2). Et, d'une part que par le point D soit menée

DE, parallèle à AB, d'autre part que par le point B, soit menée BE, parallèle à AD (Proposition 31).

$ADEB$ est donc un parallélogramme. Donc, d'une part AB est égale à DE, d'autre part AD est égale à BE (Proposition 34). Mais AB est égale à AD. Donc les quatre BA, AD, DE, EB sont égales entre elles (Notion commune 1) ; $ADEB$ est donc un parallélogramme équilatéral. Je dis alors qu'il est aussi rectangle. En effet, puisque la droite AD tombe sur les parallèles AB, DE, les angles sous BAD, ADE sont donc égaux à deux droits (Proposition 29). Or celui sous BAD est droit, donc celui sous ADE est aussi droit (Notion commune 3). Or les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux (Proposition 34). Donc chacun des angles opposés, ceux sous ABE, BED, est aussi droit. Donc $ADEB$ est rectangle. Et il a été aussi démontré équilatéral. Donc il est carré. Et il a été décrit sur la droite AB. Ce qu'il fallait faire. »

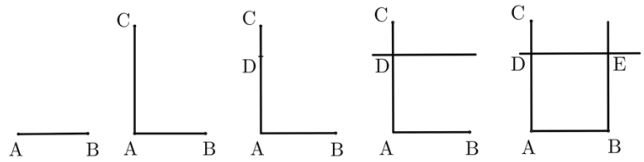


FIGURE 19 – Construction du carré dans la proposition I. 46

Les connaissances requises sont le tracé de perpendiculaires et de parallèles, et le report d'une longueur. Mais aucun instrument n'est mentionné, et l'on peut très bien faire cette construction à l'école primaire en utilisant une équerre pour tracer la perpendiculaire comme les parallèles. La formulation en terme de parallèles permet par contre à Euclide d'affirmer immédiatement que la figure tracée est un parallélogramme, et d'en déduire presqu'aussi vite qu'il est équilatéral (à côtés égaux). Par contre il démontre avec soin que ses quatre angles sont droits, alors que, pour la plupart d'entre nous, le fait qu'un angle droit soit donné suffit à prouver que la figure est un carré. L'étude des démonstrations anciennes est source d'enseignement, et peut éviter des conceptions trop rigides de la démonstration que nos élèves ont du mal à accepter.

Bagdad (990) : *Constructions géométriques pour l'artisan*, Abul Wafa

Avec Abul Wafa, mathématicien persan arrivé à Bagdad à l'âge de 20 ans, nous quittons le domaine théorique pour nous retrouver dans un contexte pratique : celui des artisans. C'est pour eux qu'il va écrire son ouvrage : *Le livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan.* Voici ses motivations pour le chapitre où se trouve le problème que nous allons étudier :

> « Dans le chapitre actuel, nous traiterons de la décomposition des figures, matière dont beaucoup de praticiens ont besoin, et qui est un objet particulier de leurs recherches. Il s'agit en cela de décomposer des carrés de telle sorte qu'il en résulte de petits carrés, et de réunir ensemble plusieurs carrés de telle sorte que de tous ces carrés il résulte un seul carré. En vue de ces opérations, nous allons poser des principes généraux qui se rapportent à ces problèmes ; car toutes les méthodes pratiquées par les ouvriers ne sont fondées sur aucun principe, ne méritent aucune confiance et sont très fautives, et c'est d'après ces procédés qu'ils font leurs divisions. » (Abul Wafa, 1855, p. 344).

Les praticiens auxquels il fait allusion sont essentiellement des décorateurs réalisant des mosaïques. Voici le problème et son contexte relaté par Abul Wafa lui-même, dans son livre : « Je fus présent à une réunion où se trouvèrent une quantité de praticiens et de géomètres, auxquels on demanda de quelle manière ils feraient un seul carré de trois carrés égaux. » (Abul Wafa, 1855, p. 349).

Puis il raconte qu'un géomètre proposa la construction d'un carré d'aire triple (la même que celle de Baudhayana : « La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré double, la diagonale est le côté du carré triple »). Mais les praticiens refusèrent cette construction car il s'agissait pour eux, mosaïstes, de découper les trois carrés donnés d'une certaine manière, puis d'en recomposer les parties de telle façon que le tout forme un carré. On voit donc s'affronter deux types de constructions : celle à la règle et au compas ou à la corde, que nous avons vue chez les Indiens et Euclide, efficace pour la pratique des uns et la théorie de l'autre, et celle par découpage que nous avons vue à l'œuvre chez les Chinois et qu'utilisent les artisans mosaïstes arabes.

Abul Wafa relate alors la proposition faite par un praticien, puis il en fait la critique (Abul Wafa, 2010, p. 235-239). Nous avons là une excellente situation pour amener nos élèves du cycle 3 au lycée à voir la nécessité de justifier une construction, de rédiger une démonstration. Le domaine des découpages et des puzzles est un terrain propice pour faire de la géométrie et travailler sur la preuve (voir APMEP, 2016, et Moyon, 2013).

La construction fausse de l'artisan

> « L'un des artisans place un carré au milieu, divise le deuxième [carré] par une diagonale et place les deux parties sur les côtés du carré. Il réunit le milieu du troisième [carré] par deux lignes avec les deux sommets non situés sur une diagonale pour former un triangle [rectangle]. Ensuite par une ligne, l'artisan réunit le milieu du carré avec le milieu du côté opposé au triangle formé par deux lignes et par un côté du carré. Ce carré est partagé en deux trapèzes et un triangle. Il place ce triangle sur le côté inférieur du premier carré, et les deux trapèzes sur le côté supérieur de sorte que leurs côtés se trouvent au milieu. On obtient un carré, comme il est montré sur cette figure :

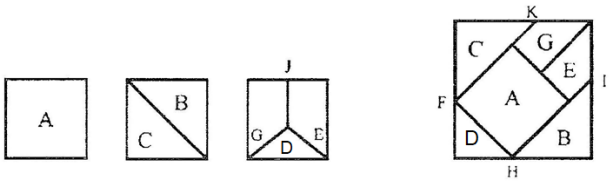


FIGURE 20 – Construction fausse de l'artisan

Cette construction dans l'imagination de celui qui n'est pas habile dans la pratique et ne connaît pas la géométrie semble juste. Et, lorsqu'on l'examine plus en détail, et l'on dit en quoi elle est fausse, il s'aperçoit que le procédé n'est pas juste. Et la raison pour laquelle cette construction semble juste est que les angles du carré sont effectivement droits et ses côtés sont égaux, et c'est pourquoi on a l'impression que ce procédé est juste. En effet, chacun des angles des triangles C, B, D qui sont les angles du carré, est droit, et le quatrième angle est composé de deux angles, dont chacun est la moitié d'un angle droit, c'est-à-dire des angles E et G des deux trapèzes. En ce qui concerne les côtés, chacun d'eux est composé d'un côté du carré donné et de la moitié de la diagonale de ce carré, ils sont donc égaux. Enfin la composition est correcte du fait que la somme de tous les angles au point de jonction des droites est égale à deux angles droits. Car la somme des trois angles qui sont réunis au point H est égale à deux angles droits, ces angles sont l'angle du carré qui est égal à un angle droit et les deux angles de deux triangles rectangles chacun d'eux étant la moitié d'un angle droit. Il en est de même pour les trois angles au point F. Pour ce qui est de l'angle I, il [est fait] de deux angles, dont l'un est l'angle d'un triangle, c'est-à-dire la moitié d'un angle droit, et l'autre angle est l'angle du trapèze, c'est-à-dire un angle droit et demi. Il en est de même pour les angles au point K. C'est pourquoi, si les angles sont droits, et si les côtés sont des lignes droites [égales entre elles], alors il est évident pour quiconque qu'on obtiendra un carré constitué de trois carrés, et on ne trouve pas d'endroit où il a commis une erreur.

Cependant remarquons que, comme on le sait, chaque côté de ce carré est égal au côté d'un des carrés et à la moitié de sa diagonale. Mais le côté du carré constitué de trois carrés ne peut pas être égal à cette grandeur, car il doit être supérieur à cette grandeur. Posons que chaque côté du carré est long de dix coudées ; [alors] il est clair que le côté du, carré construit avec trois carrés est la racine de trois cent coudées qui est approximativement égale à dix-sept coudées plus un tiers, alors que le côté de ce carré est long de dix-sept coudées plus la moitié d'un septième. Entre ces valeurs il y a une grande différence.

[Par ailleurs] quand nous avons partagé le carré BC en deux et que nous avons placé chacune de ses moitiés aux côtés de l'autre carré, donné,

> on voit que la diagonale du carré BC est ajustée avec les lignes HI et FK, alors que c'est impossible pour deux raisons : premièrement, la diagonale du carré BC est un nombre irrationnel, alors que HI ou FK est égal au côté du carré BC et à la moitié de celui-ci qui est un nombre rationnel, or un nombre rationnel ne peut pas être égal à un nombre irrationnel.
>
> Deuxièmement la diagonale du carré BC est approximativement égale à quatorze et un septième, et la ligne HI à quinze. Par là, l'impropriété de cette division et de cette construction est démontrée. »

Il est intéressant de noter qu'Abul Wafa donne trois preuves de l'inexactitude de la construction de l'artisan, dont une porte sur la nature des nombres qui mesurent deux longueurs : un nombre rationnel ne peut pas être égal à un nombre irrationnel. Une argumentation en phase avec les nouveaux programmes de seconde du lycée. Intéressants aussi les arguments que donne Abul Wafa pour prouver que la figure est bien un carré : 4 angles droits, 4 côtés égaux, pas de problème d'alignement des morceaux de côtés (comme dans le puzzle de Lewis Caroll 64 = 65). Nous avons donc affaire à une situation riche au point de vue de l'argumentation et des mathématiques qui y sont présentes, et simple au niveau de sa compréhension et de sa matérialisation. Et elle débouche sur la recherche d'une solution exacte qui est un vrai problème. Voici celle que propose Abul Wafa.

La construction d'Abul Wafa

> « Mais la division du carré par un procédé juste, établi grâce aux démonstrations, est ainsi ; divisons deux carrés suivant leur diagonale [nous obtiendrons quatre triangles rectangles], plaçons un côté de chacun d'eux sur les côtés du troisième carré ; de plus, plaçons un angle du triangle égal à la moitié d'un angle droit sur un des angles du carré et plaçons l'hypoténuse du triangle sur un côté du carré ; alors une partie du triangle du côté de l'autre angle sera saillante. Réunissons [les sommets] des angles droits des triangles par des lignes droites, alors nous obtiendrons le côté du carré cherché. Ainsi de chaque grand triangle un petit triangle se détache, mettons-le à la place du triangle manquant de l'autre côté du carré.

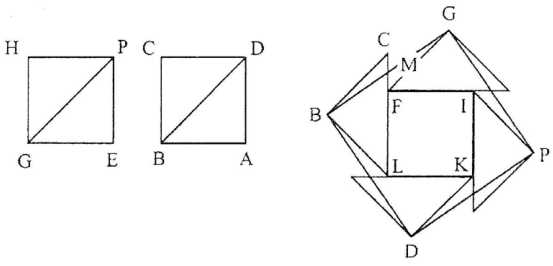


Figure 21 – Construction d'Abul Wafa

> Exemple : pour construire cela avec trois carrés égaux $ABCD$, $EPGH$ et $FIKL$ divisons deux de ces carrés par leurs diagonales en deux parties, en menant PG et DB et plaçons-les sur les côtés du troisième carré. Ensuite, réunissons les sommets des angles droits des triangles par les lignes BG, GP, PD, et DB. Avec ces lignes de l'autre côté de chaque triangle, apparaîtra un petit triangle égal à chaque triangle retranché du grand triangle. C'est pourquoi le triangle BCM est égal au triangle MFG puisque l'angle C est la moitié d'un angle droit et que l'angle MFG est la moitié d'un angle droit, les deux angles opposés par le sommet M sont égaux, le côté BC est égal au côté FG, c'est donc que le triangle BCM est égal au triangle MFG. C'est pourquoi les autres côtés d'un triangle sont égaux aux autres côtés d'un autre triangle, et un triangle est égal à un autre triangle. Donc si nous plaçons le triangle BCM à la place du triangle MFG alors la ligne BG sera le côté d'un carré constitué de trois carrés, ce procédé est juste et il est le plus proche de la vérité, [puisqu'il est établi au moyen d'une démonstration]. »

L'artisan avait trouvé un découpage en 6 pièces, mais inexact. Abul Wafa en donne un exact, mais en 9 pièces, et avec plus de coupes à faire. Il faudra attendre 2010 pour que Blanvillain trouve une solution exacte avec le même nombre de pièces que celle de l'artisan, mais avec des pièces concaves. La quadrature de la somme de trois carrés peut-elle être réalisée avec moins de pièces ? Le problème est ouvert. Trouver de tels découpages pour transformer une ou plusieurs figures en une figure de même aire et de forme donnée, est un problème fondamental de la théorie des aires et un sujet vivant de la recherche contemporaine. Euclide a montré qu'on pouvait toujours construire (à la règle et au compas) un carré d'aire égale à celle d'un polygone quelconque. Mais ce n'est qu'au XIX^{e} siècle que l'on a montré que c'était vrai aussi par découpage. Et que dire de la quadrature du cercle par découpages ? (Voir APMEP, 2016)

Nuremberg (1525) : La *Géométrie* de Dürer

De Bagdad où nous étions, à Nuremberg, où nous arrivons, cinq siècles ont passé. Au cœur de l'Allemagne, dans l'effervescence de la Renaissance, beaucoup de métiers d'art, tailleurs de pierre, sculpteurs, charpentiers, orfèvres, graveurs, peintres, ont besoin de constructions géométriques dans la pratique de leur métier. Et c'est l'un d'eux, le célèbre peintre et graveur Albert Dürer, qui va écrire un livre de géométrie à leur intention : *Instructions pour la mesure à la règle et au compas des lignes, plans et corps solides, réunies par Albrecht Dürer, et imprimées avec les figures correspondantes, à l'usage de tous les amateurs d'art, en l'an M.D.XXV* (Dürer, 1995). Comme Abul Wafa, il s'adresse à des praticiens, avec des intentions didactiques claires : « Le très perspicace Euclide a rassemblé les fondements de la géométrie. Celui qui les entend bien n'a guère besoin de ce qui suit, car ces choses s'adressent uniquement aux jeunes et à ceux qui n'ont personne pour fidèlement les instruire » (p. 139). Mais, contrairement aux décou-

peurs de mosaïques de Bagdad, les artisans auxquels Dûrer s'adresse usent dans leurs métiers de la règle et du compas. Et pour eux, « il est nécessaire d'avoir une petite idée sur la manière d'obtenir des figures ayant des aires égales » (p. 222). Nous allons donc retrouver dans l'ouvrage de Dürer des quadratures et rectangulations obtenues par des constructions à la règle et au compas. Pour Dürer l'objectif n'est pas, contrairement à Euclide, de fournir des démonstrations de la validité des constructions, mais de décrire les gestes et manipulations à accomplir pour les artisans. Qui veut les démonstrations, n'a qu'à aller lire Euclide, que Dürer a étudié avec l'aide d'un ami. Le style de Dürer peut nous surprendre, mais devrait nous interroger sur cette étape clé de la construction des figures, avec les mains et les instruments, dont notre enseignement a tendance à s'affranchir le plus rapidement possible, et qui a rarement droit à une trace écrite. Lisons, dans le texte, la quadrature de trois figures.

La quadrature du triangle équilatéral (p. 222)

> « Qu'on construise donc un triangle et qu'on en déduise un carré de même aire. De même pour d'autres corps réguliers.
>
> Procède comme suit. Soit un triangle *abc*, dont le côté *ac* est divisé en son milieu par un point *d*. Élève une ligne *bd* et le triangle sera coupé en deux. Tourne la moitié *abd* tête-bêche et applique-la à l'autre moitié *bc*. Tu obtiendras un quadrilatère oblong [un rectangle] ayant ses angles *a*, *b*, *c d* égaux et ayant même aire que le triangle *abc*. Transforme ensuite le quadrilatère oblong en un quadrilatère droit [le rectangle en carré] ayant même aire que le triangle. Pour procéder correctement, note ce qui suit. Prends deux côtés du rectangle *acd*, un long et un court, et juxtapose-les sur une horizontale. Désigne ces trois points par e, f, g. Marque un point h au milieu de la ligne e, f, g, prends un compas, pose une de ses pointes sur le point h et décris de l'autre un arc issu de e et rejoignant g. Élève en f une ligne droite verticale allant jusqu'à l'arc de cercle. Marque i le point où elle le coupe. En assemblant à angles égaux quatre lignes de longueur if, tu obtiendras un carré ayant même aire que le rectangle *abcd* et donc aussi le triangle *abc*. On peut aussi comparer par une méthode rapide un triangle à un carré, comme suit. Construis un carré, divise un de ses côtés en deux parties et fais en sorte que le côté du triangle dépasse d'un tiers celui du carré. Forme un triangle, comme je l'ai représenté ci-dessous. »

Dürer suit donc la méthode que nous avons vue chez Euclide, en l'appliquant au triangle équilatéral (triangle régulier) : il commence par rectanguler le triangle, puis transforme le rectangle en un carré de même aire en utilisant la construction de la proposition 14 du livre II des *Éléments*. Si la rectangulation peut-être considérée comme ne nécessitant guère de preuve, par contre le fait que le carré soit de même aire que le rectangle ne tombe pas sous le sens. Encore une bonne situation pour travailler des constructions utiles aux artisans et dans laquelle on sent la nécessité de démontrer.

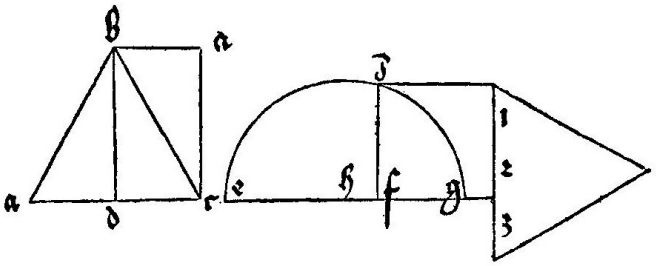


FIGURE 22 – Quadrature du triangle équilatéral

La quadrature de 7 carrés égaux (p. 225)

> « Et afin que l'on retienne bien les choses très utiles que je viens d'expliquer, je vais encore construire par la méthode précédente un carré dont l'aire vaut sept fois celle d'un carré donné.
>
> Je procède comme suit. Je me donne un quadrilatère rectangle *abcd* ayant ses côtés et ses angles égaux. Puis je juxtapose huit fois son côté sur une horizontale dont *d* est l'origine et *e* l'autre extrémité. Je divise *de* par un point *f* en son milieu, je prends mon compas, je le pose avec une de ses pointes sur le point *f* et je décris de l'autre un arc de cercle joignant par le haut *d* à *e*. Puis je construis sur le premier côté le petit quadrilatère *abcd*, je prolonge la verticale *bc* jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en *g*. Si je forme un carré avec cette longueur et trois autres identiques, il contiendra sept fois plus que le premier *abcd*, comme je l'ai représenté ci-dessous. »

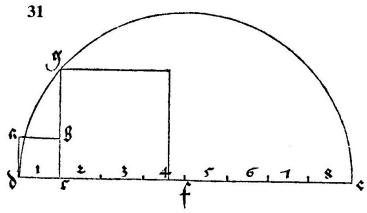


FIGURE 23 – Quadrature de 7 carrés égaux

Nous retrouvons la quadrature de la somme de plusieurs carrés égaux que nous avons vue traitée, en Inde, par Katyayana. Mais avec une construction différente, qui est exactement la même que la précédente. Ce qui montre la puissance et la simplicité de la construction euclidienne. Nous pouvons remarquer que dans le cas traité par Dürer, si $dc = 1$, alors $cg = \sqrt{7}$. On retrouve donc cette construction dans presque tous les traités et manuels de géométrie jusqu'au milieu du XX^{e} siècle pour construire géométriquement une racine carrée. Elle peut se justifier facilement en utilisant la similitude des triangles *cgd* et *ceg* qui forment le triangle

rectangle *dge* inscrit dans le demi-cercle. Si $\sqrt{7}$ ne peut s'exprimer ni sous forme d'un rapport de deux entiers, ni sous forme décimale finie, elle peut se construire exactement à la règle et au compas.

La quadrature du cercle (p. 227)

> « I1 est nécessaire de connaître la quadratura circuli, c'est-à-dire la comparaison d'un cercle à un carré, l'un et l'autre devant avoir même contenu. Mais une telle chose n'a pas encore été démontrée par les érudits. La résolution en peut être expédiée, sans cependant que cela se voie trop dans les ouvrages, si on procède de façon approchée, comme suit. Dessine un quadrilatère [un carré] et divise sa diagonale en dix parties. Trace ensuite un cercle dont le diamètre comporte huit de ces parties, dont la quadrature en compte dix ainsi que je l'ai représenté ci-contre. »

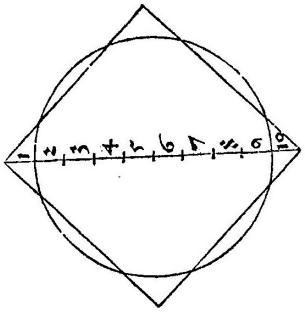


FIGURE 24 – Quadrature du cercle

Culturellement, ce texte est intéressant car il montre que la quadrature du cercle est, à l'époque de Dürer, un problème ouvert. Et les élèves peuvent se demander s'il a été résolu. Apprendre qu'il l'a été il y a un peu plus d'un siècle montre que les mathématiques se construisent dans la longue durée. Mais aussi que les mathématiques s'intéressent à des constructions approchées pour les besoins des hommes. Et on peut essayer d'estimer l'approximation faite, liant ainsi calcul et géométrie.

Sussex (1902) : *Les puzzles de Canterbury* de Dudeney

Nous terminerons notre voyage à l'orée du XX^{e} siècle, avec le premier problème de quadrature que nous venons d'étudier chez Dürer, mais traité à la façon d'Abul Wafa. En effet, il s'agit dans ce problème extrait des *Canterbury puzzles and other*

curious problems (Dudeney, 1908), de découper un triangle équilatéral en 4 morceaux pour en réaliser la quadrature. Lisons le texte.

La quadrature articulée du triangle équilatéral ou le puzzle du tailleur (problème n° 26).

FIGURE 25 – Puzzle du tailleur

Le problème (p. 24-25)

« Il montra un morceau de tissu ayant la forme d'un triangle équilatéral parfait, comme le montre l'illustration, et dit : "Y a-t-il, parmi vous tous, un sage pour découper comme il faut ce tissu ? Je ne pense pas. Tout homme pour son travail, ainsi que le savant, peut apprendre du valet, et le sage du fou. Maintenant, si vous le pouvez, montrez-moi de quelle façon ce morceau de tissu peut être coupé en quatre morceaux qui assemblés pourront faire un carré parfait". Certains des plus savants de la compagnie ont déjà trouvé un moyen de le faire en cinq morceaux, mais pas en quatre. »

La solution (p. 142-143)

« L'illustration montrera comment la pièce triangulaire de tissu pourra être coupée en quatre morceaux différents qui pourront être ajustés ensemble et former un carré parfait.

Divisez AB en deux en D et BC en E ; tracez la ligne AE jusqu'à F en faisant EF égal à EB ; divisez AF en deux en G et décrivez l'arc AHF ; tracez EB jusqu'à H, et EH est la longueur du côté du carré cherché ; de E avec la distance EH, tracez l'arc HJ, et faites JK égal à BE ; maintenant, des points D et K abaissez des perpendiculaires sur EJ en L et M. Si vous avez fait cela avec soin vous avez maintenant les directions cherchées pour les coupes. »

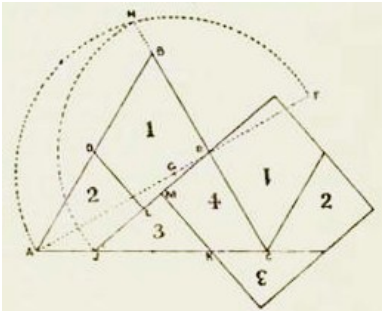


FIGURE 26 – Découpage de Dudeney

Dudeney, comme Abul Wafa, réclame une construction exacte, mais, comme Dürer, il ne justifie pas l'exactitude de sa construction. Il la laisse au lecteur, comme nous pourrions la laisser à nos élèves. On y retrouve la construction d'Euclide ! Mais son découpage du triangle équilatéral a une propriété extraordinaire : mettez trois articulations en E, D et J (ou K), et vous obtenez un triangle articulé qui se transforme automatiquement en un carré. Dudeney, conscient de l'innovation qu'apportait son découpage, a fait construire son puzzle en acajou, avec des articulations en cuivre, et l'a présenté à la Royal Society en 1905 ! On trouve actuellement des tables transformables réalisant le puzzle articulé de Dudeney fabriquées par des designers. Et les puzzles articulés, qui sont la transformation d'une figure en une figure d'aire égale, ont, depuis Dudeney, fait l'objet de recherches mathématiques. Il a été démontré en 2008 que deux polygones de même aire peuvent être transformés, par découpage, en un puzzle articulé (voir APMEP, 2016). Nous avons à faire avec des mathématiques vivantes, problématisées, et en lien avec des réalisations matérielles.

Conclusion

Que retenir de notre exploration du domaine des rectangulations et quadratures ?

Tout d'abord que c'est un champ de problèmes qui articule géométrie et calcul, construction et partage, règle-compas et découpage, utilisation d'instruments et raisonnement. Pour un même type de problème, construire une figure d'aire égale à celle d'une (ou plusieurs) figure d'aire donnée, nous avons vu que la solution est dépendante du but poursuivi. S'agit-il de construire un autel avec une corde comme pour les Indiens, une géométrie du cercle et de la droite comme pour Euclide, d'exécuter des tracés à la règle et au compas comme pour les artisans et artistes auxquels s'adresse Dûrer ? Même dans ces trois cas qui relèvent d'une géométrie de la règle et du compas, nous avons vu trois constructions différentes du carré, chacune étant la mieux adaptée au contexte dans lequel elle était utilisée. Ou bien s'agit-il de partager des figures, de les découper, pour calculer des aires

comme chez les Chinois, pour réaliser des mosaïques comme chez les artisans de Bagdad que côtoie le mathématicien Abul Wafa, pour proposer un défi comme le fait Dudeney ? La possibilité de découper et de manipuler les pièces pour réaliser la construction permet de proposer cette géométrie du découpage dès l'école primaire (voir Moyon, 2013). S'interroger sur l'exactitude de la figure construite amène, à tous les niveaux, à sentir la nécessité de preuves et de démonstrations, et à les travailler dans un contexte qui fait sens.

Les conditions imposées à la construction influent sur la solution donnée au problème et même sur son existence. La trisection de l'angle impossible à la règle et au compas, est possible en origami ! Cela montre que nous aurions intérêt à ne pas trop décontextualiser les situations et problèmes que nous proposons à nos élèves. Leur faire étudier des textes et problèmes historiques concourt à ce but, et permet de leur montrer en plus la dimension culturelle et humaine des mathématiques.

Pour l'enseignement, nous voyons plusieurs grands axes d'intérêt à l'étude du type de problèmes que nous avons présentés :

- Redonner du sens et des techniques pour calculer des aires et élaborer des formules, tout en travaillant la géométrie des figures (voir IREM de Poitiers, 2010).
- Remettre en perspective le théorème de Pythagore qui est un problème de quadrature avant d'être un problème de calcul de longueurs.
- Travailler les constructions géométriques et leur description, leur justification, et par là le raisonnement sur de vrais problèmes ancrés historiquement à la fois sur des pratiques et des questions théoriques, de la maternelle à l'université. Les modalités peuvent en être variées. Par exemple, suivre les instructions d'un sutra védique pour réaliser une construction du carré vieille de plus de 3000 ans, en extérieur avec corde et piquets, ou sur une feuille en l'adaptant pour la règle et le compas, ou sur écran avec un logiciel de géométrie, et constater qu'elle donne bien un carré.
- Déboucher sur une autre pratique des mathématiques : utiliser la géométrie pour comprendre et résoudre des problèmes de calcul et d'algèbre (voir APMEP, 2016).

Références bibliographiques

Les textes

Keller Olivier, 2000, « La géométrie des Sulbasutras, exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon », *Repères-IREM*, n°40, Topiques éditions, p. 115-124, (disponible en ligne).

Chemla Karine et Shuchun Guo, 2005, *Les neuf chapitres : Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris, Dunod.

Euclide, 1990, *Les Éléments*, Vol. 1, Introduction générale, Livres I à IV, traduction et commentaires Vitrac, B., introduction Caveing, M., Paris, PUF.

Abul Wafa, 1855, *Livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan* (Kitāb fī mā yaḥtaj ilayh al-ṣāni‘ min al-a‘māl al-handasiyya), *Chapitre XI,* trad. Woepcke, M. F., Mathématiques chez les orientaux, *Journal asiatique*, avril 1855, p. 344-352.

Abul Wafa, 2010, *Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques* (Kitāb fī mā yaḥtaj ilayh al-ṣāni‘ min al-a‘māl al-handasiyya), édition bilingue, Jafar Aghayani-Chavoshi, co-édition Miras-e Maktoob, Téhéran, IFRI.

Dürer Albrecht, 1995, *Géométrie*, présentation et traduction Peiffer, J., Paris, Seuil.

Dudeney Henry Ernest, 1908, *The Canterbury puzzles and other curious problems,* illustrated by Paul Hardy, the author and others, New York, E. P. Dutton and co., (disponible en ligne).

Autour des textes

Apmep, 2016, *Maths & Puzzles.*

Barbin Évelyne & alii, 2014, *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.

Irem de Poitiers, 2010, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les AIRES.*

Irem de Poitiers, 2019, *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter.*

Irem de Poitiers, à paraître, *Enseigner les mathématiques au cycle 4 à partir des grandeurs : les AIRES.*

Keller Olivier, 2006, *La figure et le monde : une archéologie de la géométrie*, chapitre 6, La géométrie du sacrifice dans les Sulbasutras de l'Inde védique, Paris, Vuibert.

Moyon Marc, 2013, *Diviser en multipliant les approches*, Repères-IREM, n°93, Topiques éditions, p. 47-77, (disponible en ligne, travaux d'élèves).

Moyon Marc, Tournès Dominique et alii, 2018, *Passerelles, Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, Arpeme. (Documents pédagogiques disponibles sur le Portail des IREM, CII Epistémologie et Histoire des mathématiques, Ressources).

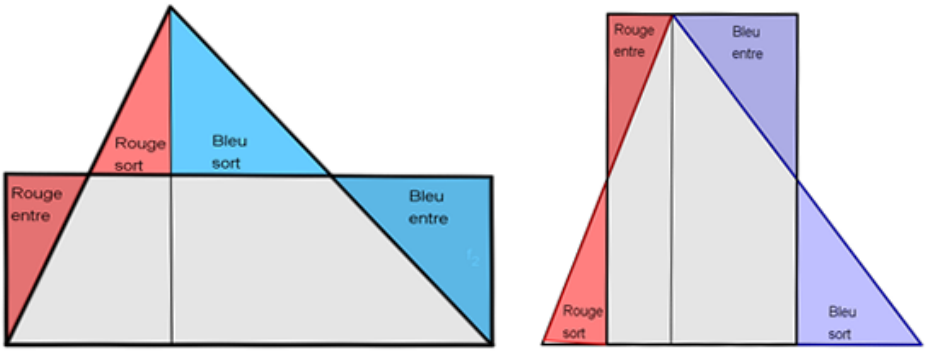
Liens vers les grands textes (Portail des IREM, CII Épistémologie et Histoire des Mathématiques, Ressources)

Les Neuf Chapitres : http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1289
Les Éléments d'Euclide : http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1263

Annexe

L'aire du triangle dans la Chine ancienne

Les deux figures montrent comment les Chinois, il y a plus de 2000 ans, construisaient un rectangle de même aire que celle d'un triangle quelconque donné.



1. Tracer un triangle quelconque. Puis construire, à la manière chinoise, un rectangle de même aire que ce triangle.
2. Écrire votre programme de construction, et justifier que la figure que vous avez construite est bien un rectangle, et qu'il a la même aire que le triangle.
3. À partir des 2 figures, trouver 2 formules qui permettent de calculer l'aire d'un triangle.

Indications

Même si l'aire du triangle a été vue en fin de cycle 3, ces constructions permettent de retrouver une méthode fondamentale pour le calcul de l'aire d'une figure : construire un rectangle d'aire égale. Elles sont aussi l'occasion de prendre conscience du fait que l'on doit s'assurer que la figure construite répond bien au cahier des charges, et de travailler les caractérisations du rectangle.

Elles permettent de trouver des formules non usuelles pour l'aire du triangle. La comparaison des 3 formules qui donnent la même aire permet de se familiariser avec le calcul littéral, et lui donne du sens.

L'étude du cas où la hauteur considérée est à l'extérieur du triangle, amène à chercher d'autres découpages, et à utiliser un logiciel de géométrie pour tester le domaine de validité du découpage.

Source : *Maths & Puzzles* (APMEP, 2016)